
## AU PIED DU MUR...

## DONT ON A POSÉ QUELQUES PIERRES.

Par Sylviane GASQUET

Fin novembre 93, me voici à la veille de rencontrer des enseignants qui, comme moi, mettent en œuvre le nouveau programme de mathématiques de la section Économique et Sociale. Bien sûr, il y a eu des "journées académiques", des rencontres "avant", mais voici les rencontres au vif du sujet ! Cette fois-ci, nous y sommes : ce mur que d'aucuns ont construit dans un lointain bureau de la rue du Bac (oui, oui... une telle adresse ne s'invente pas !), voilà qu'il nous faut l'escalader avec nos 35, voire 38 élèves, inquiets ou rieurs, intéressés ou plus souvent rebutés par leurs souvenirs mathématiques. Me voici donc professeur de première ES en train de "découvrir" les nouveaux programmes ! Car oui, travailler un programme avec des élèves, c'est vraiment le découvrir, même si on a - je dirai activement - contribué à son élaboration, et en particulier à la décision de proposer pour la première fois une formation du consommateur de chiffres..

### UNE TENTATIVE DE BILAN

### 1. Une double conviction...

- Il est utile, pour ne pas dire indispensable, de travailler la lecture de chiffres avec les élèves.
- L'image des mathématiques change pour les élèves : elles apparaissent comme une discipline qui aide à penser.

### ...et des constats:

**a)** Il y a des apprentissages de deux ordres : certains peuvent se traduire en *contenus*, d'autres sont en quelque sorte une *prise de recul sur ces contenus*. Et l'un ne devrait pas aller sans l'autre sous peine de perdre l'esprit du programme : former à la réception critique d'informations contenant des chiffres.

**b)** Il y a des contenus transversaux (les pourcentages) et des changements de cadres féconds (avec le calcul algébrique, avec le domaine des fonctions). La rédaction linéaire d'un texte de programme voile cela...

**c)** Enseigner cela n'est à coup sûr pas simple. Un travail d'observation et de recherche est nécessaire.

**d)** Une double formation des enseignants semble utile :

- ils doivent se constituer une culture personnelle (le document d'accompagnement du CRDP est une première approche que 1'on peut compléter avec la bibliographie proposée),
- et une formation pédagogique, car "faire cours" semble hors de propos ici.

**e)** Le problème de l'évaluation de tels savoirs reste posé.

Nous allons détailler quelques points sur des exemples.

## 2. Redécouverte du calcul algébrique... et méthode des "exercices presque jumeaux !"

Exercer l'élève à une réception critique des informations chiffrées peut-il se faire de manière méthodique ? Travailler sur des articles de presse dont les données sont insuffisantes (ou incohérentes) pour conclure, ne m'a pas semblé assez efficace, cela reste trop lié à la situation décrite dans chaque exemple. Les élèves ne peuvent pas déposer seuls le "décor" pour garder en eux une façon d'être, de réagir, dans un nouveau contexte.

La présentation d'exercices voisins, dont une seule donnée varie, permet davantage de dégager une méthode. D'autre part, les élèves préférant nettement travailler sur les données absolues, on peut les habituer à "nommer par une lettre" la ou les données souhaitées. Le calcul algébrique prend alors un autre visage... Il ne s'agit plus de modifier des écritures "pour rien" (factoriser, simplifier ...) mais de voir si la donnée, introduite en lettre pour le confort de la pensée, va s'éliminer ou pas des calculs. Si elle s'élimine, c'est donc qu'elle n'était pas nécessaire pour conclure, si au contraire elle demeure, c'est que les données du texte étaient insuffisantes... Par ailleurs, alors que le calcul numérique sur les données absolues ne laisse aucune trace de son passage puisqu'on effectue au fur et à mesure toutes les opérations, le calcul algébrique met en évidence la démarche de calcul...

**Exemple :**

*Trois entreprises doivent acheter chaque mois des emballages de deux qualités différentes. Le prix des emballages ordinaires augmente de 10 % et celui des emballages luxe de 15 % Dans chaque cas, peut on trouver le pourcentage d'augmentation des frais d'emballage?*

*L'entreprise A achète des emballages ordinaires, et des emballages luxes coûtant 1 F de plus la pièce. Elle achète 100 emballages ordinaires et 200 emballages de luxe chaque jour.*

*L'entreprise B achète des emballages de luxe coûtant 30 % plus chers que les emballages ordinaires. Elle achète chaque jour 100 emballages de luxe de plus que des ordinaires.*

*L'entreprise C achète des emballages de luxe coûtant 30 % plus chers que les emballages ordinaires. Elle achète 2 fois plus d'emballages de luxe que d'emballages ordinaires.*

Notons $e$ le prix de l'emballage ordinaire... et regardons le rapport $\dfrac{\text{prix nouveau}}{\text{prix initial}}$ :

A) $\dfrac{(100\times 1{,}10e)+(200\times 1{,}15(e+1))}{100e+200(e+1)}=\dfrac{4{,}40e+3{,}30}{3e+1}$ ... qui ne se simplifie pas. On ne peut pas conclure.

B) Pour B, on ne connaît pas la quantité d'emballages ordinaires : notons la $q$

$\dfrac{(e\times q\times 1{,}10)+(1{,}30e\times(q+100)\times 1{,}15)}{100e+1{,}3(q+100)}=\ldots$ qui se simplifie par $e$ mais pas par $q$ ! On ne peut toujours pas conclure.

C) Ici cela va se simplifier par $e$ et $q$ : on peut conclure....

**d'où l'intérêt d'une donnée sous forme de rapport lorsque l'on travaille sur les pourcentages...**

Arriver à écrire le calcul de A) sous la forme $1+\dfrac{0{,}10\times e+0{,}15\times 2(e+1)}{e+2(e+1)}$ pour voir que l'on pondère les augmentations d'après la part de chaque emballage dans la dépense totale (et que l'on peut prendre d'autres coefficients proportionnels) est un travail de longue haleine...

## 3. Exemple d'une difficulté à enseigner : la moyenne pondérée

Si enseigner la pondération consiste à donner valeurs, coefficients et formule, alors il y a peu de problème. Les élèves savent en effet calculer une moyenne de notes à un examen. Mais il s'agit alors de coefficients décidés arbitrairement, donc d'une règle du jeu.

**a. Reconnaître le modèle.**

Autre chose est de percevoir que dans certaines situations le modèle "moyenne sans coefficients" donne un nombre qui n'a pas d'interprétation légitime.

Dans une ville imaginaire, il y a les lycées suivants :

| Nom du lycée | Nombre de candidats | Nombre de reçus | Taux de réussite |
|---|---|---|---|
| Dupont | 50 | 40 | 80 % |
| Duparc | 90 | 55 | 92 % |
| Duval | 75 | 62 | 83 % |
| Dubois | 75 | 65 | 87 % |
| Dutour | 80 | 70 | 87 % |
| Dubuisson | 400 | 180 | 45 % |

Au vu de ces chiffres, un journaliste fait la moyenne des pourcentages et titre :

**Presque 80% de réussite au bac dans notre ville**

Qu'en pensez-vous? Rédiger sous forme d'article

Émilie, qui par ailleurs se révèle intéressée, curieuse, et souvent très subtile dit ne pas sentir pourquoi il faut pondérer pour faire la moyenne des pourcentages... Elle constate bien que le pourcentage obtenu par le rapport direct des données absolues total des reçus / total des candidats, soit 64 %, n'est pas la somme des pourcentages divisée par 6. Mais malgré cette discordance des résultats, elle ne voit pas pourquoi on ne peut pas faire ce calcul... L'incohérence des résultats ne la mène pas à rejeter l'un des modes de calcul.

Être bon consommateur de moyenne, c'est justement percevoir la nécessité de pondérer pour pouvoir dire si la moyenne que l'on reçoit dans une information est légitime ou non…C'est le problème de reconnaissance du modèle mathématique lié à la situation...

Et bien... je ne sais pas comment on fait percevoir cette nécessité de pondérer. Pour le moment, j'espère seulement qu'en rencontrant plusieurs situations, l'élève finira par "sentir' la chose... Je me retrouve comme à mes débuts de l'enseignement de la géométrie. Comment aider un élève à "trouver" alors même qu'il connaît ses théorèmes et les propriétés des figures. Mais ne pas encore savoir enseigner cela ne me semble pas disqualifier la conception du programme, au contraire ! Cela prouve seulement que c'est réellement difficile, et qu'étaient bien ridicules les premières réactions au projet de programme : "mais les pourcentages sont déjà faits au collège!"

**b. Mais avec quels coefficients?**

On aurait tort de penser que comprendre qu'il faut pondérer implique nécessairement le choix de coefficients légitimes. Exemple :

> *Le Ricoré est composé de 50 % de café et 50 % de chicorée. Si le prix du café augmente de 12 % et celui de la chicorée de 6%, de combien augmente le prix du mélange ?*

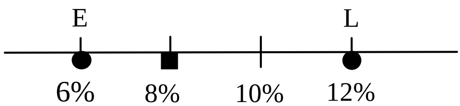
Qui n'a pas envie de répondre 9 %, utilisant ainsi les coefficients issus de la répartition en *volume* pour faire une moyenne de *prix* ? Dans l'exemple ci-dessus, les données sont insuffisantes pour conclure…

## 4. Tiens, si on pense au barycentre....

> *Lui est augmenté de 12%, Elle de 6% et le revenu total du couple se retrouve de ce fait augmenté de 8%. Qui gagne le plus?*

Surprise chez les élèves: on ne connaît aucune donnée absolue et pourtant on peut les ordonner... On peut même dire leur rapport ! Peut se faire par le calcul algébrique, les salaires féminin (*f*) et masculins (*h*) se simplifient...

Mais avec les élèves de l'option, si on pense barycentre.... D'après la position du barycentre, combien "pèse" le salaire féminin dans l'ensemble du revenu du couple ? (*voir schéma page suivante*).




## 5. Tiens une fonction !... Découverte des limites....

> *Lui gagne 3 000 F de plus qu'Elle... Lui est augmenté de 5 % et Elle de 15 %. De combien augmente le revenu total du couple ?*

Divers essais numériques montrent qu'on ne peut conclure : cela dépend du salaire féminin. Notons le *f*. Mais curieusement, il semble que l'augmentation du couple ne puisse dépasser 10 %, même avec des salaires très élevés, complètement fictifs ...

Penser en barycentre est alors assez "lumineux" ! Puisque *Lui* gagne plus qu'*Elle* de toute façon, son salaire pèse toujours un peu plus que celui d'*Elle* dans le total et donc le barycentre est entre les graduations 5 % et 10 %. Quand les salaires deviennent "très grands", la différence devient relativement faible et les salaires sont « presque égaux »... Le barycentre s'approche du milieu, donc de la graduation 10 %.

Si on ne connaît pas le barycentre :

L'augmentation en pourcentage s'écrit $\frac{0,20f+150}{2f+3000}$. Que se passe-t-il quand f $\to \infty$ ?

Remarque : on peut faire étudier la fonction $x \mapsto \frac{15x+5(x+3)}{2x+3}$, soit $x \mapsto \frac{20x+15}{2x+3}$ si on compte les salaire en milliers de francs (habituel en économie) et si on prend les pourcentages "tels qu'ils se disent", c'est à dire 15 pour 15 %.

## Conclusion

**Difficile tout de même de dire qu'on ne fait pas de mathématiques dans un tel programme… Certes, enseigner cela n'est pas facile. Mais qui a dit qu'éduquer l'était ? Bien sûr, dresser à reproduire des techniques dont l'élève en général ne comprend pas le sens est plus aisé.**

**Le rééquilibrage des séries passe par le respect dû à tous les élèves : le droit d'apprendre à penser plutôt qu'à appliquer.**

**A nous les enseignants d'oser cette exigence...**

Sylviane GASQUET
Le 25 novembre 1993, en revenant de la journée régionale lorraine APMEP