Une façon de rendre plus “ agréable ” le calcul littéral en classe de 3ème.

Christophe **WALENTIN**
Collège Les Avrils, Saint Mihiel (55)
christophe.walentin@wanadoo.fr

Ce document est inspiré d’une activité (Françoise BRASSENX) disponible sur le site internet MATHSENLIGNE (www.mathsenligne.com).

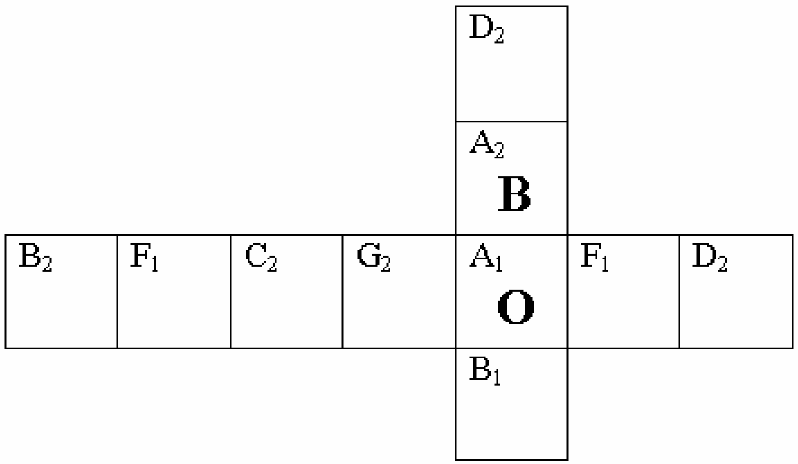
Brève description de l’activité…

L’élève est amené à trouver la forme réduite de plusieurs expressions littérales. Puis, pour chacune d’entre elles, le coefficient de chaque monôme est considéré sans son signe et associé à une lettre de l’alphabet (1 à A, 2 à B, 3 à C, 4 à D, etc.), ce qui permet à l’élève de remplir une grille de mots préalablement préparée par l’enseignant.

Exemple…

Pour l’expression A = $(x - 3)^2 - (8 + 9x - x^2)$, l’élève aboutit à la forme réduite A = $\mathbf{2}x^2 - \mathbf{15}x + \mathbf{1}$, ce qui lui fournit les coefficients suivants : $A_2 = 2$, qui correspond à la lettre B ; $A_1 = 15$, qui correspond à la lettre O ; $A_0 = 1$, qui correspond à la lettre A.

L’élève remplit alors au fur et à mesure une grille qui se présente ainsi, en remplaçant chaque coefficient par sa lettre correspondante :
La création de telles grilles et des expressions associées peut nécessiter un certain



6 selon la nature et le nombre de leurs solutions. Descartes propose pour celles-ci diverses méthodes de résolution et rappelle celles de ses prédécesseurs (Cardan, Tartaglia). Il lui apparaît de plus en plus clair que le respect des règles d’homogénéité complique l’écriture d’équations elles-mêmes assez difficiles à résoudre.

Descartes donne alors un autre exemple de problème géométrique qu’il va encore une fois résoudre par l’algèbre et les méthodes qu’il a exposées auparavant. Au sein de cette étude il en vient à résoudre un petit exercice dans lequel les dimensions entre les quantités ne sont clairement pas les mêmes.
"Tout de même si on veut diviser l’angle NOP, ou bien l’arc ou portion de cercle NQPT en trois parties égales, faisant NO = 1 pour le rayon du cercle, et NP = q pour la subtendue de l’arc donné, et NQ = z pour la subtendue du tiers de cet arc, l'équation vient : $z^3 = 3z - q$ " (on aura bien sûr remarqué le changement de statut de la lettre z qui est à nouveau l’inconnue).
L’égalité obtenue, du point de vue des dimensions, oppose un volume à différence d’une aire par une longueur. La rupture avec la géométrie des Anciens est entièrement consommée…

C’est la dernière étape d’un long processus d’abstraction où l’on est passé de la résolution géométrique d’un problème du plan à une résolution exclusivement numérique. Les quantités numériques ont pris, dans les calculs, la place des quantités géométriques, des grandeurs. L’analogie est complète entre les deux catégories.

Bien entendu – et Descartes soulèvera le problème sans le régler – les équations algébriques possèdent des solutions ("sourdes" ou "fausses") qui n’ont pas d’interprétation géométrique possible. Le champ des nombres dépasse, en fin de compte, largement celui des grandeurs.
"Cette géométrie de Descartes est une *Algèbre des longueurs*. Même s’il ne se prononce pas clairement sur la nature du rapport géométrique (est-il un nombre ou pas ?) ou plutôt, […], même s’il maintient la distinction entre nombre et rapport géométrique, l’avancée sur le plan de la numérisation des rapports est importante." (E. Cousquer)

Des sources d’inspiration largement citées…

La Géométrie – **Descartes –** Editions Jacques Gabay

De la théorie des proportions à la notion de nombre réel – **E. Cousquer :** http://www.lille.iufm.fr/labo/cream/ressources/savoirPlus/R/Ch94/Ch94.pdf

La Géométrie de Descartes - **P. Debart :**

http://perso.wanadoo.fr/debart/geometrie/geom_descartes_interactif.html

Eléments **– Euclide :**

<u>Etude d'un cas particulier.</u>

Après la résolution dans le cas général, vient l'étude d'un cas particulier. Descartes utilise alors un repère d'origine A, l'axe des abscisses étant la droite horizontale (AG) ; l'axe des ordonnées dans la direction BC faisant un angle de 60° avec l'horizontale, orienté vers le bas (même figure qu'à la page précédente).
(suivent les valeurs des différents paramètres de la résolution générale)

La quantité "d'homogénéité" *z* disparaît alors remplacée par la valeur 1. Descartes obtient alors des expressions comme celle sous le symbole racine

Et si on veut expliquer toutes les quantités données par nombres, en faisant par exemple $EA = 3$, $AG = 5$, $AB = BR$, $BS = \frac{1}{2}BE$, $GB = BT$, $CD = \frac{3}{2}CR$, $CF = 2CS$, $CH = \frac{2}{3}CT$, et que l'angle ABR soit de 60 degrés, et enfin que le rectangle des deux CB et CF soit égal au rectangle des deux autres CD et CH ; car il faut avoir toutes ces choses afin que la question soit entièrement déterminée ; et avec cela, supposant $AB = x$, et $CB = y$, on trouve par la façon ci-dessus expliquée.

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2,$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2},$$

si bien que BK doit être 1, KL doit être la moitié de KI ; et pourceque l'angle IKL ou ABR est de 60 degrés, et KIL qui est la moitié de KIB ou IKL, de 30, ILK est droit. Et pourceque IK ou AB est nommée x, KL est $\frac{1}{2}x$, et IL est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, et la quantité qui étoit tantôt nommée z est 1, celle qui étoit a est $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui étoit m est 1, celle qui étoit o est 4, et celle qui étoit p est $\frac{3}{4}$, de façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour IM, et $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pour NM ;

(1 + 4*x*) pour laquelle les règles d'homogénéité n'appliquent plus : la somme d'une longueur et d'une aire… La quantité *z* revient toutefois dans la conclusion générale du problème.

Le livre troisième

Il s'ouvre sur une classification des équations algébriques allant jusqu'au degré

temps.
C'est ce temps que l'on se propose de vous faire gagner…

Tout d'abord, nous allons donner une liste d'expressions qui génère une cinquantaine de coefficients (<u>chaque lettre étant générée environ 2 fois</u>). On donnera ensuite un exemple de préparation de grille.

A = $(3x - 2)^2 + 12$
B = $(x + 1)(4x - 2) - 2(8-3x)$
C = $(x + 7)^2 + 3(2x^2 - 10) + 1$
D = $(5x - 2)^2 + (2x - 3)(x + 2) - x^2$
E = $(2x - 4)^2 + x(x - 1)$
F = $(3x^2 - 4) - (2x^2 - 7x + 3) - (-10 + x)$
G = $3(2x^2 - 4x) + 2(x^2 - 5x - 12)$
H = $(5x - 2)^2$
I = $(10x^2 - 10x + 10) - (9x^2 - 8x - 7)$
J = $(3 - 3x)(1 + 5x)$
K = $-3x(6x - 2) - 5(-2 - 3x)$
L = $(3 - 5x)(3 + 5x)$
M = $(2x + 5)^2 + (x^2 - 9x - 12)$
N = $(2x - 1)(1 - 7x) - (6 - 14x)$
O = $2x^2 - 7x - 11 - 10 - 10x + 4x^2$
P = $(3x + 4)^2 + (2x)^2 + (-3)^2$
Q = $(4 - 3x)^2 + (x^2 + 5x + 6)$

L'expression A fournit les coefficients A_2, A_1, A_0, l'expression B les coefficients B_2, B_1, B_0, etc.
Le tableau suivant fournit, pour chaque lettre de l'alphabet les coefficients correspondants et par suite les expressions à sélectionner :
Exemple de préparation de grille…

Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients	
A	F_2	I_2	**F**	F_1	O_2	**K**	M_1	P_0	**P**	A_0	E_0	**U**	O_0	K_1
B	D_0	I_1	**G**	N_0	C_2	**L**	A_1	J_1	**Q**	O_1	I_0	**V**	G_1	Q_0
C	J_0	F_0	**H**	B_1	G_2	**M**	P_2	M_0	**R**	K_2	B_0	**W**	N_1	
D	B_2	H_0	**I**	A_2	L_0	**N**	C_1	N_2	**S**	D_1	Q_1	**X**	G_0	P_1
E	E_2	M_2	**J**	Q_2	K_0	**O**	E_1	J_2	**T**	C_0	H_1	**Y**	H_2	L_2
												Z	D_2	

On forme une grille avec des mots :
En utilisant le tableau précédent, on remplace les lettres par les coefficients correspondants :

				M	E	T	Z
	O			I			
D	R	U	I	**D**	E		
				I			

(dans cet exemple, H_0 et B_2 représentent la lettre D).

				P_2	E_2	H_1	D_2
	E_1			A_2			
$\mathbf{H_0}$	K_2	O_0	A_2	$\mathbf{B_2}$	E_2		
				A_2			

Il suffit alors de donner cette grille à l'élève ainsi que les expressions nécessaires :
$P = (3x + 4)^2 + (2x)^2 + (-3)^2$
$E = (2x - 4)^2 + x(x - 1)$
$H = (5x - 2)^2$
etc.
Remarques…

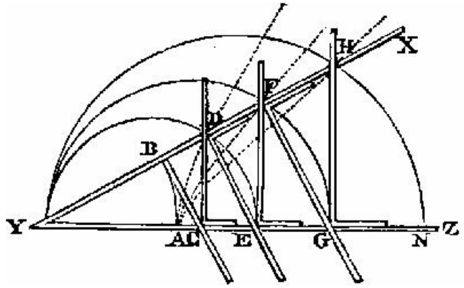
(Suite page 7)

" La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques "
Siméon Denis POISSON (1781-1840), mathématicien.

supposer le problème résolu, désigner par des lettres quelques longueurs bien choisies (connues ou non) puis exprimer les autres longueurs en fonction de ces dernières. Le problème géométrique est ainsi ramener à un problème algébrique :
"Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes je considère l'une des données, et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres."
Descartes met ainsi en place son système de repérage : on va exprimer en fonction de deux longueurs CB et AB toutes les autres, compte tenu des positions particulières des différents points de la figure. Ceci étant bien sûr possible du fait que les droites AB et CB ont des directions différentes.
"Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x ; et que BC soit nommé y ; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusques à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, et si elles ne leur sont point parallèles ; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T".

Expression des différentes longueurs du problème.

Les longueurs de base étant données, on peut maintenant déterminer les autres en tenant compte des rapports de proportionnalité évoqués dans l'énoncé du problème. Ces rapports censés être connus sont donc désignés par des lettres du début de l'alphabet : a, b, c, d … pour les distinguer des longueurs inconnues désignées par des lettres de la fin de l'alphabet : x ou y.
Cependant la lettre z qui apparaît dans la suite ne joue pas à proprement parler le rôle d'une inconnue.
"Puis à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnés, la proportion qui est entre les côtés AB et BR est aussi donnée, et je la pose comme de z à b, de façon que AB étant x, RB sera bx / z…"
La variable z est introduite pour respecter les règles d'homogénéité de Viète. Elle sera remplacée par 1 dans l'étude d'un cas particulier dans la suite de la résolution. Elle donne, en quelque sorte, l'unité de longueur choisie. C'est la longueur 1 du segment avec lequel on pouvait construire le produit ou le quotient de deux longueurs.
Son existence, toujours sous-entendue en géométrie analytique, est pourtant indispensable à la construction d'un repère quel qu'il soit. Les graduations des axes y sont rapportées, les distances à l'origine du repère en dépendent.
De ce fait, elle apparaît dans l'expression de toutes les longueurs de la figure.
"… et la toute CR sera $y + bx / z$ à cause que le point B tombe entre C et R […]. Tout de même les trois angles du triangle DRC sont donnés, et par conséquent aussi la proportion qui est entre les côtés CR et CD, que je pose comme de z à c, de façon que CR étant $y + bx / z$, CD sera $cy / z + bcx / z^2$ "…



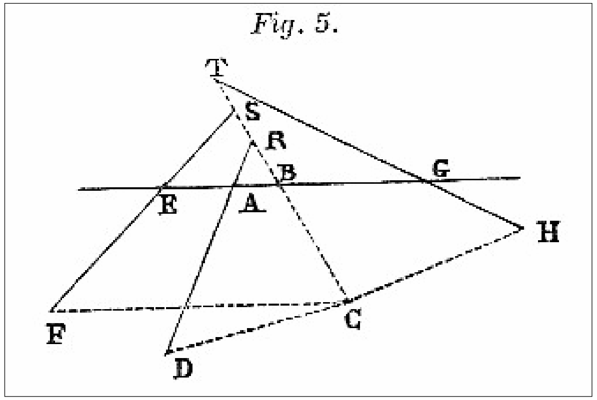
trouvée limitée par le choix des instruments choisis pour sa résolution : la règle et le compas. Si ces instruments sont bien adaptés pour résoudre des équations du second degré, ils ne le sont plus pour des équations de degré supérieur à 2.

Il propose alors un traceur de courbe de son invention (*voir figure ci-dessus*), instrument de mécanique et non de géométrie si l'on s'en tient à la classification des "Anciens" et qui serait moins "orthodoxe".

Mais la résolution de ce problème millénaire, si elle aboutit sur la construction des différentes coniques, se fera essentiellement par le calcul.

<u>Rappel de l'énoncé</u>

(*voir fig. 5*) "Soit AE, AD, EF, GH, etc., plusieurs lignes données par position, et qu'il faille trouver un point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF et CH, en sorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, etc., soient donnés, et que ce qui est produit par la multiplication d'une partie de ces ligues soit égal à ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils aient quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile."



Un énoncé que l'on pourrait aussi formuler ainsi dans le cas où les angles CBA, CDA … sont droits : "On donne quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 et un point M que l'on projette orthogonalement en A, B, C et D sur ces droites. On demande alors de trouver tous les points M tels que $MA \times MB = \alpha\, MC \times MD$."

<u>Mise en place d'une résolution</u>

La méthode adoptée est celle qui a été proposée dans les pages précédentes :

- Afin de favoriser le travail personnel de l'élève (et d'éviter certaines dérives…), il peut être utile au sein d'une même classe de proposer différentes grilles, ou de proposer une seule grille mais avec des expressions associées différentes, possibilité offerte puisque chaque lettre est générée par deux coefficients.
- Lorsque l'élève aboutit à la forme réduite d'une expression, un seul coefficient lui est parfois utile ; aussi, le fait de découvrir une lettre juste ne garantit en rien l'exactitude du calcul. Faire travailler les élèves par groupes homogènes peut s'avérer nécessaire.
- Prolongement : demander aux élèves de créer leurs propres grilles…

Une grille toute prête…

Les mots formant **la grille de la page suivante** concernent la géographie sud-meusienne, plus particulièrement les alentours de Vaucouleurs….

$A = (3x - 2)^2 + 12$ $B = (x + 3)(4x - 2) - 3\,(4 - x)$
$C = (x + 7)^2 + 3\,(2x^2 - 10) + 1$ $D = (5x - 2)^2 + (2x - 3)(x + 2)$
$E = (2x + 4)^2 + x\,(x - 1)$ $F = (3x^2 - 4) - (2x^2 + 3) - (-10 + x)$
$G = 3\,(2x^2 - 4x) + 2\,(x^2 + 2x)$

(Suite page 8)

Commission " Histoire des mathématiques "

La première réunion de cette commission de travail de l'APMEP-Lorraine pour 2004-2005 aura lieu le

mercredi 13 octobre 2004 de 14 h 15 à 17 h

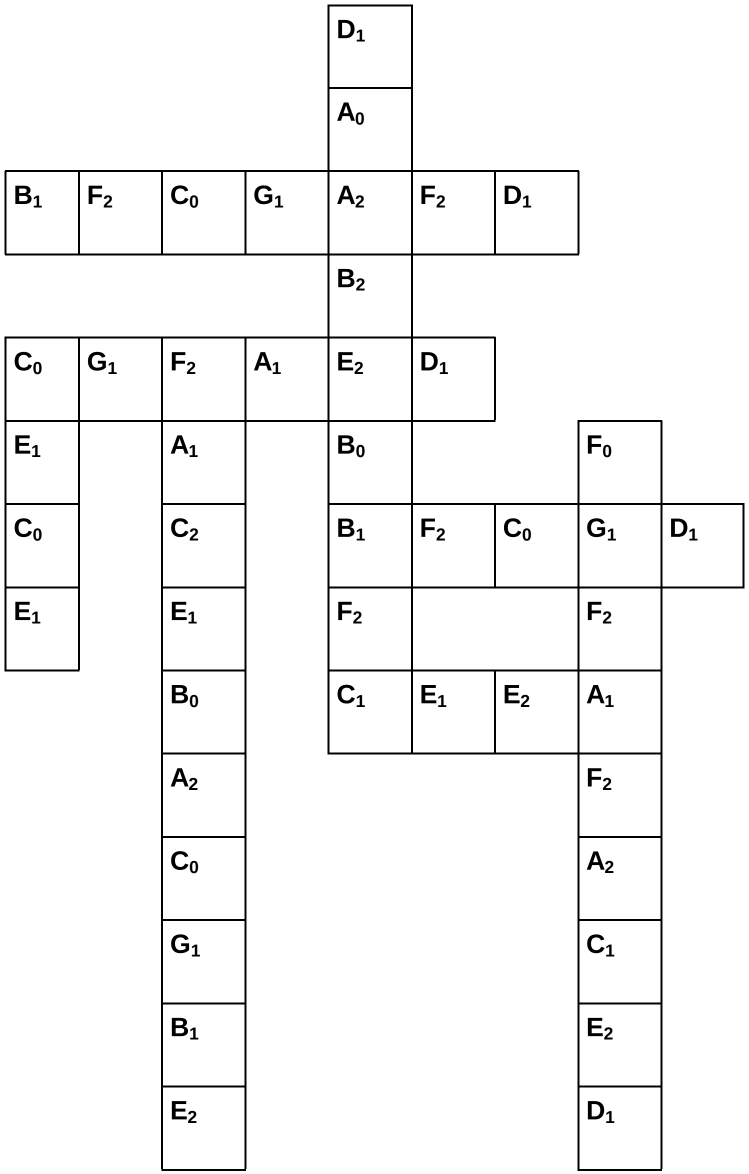
à l'IREM de Lorraine (Vandoeuvre, Faculté des sciences, bâtiment du 1er cycle).

A cette première réunion, Gilles Waehren nous présentera les mathématiques babyloniennes, puis nous établirons le programme de travail de l'année.

Venez nombreux, même si vous n'avez jamais travaillé pour vous ou pour vos élèves l'histoire des mathématiques.

Pour tout contact s'adresser à Maryvonne MÉNEZ-HALLEZ, 10 Grand'Rue, 54120 DENEUVRE. Tél 03 83 75 56 12 Mèl : <u>maryvonne.hallez@ac-nancy-metz.fr</u> ou <u>philodonon@wanadoo.fr</u>

(Suite de la page 7)



constructibles à la règle et au compas. "*Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule.*" On peut ainsi résoudre des problèmes géométriques exclusivement par des calculs par des mises en équations.

Alors que, chez les mathématiciens arabes, l'usage était de mettre la géométrie au service de l'algèbre dans le cadre de la résolution d'équations algébriques. Le processus inverse est ici mis en place et va offrir de nouvelles perspectives aux mathématiques. Mais on est encore loin de la fluidité que permettent la notation symbolique et les simplifications utilisées dans les mathématiques actuelles.

Les règles d'homogénéité de Viète

Des théories grecques, Viète a conservé la loi des homogènes : on ne peut additionner et soustraire que des grandeurs homogènes. Le produit de deux grandeurs homogènes (ou non), donne une grandeur d'une autre dimension. De même la division de grandeurs, est définie en référence à la notion grecque.

Dans un premier temps, afin de respecter les règles énoncées par Viète dans le cadre de l'écriture littérale, Descartes fait apparaître dans ses calculs le segment de longueur 1 évoqué précédemment. Il s'agit de mettre en opposition des grandeurs ayant les même unités : "Afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple : AB = 1, GH = a, BD = b etc. […] Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord […] donner des noms à toutes les lignes […] aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres". Cette accumulation de lettres peut d'ailleurs compliquer la lecture de l'ouvrage. "Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimension l'une que l'autre lorsque l'unité n'est pas déterminée en la question" en introduisant des lettres supplémentaires dans ses calculs. Ainsi, Descartes propose-t-il de résoudre : $z^2 = - az + b^2$ (ou $zz = -az + bb$ comme il a plus souvent coutume de l'écrire) où la quantité positive est désignée par b^2 pour que toutes les quantités de l'équation aient la même dimension.

"…mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même". On se dirige doucement vers une simplification des règles par des sous-entendus.

Début de la résolution du problème de Pappus

La résolution du problème de Pappus commence par un rappel de l'énoncé et des ébauches de solutions apportées dans certains cas simples. Descartes considère que la résolution de ce problème dans un cadre plus général s'est