Suites mélodiques

Par Loïc TERRIER ([4])

« Une guitare est un instrument en forme de guitare. Si vous la partagez en deux par le milieu – ce qui n'est pas à conseiller – vous obtenez deux moitiés de guitare. »
Bobby Lapointe

L'activité a eu lieu en classe de 1e S, à l'occasion du chapitre sur les suites. Il n'est pas indispensable d'avoir des connaissances en musique pour la traiter mais il faut reconnaître que les élèves qui jouent d'un instrument sont ceux qui sont "rentrés" le plus facilement dans l'activité. L'ensemble n'a pas tenu en une heure, la partie "gamme tempérée" a été traitée plus tard.

La plupart des élèves a été intéressée et a pu constater que les suites géométriques n'étaient pas une invention "pour le plaisir" des mathématiciens. Un élève a amené une guitare lors de la séance suivante, ce qui a permis de mesurer, de vérifier... et d'écouter ! Des mathématiques vivantes, en somme.

Son émis par corde vibrante

Son : mouvement vibratoire de l'air lorsqu'il est perçu par l'oreille. Les sons « purs » sont déterminés par un mouvement sinusoïdal de fréquence donnée f. L'oreille humaine ne perçoit pas les sons d'une fréquence inférieure à 20Hz (infrasons) ni ceux d'une fréquence supérieure à 20 000 Hz (ultrasons). On s'intéressera ici aux sons émis par une corde tendue qu'on pince.

Les notes

Les Pythagoriciens avaient remarqué qu'en plaçant un chevalet au milieu d'une corde tendue, les deux parties de la corde donnaient un son « ressemblant » au son donné par la corde entière : ces sons correspondent à une même **note**. Si par exemple, la corde entière donne un DO, alors les moitiés de corde donneront aussi un DO, mais plus « haut » (on dira : à l'**octave** supérieure). Une corde de longueur double donnera, à tension égale, un DO plus bas (à l'octave inférieure).

[4] loic.terrier@free.fr ; Lycée Loritz, NANCY.

La fréquence du son étant inversement proportionnelle à la longueur de la corde pincée, si un DO est de fréquence f, alors les autres DO seront de fréquence $2f$, $4f$, $8f$ mais aussi $\frac{f}{2}$, $\frac{f}{4}$, etc. On convient de noter DO_0 le son de fréquence $f_0 = 32{,}7$ Hz, DO_1 le DO à l'octave supérieure, etc. On note f_n la fréquence de Do_n.

1. Quelle est la nature de la suite des fréquences de DO ?
2. Exprimer explicitement à l'aide de n.
3. Quelle est la fréquence du plus haut DO audible ?

La gamme Pythagoricienne

On peut difficilement faire de la musique avec une infinité de notes ! La solution universellement adoptée a été de choisir un certain nombre de notes formant une échelle musicale. Comment choisir ces notes ? Poursuivant ses expériences, les Pythagoriciens déplacent le chevalet aux deux tiers de la corde.

4. Les deux parties de la corde donnent-elles la même note ?

La partie la plus longue de la corde donne un son qu'on appelle la **quinte** du son donné par la corde entière (la plus courte est une octave plus haut). Cette fois, il s'agit d'une note différente ! L'idée est alors de former une échelle musicale en prenant le son initial, sa quinte, la quinte de sa quinte, et ainsi de suite.

5. Quelle est la fréquence de la quinte d'un son de fréquence f ?

L'échelle musicale ainsi formée aura un nombre fini de notes si, en prenant des quintes successives, on « retombe » sur la note de départ, donc si on trouve deux entiers n et k vérifiant ; n sera le nombre de quintes nécessaires, et k le nombre d'octaves.

6. Montrer que l'équation $\frac{3^n}{2^p} = 1$ n'a pas de solutions n et p entières. En déduire qu'il est impossible de construire une échelle musicale ayant un nombre fini de notes avec cette méthode.

C'est pourtant cette méthode qu'on va retenir, en utilisant les approximations suivantes :

- $\frac{3^5}{2^8} \approx 0,949$,ce qui conduira à une gamme à cinq notes, parfois appelée « gamme chinoise » et qui correspond à peu près aux touches noires du piano ;
- $\frac{3^7}{2^{11}} \approx 1,068$, qui conduira à la gamme à 7 notes (penser aux touches blanches du piano) ;
- $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,014$, qui conduira à la gamme pythagoricienne à 12 notes (gamme « chromatique »).

Voyons par exemple comment s'est construite la gamme à 7 notes : on part d'un son initial de fréquence *f* et on forme les quintes successives $q_1 = f$, $q_{n+1} = \frac{3}{2} q_n$.

7. Calculer q_2, q_3 … q_7 en fonction de f (donner les valeurs exactes).
8. Les fréquences ne sont pas toutes dans l'octave $[f\,;2f[$. On cherche la note correspondant à q_i mais dans l'octave $[f\,;2f[$. On pose $v_i = \frac{q_i}{2^\alpha}$, où α est un entier tel que $v_i \in [f\,;2f]$. Calculer v_1, v_2 … v_7.
9. On obtient enfin les fréquences u_i des notes de la gamme en rangeant les v_i dans l'ordre croissant, et en posant $u_8 = 2f$. Reproduire et compléter le tableau suivant :

u_i	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
fréquences	f	$\frac{9}{8}f$						$2f$

Voilà la gamme ! Elle correspond à notre gamme DO RE MI FA SOL LA SI, à condition de choisir pour *f* une fréquence de FA.

10. Les u_i forment-ils les premiers termes d'une suite géométrique ?

Dans le cas d'une gamme à 12 notes (DO DO# RE RE# MI FA FA# SOL SOL# LA LA# SI), on obtient également des intervalles de deux types : on passe d'une fréquence à la suivante en multipliant soit par $\frac{256}{243} \approx 1,05$ soit par $\frac{2187}{2024} \approx 1,08$.

La gamme tempérée

« Vous savez que les inventions humaines marchent du composé au simple, et que le simple est toujours la perfection »
A.Dumas

Transposer un morceau de musique consiste à le réécrire pour pouvoir le jouer plus haut ou plus bas. Les deux types d'intervalles rencontrés dans la gamme pythagoricienne rendent cette opération difficile voire impossible. On a alors eu l'idée simple et géniale de partager l'octave en intervalles égaux, en partant de la gamme pythagoricienne à 12 notes.
On considère le nombre r vérifiant $r^{12} = 2$ ($r \approx 1{,}0594631$). Connaissant la fréquence f d'une note, on obtient la fréquence de la note suivante en multipliant par r.

11. La référence en musique est la fréquence du LA_3 : 440Hz. Déterminer la fréquence du SOL_4.
12. Dans la première partie, on donnait la fréquence du DO_0. Est-elle cohérente avec le système présenté ?

Le manche d'une guitare comporte de petites barres métalliques transversales en saillie, nommées *frettes*. Lorsqu'on pose le doigt juste au-dessus d'une frette, on raccourcit la portion de corde qui va vibrer, et par conséquent on modifie la note émise. La longueur des cordes est 650 mm. Le manche comporte 19 frettes (sur une guitare classique).

13. La première corde de la guitare donne, à vide (sans toucher aux frettes), un MI_1. A quelle distance du chevalet est placée la frette qui permet de jouer sur cette corde un $SOL\#_2$?
14. Sachant que si on utilise la frette située à 460 mm du chevalet en jouant la troisième corde on obtient un $SOL\#_2$, quelle est la note qu'on obtient si on joue la corde à vide ?
15. La sixième corde de la guitare, celle qui renvoie le son le plus aigu, donne, à vide, un MI_3. Quelle est la plus haute note jouable sur une guitare classique ?

Bibliographie :
« Musique et Mathématiques » par Bernard PARZYSZ (publication APMEP n°53, téléchargeable en PDF)
Hors-série n° 11 de Tangente, « Maths & musique » (2005)