Une classe de 3ème s'attaque au problème du trimestre du Petit Vert

Comme annoncé dans notre précédent numéro, nous avons reçu de Mme BLUM, professeur au collège Jules-Lagneau de Metz, un courrier en réponse au problème du trimestre n° 48, dans lequel elle disait: « *J'ai proposé ce problème à ma classe de 3ème 2, en donnant des valeurs numériques à α, h et p pour mettre ce problème à leur niveau. J'ai guidé l'analyse de la figure en posant des questions et en m'attachant à laisser transparaître la solution générale derrière leurs calculs* ». Elle ajoute également que « *cette recherche les a passionnés* », ce qui, en tant qu'enseignants de mathématiques, ne saurait que nous réjouir.

Voici donc le problème modifié, la solution "collégiale" proposée par la classe (à laquelle je n'ai pas changé une ligne) et la discussion de Mme Blum.

Analyse de la figure

Construire ABC connaissant le périmètre p = 12 cm, la hauteur issue de A : h = 3 cm et l'angle A = 68°.

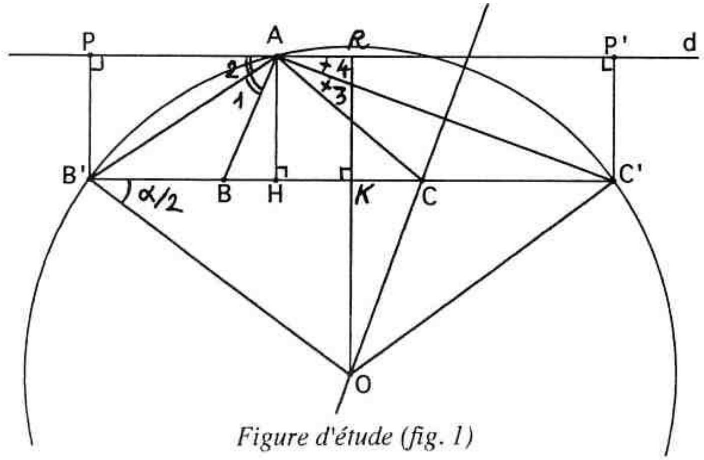


Figure d'étude (fig. 1)

1) Tous les points situés à 3 cm de (BC) sont sur deux parallèles à (BC) ; soit (d) l'une de ces parallèles : **A ∈ (d).**

2) On peut faire apparaître le périmètre p = 12 cm :

On trace BB' = BA B' Î (BC)
CC' = CA C' Î (BC)
B'C' = p = 12 cm.

3) Calcul de $B'AC'$:

$B' = A_1$ (ABB' isocèle) ; $B' = A_2$ (angles alternes-internes formés par les parallèles (BC) et (d) et la sécante (AB')).

Donc $A_1 = A_2$, de même que $A_3 = A_4$, et $B'AC' = A_1 + BAC + A_3$.

Or $A_1 + A_3 = \frac{180° - BAC}{2} = 90° - \frac{BAC}{2}$, donc $B'AC' = 90° - \frac{BAC}{2} + BAC$, d'où

$B'AC' = 90° + \frac{BAC}{2}$ et $B'AC' = 90° + 34° = 124°$

4) Si P et P' sont les projetés orthogonaux de B' et C' sur (d), alors (AB) est le symétrique de (AP) par rapport à (AB'), car [AB') est bissectrice de PAB.
De même (AC) est le symétrique de (AP') par rapport à (AC').

5° On construit le cercle inscrit à AB'C'; soit O son centre.

$B'AC' = 90° + \frac{A}{2}$, donc $B'AC'$ est obtus. Donc A et O sont de part et d'autre de (B'C').

$B'AC'$ intercepte le grand arc $B'C'$; $B'OC'$, angle au centre, intercepte le grand arc $B'C'$, donc l'angle rentrant $B'OC'$ égale 248°.

Dans le triangle B'OC' isocèle : $OB'C' = OC'B' = \frac{180° - B'OC'}{2}$,

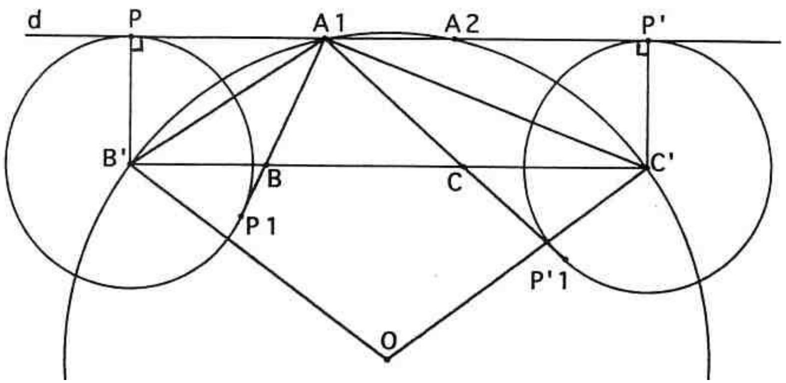
$OB'C' = \frac{180° - (360° - B'OC'\ \text{rentrant})}{2}$, $OB'C' = \frac{\left[360° - 2 \times \left(90° + \frac{A}{2}\right)\right]}{2}$,

$OB'C' = \frac{A}{2} = 34°$

D'où la construction de l'arc $B'C'$ sur lequel se trouve A

Donc A est sur (d) et sur $B'C'$

Programme de construction



Je trace un segment [B'C'] de 12 cm de longueur.

Je trace le triangle isocèle OB'C' d'angles à la base $34° = \frac{\alpha}{2}$

Je trace le cercle de centre O et de rayon OB'

Je trace (d) parallèle à (B'C') à la distance h = 3 cm de (B'C'), de telle sorte que O et (d) soient de part et d'autre de (B'C')

(d) coupe le cercle en A_1 et A_2

Je choisis A_1

Je projette B' et C' en P et P' sur (d)

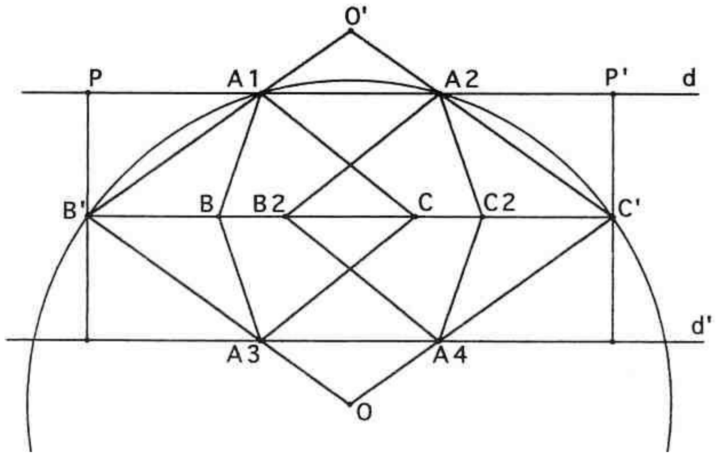
Je trace le symétrique P_1 de P par rapport à (A_1B')

Je trace le symétrique P'_1 de P' par rapport à (A_1C')

(A_1P_1) coupe (B'C') en B

($A_1P'_1$) coupe (B'C') en C

J'obtiens le triangle A_1BC (*figure 3*).



Avec le point A_2, j'obtiens le triangle $A_2B_2C_2$ symétrique du triangle A_1BC par rapport à la médiatrice de (B'C'].

En considérant (d'), la deuxième parallèle située à la distance h de (B'C'), j'obtiens les triangles BA_3C et $B_2A_4C_2$ symétriques de BA_1C et $B_2A_2C_2$ par rapport à (B'C').

On a donc 4 solutions.

Conditions d'existence (écrit par le professeur, D. Blum)

(voir la figure d'étude n°1)

$$\mathbf{0<\alpha<\pi} \quad \textbf{(1)}$$

Dans le triangle ABC de hauteur [AH] :

AC – HC < AH < AH + HC, dans le triangle AHC,

AB – HB < AH < AB + HB, dans le triangle AHB

D'où AC + AB – CB < 2AH < AC + AB + BC.

Or BC < AC +AB. Donc : $\mathbf{0<h<\frac{p}{2}}$ **(2)**

La droite (d) coupe l'arc B'C' si OR < OB' (OR = distance de O à (d)).

Dans le triangle OKB' rectangle en K :

$OB' = \dfrac{\frac{p}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ et $OK = \frac{p}{2}\times\tan\frac{\alpha}{2}$. D'autre part OR = OK + KR.

OR < OB' devient $\frac{p}{2}\times\tan\frac{\alpha}{2}+h<\dfrac{\frac{p}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Or $\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ donc $0<\cos\frac{\alpha}{2}$ d'où $h.\cos\frac{\alpha}{2}<\frac{p}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Après « manipulations » trigonométriques :

$h<\frac{p}{2}\times\tan\frac{\pi-\alpha}{4}$. Or $\tan\frac{\pi-\alpha}{4}<1$, donc $\frac{p}{2}\times\tan\frac{\pi-\alpha}{4}<\frac{p}{2}$

La condition (2) devient :

$$\mathbf{0<h<\frac{p}{2}\times\tan\frac{\pi-\alpha}{4}} \quad \textbf{(3)}$$

Pour que le triangle existe, il faut que α, p et h vérifient les deux conditions **(1)** et **(3).**