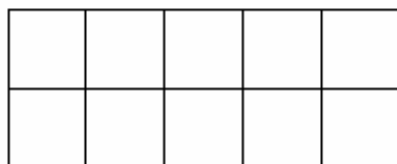
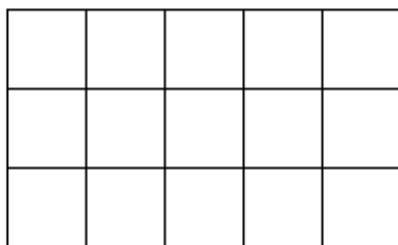


DEUX RECTANGLES ACCOLÉS ET DES POLYGONES

François DROUIN
Collège Les Avrils
55300 SAINT MIHIEL



Accole ces deux rectangles pour former des polygones. Ils devront être accolés par un nombre entier de côtés de carreaux.

Dessine au moins cinq polygones différents.

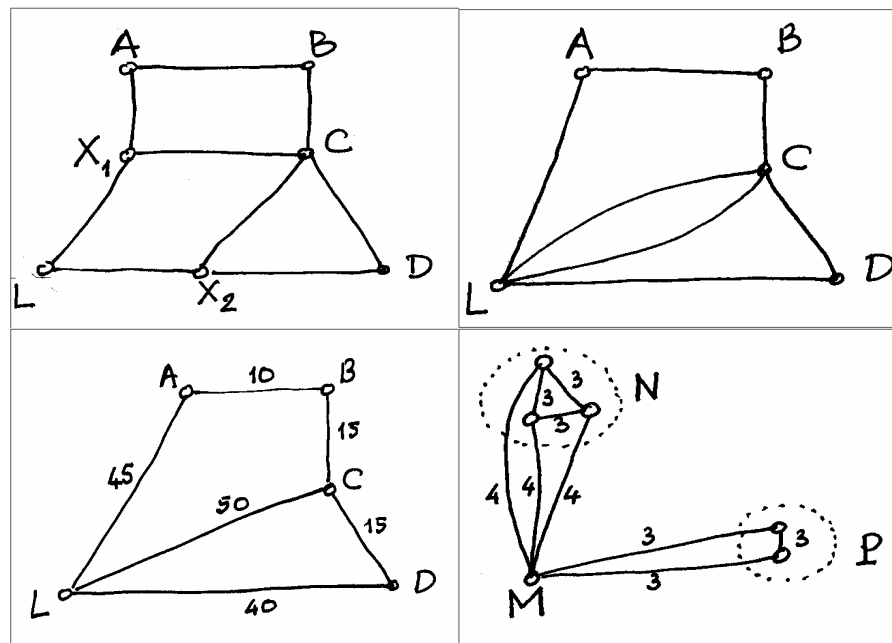
Sous chaque polygone, indique en vert son aire et en rouge son périmètre. L'unité d'aire sera l'aire d'un carreau, l'unité de longueur sera la longueur d'un côté de carreau

Questions "supplémentaires" proposées par la suite :

- Quelle est la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone obtenu ?
- Quelle est la valeur minimale possible pour le périmètre du polygone obtenu ?
- Pouvons nous trouver des polygones ayant pour périmètre les valeurs entières comprises entre les valeurs minimale et maximale envisagées aux questions précédentes ?

Quelques remarques :

- Les élèves remarquent aisément que les polygones dessinés ont même aire, cependant le fait d'indiquer l'unité à utiliser induit le comptage des carreaux et peu d'élèves, hélas, pensent au fait que



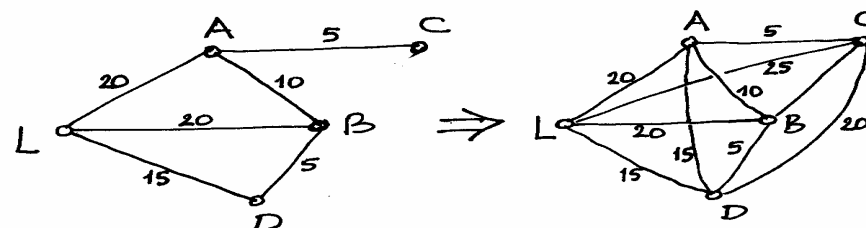
la figure 2 : il y a deux arêtes entre L et C, l'une correspondant à l'itinéraire L X₁ C, l'autre à L X₂ C. Ensuite on pondère les arêtes avec les temps de parcours, et s'il y a plusieurs itinéraires possibles entre deux points, on ne garde que le plus court en temps (figure 3).

S'il y a plusieurs clients dans la même ville, il faut créer un sommet du graphe pour chacun d'entre eux, et les arêtes qui les relient deux à deux (en leur donnant le " poids " de 3 minutes), et chacun de ces clients doit être relié aux villes contiguës (voir figure 4 sur l'exemple de Nonhigny-Montreux-Parux).

En toute généralité, le camion peut se trouver à sec chez n'importe quel client : il faut donc ajouter une arête liant chaque client à l'entrepôt de Lunéville.

En principe, il faudrait également compléter ce graphe déjà imposant par tous les itinéraires d'un client à un autre : cela alourdit énormément le problème, mais si on ne le fait pas, on n'est pas sûr de trouver un cycle hamiltonien (figure 5).

Il faut alors modéliser les temps de livraison. On peut pour cela orienter le graphe : chaque



LE LIVREUR DE FUEL LORRAIN : ÉLÉMENTS DE SOLUTION

Pour avoir l'énoncé de ce problème, se reporter à notre numéro de juin, ou alors à notre site <http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep> (rubrique Le Petit Vert).

Nous avons reçus une première solution, empirique, de Pol LE GALL (IUFM Metz), qui débute par les remarques préliminaires suivantes :

La tournée du livreur prévoit la livraison de 103 kl de fuel. Le camion a une capacité de 21 500 l. Il faudra donc au moins effectuer 5 voyages.

L'énoncé présente une imprécision : que signifie " aux environs de 17h " ? Quelle est la tolérance ? Un aller retour en journée pour recharger le camion prend entre 94 et 110 minutes. (...)

Compte tenu de tout cela, je propose une solution en cinq jours, un voyage par jour. (Ce qui règle le problème de la fin de journée).

La solution de Pol correspond à 27 h 44' de travail total (pauses repas comprises), réparties sur 5 " courtes " journées : le livreur termine en effet ses journées respectivement à 15 h 25, 14 h 49, 14 h 44, 14 h 41 et 14 h 35.

L'énoncé était cependant ambigu : " **Établir la tournée de livraison pour ce chauffeur, de façon à ce qu'il travaille le moins de temps possible** ".

On pourrait comprendre cette phrase autrement : établir la tournée de façon que le chauffeur ait terminé sa semaine le plus tôt possible (auquel cas son camion serait disponible pour une nouvelle tournée). Les journées étant prévues pour 8 h 30 de travail (pause repas comprise), on doit pouvoir " tourner " en quatre journées ; en effet, aux 27 h $\frac{3}{4}$ comptées par Pol, il faut ajouter (au maximum) quatre retours à Lunéville pour recharger en cours de journée (soit environ 6 h), et ôter une pose repas (30 min).

Qui peut améliorer soit la solution de Pol (temps total de travail minimal), soit la solution que nous proposons (dernier retour le plus tôt possible dans la semaine) ? A vos calculettes...

Éléments pour mettre en œuvre une solution automatisée

Christophe LENTÉ (auteur de la conférence sur les applications pratiques de la théorie des graphes, le 18 mars dernier) nous a écrit quelques mots au sujet de ce problème.

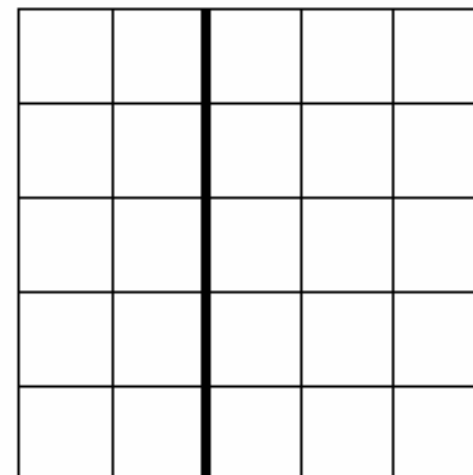
" Il s'agit d'un problème difficile, qui occupe en ce moment beaucoup de thésards et d'universitaires. (...) J'ai peur que pour votre problème, la recherche de la solution optimale soit longue ! "

La première chose à faire est de créer un graphe où les arêtes représentent des itinéraires et pas forcément des morceaux de route, afin de faire disparaître les croisements qui ne correspondent pas à des livraisons.

Par exemple, si on a un réseau tel que celui de la figure 1, on lui fait correspondre celui de

les polygones sont formés des deux mêmes rectangles.

- b Lorsqu'en préalable le périmètre et l'aire de chacun des rectangles de départ sont rappelés, certains élèves pensent que le périmètre de la figure ci-dessus (configuration étant facilement acceptée comme ayant un



périmètre minimal) est égal à la somme des périmètres des deux rectangles qui la constituent. Il est facile de faire constater que la figure représente un carré, et que le périmètre de ce carré n'est pas égal à la somme des périmètres des rectangles de départ.

Cette erreur (additivité des périmètres) peut-être utilisée pour faire émerger le fait qu'il est possible de trouver le périmètre de chaque polygône en soustrayant deux fois la longueur de la partie commune de la somme des deux périmètres.

Le périmètre est maximal lorsqu'on "cache" le minimum de côtés de carreaux et le périmètre est minimal lorsqu'on "cache" le maximum de côtés de carreaux. Ceci permet de justifier ou d'infirmar les maximum et minimum envisagés par les élèves .

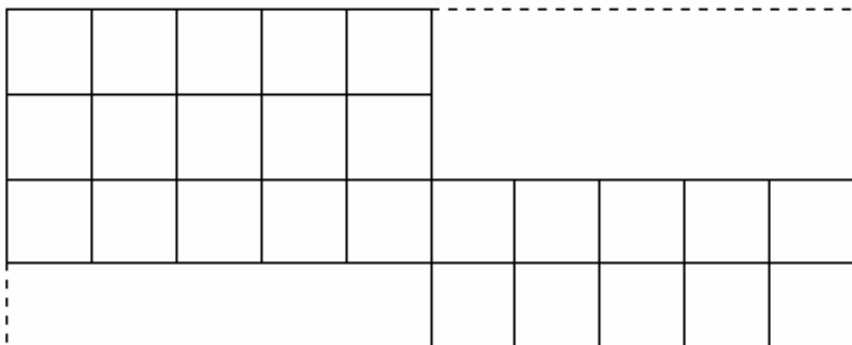
- c Les élèves constatent vite qu'il semble difficile d'obtenir des périmètres impairs. Est-il réellement impossible d'obtenir des périmètres impairs pour de tels polygônes?

Quelques pistes explorées par les élèves :

La somme des périmètres des deux rectangles est 30. Selon le nombre de côtés de carreaux cachés, il faut ôter 2, 4, 6 ou 8 unités de

- b En faisant "entourer " le polygône par un rectangle, les élèves

longueur. Les périmètres possibles sont alors 22, 24, 2 ou 28.



constatent que ce rectangle a même périmètre que le polygône dessiné. Il n'est pas très difficile de prouver que le périmètre du rectangle est nécessairement un nombre pair (2 fois la largeur + 2 fois la longueur, c'est à dire la somme de deux nombres pairs, ou deux fois la somme de la longueur et de la largeur, c'est ici une possible introduction à des écritures littérales). Le résultat conjecturé peut ainsi être justifié.

- c Il est aussi possible de leur faire saisir qu'en faisant le tour du polygône, il y aura autant de trajets $\rightarrow$ que de trajets $\leftarrow$ et autant de trajets $\uparrow$ que de trajets $\downarrow$ (puisqu'on revient au point de départ...). Le nombre de trajets horizontaux est pair, le nombre de trajets verticaux est pair et il y a ici aussi une bonne occasion d'utiliser le fait que la somme de deux nombres pairs est paire (c'est une évidence pour les élèves).
- d Pour trouver le périmètre des polygônes proposés, le comptage des unités de longueur n'est pas si aisé qu'on pourrait le penser: les élèves ne savent plus de quel sommêt ils sont partis, des résultats sont proposés avec une erreur d'une unité... La méthode d'"entourage" du polygône par un rectangle est la bienvenue, et il est remarquable que les élèves la réutilisent sans difficulté en cours d'année.

particulière ?

Question 4 : Comment les mathématiciens " professionnels " définissent-ils la "symétrie" ?

Conclusion :

L'étude des transformations au collège paraît faire admettre des tas de choses en s'appuyant sur des images mentales incorrectes ou non stabilisées, et sans doute la plupart du temps insuffisamment éclaircies en classe...

Ce texte peut être le départ d'un débat à enrichir encore.

Vos remarques à propos de cet écrit de la commission "collège" sont à faire parvenir à Martine.Dechoux@ac-nancy-metz.fr

Bibliographie :

Nos "anciens" lecteurs pourront également se reporter à une étude didactique sur la symétrie orthogonale, publiée dans Le Petit Vert n° 25 de mars 1991, pages 4 à 7. Ce numéro est malheureusement épuisé.

Sur la toile...

Les nouveautés de septembre des pages Maths du site académique. Adresses données par Christophe PRÉVOT, animateur du site académique de mathématiques (Christophe.Prevot@ac-nancy-metz.fr)

Site sur l'évaluation par compétences : <http://vincent.obaton.free.fr> (appelé aussi <http://www.evaluer.net>)

Trois sites sur les illusions d'optique : <http://ajl.montreal.qc.ca/jeux/illusion/illusion.html>, <http://perso.wanadoo.fr/5sens/œil>, et <http://membres.lycos.fr/pow0/illusion.htm>

Logiciels en ligne ou à télécharger :

Traceur de fonctions, de formules, calculatrices et convertisseurs : <http://michel.gravier.free.fr>

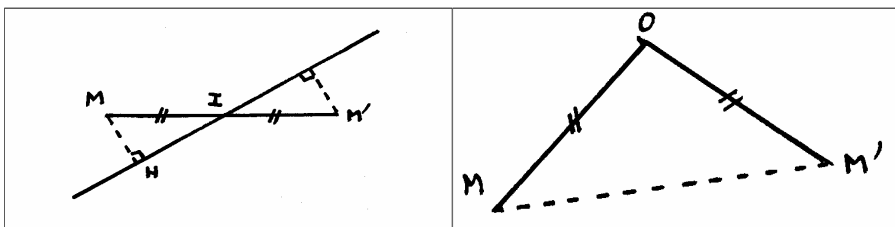
Logiciel du jeu "Le Compte est bon" à télécharger : <http://persoweb.francenet.fr/~fouquetp>
Logiciel Clic pour la création d'exercices et exemples d'exercices : <http://www.erasme.org/clic>

SUR VOTRE AGENDA : Prochaine réunion du Comité de la régionale, le mercredi 27 novembre à 15 h au lycée Varoquaux de Tomblaine.

M' est le symétrique de M par rapport à la droite (d) ou par rapport au point O ou par rapport au plan (P) si la longueur MM' est égale à deux fois la distance du point M au point O, à la droite (d) ou au plan (P). (et qu'il sont situés de part et d'autre de...)

(figure 5) M' n'est pas le symétrique de M par rapport à la droite (d) en faisant intervenir la distance d'un point à une droite (4^{ème}) et l'inégalité triangulaire (5^{ème}) : $IM > MH$

(figure 6) M' n'est pas le symétrique de M par rapport à O (inégalité triangulaire) :



$$MM' < 2 OM$$

L'idée est d'essayer d'être cohérent dans le discours que nous tenons aux élèves. Est-il plus intéressant de faire appel à des notions dynamiques "ça tourne" ou à des conditions d'égalité des distances ? Les méthodes avec les longueurs (reflets) nécessitent de justifier qu'il s'agit d'isométries alors que les visions dynamiques évitent cette angoisse (la figure tourne, elle n'est pas déformée).

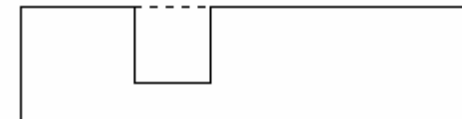
Question 1 : Les images mentales ne sont-elles pas génératrices des difficultés en ce qui concerne la symétrie axiale ? L'axe "oblique" a parfaitement sa place en mathématiques mais peu dans le réel et entre parfois en conflit avec toutes les images mentales des élèves. Est-il judicieux de faire appel à ces images mentales en introduction du chapitre ? Si nous tenons compte du fait que l'objectif est la construction géométrique du symétrique d'un point qui permet ensuite la construction de la figure symétrique d'une figure **point par point**, ne serait-il pas plus judicieux de commencer le chapitre par la définition et la construction du symétrique **d'un point** et de montrer **ensuite** que l'on retrouve ceci dans les cas particuliers de la vie courante ?

Si la symétrie est une transformation purement mathématique, et si le symétrique d'un point se construit à l'équerre et à la règle, que l'axe soit oblique ou non, cela devrait poser moins de problèmes pour les élèves. C'est peut-être notre appel trop fort à l'intuition qui les perturbe puisqu'ils cherchent ensuite toujours à s'y raccrocher et surtout à "deviner" la position finale pour éviter la construction point par point.

Question 2 : La symétrie axiale (confondue très souvent avec la symétrie par rapport à un plan) doit-elle continuée à être étudiée dans les "petites classes" de l'école primaire ? N'est-elle pas plus délicate à manier que la symétrie centrale ? Sur ce dernier point les membres de la commission sont partagés.

Question 3 : Doit-on étudier la symétrie centrale alors que ce n'est qu'une rotation

Il faut cependant bien prendre garde à leur présenter des polygones ayant un "creux" tel celui dessiné ci-dessous :
Il y a besoin d'adapter la méthode...



Il faut d'autant plus être prudent qu'une autre image mentale du périmètre sera activée en cours d'année lorsqu'il faudra faire découvrir une valeur approchée de π en faisant rouler des disques ou en les entourant par une ficelle : si nous faisons "rouler" les deux polygones dessinés précédemment, après un tour complet, nous n'obtiendrons pas leur périmètre.

En fin d'activité, il pourra être intéressant de faire émerger un certain nombre de méthodes permettant le calcul du périmètre d'un polygone: la somme des longueurs des segments formant la ligne brisée fermée, la longueur du rectangle qui l'entoure (avec toutes les précautions nécessaires, en particulier le fait que les côtés du polygone suivent les directions du quadrillage), la longueur parcourue par un sommêt lorsque le polygone fait un tour complet, la somme des périmètres des "sous figures" de laquelle on retire deux fois la longueur de la partie commune, une formule...

Il reste ensuite à proposer aux élèves de nombreuses figures géométriques et qu'ils envisagent quelle méthode est possible.

Dans l'excellente revue belge "Math-Jeune Junior" n°101J d'Avril 2002 pages 64 à 67 (La mathématique au quotidien - Mono..., duo..., polyminos), Claude Villers évoque les périmètres de ces polygones formés de n carrés élémentaires. La méthode indiquée utilise le nombre de carreaux et de segments "unités" intérieurs et peut être également proposée à nos élèves.

