LE PETIT VERT

APMEP

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N°85 MARS 2006

Note de la rédaction :
Pour raison de problèmes techniques, les fichiers concernant ce numéro n'ont pu être récupérés. Cet exemplaire est don une « reconstitution » réalisée à partir de la version papier.
Mais le « contenu » est le même.
Merci de votre compréhension.

L'image de couverture est reproduite en bas de la page 8

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale Lorraine A.P.M.E.P..
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il paraît quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).
Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges entre les adhérents.
On y trouve un éditorial (généralement rédigé par un membre du Comité) et diverses annonces, les rubriques "problèmes", "dans la classe" et "maths et médias", et parfois une "étude mathématique". Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à
jacverdier@orange.fr et Christophe.Walentin@wanadoo.fr

J'ai lu… et j'ai aimé

Mathématiques, ma chère terreur. Anne SIETY. Hachette Littératures (2001)
Diplômée de l'ESCP et titulaire d'un DESS de psychopathologie clinique, Anne Siéty s'est spécialisée dans le domaine de la psychopédagogie des mathématiques. Quelles sont les sources de « blocage » ? L'auteur montre que les mathématiques sollicitent chacun de nous en profondeur et propose,)à travers l'étude de quelques cas, d'aider chaque élève à puiser en lui-même (dans son corps, son imagination, ses émotions, ses fantasmes…) les ressources qui lui permettront de trouver du plaisir à faire des mathématiques.

L'échec scolaire (des enfants des classes primaires). Françoise DOLTO (1986)
Texte prononcé devant un public enseignant en février 1986. Apprentissage de la lecture et résolutions œdipiennes.

C. Walentin

édito

Si mars est le mois du printemps, il est, pour notre Régionale, le mois de notre journée des mathématiques en Lorraine. Cette année encore, le nombre des inscrits montre que vous serez fidèles à ce rendez-vous. Le succès de cette journée met en avant ce besoin de rencontre, d'échanges d'idées entre collègues, de prendre le temps de réfléchir avec d'autres sur notre enseignement quotidien… Nous sommes heureux, au sein du comité de notre Régionale, de permettre cette respiration dans l'année scolaire !

Dans la vie de l'association, cette journée est aussi celle de notre assemblée générale, où chaque adhérent peut s'exprimer, partager ses envies et pourquoi pas décider de se faire élire au comité… Chaque contribution permettant à notre Régionale de mieux satisfaire les attentes de chacun d'entre nous est évidemment la bienvenue !

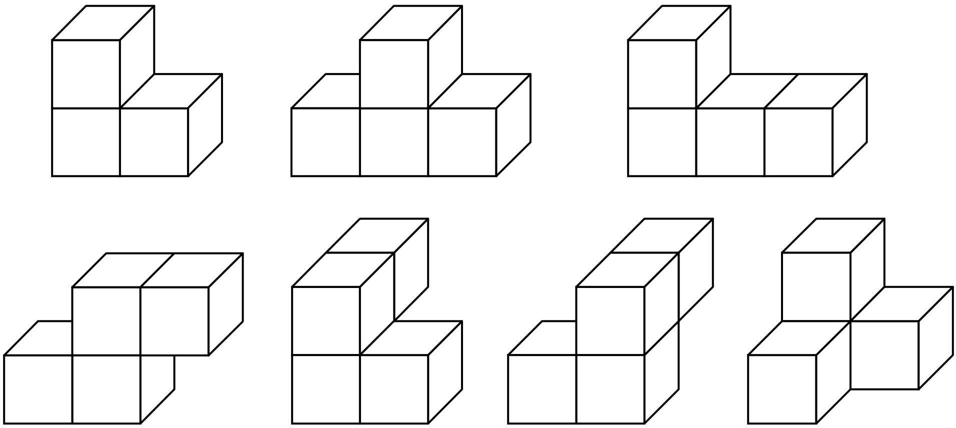
Mais ce Petit Vert sera aussi lu par de nombreux collègues non-adhérents qui, intéressés par tel ou tel aspect de notre journée régionale ont décidé d'y participer. Il n'est pas inutile de rappeler que si vous venez à Nancy à vos frais (l'invitation du Rectorat est sans remboursement), l'organisation de cette manifestation repose entièrement sur le bénévolat des membres de l'APMEP Lorraine et les frais qu'elle engendre payés par les cotisations de nos adhérents. Chaque adhésion est donc une pierre importante de l'édifice qui permet cette journée et est un soutien important aux activités de la Régionale. Il ne dépend donc que de vous que la Régionale Lorraine de l'APMEP devienne **VOTRE** Régionale !

Pierre-Alain

2006 : Les 70 ans du cube SOMA …

En juin 1996, le Petit Vert n° 46 fêtait le soixante anniversaire de ce casse tête présent en particulier dans notre exposition « objets mathématiques ». L'article de 1996 se trouve dans le « coin jeux » du site de notre régionale.

Voici les sept pièces permettant d'obtenir un cube parmi bien d'autres solides.

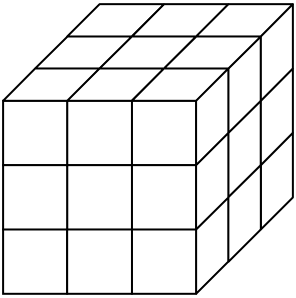


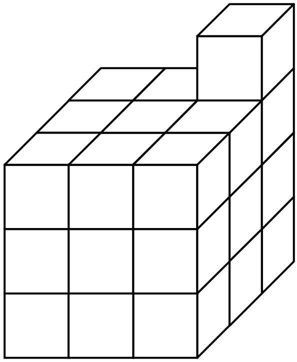
Depuis 1996, nos tempes ont grisonné, mais ce jeu n'a pris aucune ride….

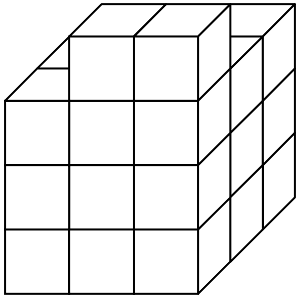
Avec les sept pièces, je n'oserais rappeler qu'un cube est réalisable… Des configurations comportant un cube « supplémentaire » (deuxième dessin) se trouvent dans bien des parutions évoquant ce jeu.
En complément à cette curiosité, et ce n'est pas un poisson d'avril, voici d'autres dessins d'empilements de cubes réalisables avec les sept pièces.
Ces solides réalisés devraient être source de débats en classe à propos des habitudes prises lors de représentations en perspective d'empilements de cubes…

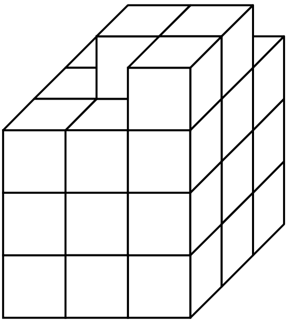
Dans le dernier dessin, le solide semble être formé de 27 + 12 cubes alors que les sept pièces du jeu ne forment qu'un ensemble de 27 cubes…

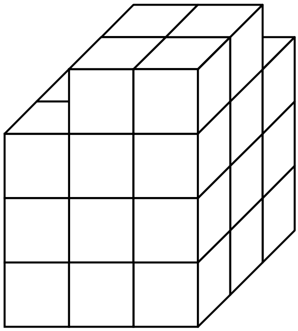
Les lecteurs du Petit Vert pourraient-ils être encore plus « étonnants » ?

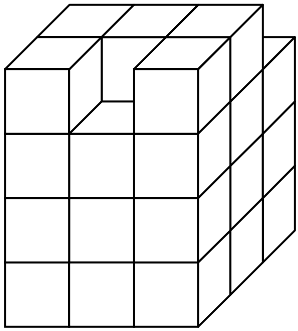


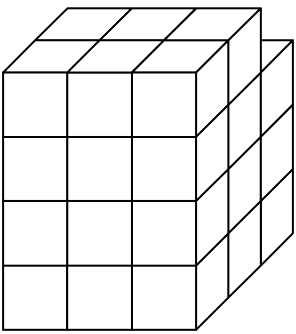


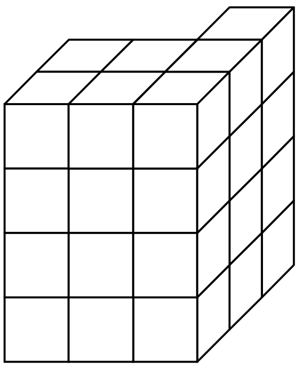


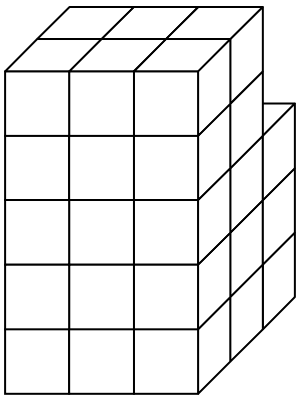


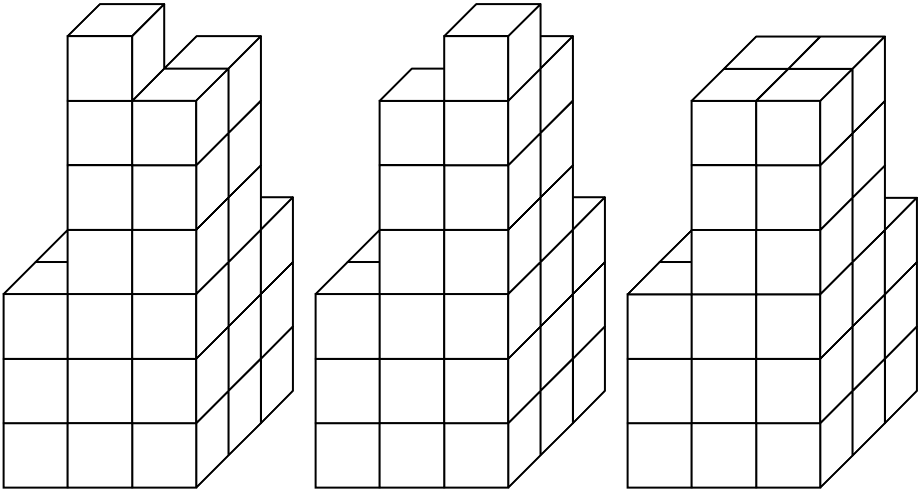












Des solutions à ces configurations peut-être surprenantes se retrouveront dans le « coin jeux » du site de notre régionale…

François DROUIN
Collège Les Avrils
55300 Saint Mihiel

Laissons les mathématiques, elles n'ont pour objet que des abstractions.

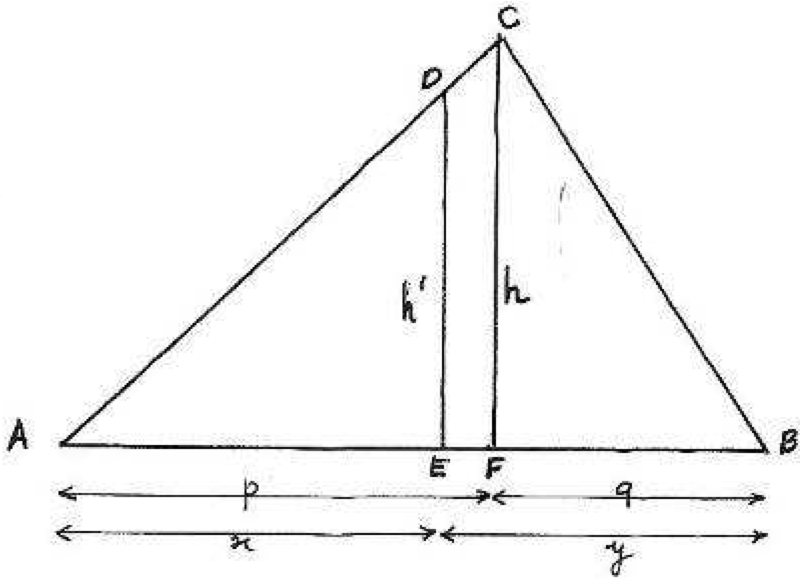
Aristote

Théorème de FISHMONGER-IKHTYOS :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2(a+b)}$$

Démonstration :

Soit un triangle ABC, et h la hauteur CF issue de C. Soit AF = p et FB = q :



On considère le segment [ED] parallèle à [FC] qui partage le triangle ABC en deux parties de même aire.
Soit DE = h' , AE = x et EB = y.

On a aire(ABC) = 2×aire(AED), ce qui peut s'écrire : $\frac{1}{2}(p+q)h = 2\times\frac{1}{2}xh' = xh'$ [*].

Mais le triangle AED est semblable au triangle AFC. D'où : $\frac{h'}{h}=\frac{x}{p}$, d'où $h' = h\times\frac{x}{p}$.

En reportant dans [*], il vient $\frac{1}{2}(p+q)h = \frac{x^2h}{p}$, d'où l'on tire $x=\sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}$.

Or y joue par rapport à q le même rôle que x par rapport à p, d'où, de la même manière : $y=\sqrt{\frac{q(q+p)}{2}}$.

En additionnant les deux résultats précédents, il vient :

$$x+y=\sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\frac{q(q+p)}{2}}\ .$$

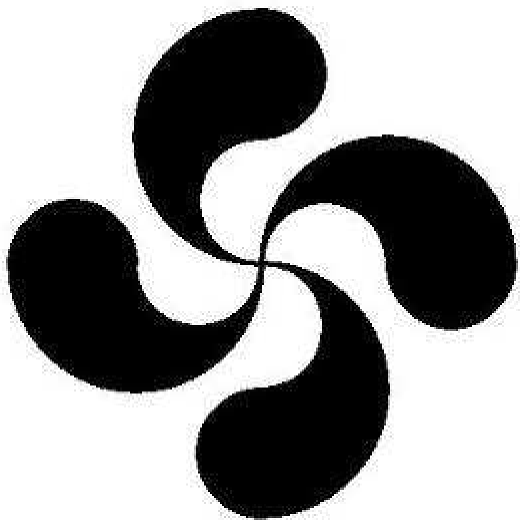
Or $x + y = p + q$ d'où : $p+q=\sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\frac{q(q+p)}{2}}=\sqrt{p+q}\left(\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{q}{2}}\right)$.

En divisant les deux membres par $\sqrt{p+q}$ on obtient : $\sqrt{p+q}=\sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{q}{2}}$

Il ne reste plus qu'à poser $p = 2a$ et $q = 2b$ pour obtenir : $\sqrt{2a+2b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

Et le théorème est démontré :

$$\boxed{\sqrt{2(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}=\sqrt{\boldsymbol{a}}+\sqrt{\boldsymbol{b}}}\ .$$



Découverte de la définition du prisme droit

Par Céline COURSIMAULT ([1])

La définition du prisme droit vue en cinquième comporte un certain nombre de termes qui peuvent être difficiles à comprendre et à retenir par nos jeunes élèves: on trouve les notions de bases, de faces latérales, de polygones, de faces parallèles, perpendiculaires ... Comment tout retenir lorsqu'on a déjà beaucoup de mal à se représenter ce que c'est « en vrai » ?
Il semble important que chaque élève puisse appréhender cette notion à sa manière et se construise sa propre définition du prisme droit. Tel est l'objectif du travail en groupe décrit ci-après.

Les élèves sont regroupés de façon hétérogène afin qu'une émulation se forme au sein de chaque groupe et que tous se retrouvent en situation de recherche.

La première partie de l'activité consiste en une réactivation des acquis (reconnaissance de solides vus en $6^{ème}$) et en l'introduction de nouveaux solides : les prismes droits. C'est une phase assez rapide qui doit permettre aux élèves de confronter leurs connaissances sur ce qu'ils ont étudié dans les classes antérieures mais aussi sur ce qu'ils ont déjà assimilé au travers de leur propre expérience : tous ont déjà rencontré des prismes droits qui ne sont pas des pavés (un emballage de Tobblerone par exemple pour les gourmands…), des cylindres de révolution (les boîtes de conserve...), des cônes, des pyramides (celles d'Égypte par exemple). Mais comment les définir au sens mathématique ?

La deuxième partie de l'activité consiste en l'élaboration par chaque groupe de sa définition du prisme droit. L'énoncé est donné sous forme d'une question ouverte puisque les élèves ne disposent que de la simple consigne : « ***A partir du document que vous avez sous les yeux et des quatre solides qui vous ont été distribués, établir une définition du mot prisme droit*** ». C'est à eux d'établir leurs propres stratégies afin d'obtenir une définition, et ce en toute autonomie.

---

[1] Collège Vauban de Logngwy ; jbcc@pt.lu

Pour définir ce qu'est un prisme droit, les élèves ont besoin de voir que celui-ci possède deux bases polygonales parallèles, des faces latérales rectangulaires perpendiculaires aux bases et que ce sont les seuls éléments nécessaires à sa définition.

Les paramètres ci-dessous sont donc les seuls qui ont été choisis :

- dans une première partie, les représentations en perspective cavalière de plusieurs prismes droits ayant tous des bases de nature différente, posés soit sur une face latérale, soit sur une de leurs bases ;
- dans une seconde partie, les représentations en perspective cavalière de solides n'étant pas des prismes droits puisque chacun d'entre eux a au moins un élément caractérisant un prisme droit mis en défaut.

Il est à noter que beaucoup de nos élèves éprouvent des difficultés à « voir » dans l'espace. Ainsi, la représentation en perspective cavalière peut s'avérer pour un certain nombre ne pas être suffisante. C'est pourquoi la fiche est complétée par 4 solides fournis à chaque groupe : le prisme droit à base triangulaire n°2, le prisme droit à base hexagonale n°4, le cylindre de révolution n°11 et la pyramide à base rectangulaire n°12 ([2]).

Pouvant ainsi les manipuler, la difficulté de se représenter les solides dans l'espace est partiellement surmontée. Tous les élèves peuvent ainsi démarrer puisqu'ils peuvent commencer par comparer ces 4 solides et ensuite se reporter à la fiche afin de faire ressortir les caractéristiques générales d'un prisme droit.
Les principales difficultés que les élèves risquent de rencontrer sont l'incompréhension des consignes (surtout s'il s'agit du premier travail en groupe auquel ils participent), le vocabulaire nécessaire à la description d'un solide non maîtrisé et l'obtention d'une définition incomplète.
En cas d'incompréhension de l'énoncé, la seule intervention du professeur consiste à reformuler oralement la consigne sous la forme: « donner les éléments qui constituent un prisme droit ».
Aucun autre apport n'est prévu car l'autonomie des élèves n'est plus entière si l'on entre plus précisément dans les détails : ils sont alors dirigés vers la définition attendue.

[2] Voir figures correspondantes sur la fiche élève n°2 en annexe.

A la fin du temps accordé pour cette 2ème partie, chaque groupe doit rédiger sa définition d'un prisme droit sur une affiche qui sera ensuite accrochée au tableau.

La troisième partie de l'activité consiste en un débat au sein de la classe qui doit permettre l'élaboration d'une définition complète du prisme droit qui sera notée dans le cahier de leçon.

J'ai testé cette activité cette année avec ma classe de 5ème qui est constituée de 28 élèves et qui est très hétérogène.
Concernant la première partie de l'activité, tous les groupes ont reconnu le cube et les pavés droits n°3 et n°4 ([3]). Certains ont rencontré quelques difficultés face au pavé n°9 mais celles-ci ont été surmontées lors de la mise en commun.
Aucun travail n'avait été fait en classe au préalable afin de revenir sur les connaissances de 6ème ce qui peut expliquer les difficultés de reconnaissance d'un pavé suivant la représentation en perspective cavalière qui en est donnée.

La majorité des groupes a su nommer les cylindres de révolution, le cône et la pyramide bien qu'ils n'en connaissent pas les propriétés mathématiques. Ce sont des solides qu'ils rencontrent dans la vie de tous les jours. Il a été plus difficile pour eux de nommer les prismes droits. La mise en commun, rapide et très animée, a permis à tous de donner un nom à chacun de ces solides.

Au terme de la deuxième partie de l'activité, voici les définitions du prisme droit proposées par quelques groupes :

- Un prisme droit est un solide qui a des faces carrées et rectangulaires.
- Le prisme est une figure qui ne peut pas rouler. En outre, il n'a pas de côtés arrondis et ils n'ont pas de sommets communs.
- Un prisme droit c'est un solide qui a des angles droits, des arêtes, des faces et des sommets.

[3] Voir figures sur la fiche élève n°1 en annexe.

- Un prisme droit c'est un solide qui n'a pas de forme arrondie, ni pointue (cylindres, pyramides). Il a souvent des faces rectangulaires.
- Un prisme droit ne doit pas avoir de forme arrondie. Pour qu'un solide soit un prisme, il faut que chaque sommet relie trois arêtes, pas plus, pas moins.
- Les faces sont identiques et sont perpendiculaires, les arêtes sont parallèles.

Une analyse rapide de ces résultats permet de voir que les élèves ont bien senti la différence qu'il y avait entre prismes droits et autres solides mais ils ont tous été confrontés aux problèmes d'expression liés au vocabulaire.
La mise en commun a permis l'élaboration d'une définition complète qui a été notée dans le cours.
Il aurait certainement été judicieux de prévoir un travail préalable, en devoir à la maison ou en activité en classe, de réinvestissement du vocabulaire relatif à la géométrie plane (polygones, nature d'un polygone...) et à la géométrie dans l'espace (faces, sommets, arêtes) vu en $6^{ème}$ mais aussi relatif à la représentation en perspective cavalière.
Les élèves ont également été perturbés par le fait d'être totalement autonomes face au travail. Que je n'intervienne pas du tout pour les aider n'a pas toujours été facile à accepter. C'était leur premier travail en groupe et ils n'ont plus éprouvé une telle gêne lors des suivants.

Le résultat obtenu est concluant et l'expérience a été enrichissante, tant pour les élèves que pour le professeur.
Le même travail peut être effectué en classe de $4^{ème}$ pour établir la définition d'une pyramide.

N'hésitez pas à me contacter pour me faire part de vos expériences avec vos classes : jbcc@pt.lu

Pages suivantes :

Fiche pour le professeur
Fiche élève n°1 : solides en vrac
Fiche élève n°2 : la définition du prisme droit

FICHE POUR LE PROFESSEUR

<u>Objectifs de la séance</u> :

- **découvrir de nouveaux solides**
- **établir la définition d'un prisme droit**

1ère phase : première activité (fiche n°1)

- Durée: 10 minutes.
- Travail en groupe : 4 élèves par groupe dont un rapporteur, groupes hétérogènes.
- But : revoir les solides vas en sixième et en découvrir des nouveaux.
- Supports : polycopié sur lequel sont représentés différents solides en perspective,
- Consignes: nommer les solides déjà connus.
- Ce que font les élèves: relèvent sur leur cahier d'exercices le numéro et le nom des différents solides qu'ils connaissent.
- Ce que fait le prof: passe de groupe en groupe ➔ il est observateur.

2ème phase : mise en commun

- Durée: 5 minutes.
- Ce que fait le prof: il interroge la classe sur les résultats obtenus et affiche la correction (transparent).
- Ce que font les élèves : annoncent leurs résultats et prennent éventuellement la correction.

3ème phase : deuxième activité (fiche n°2)

- Durée: 20 minutes.
- Travail en groupe: même constitution que lors de la 1ère phase.
- But : établir la définition d'un prisme droit.
- Supports :
  - La fiche polycopiée « un prisme droit c'est ..., un prisme droit ce n'est pas… »,
  - Les quatre solides numérotés 2, 4, 11 et 12.
  - Une affiche (ou un transparent,).
  - Des feutres.
  - La fiche de consignes.
- Consignes: à l'aide des supports distribués, établir votre définition du mot prisme droit.
- Ce que font les élèves : établissent la définition, la notent sur leur cahier d'exercices, le rapporteur note la définition sur l'affiche (ou le transparent).
- Ce que fait le prof : passe de groupe en groupe 4 il est observateur,

Erreurs possibles des élèves :
le vocabulaire,
définition incomplète,
incompréhension des consignes.

4ème phase : mise en commun.

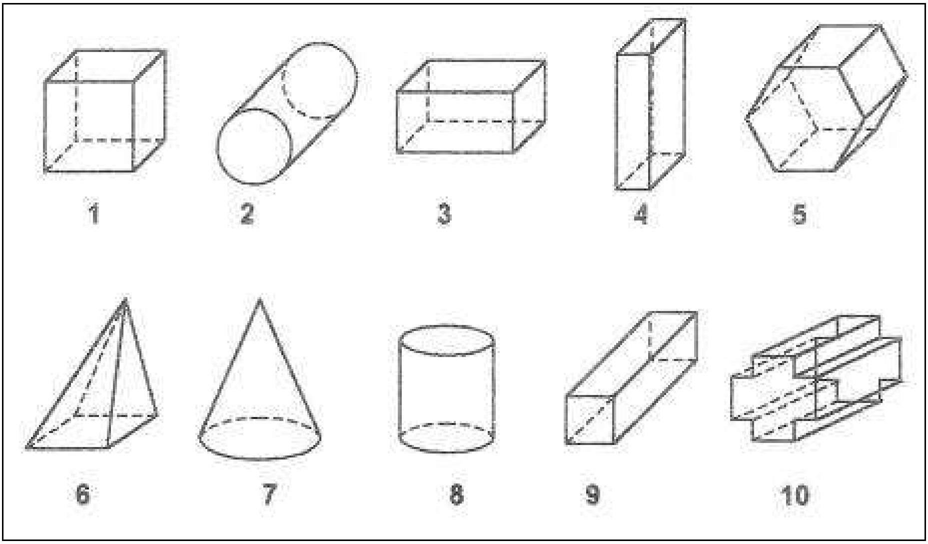
- Durée: 10 minutes.
- Ce que font les élèves :
  - Le rapporteur de chaque groupe énonce à voix haute la définition élaborée par le groupe.
  - L'ensemble de la classe débat et élabore la définition définitive du prisme droit.
- Ce que fait le prof : il « orchestre » le débat et inscrit au tableau la définition définitive.

5ème phase :

- Durée : 5 à 10 minutes.
- Déroulement : prise du cours dans le cahier de leçons.

Fiche élève, activité n° 1 : SOLIDES EN VRAC

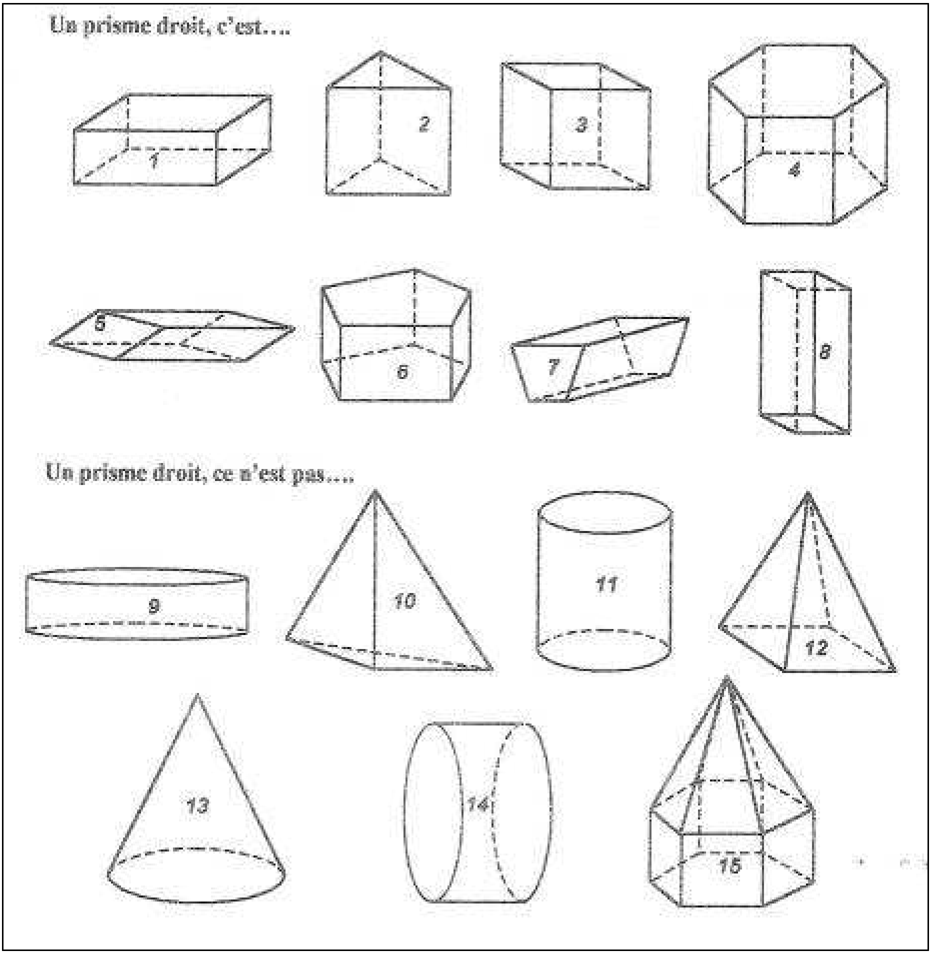
Parmi ces solides représentés en perspective, quels sont ceux que vous connaissez ? Nommez-les.



Fiche élève, activité n° 2 : SOLIDES EN VRAC

Consigne : A partir du document que vous avez sous les yeux et des quatre solides qui vous ont été remis, établir une définition du mot **prisme droit**.

Travail à fournir : Le groupe se met d'accord sur une définition et chaque membre du groupe la note sur son cahier d'exercices. Le rapporteur inscrit la définition du groupe sur l'affiche et vient l'accrocher au tableau lorsque chacun aura terminé.



MATH & MEDIA

Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.
Envois par la poste à Christophe WALENTIN, 17 Clos des Vignes, 57640 VRY, ou par courrier électronique à jacverdier@orange.fr et Christophe.Walentin@wanadoo.fr

BMI = M²/L
L'équation des oiseaux des neiges

La longueur des skis dépend du poids et de la taille des sauteurs. Ou quand un kilo en trop change la face d'une compétition.

Lu dans Libération du samedi 18/02/06 : Le saut à skis est un sport hors normes qui dicte un comportement particulier à ses adeptes. Le sauteur obéit à une loi de la physique pure : la gravitation universelle. En gros, plus on est lourd et moins on vole. Ce qui exige du sauteur d'avoir une certaine morphologie et un certain mode de vie. Jusqu'en 2004, ces athlètes subissaient un effort diététique plus ou moins important, parfois à la limite de l'anorexie. (…) L'été 2004, la FIS a modifié le règlement et mis en place un barème basé sur le BMI (*body mass index*), un rapport poids/taille utilisé en médecine pour déterminer les limites de l'obésité ([1]). En saut, il est censé forcer ces hommes oiseaux à se nourrir au moins un peu. Franck Salvi, ancien entraîneur de l'équipe de France et Eric Lazzaroni, ancien directeur du saut, se sont mis à table pour disserter sur les bienfaits préventifs d'une telle règle. *“ La loi de la gravitation est très embêtante car plus tu es lourd et moins tu restes en l'air, lance Salvi Pendant des années, les gars se tiraient dessus pour maigrir. Didier Mollard, par exemple, a vécu des mois à coups de café, clopes et salade. C'est pas une vie. Pour ne pas les rendre malades, on a introduit le BMI ”.*

Les deux spécialistes s'en donnent à cœur joie, toujours prêts à sortir des formules savantes pour enrober leur sport favori. Eric Lazzaroni ressort ses règles mathématiques : “ *La formule est simple : c'est le poids au carré divisé par la taille du gars en centimètres. C'est-à-dire qu'il y a un poids minimum pour une taille donnée et le quotient obtenu détermine la longueur des skis* ”. Salvi reconnaît cependant

que c'est le seul sport au monde qui pénalise le naturel, qui le neutralise. En saut, plus les skis sont longs plus ils sont portants sur l'air. Et ces planches géantes de 11 cm de large peuvent mesurer plus de 2,80 mètres. Avant le BMI, le calcul était simple : on ajoutait 80 cm à la taille du bonhomme pour obtenir la longueur des skis. Ainsi entre deux hommes de même taille, c'est le plus petit, donc le plus léger, qui se trouvait a priori avantagé. Pour les autres, moins ils prenaient de poids et plus ils avaient des chances de sauter loin. (…)
Ce nouvel index est couplé à une table de correspondance qui détermine la longueur autorisée des planches pour chacun. Si l'athlète veut concourir avec des skis de la longueur maximale (146% de sa taille), son BMI ne doit pas descendre en dessous de 20. Lorsque ce taux diminue (c'est-à-dire lorsque l'on pèse moins lourd puisque, a priori, la taille du sauteur ne peut pas changer) soit le gars se met à manger, soit il prend des skis plus courts. Franck Salvi résume : “ *Lorsqu'un sauteur se situe en dessous de ce seuil, il a deux solutions. Soit il s'alourdit. Soit il coupe ses skis. Le Japonais Masahiko Harada a été disqualifié du concours sur le K90 pour skis trop longs* ”. Avant, un sauteur d'1,80 m pour 60 kg avait des skis de 2,63 m. Aujourd'hui, ses skis mesureraient 2,52 m. “ *Et dix centimètres carrés cela peut faire une différence de 7 à 8 mètres en saut* ”, ajoute Lazzaroni (…).

Tout le monde l'aura compris, il manque dans cet article la façon dont on calcule la taille des skis à partir de la donnée de la taille et du poids du skieur. On peut à tout le moins supposer que la taille des skis n'est pas proportionnelle au BMI, sinon un sauteur de 80 kg mesurant 1,80 m devrait avoir des sis de 4,48 m de long, ce qui est aberrant. Si un de nos lecteurs pouvait trouver l'information…

([1]) Note de la rédaction du Petit Vert : **Attention** ! Ne pas confondre avec l'indice de masse corporelle (IMC) utilisé en médecine, qui sert à déterminer si vous êtes en “ surpoids ” : **l'IMC vaut M/L²** (masse en kg divisée par le carré de la taille en m) ; un IMC supérieur à 25 indique un surpoids, et l'obésité commence avec un OMC de 30.

$2^{30\,402\,457} - 1$

Ce nombre est devenu le 15 décembre 2005 le plus grand nombre premier de Mersenne jamais calculé (c'est le 43e du genre). C'est un nombre de 9 152 052 chiffres* ! Le calcul a été fait par Curtis Coopper et Steven Boone (Université du Missouri) grâce à un réseau de 200 000 ordinateurs qui ont travaillé pendant 10 mois selon la technique du “ *grid computing* ” (mise en réseau via Internet). Pour plus de détails : http://www.mersenne.org/french_prime.htm

Les nombres de Mersenne (1558-1648) sont les nombres de la forme $M_n = 2^n - 1$ où n est premier. En 1664, Mersenne affirmait que M_n était premier pour $n = 2, 3, 5, 17, 19, 31, 67, 127$ et 257, et non premier pour les 44 autres valeurs de n premier inférieur à 257. Le première erreur dans les affirmations de Mersenne a été trouvée par Persuvin et Seelhoff : ils prouvent que M_{61} est premier. Par suite, d'autres erreurs de Mersenne ont été décelées.

L'EFF (Electronic Frontier Foundation) offre $ 100 000 pour la découverte du premier nombre de Mersenne à plus de 10 000 000 de chiffres… On n'en est pas loin, et on estime que cette barre sera atteinte en 2007.

Le précédent record datait de février 2005 : $2^{25\,964\,951} - 1$, un nombre de 7 813 230 chiffres (découvert par Martin Nowak, Allemagne).

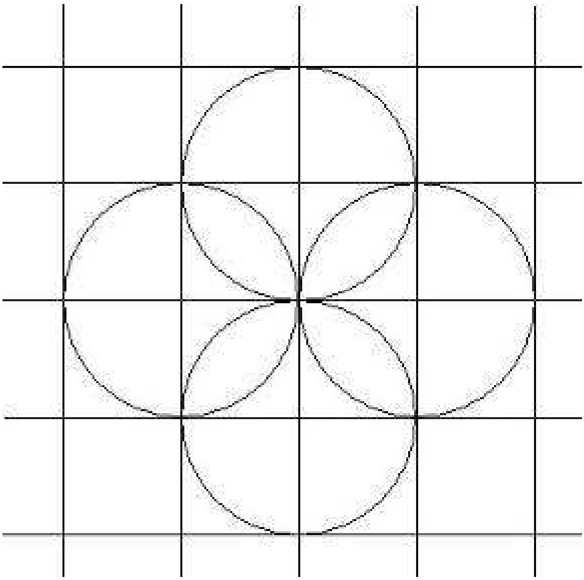
* Ordre de grandeur : imprimé dans votre quotidien favori, il occuperait entre 1 000 et 1 500 pages !

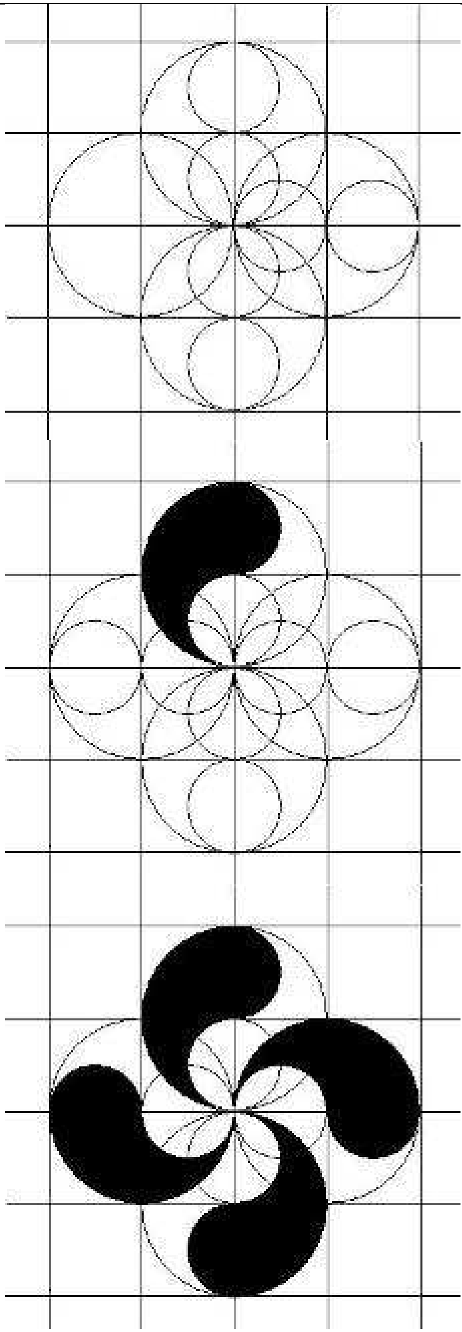
Père Marin Mersenne (1588 – 1648), savant français.

LAUBURU (CROIX BASQUE)

Certains s'en souviennent encore, les journées A.P.M.E.P. de 2003 ont eu lieu à Pau. J'en avais profité pour visiter un peu (sous la pluie) le département des Pyrénées Atlantiques ; cela m'avait donné envie d'y retourner sous une météo plus clémente, et en particulier de visiter de magnifiques petits villages basques, comme Aïnhoa, Bidarray ou Itxassou. Ce qui m'a alors frappé, c'était les stèles gravées des tombes des cimetières, sur certaines desquelles on pouvait admirer des " croix basques ". Et, je ne sais plus dans quel village, dans le hall de la mairie, un panneau (voir photo) qui expliquait à quoi correspondait ce symbole, et comment on pouvait la construire géométriquement. Le panneau disait ceci : " *Lauburu est constitué de quatre "virgules" assemblées en croix. Symbole solaire utilisé par de nombreuses cultures durant l'antiquité, elle est devenue un des emblèmes de Pays Basque* ". Voici, pour vous et vos élèves, la construction géométrique (en 4 étapes) permettant de les réaliser.

Jacques





Suites mélodiques

Par Loïc TERRIER ([4])

« Une guitare est un instrument en forme de guitare. Si vous la partagez en deux par le milieu – ce qui n'est pas à conseiller – vous obtenez deux moitiés de guitare. »
Bobby Lapointe

L'activité a eu lieu en classe de 1e S, à l'occasion du chapitre sur les suites. Il n'est pas indispensable d'avoir des connaissances en musique pour la traiter mais il faut reconnaître que les élèves qui jouent d'un instrument sont ceux qui sont "rentrés" le plus facilement dans l'activité. L'ensemble n'a pas tenu en une heure, la partie "gamme tempérée" a été traitée plus tard.

La plupart des élèves a été intéressée et a pu constater que les suites géométriques n'étaient pas une invention "pour le plaisir" des mathématiciens. Un élève a amené une guitare lors de la séance suivante, ce qui a permis de mesurer, de vérifier... et d'écouter ! Des mathématiques vivantes, en somme.

Son émis par corde vibrante

Son : mouvement vibratoire de l'air lorsqu'il est perçu par l'oreille. Les sons « purs » sont déterminés par un mouvement sinusoïdal de fréquence donnée f. L'oreille humaine ne perçoit pas les sons d'une fréquence inférieure à 20Hz (infrasons) ni ceux d'une fréquence supérieure à 20 000 Hz (ultrasons). On s'intéressera ici aux sons émis par une corde tendue qu'on pince.

Les notes

Les Pythagoriciens avaient remarqué qu'en plaçant un chevalet au milieu d'une corde tendue, les deux parties de la corde donnaient un son « ressemblant » au son donné par la corde entière : ces sons correspondent à une même **note**. Si par exemple, la corde entière donne un DO, alors les moitiés de corde donneront aussi un DO, mais plus « haut » (on dira : à l'**octave** supérieure). Une corde de longueur double donnera, à tension égale, un DO plus bas (à l'octave inférieure).

[4] loic.terrier@free.fr ; Lycée Loritz, NANCY.

La fréquence du son étant inversement proportionnelle à la longueur de la corde pincée, si un DO est de fréquence *f*, alors les autres DO seront de fréquence 2*f*, 4*f*, 8*f* mais aussi $\frac{f}{2}$, $\frac{f}{4}$, etc. On convient de noter DO_0 le son de fréquence f_0 = 32,7 Hz, DO_1 le DO à l'octave supérieure, etc. On note f_n la fréquence de Do_n.

1. Quelle est la nature de la suite des fréquences de DO ?
2. Exprimer explicitement à l'aide de *n*.
3. Quelle est la fréquence du plus haut DO audible ?

La gamme Pythagoricienne

On peut difficilement faire de la musique avec une infinité de notes ! La solution universellement adoptée a été de choisir un certain nombre de notes formant une échelle musicale. Comment choisir ces notes ? Poursuivant ses expériences, les Pythagoriciens déplacent le chevalet aux deux tiers de la corde.

4. Les deux parties de la corde donnent-elles la même note ?

La partie la plus longue de la corde donne un son qu'on appelle la **quinte** du son donné par la corde entière (la plus courte est une octave plus haut). Cette fois, il s'agit d'une note différente ! L'idée est alors de former une échelle musicale en prenant le son initial, sa quinte, la quinte de sa quinte, et ainsi de suite.

5. Quelle est la fréquence de la quinte d'un son de fréquence f ?

L'échelle musicale ainsi formée aura un nombre fini de notes si, en prenant des quintes successives, on « retombe » sur la note de départ, donc si on trouve deux entiers *n* et *k* vérifiant ; *n* sera le nombre de quintes nécessaires, et *k* le nombre d'octaves.

6. Montrer que l'équation $\frac{3^n}{2^p} = 1$ n'a pas de solutions *n* et *p* entières. En déduire qu'il est impossible de construire une échelle musicale ayant un nombre fini de notes avec cette méthode.

C'est pourtant cette méthode qu'on va retenir, en utilisant les approximations suivantes :

- $\frac{3^5}{2^8} \approx 0,949$,ce qui conduira à une gamme à cinq notes, parfois appelée « gamme chinoise » et qui correspond à peu près aux touches noires du piano ;
- $\frac{3^7}{2^{11}} \approx 1,068$, qui conduira à la gamme à 7 notes (penser aux touches blanches du piano) ;
- $\frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1,014$, qui conduira à la gamme pythagoricienne à 12 notes (gamme « chromatique »).

Voyons par exemple comment s'est construite la gamme à 7 notes : on part d'un son initial de fréquence f et on forme les quintes successives $q_1 = f$, $q_{n+1} = \frac{3}{2} q_n$.

7. Calculer q_2, q_3 … q_7 en fonction de f (donner les valeurs exactes).
8. Les fréquences ne sont pas toutes dans l'octave $[f\,; 2f\,[$. On cherche la note correspondant à q_i mais dans l'octave $[f\,; 2f\,[$. On pose $v_i = \frac{q_i}{2^{\alpha}}$, où α est un entier tel que $v_i \in [\,f\,; 2\,f\,]$. Calculer v_1, v_2 … v_7.
9. On obtient enfin les fréquences u_i des notes de la gamme en rangeant les v_i dans l'ordre croissant, et en posant $u_8 = 2f$. Reproduire et compléter le tableau suivant :

u_i	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
fréquences	f	$\frac{9}{8} f$						$2f$

Voilà la gamme ! Elle correspond à notre gamme DO RE MI FA SOL LA SI, à condition de choisir pour f une fréquence de FA.

10. Les u_i forment-ils les premiers termes d'une suite géométrique ?

Dans le cas d'une gamme à 12 notes (DO DO# RE RE# MI FA FA# SOL SOL# LA LA# SI), on obtient également des intervalles de deux types : on passe d'une fréquence à la suivante en multipliant soit par $\frac{256}{243} \approx 1,05$ soit par $\frac{2187}{2024} \approx 1,08$.

La gamme tempérée

« Vous savez que les inventions humaines marchent du composé au simple, et que le simple est toujours la perfection »
A.Dumas

Transposer un morceau de musique consiste à le réécrire pour pouvoir le jouer plus haut ou plus bas. Les deux types d'intervalles rencontrés dans la gamme pythagoricienne rendent cette opération difficile voire impossible. On a alors eu l'idée simple et géniale de partager l'octave en intervalles égaux, en partant de la gamme pythagoricienne à 12 notes.
On considère le nombre r vérifiant $r^{12} = 2$ ($r \approx 1{,}0594631$). Connaissant la fréquence f d'une note, on obtient la fréquence de la note suivante en multipliant par r.

11. La référence en musique est la fréquence du LA_3 : 440Hz. Déterminer la fréquence du SOL_4.
12. Dans la première partie, on donnait la fréquence du DO_0. Est-elle cohérente avec le système présenté ?

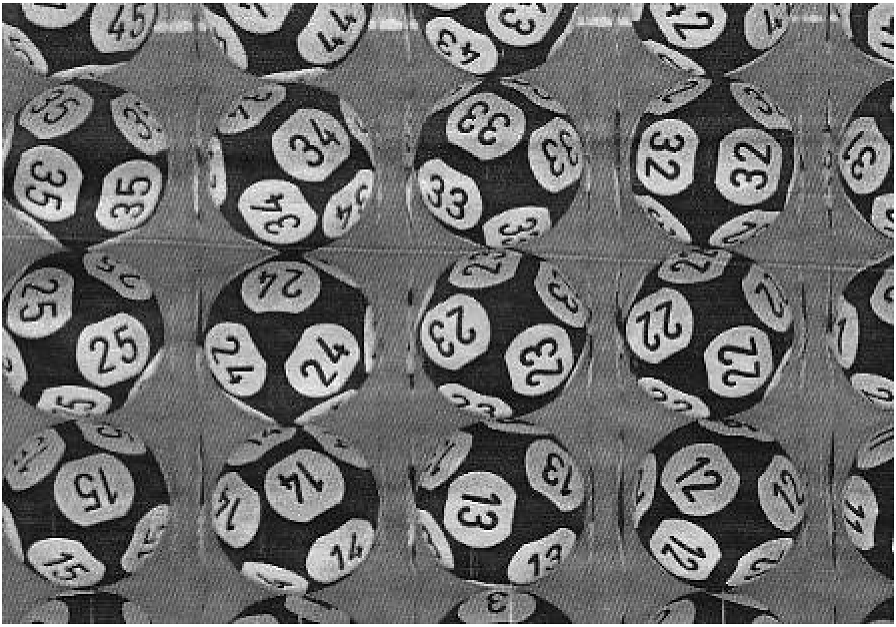
Le manche d'une guitare comporte de petites barres métalliques transversales en saillie, nommées *frettes*. Lorsqu'on pose le doigt juste au-dessus d'une frette, on raccourcit la portion de corde qui va vibrer, et par conséquent on modifie la note émise. La longueur des cordes est 650 mm. Le manche comporte 19 frettes (sur une guitare classique).

13. La première corde de la guitare donne, à vide (sans toucher aux frettes), un MI_1. A quelle distance du chevalet est placée la frette qui permet de jouer sur cette corde un $SOL\#_2$?
14. Sachant que si on utilise la frette située à 460 mm du chevalet en jouant la troisième corde on obtient un $SOL\#_2$, quelle est la note qu'on obtient si on joue la corde à vide ?
15. La sixième corde de la guitare, celle qui renvoie le son le plus aigu, donne, à vide, un MI_3. Quelle est la plus haute note jouable sur une guitare classique ?

Bibliographie :

« Musique et Mathématiques » par Bernard PARZYSZ (publication APMEP n°53, téléchargeable en PDF)
Hors-série n° 11 de Tangente, « Maths & musique » (2005)

LE LOTO ET LE LILLIPUTOTO



Dans le numéro 32 du Petit Vert (décembre 1992) nous vous présentions une publicité pour un appareil qui vous permettait de “ fabriquer ” 22 grilles simples de loto différentes, vous garantissant que vous étiez alors sûrs de gagner. Nous vous demandions si cette publicité était mensongère ou pas. Autrement dit, est-il possible, en remplissant seulement 22 grilles (judicieusement choisies !), d'être sûr qu'au moins une d'entre elles soit gagnante, et ce quel que soit le tirage ?
Aucun lecteur n'avait répondu à ce problème, qui reste donc “ ouvert ” depuis plus de 13 ans…

Rappelons à ceux qui ne le connaissent pas le mode de fonctionnement du Loto. On dispose d'une grille de 49 numéros (de 1 à 49), et l'on en choisit 6 que l'on coche. Ensuite, l'organisateur procède à un tirage de 6 boules, plus une boule dite “ complémentaire ”. Pour gagner, il suffit qu'au moins trois de vos numéros cochés soient sur la liste des 6 tirés.
Le règlement est en réalité un peu plus compliqué que cela, car il y a plusieurs “ types ” de gagnants : on gagne “ le gros lot ” si on a coché les 6 numéros sortis (la probabilité est de 1/13 983 816) ; mais on gagne aussi si l'on a 5 bons numéros et le complémentaire, 5 bons numéros, 4 bons numéros et le complémentaire, 4 bons numéros, 3 bons numéros et le complémentaire, ou tout simplement 3 bons numéros.

Le coût actuel d'une grille est de 0,30 €, mais on ne doit jouer au minimum 2 grilles pour les 2 tirages du même soir, soit 1,20 € de mise minimale.
La probabilité de gain est calculable (ce n'est qu'un problème de combinatoire : sur les 13 983 816 grilles constructibles, 260 624 sont gagnantes [voir en annexe], soit pas même 2 chances sur 100 de gagner quelque chose). Par contre l'espérance de gain n'est pas calculable : car le gain de chaque gagnant dépend du nombre de joueurs qui ont rempli des grilles gagnantes (autrement dit, si vous avez coché les bons numéros, espérez que personne n'ait eu la même idée que vous, il vous faudrait partager avec eux !)

Pour mieux comprendre ce problème, que je n'étais pas arrivé à résoudre à l'époque, je suis allé à Lilliput qui, comme vous le savez, est un tout petit pays où les grilles de loto (qui s'appelle là-bas le Lilliputoto) n'ont que 10 numéros, et vous devez en cocher 5. Il y a cinq boules tirées sur les 10 que contient l'urne, et vous gagnez si vous en avez au moins trois de bonnes.
Il y a donc C(10,5) = 252 tirages possibles (et donc 252 grilles 'potentielles' à remplir). Avec un peu de courage, on peut les lister. Et dans ce pays, il suffit donc de remplir deux grilles pour être sûr de gagner. En effet, et vous pouvez le vérifier aisément, si vous cochez d'une part la grille 1-2-3-4-5 et d'autre part la grille 6-7-8-9-10 (ou tout autre couple de grilles dont les numéros s'excluent mutuellement), vous êtes sûr d'avoir au moins trois bons numéros : la première grille vous donnera accès à 126 des 252 issues possibles, et la seconde grille aux 126 autres.

Revenons maintenant en France : est-il possible qu'avec seulement 22 grilles on soit sûr de gagner au Loto ; et si oui, y a-t-il une méthode pour remplir ces grilles ?

Jacques VERDIER

ANNEXE

Probabilités :

Pour des raisons d'utilisation du traitement de texte, on notera $C(n,p)$ le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n.
Le nombre total de grilles " faisables " est bien sûr $C(49,6)$ = 13 983 816.
Parmi ces grilles il y en a $C(6,6) = 1$ (une) qui correspond aux 6 numéros sortis,
il y en a $C(6,5)*1 = 6$ qui correspondent à 5 numéros plus le complémentaire,
il y en a $C(6,5)*C(42,1) = 252$ qui correspondent à 5 numéros,
il y en a $C(6,4)*1*C(42,1) = 630$ qui correspondent à 4 numéros plus le complémentaire,
il y en a $C(6,4)*C(42,2)$ = 12 915 qui correspondent à 4 numéros,

il y en a $C(6,3)*1*C(42,2) = 17\,220$ qui correspondent à 3 numéros + le complémentaire,
et il y en a $C(6,3)*C(42,3) = 229\,600$ qui correspondent à 3 numéros seulement.
Soit au total 260 624 grilles gagnantes ; soit une probabilité de 4654/249711.

Statistique des gains :

Sur les 42 tirages effectués entre le 03/12/2005 et le 11/02/2006 inclus, les moyennes des gains ont été les suivants (rappelons que la valeur du gain n'est pas calculable à l'avance, elle dépend du nombre de gagnants) :
Pour les 6 bons numéros : 1 214 263 € en moyenne (mais, sur ces 42 tirages, il y a eu 11 fois 0 € de gain parce que personne n'avait coché les six bons numéros ; il y a aussi eu des tirages " spéciaux " : par exemple 7 000 000 € pour l'unique gagnant du 24 décembre au soir) ;
pour 5 bons numéros + le complémentaire : en moyenne 16 197 € ;
pour 5 bons numéros : 1 017 € ;
pour 4 bons numéros + le complémentaire : 44,25 € ;
pour 4 bons numéros : 22,12 € ;
pour 3 bons numéros + le complémentaire : 5,58 € ;
pour 3 bons numéros : 2,79 €.
Compte tenu des probabilités calculées à partir des combinaisons ci-dessus, l'espérance moyenne de gain calculée sur cette période a été de 0,187 € (pour 0,30 € de mise), c'est à dire un peu plus de 60 % de " redistribution ".

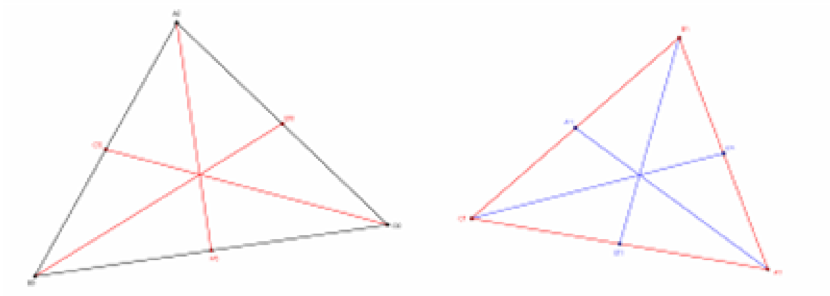
Grilles multiples :

Tous les exemples donnés concernent les grilles " simples " ; il existe aussi des grilles " multiples " : par exemple, si vous cochez 7 numéros (mettons 1-2-3-4-5-6-7), c'est comme si vous aviez " fabriqué " 7 grilles distinctes (1-2-3-4-5-6, 1-2-3-4-5-7, 1-2-3-4-6-7, 1-2-3-5-6-7, 1-2-4-5-6-7, 1-3-4-5-6-7 et 2-3-4-5-6-7) , si vous en cochez 8 c'est comme si vous aviez fabriqué 28 grilles, 84 grilles si vous en cochez 9 ; mais le prix que vous payez pour une grille multiple à 9 numéros vaut exactement le prix de 84 grilles simples. Ce qui ne change donc absolument rien à tous les calculs précédents.

Solution du problème n°84

Rappel de l'énoncé :

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle. On trace ses médianes.
Si cela est possible, on construit un triangle $A_1B_1C_1$ dont les côtés ont pour longueurs les longueurs des segments $[A_0A'_0]$, $[B_0B'_0]$, $[C_0C'_0]$.



Et ainsi de suite… On trace à l'étape n les médianes du triangle $A_nB_nC_n$ et on construit un nouveau triangle $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ dont les côtés ont pour longueurs celles des médianes du triangle $A_nB_nC_n$.

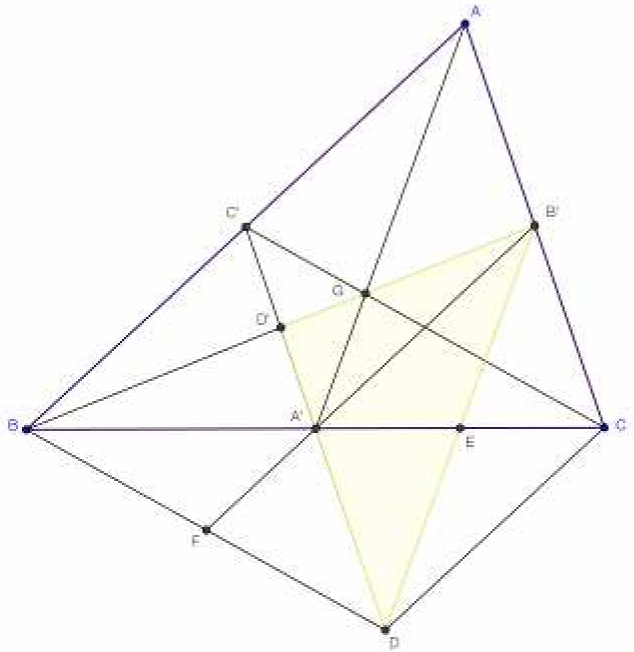
Que peut-on dire de la suite de triangles ainsi définie ?

Solutions de Jacques CHONÉ, Loïc TERRIER, Christophe BRIGHI, Denis PÉPIN, Jean-Yves ECKER.

Ci-dessous la solution, purement géométrique, de Jean-Yves ECKER :

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB], soit G le centre de gravité. Construisons D tel que AA'DB' soit un parallélogramme.
Montrons que BDB' est un triangle dont les côtés ont pour longueur les longueurs AA', BB' et CC' :

[BB'] est un côté de BDB'.
B'D=AA' car AA'DB' est un parallélogramme.
C'A'=(1/2)AC=AB' et (C'A')//(AB') car C' et A' sont les milieux de [AB] et de [BC].
On a aussi : A'D=AB' et (A'D)//(AB') car AA'DB' est un parallélogramme.
Donc (C'A')//(A'D), ce qui implique que C', A' et D sont alignés et que C'A=A'D.
Donc A' est le milieu de [C'D].
Comme A' est le milieu de [BC], CC'BD est un parallélogramme.
Donc CC'=BD.



Montrons que A' est le centre de gravité de BDB' :

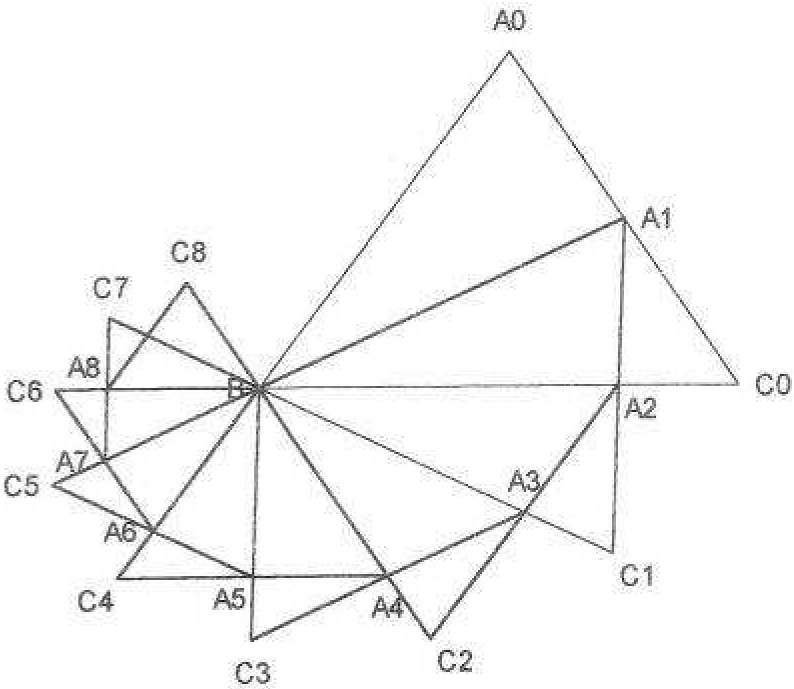
B'A'DC est un parallélogramme car (A'D)//(B'C) et A'D=(1/2)AC=B'C, donc [A'C] et [B'D] ont le même milieu.
Donc (BC) est la médiane de BDB' passant par B.
De plus B'C'BA' est un parallélogramme (démonstration analogue) et de même (AM) est la médiane de BDB' passant par D.

Calculons la « longueur des médianes » de BDB' :

BE=BA+AE=(l /2)BC+(1/2)A'C=(l /2)BC+(1/4)BC=(3/4)AC car A'est le milieu de [BC] et E celui de [A'C].
DD'=DA'+A'D'=(1/2)AC+(1/2)A'C'=(1/2)AC+(1/4)AC=(3/4)AC car DA'=AB'=(l /2)AC et D' milieu de [A'C'] et A'C'=(l /2)AC.
BF'=(3/2)B'A'=(3/4)AB car A' est le centre de gravité de BB'D et B'A'=(1/2)AB.

Donc la suite des triangles ($A_nB_nC_n$) vérifie la propriété :
$A_{n+2}B_{n+2}C_{n+2}$ est un triangle semblable à $A_nB_nC_n$ avec un rapport de 3/4.
Les suites extraites de rangs pair et impair sont donc constituées chacune de triangles semblables de plus en plus petits.

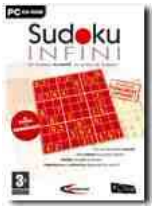
Si on poursuit la construction suivant le procédé ci-dessus, en gardant le point B fixe, on obtient la « spirale » :



Problème du trimestre n°85

Problème proposé par François PÉTIARD, de Besançon

Vu dans la presse (et sur le Web) une publicité pour un logiciel permettant de créer une infinité de grilles de sudoku (éditeur : Mindscape, coût : 9,99 €) :



« Sudoku infini, c'est un CD permettant de créer un nombre illimité de grilles de Sudoku »

« Infini », « illimité »… cela nous paraît peut-être exagéré !
Mais au fait, combien existe-t-il de grilles de Sudoku, à l'exemple de celle ci-dessous, remplies et différentes ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à :
Loïc TERIER, 42B rue du Maréchal Foch, 57130 ARS / MOSELLE

SOMMAIRE

LE PETIT VERT

BULLETIN DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE

N°CPPAP : 2814D73S. N°ISSN : 0760-9625. Dépôt léga l : mars 2006

Imprimé au siège de l'association :
IREM (faculté des Sciences), BP239, 54506-VANDOEUVRE
Directeur de la publication : Jacques VERDIER

Ce numéro a été tiré à 480 exemplaires