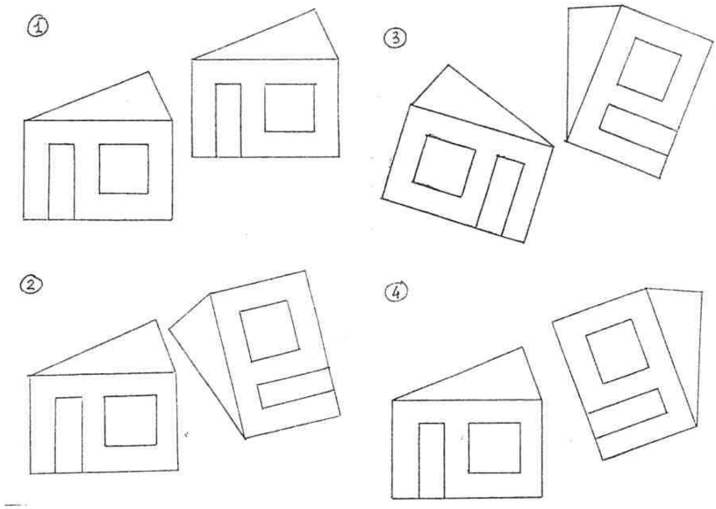
Introduire la symétrie glissée en classe de première S ?

Par Jacques VERDIER ([1])

Observons ces quatre figures : quelle est **<u>la</u>** transformation qui permet de passer de (F) à (F') ?



Dans les deux premiers cas, il s'agit d'un **déplacement**, et dans les deux autres cas il s'agit d'un **retournement** (ou antidéplacement). On peut "imager" cela auprès des élèves en utilisant (même par la pensée) un calque : faut-il simplement le faire glisser, ou est-il nécessaire de le retourner auparavant ?

On a une classification des isométries que je pourrais représenter ainsi :

- Isométries
  - Déplacements
    - Translations (fig ①)
    - Rotations (fig ②)
  - Retournements
    - Réflexions (fig ③)
    - ???????? (fig ④)

[1] jacverdier@orange.fr ; lycée Arthur Varoquaux, Tomblaine

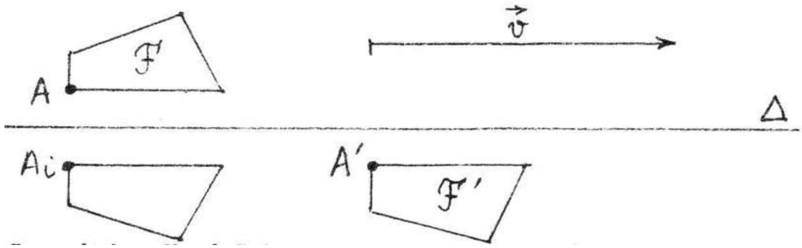
Dans le cas des déplacements, il est aisé de montrer qu'il n'y a **<u>que</u>** les translations et les rotations [j'exclus le cas de la transformation identique, qui n'est pas "intéressante", en ce sens qu'elle **n'opère pas** sur les figures ... elle a été introduite dans les programmes en 1971 pour obtenir une structure de groupe : qu'elle disparaisse avec l'abandon du travail sur ces structures].

Mais, dans le cas des retournements, il manque quelque chose ... pour que l'arbre ci-dessus soit complet.

Bien sûr, on pourra toujours s'en sortir en composant une réflexion (d'axe quelconque) et soit une translation, soit une rotation. Mais cette décomposition n'est pas unique (il y a même une infinité de solutions).

C'est pourquoi je plaide pour la (ré)introduction du maillon manquant : la "**symétrie glissée"**.

<u>Définition</u> :



On appelle "symétrie glissée" la composition d'une réflexion (d'axe Δ) et d'une translation de vecteur v (de même direction que Δ).

Bien évidemment, cette composition est commutative. Son effet sur les figures est "visualisé" sur le schéma ci-dessus.

Mais il faut essayer de penser cette "symétrie-glissée" (peut-être son nom est-il alors mal choisi) comme transformation unique, et pas comme composée.

<u>Quelques propriétés de cette symétrie glissée</u> :

1°) Si A a pour image A', alors le milieu de [AA'] appartient à Δ.

2°) Il n'y a pas de point invariant.

3°) Si le vecteur AB a pour image le vecteur A'B', la direction de la bissectrice principale de (AB , A'B') est la même que celle de Δ.

PROBLÈME : comment déterminer <u>la</u> symétrie glissée qui transforme le vecteur AB en vecteur A'B' ?

> Si ABA'B' n'est pas un parallélogramme, l'axe Δ sera la droite (IJ), où I est le milieu de [AA'] et J celui de [BB'], d'après la propriété 1.
>
> Si ABA'B' est un parallélogramme (je me place là dans un cas vraiment très particulier), I = J ; on utilise alors le troisième propriété ci-dessus : l'axe Δ est orthogonal à (AB) et (A'B').

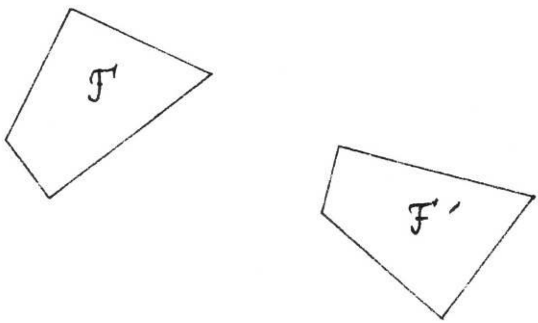
Bien évidemment, cette symétrie glissée transformant AB en A'B' est unique.

Corollaire :

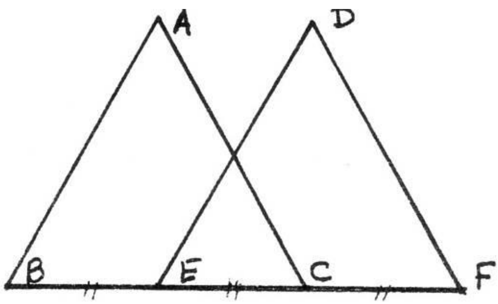
Muni de cette nouvelle transformation, je dispose de **quatre** isométries et, étant données deux figures (F) et (F') isométriques, il existe **une** (et **une seule**) isométrie transformant (F) en (F'). C'est bien ce que je désirais obtenir.

<u>Exercice 1 (facile)</u>

Déterminer les paramètres de la symétrie glissée qui transforme (*F)* en (*F'*).



<u>Exercice 2 (plus difficile)</u>



Déterminer toutes les isométries qui transforment globalement le triangle ABC en le triangle DEF ; c'est à dire le triplet (A,B,C,)
en le triplet (D,E,F),
en le triplet (D,F,E),
en le triplet (E,D,F), etc.