# LE PETIT VERT

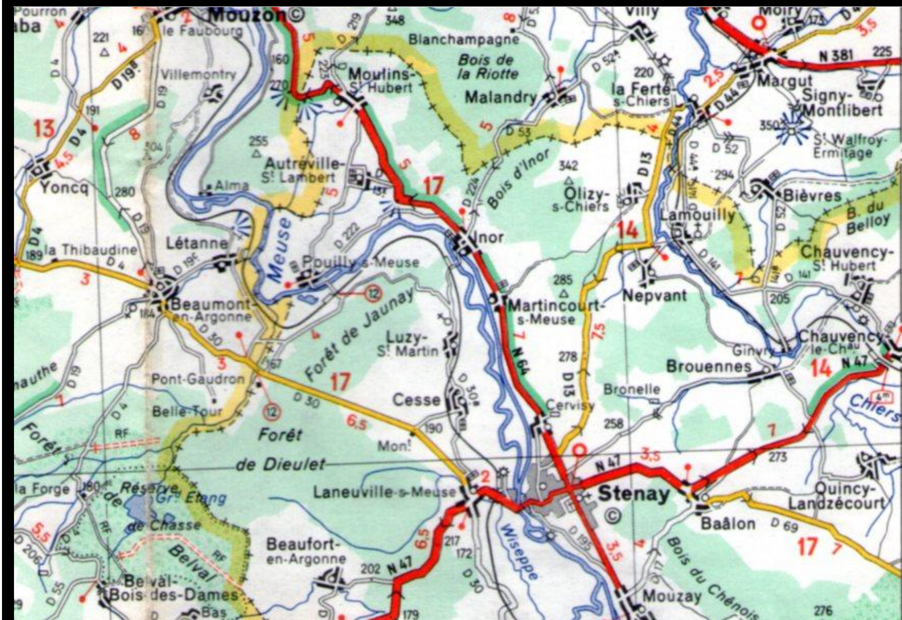
ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP



| N° 23 | SEPTEMBRE 1998 | Abonnement 4 n$^{os}$ par an : 30 F |
|---|---|---|






*Académie de Nancy-Metz (détail)*

## DOCUMENTATION PROPOSÉE AUX ADHÉRENTS

Fidèles à ce qui est maintenant devenu une « tradition », nous pouvons faire parvenir aux adhérents qui le désirent les photocopies d'un certain nombre de documents, moyennant paiement (en timbres) pour frais de copie et d'envoi :

Un document cosigné de l'A.P.M.E.P. et de l'I-R.E.M. de Besançon : « Grille d'analyse des manuels de mathématiques de seconde 1990 ». Elle arrive peut-être un peu tard pour vous permettre de choisir le manuel du lycée, mais elle pourra fournir un bon outil pour l'analyse des futurs manuels de première. 23 pages format A4... 9,20 F en timbres.

Le document A.P.M.E.P. qui servira de base à l'élaboration de l'évaluation du programme de seconde cette année : « Présentation analytique du programme de seconde ». 10 pages format A4... 6,90 F en timbres.

Et nous vous reproposons le texte de Marc LEGRAND : « LE DÉBAT SCIENTIFIQUE EN COURS DE MATHÉMATIQUES », d'une remarquable qualité pour qui veut initier ses élèves à la démarche scientifique. 20 feuilles recto-verso A4... soit 23 F en timbres.

Demandez les photocopies de ces textes à Jacques VERDIER, 4 rue Joseph Huet, 54130 SAINT MAX. Paiement uniquement par timbres-poste s'il vous plait (pas de chèques pour de si petites sommes), joints à la commande. Merci.

## DOCUMENTATION PROPOSÉE AUX ÉTABLISSEMENTS

La Régionale a en stock un certain nombre d'exemplaires des brochures d'EVALUATION des programmes de sixième, cinquième et quatrième. Nous vous proposons de les faire acquérir par votre établissement, si ce n'est pas déjà fait.
Pour cela, envoyer à Jacques VERDIER (4 rue Joseph Huet, 54130 SAINT MAX) un bon de commande administratif. Les brochures seront envoyées peu de temps après à l'établissement avec une facture.

Références à commander :
Brochure évaluation sixième (réf EVAPM6) : 55,90 F
Brochure évaluation cinquième (réf EVAPM5) : 90,40 F
Brochure évaluation quatrième (réf EVAPM4) : 100,40 F
Ces prix s'entendent TTC et port compris.

# EDITORIAL

Comme il n'est pas requis d'être original, je vais parler de la rentrée. Ce n'est pas qu'elle surprenne, la date en est connue ; ce n'est pas qu'elle déçoive, pour être déçu, il faut s'être fait des illusions. Mais, une fois déchiré l'écran translucide des vacances, elle dévoile l'opacité de ses classes surchargées, les perspectives incertaines des nouveaux programmes, les finalités peut-être clandestines des évaluations, et même à l'horizon le profil mouvant des IUFM.

Pas très encourageant ! Mais faut-il voir les choses d'un aussi mauvais œil ? Après tout, pourquoi les IUFM ne deviendraient-ils pas un outil de formation remarquable ? Que les évaluations et les programmes demeurent bien au service des élèves et il ne restera aux profs qu'à les mettre en œuvre avec l'intelligence qu'on nous connaît. Seulement, attention, tout cela ne peut ni ne doit se faire en dehors de nous. C'est ici que l'APM a un rôle ; retrouvons-nous dans ses structures :

- Les groupes de travail de l'APM-Lorraine. On y rencontre des collègues luttant avec les mêmes difficultés, on y échange idées et documente, on se sent moins seul pour oser dans sa classe,...
- Le comité et ses commissions pour des activités plus ponctuelles : analyses des sujets du bac et du brevet, mise en place et correction du rallye mathématique, relecture des articles du Petit Vert, choix parmi les solutions des Jeux...

Et si les déplacements nécessaires à ces activités nous empêchent d'y prendre part, nous pouvons toujours :

- Raconter dans un article publié dans le Petit Vert nos impressions, nos expériences…
- Profiter simplement de la bibliothèque à distance (à ce propos si l'un d'entre nous connaît des ouvrages intéressants, qu'il en fasse part au comité ou à la responsable de la bibliothèque). Tous les renseignements utiles sont dans le numéro 22 de Juin 90.
- Emprunter la valise-jeux qui va bientôt être opérationnelle.

La régionale ne peut fonctionner efficacement dans l'Académie et au sein de l'APM nationale que si elle reçoit le maximum de contributions de ses adhérents, pensons-y !
Nous étions une trentaine, réunis en séminaire de rentrée à Saint-Dié-des-Vosges les 8 et 9 septembre, nous y avons commencé le travail de cette année. Nous serons certainement plus nombreux encore à l'assemblée générale le 21 novembre.
Alors, comme on dit à cette époque de l'année, « bonne rentrée et bon courage ».

Jacqueline Euriat

# vie de la régionale

## PROGRAMMES DE PREMIERE

L'A.P.M.E-P. a été sollicitée pour dire ce qu'elle pense des projets de programme au niveau première. Il faudra faire vite, car le délai sera minime : si vous voulez participer à cette discussion, à ce travail, vous êtes invité le mercredi 3 OCTOBRE (à 14 h à l'I.R.E.M.). La Régionale devra centraliser vos diverses opinions, proposer une synthèse de valeur, et la même démarche se répétera au niveau national avec les rapports régionaux.

## EVALUATION DU PROGRAMME DE SECONDE

Le groupe régional a travaillé de façon "intensive" lors du séminaire de rentrée, le 9 septembre. Les travaux se poursuivront par l'examen critique des listes de capacités mises au point par les groupes nationaux (*) : ces listes devant être adoptées par la commission nationale second cycle le 13 octobre, nous vous proposons une réunion de travail le 3 OCTOBRE (à 16 h à l'I.R.E.M., juste après la réunion 'programmes de première').

(*) Si vous n'avez pas le document "Présentation analytique du programme de seconde", voir en page 2 comment vous le procurer.

## COMITE

La prochaine réunion aura lieu le mercredi 10 octobre à 14 h à l'I.R.E.M.

## ASSEMBLEE GENERALE

L'assemblée générale annuelle a été fixée au mercredi 21 novembre 1990 au Lycée des Biotechnologies et de l'Hôtellerie à VILLERS LES NANCY. Toutes les indications seront données dans un PETIT VERT supplémentaire qui paraîtra début novembre.

D'ores et déjà, nous faisons appel à vous pour prendre part aux diverses activités de la Régionale (groupes de travail, comme ceux énoncés ci-dessus ; comité de rédaction du PETIT VERT ; rallye mathématique ; etc.) en vous présentant au Comité Régional. Ce comité (qui devrait comporter 15 membres) se réunit environ 5 fois par an. Prenez contact avec Jacques VERDIER, 83.21.48.96. Merci !

# VERS UNE MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE EN CLASSE DE MATHS

Jacques LUBCZANSKI

L'objectif de ce texte est d'encourager les professeurs à mettre en place de véritables activités de recherche mathématique dans leurs classes.
Il ne s'agit pas du résultat d'un travail de type universitaire en didactique mais plutôt d'une suite d'hypothèses et de procédures, fruits d'une longue expérience de professeur et de formateur.

Par "véritable activité de recherche", j'entends un travail autonome de chaque élève, visant à résoudre un vrai problème, c'est à dire une question dont on ne connaît pas la réponse mais dont on saisit tout de suite le sens.

L'objectif d'une telle activité est simple : faire faire des mathématiques aux élèves !
En effet, faire des mathématiques, c'est mettre des savoirs, des savoir-faire au service de la recherche d'un problème mais aussi forger des outils et des méthodes pour résoudre ce problème : ces outils, ces méthodes sollicités et mis à l'épreuve par le problème amèneront de nouveaux savoirs, de nouveaux savoir-faire.
Je fais l'hypothèse que c'est sur le chantier des problèmes que se construisent les mathématiques dans la tête des élèves.

## GÉRER UNE ACTIVITÉ DE RECHERCHE

La mise en place d'une véritable activité de recherche dans sa classe est à la portée de tout professeur, à condition de ne plus centrer l'enseignement des mathématiques autour de la parole du maître, mais de le fonder sur le travail des élèves. La question est alors : comment créer les conditions matérielles et psychologiques permettant aux élèves de travailler de façon autonome et efficace ?
Si c'est au professeur de trouver la réponse adaptée au niveau de ses élèves, aux locaux dont il dispose, au temps qui lui est imparti. Je peux néanmoins proposer quelques certitudes acquises au fil de l'expérience et de l'observation.

**1. On accepte d'autant mieux un travail à faire si on a la liberté dans ce travail, donc :**

– Laisser les élèves choisir de travailler seuls ou en équipe, et dans ce cas avec libre choix dans la formation des équipes : peu importe le niveau mathématique de chacun, du moment qu'une dynamique de groupe s'installe.

Par contre, on peut limiter la taille du groupe à 4 ou 5 pour que le travail ne s'effiloche pas.

– Laisser les élèves choisir un énoncé parmi plusieurs : les critères de ce choix seront souvent subjectifs, et indépendants de la difficulté mathématique, mais renforceront l'envie de chercher. Présenter les énoncés sur une même feuille pour faciliter et accélérer le choix.
  Limiter le nombre d'énoncés offerts pour faciliter et accélérer la procédure ultérieure d'évaluation.
– Écrire des énoncés brefs, attirants, ouverts, permettant aux élèves de construire un imaginaire autour du problème strictement mathématique. L'imagination, loin d'être contre-indiquée, est une composante fondamentale de l'activité mathématique : l'abstrait appelle l'abstrait.

Pratiquement, il suffit d'accompagner la feuille d'énoncés de quelques consignes claires exprimant ce à quoi le professeur tient : limites des choix, délais, forme finale du travail ...
Mais il faut savoir qu'on n'échappera pas au théorème suivant :

$\forall$ C ensemble des consignes, $\exists$ au moins une équipe $e_i$,
$\exists$ au moins une consigne $c_i$, tels que $e_i$ transgresse $c_i$.

La souplesse est donc de rigueur : les consignes servent à structurer le travail, pas à l'entraver.

## 2. Les élèves sont aussi des êtres humains

Ils ont donc, en tant que tels, la capacité de gérer des situations complexes abstraites, de faire preuve de plus d'intelligence, de plus d'initiative, que leur rôle d'élève en classe de math ne le leur demande habituellement.
Au professeur d'en profiter, en dépassent le cadre étriqué de la salle de classe (documentation à aller chercher, expérimentations ...), les limites exiguës de l'horaire imparti (répartition entre travail en classe, à la maison ...). Le travail de recherche doit se prolonger, s'étaler dans l'espace et dans le temps.

## 3. Le professeur est aussi un être humain !

Il a donc, entant que tel, la capacité de gérer une situation complexe (comme une activité de recherche en classe), de faire preuve de plus d'intelligence, de plus d'initiative que son rôle de prof de math ne le lui demande habituellement.
Je fais l'hypothèse que c'est la richesse au plan humain de la situation de recherche en classe qui fera la richesse mathématique de la séquence d'enseignement dans laquelle se situe cette recherche.

# ÉVALUER UNE ACTIVITÉ DE RECHERCHE

L'évaluation d'une recherche commence par la mise en valeur du travail produit ; ce travail doit être présenté au professeur, au reste de la classe, voire de l'établissement, par ceux qui l'ont fait : il doit donc faire l'objet d'une réalisation matérielle en deux ou trois dimensions : vidéo, affiche, modèle physique, etc. Ces productions doivent être facilement accessibles, colorées, attrayantes.

La difficulté est d'obtenir à travers cette production un véritable compte rendu de recherche, ne faisant pas seulement état du résultat auquel on est parvenu, mais aussi des points de départ, des itinéraires empruntés, des points d'arrivée sinon d'aboutissement, et aussi des prolongements possibles si on avait plus de temps.

Cette difficulté ne se résout qu'à long terme, par la répétition régulière de ce type d'activité au cours de l'année. C'est vrai de toutes le difficultés rencontrées, dès la seconde fois ; en voici un exemple extrême : à Nyon, en octobre 1989 où je mettais plus de 100 professeurs en activité de recherche, il a fallu plus d'une demi-heure d'installation le premier jour, alors que les fois suivantes un quart d'heure était largement suffisant.

Il ne faut pas perdre de vue qu'au delà de l'aspect strictement mathématique, ce sont plutôt des attitudes que des connaissances qu'il s'agit de faire acquérir aux élèves. Dans cette optique, le profit retiré de la répétition de ces activités est « suradditif » : strictement supérieur à la somme des profits retirés chaque fois.

Une fois le travail de recherche de chacun présenté à tous, et avant l'évaluation proprement dite, il faut installer une période de critique, de confrontation sur chaque problème : c'est l'occasion d'éclaircir les points éventuellement obscurs, de comparer des travaux différents sur un même énoncé, d'instaurer un débat de validation sur des points douteux, et pour finir de faire le point sur les résultats obtenus.

Il ne s'agit pas pour le professeur de finir une recherche inachevée à la place des élèves, ou bien d'exposer « magistralement » des résultats non obtenus par ces élèves, mais simplement d'inscrire les fruits du travail de chaque élève dans le vécu collectif de la classe.

Pour en revenir à l'évaluation proprement dite, elle peut être très diverse. Du moment que le travail de recherche a été rendu public, toutes les parties prenantes peuvent émettre un jugement : ceux qui ont cherché, les autres élèves, le professeur...

On peut imaginer une grille permettant d'évaluer séparément les aspects auxquels on s'attache, depuis la qualité du travail mathématique jusqu'à la présentation finale, en passant par la maîtrise des savoirs et des savoir-faire, la pertinence des idées et des initiatives, la valeur des résultats...

Au bout du compte, il appartient au professeur de définir la forme que prendra l'évaluation (simple ou multiple, numérique ou non...) et à l'importance de celle-ci au sein du travail athématique de la classe.

# POUR CONCLURE : LES TROIS PÉRIODES D'UNE ACTIVITÉ DE RECHERCHE

## 1. PÉRIODE DE PRÉPARATION

| Pour le professeur | Pour les élèves |
|---|---|
| – Recherche de situations favorables à la création d'un énoncé : lecture de livres de maths et d'autres ...<br>– Choix et étude d'une situation précise ; choix du problème, des données, **CRÉATION DE L'ÉNONCÉ**.<br>– Test de l'énoncé : sur soi, sur d'autres...<br>– Présentation de plusieurs énoncés sur une même feuille, en les mettant sur un pied d'égalité et en les rendent attrayants (illustrations, titres...) | Acquisition de savoirs et de savoir-faire mathématiques pendant les interruptions "classiques" du professeur : cours, exercices, T.P .... |

## 2. PÉRIODE DE RECHERCHE

| Pour le professeur | Pour les élèves |
|---|---|
| – Présentation des consignes puis des énoncés.<br>– Présence passive dans un premier temps : les élèves s'approprient les problèmes.<br>– Visite systématique et régulière de toutes les équipes, avec intervention éventuelle pour débloquer, mais sans jamais donner de solution.<br>– Présentation de tous les comptes rendus. Critiques et confrontations.<br>– Évaluation de tous les travaux. | 1. Documentation<br>A-t-on toutes les données ?<br>Faut-il aller en chercher ?<br>2. Hypothèses de travail<br>Comment simplifier l'énoncé ?<br>Quelle est alors la question ?<br>3. Exploration du problème<br>Expérimentations numériques : calculs.<br>Expériences mentales : conjectures.<br>4. Phase critique<br>Confrontation des résultats avec la question posée. Recherche de preuves mathématiques.<br>5. Compte rendu |

## 3. PÉRIODE DE RÉINVESTISSEMENT

Pour le professeur

**Critique des énoncés**

- lesquels n'ont pas été choisis et pourquoi ?
- lesquels n'ont pas donné lieu au travail de recherche souhaité et pourquoi ?
- lesquels faut-il reformuler ?

**Critique de la recherche**

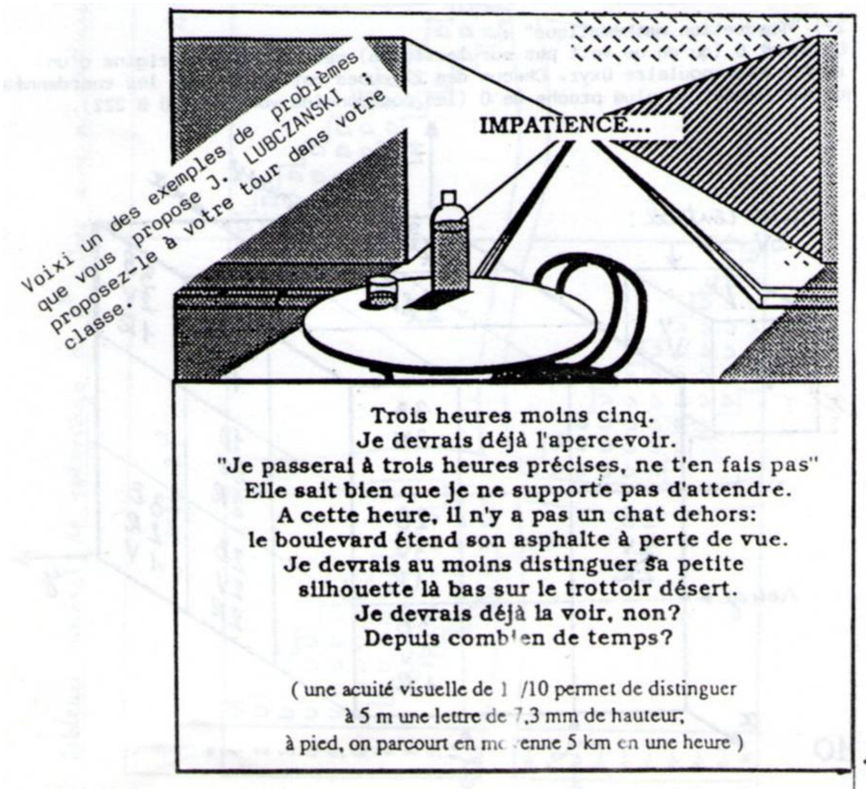
- quelles nouvelles pistes ont été trouvées ?
- quels types de raisonnements ont été plutôt utilisés : qualitatifs, quantitatifs ?
- quelles difficultés les élèves ont-ils rencontrées ?

**Que faut-il changer pour la prochaine fois ?**

Pour les élèves

Les problèmes cherchés doivent s'inscrire d'une façon ou d'une autre dans la séquence éducative en cours : par le thème, par les outils, par les méthodes...

Ils font partie du vécu de la classe et doivent être rappelés, sollicités dès que possible, servir de points d'ancrage pour la suite des apprentissages.



## Solution du problème n°22 (PETIT VERT de juin 1990)

Vous disposez de 27 petits cubes en bois blanc, et de trois pots de peinture : du rouge, du bleu et du vert.
Comment devez-vous peindre les faces de ces 27 petits cubes de façon que :

- si on les réunit d'une certaine façon, les 6 faces externes du grand cube ainsi reconstitué seront entièrement rouges ;
- si on les réunit d'une autre façon, les 6 faces externes seront entièrement vertes ;
- si on les réunit d'une troisième façon, on n'y verra que du bleu !

Votre solution n'en sera que meilleure si vous précisez les « mouvements » à faire pour passer d'une disposition à une autre.

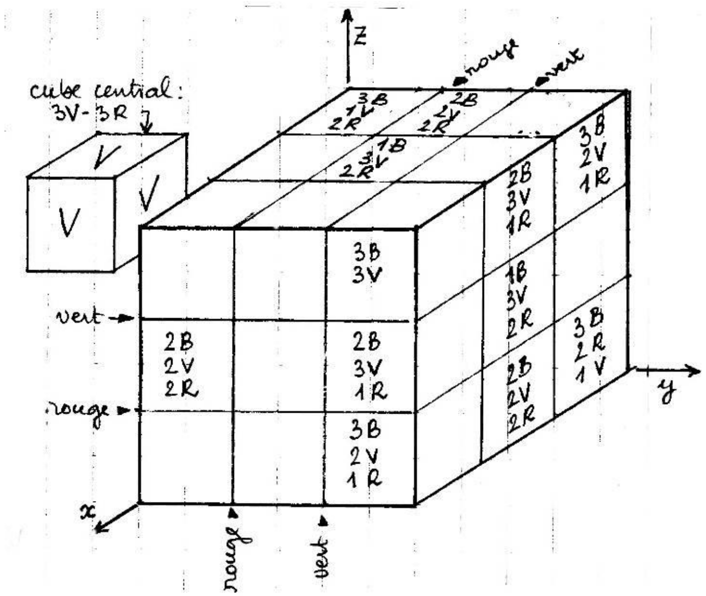
Première solution proposée par A. **VIRICEL** de VILLERS-LES-NANCY (solutions équivalentes proposées par C. **PAGANO** de LA SEYNE DUR MER et par G. **ROHMER** de MONT-LES-NEUFCHÂTEAU) :

1°) On peint en bleu le cube comme il se présente.

Première transformation : la couche avant passe à l'arrière,
la couche de droite passe à gauche,
la couche du dessus passe dessous.

On peint alors en vert tout le cube.
Deuxième transformation : identique à la première.
On peint alors en rouge tout le cube.

2°) "Traduction mathématique" : Le sommet 0 (qu'on ne voit pas sur la figure) est pris comme origine d'un repère rectangulaire Oxyz. Chacun des 27 cubes est repéré par les coordonnées de son sommet le plus proche de 0 (les coordonnées vont de 000 à 222).



Première transformation : on ajoute 1 modulo 3 aux trois coordonnées.
Deuxième transformation : on ajoute encore 1 modulo 3 aux 3 coordonnées.

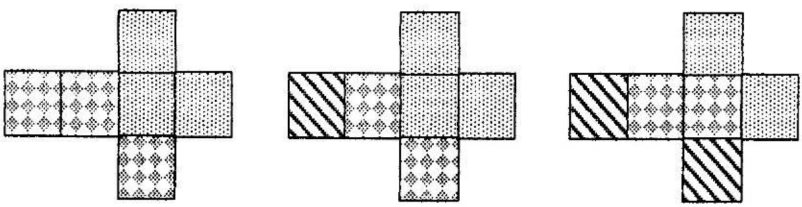
<u>Remarques</u> :
1. Si on fait encore une telle transformation, le cube revient à sa couleur initiale.
2. La figure ci-dessus permet de connaître, pour un petit cube déterminé, les couleurs de ses 6 faces.
3. La méthode précédente s'applique à un jeu de 64 petits cubes et 4 couleurs, 125 petits cubes et 5 couleurs, etc.
4. Sur la figure ont été indiqués les dénombrements (nombre de faces bleues, vertes et rouges de chaque petit cube) ; il est bien certain que cela ne suffit pas au peintre, qui doit connaître la disposition exacte de ces couleurs.

****************************************************

Deuxième solution, de Marc **SERAY** (Woustviller) :

Remarquons tout d'abord que pour pouvoir réaliser trois gros cubes de couleurs respectives bleue, verte et rouge nous devons disposer, sur l'ensemble des petits cubes, de 9 faces rouges pour chacune des faces du gros cube rouge soit 9×6 = 54 faces rouges mais aussi de 54 faces bleues et de 54 faces vertes ; finalement un total minimum de 3×54 162 faces peintes. Or nous disposons de 27×6 = 162 faces à peindre ; ainsi chaque face disponible doit être peinte et sert à une et une seule configuration du gros cube.

Dans un deuxième temps nous pouvons observer que les couleurs peintes sur chacun des petits cubes ne peuvent apparaître que dans des positions particulières. Considérons en effet un petit cube possédant des faces de couleur X (choisie parmi les couleurs bleue, verte et rouge), il sert à configurer le gros cube de couleur X soit en l'un de ses sommets : il possède alors trois faces et trois seulement de couleur X ayant un sommet commun, soit au milieu de l'une de ses arêtes: il possède alors deux faces et deux seulement de couleur X ayant une arête commune, soit au centre de l'une de ses faces : il n'a alors qu'une seule face de couleur X. Cette remarque nous montre que nous ne pouvons peindre que trois types de petits cubes dont les patrons sont les suivants :



Cube bicolore 3-3-0 Cube tricolore 3-2-1 Cube tricolore 2-2-2

Examinons maintenant le petit cube central dans le gros cube de couleur X ; celui-ci ne contient aucune face de couleur X sinon il y **aurait sur l'ensemble** des 27 petits cubes au moins 55 faces peintes de couleur X : les 54 montrées sur la surface du gros cube plus une face cachée sur le cube central ; résultat qui contredit notre première remarque, Ce petit cube est donc nécessairement du type bicolore 3Y-3Z (3 faces de couleur Y, 3 faces de couleur Z ). Le gros cube devant posséder trois configurations l'une bleue, l'autre verte, la troisième rouge nous devons donc peindre exactement trois cubes bicolores : l'un comportant 3 faces rouges et 3 faces vertes, l'autre comportant 3 faces bleues et 3 faces rouges, le troisième comportant 3 faces vertes et 3 faces bleues.

Résumons dans un tableau les différents types de cubes utilisables : ceux-ci correspondent aux colonnes, chaque case indique le nombre de faces de la couleur indiquée en début de ligne (B pour bleu, V pour vert, R pour rouge), enfin, la dernière ligne indique le nombre de cubes de chaque type :

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| R | 3 | 3 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| Y | 3 | 0 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 3 | 2 |
| B | 0 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 3 |
| *nb.* | 1 | 1 | 1 | x | y | z | t | u | v | w |

A ce stade x, y , z, t , u, v, w sont des entiers inconnus. En étudiant la configuration rouge du gros cube nous sommes conduits aux équations suivantes :

2 + x + y = 8 (il y a 8 cubes sommets du gros cube rouge),

z + t + u = 12 (i1 y a 12 cubes mi1ieux des arêtes du gros cube rouge),

v + w = 6 (il y 6 cubes centres des faces du gros cube rouge).

En étudiant de la même manière les configurations verte et bleue du gros cube nous voyons que la recherche d'une solution du problème équivaut à la résolution du système linéaire

$$\begin{cases} (1)\ x + y = 6 \\ (2)\ z + t + u = 12 \\ (3)\ v + w = 6 \\ (4)\ z + v = 6 \\ (5)\ y + t + w = 12 \\ (6) x + u = 6 \\ (7)\ u + w = 6 \\ (8)\ x + t + v = 12 \\ (9)\ y + z = 6 \end{cases}$$

(3) et (4) entraînent z = w, de même (1) et (6), (1) et (9), (3) et 7), (4) et (9), (6) et 7) entraînent respectivement u = y, x = z, u = v, y = v et x = w. De plus x = z, y = u, (1) et (2) entraînent t = 6. Après vérification le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ t = 6 \\ x = z = w \\ y = u = v \end{cases}$$

On voit donc qu'il y a six solutions à notre problème chacune correspondant au choix du couple d'entiers positifs (x, y) vérifiant x + y = 6. Parmi ces six solutions, deux utilisent un minimum de types de cubes et peuvent donc être considérées comme plus simples ; ces solutions sont équivalentes, à une permutation des couleurs près :

x = z = w = 6, y = u = v = 0, t = 6

ou x = z = w = 0, y = u = v = 6, t = 6.

Pour ces dernières solutions, lors d'un changement de couleur :
- le cube central permute avec l'un des cubes bicolores sommets,
- le dernier cube bicolore montre ses faces cachées,
- les six cubes tricolores du type 2-2-2 tournent simplement sur eux-mêmes,
- les trois types de cubes tricolores 3-2-1 restant et occupant respectivement les positions sommets, milieux d'arêtes, centres de faces du gros cube permutent circulairement celles-ci.

*************************************************

Pour aller plus loin, nous avons reçu de Franck **VASSEUR** (METZ) un dossier complet qui généralise le problème. Voici une phrase extraite de sa lettre:
« *Avec tous mes remerciements pour vos problèmes qui nous rappellent avec bonheur que faire des mathématiques, c'est chercher à comprendre...* »

ÉTUDE DU CAS GENERAL POUR UN CUBE n×n×n

I. Nombre de couleurs possibles

Nombre total de faces des petits dés : $6n^3$
Nombre de faces visibles : $6n^2$

Nombre de couleurs possibles : $\dfrac{6n^3}{6n^2} = n$ .

II. Les différents types de petits cubes

Il y a quatre types différents de cubes constituant le grand cube
- les cubes présentant trois faces contiguës visibles d'une même couleur (les coins du gros cube), notés T par la suite ;
- les cubes présentant deux faces contiguës visibles de cette couleur, (notés D) ;
- les cubes en présentant une seule face visible (notés U)
- les cubes n'en présentant aucune face visible (notés O).

La répartition de ces cubes est la suivante (voir tableau) :

| | |
|---|---|
| O | $(n-2)_3$ |
| U | $3\times2^1\times(n-2)^2$ |
| D | $3\times2^2\times(n-2)$ |
| T | $2^3$ |
| total | $n^3$ |

III. LES ÉCRITURES DE 6 COMME SOMME DE 1, 2 et 3

Si l'on colorie les 6 faces de chacun des petits cubes avec plusieurs couleurs, on constate qu'il y a a priori (pour $n \geq 6$) les configurations suivantes :

| coloriage des 6 faces | | U | D | T |
|---|---|---|---|---|
| T + T | * | 0 | 0 | 2 |
| T + D + U | | 1 | 1 | 1 |
| D + D + D | * | 0 | 3 | 0 |
| T + U + U + U | | 3 | 0 | 1 |
| D + D + U + U | * | 2 | 2 | 0 |
| D + U + U + U + U | | 4 | 1 | 0 |
| U +U + U + U + U + U | | 6 | 0 | 0 |

Il est également indiqué, dans le tableau de droite, combien de fois apparaît, pour chaque configuration, le coloriage de trois faces contiguës de la même couleur (T), de deux (D), etc. Toutes ces configurations sont réalisables sur un cube pour n ≥ 6. Pour n = 3, seules les trois premières le sont, du fait qu'on ne dispose que de trois couleurs. Les trois configurations marquées d'un astérisque permettent de venir facilement à bout du cas général (voir tableau en annexe).

## IV. TABLEAUX DE COLORIAGE

Chaque colonne décrit le coloriage d'un petit cube. Le coefficient multiplicateur qui la surmonte indique le nombre de petits cubes ayant ce coloriage. La présence d'un T indique que trois faces contiguës sont coloriées de la couleur correspondant à la ligne sur laquelle se trouve T ; même chose avec D, U et O.

Pour 27 cubes ; 3 couleurs.

| couleur | 6x | | | 2x | | | 1x | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | U | T | D | D | D | D | O | T | T |
| b | D | U | T | D | D | D | T | O | T |
| c | T | D | U | D | D | D | T | T | O |

Pour 64 cubes ; 4 couleurs

| couleur | 4x | | | | 12x | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | O | T | T | O | U | D | D | U |
| b | O | O | T | T | U | U | D | D |
| c | T | O | O | T | D | U | U | D |
| d | T | T | O | O | D | D | U | U |

Pour 125 cubes ; 5 couleurs

| couleur | 1x | | | | | 18x | | | | | 6x | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | O | T | T | O | O | O | D | D | U | U | O | T | U | U | U |
| b | O | O | T | T | O | U | O | D | D | U | U | O | T | U | U |
| c | O | O | O | T | T | U | U | O | D | D | U | U | O | T | U |
| d | T | O | O | O | T | D | U | U | O | D | U | U | U | O | T |
| e | T | T | O | O | O | D | D | U | U | O | T | U | U | U | O |

| couleur | 8x | | 24x | |
|---|---|---|---|---|
| a | O | T | U | D |
| b | O | T | U | D |
| c | T | O | D | U |
| d | T | O | D | U |

Pour 64 cubes (4 couleurs),
minimum de configurations

Pour 125 cubes (5 couleurs), maximum de configurations :

| couleur | 2x | | | | | 2x | | | | | 6x | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | T | O | O | O | T | T | O | O | U | D | D | O | O | D | D |
| b | T | T | O | O | O | D | T | O | O | U | D | D | O | O | D |
| c | O | T | T | O | O | U | D | T | O | O | D | D | D | O | O |
| d | O | O | T | T | O | O | U | D | T | O | O | D | D | D | O |
| e | O | O | O | T | T | O | O | U | D | T | O | O | D | D | D |

| couleur | 2x | | | | | 3x | | | | | 10x | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | T | O | U | U | U | D | O | U | U | D | D | U | U | U | U |
| b | U | T | O | U | U | D | D | O | U | U | U | D | U | U | U |
| c | U | U | T | O | U | U | D | D | O | U | U | U | D | U | U |
| d | U | U | U | T | O | U | U | D | D | O | U | U | U | D | U |
| e | O | U | U | U | T | O | U | U | D | D | U | U | U | U | D |

Le jeu des permutations verticales permet de faire en sorte que chaque sigle (T, D ou U) apparaisse autant de fois par ligne que par colonne, c'est à dire dans la décomposition de 6 retenus (cf. tableau du § III).

Pour le cas général (n ≥ 6), voir le tableau en annexe page 16.

## V. GENERALISATION A UN PAVÉ $n \times p \times q$

Reprenons l'étude précédente dans l'ordre :

Nombre de faces : 6npq

Nombre de faces visibles : 2(np + pq + qn)

Ainsi (np + pq + qn) doit diviser 3npq, et le nombre de couleurs k est le quotient

$$\frac{3npq}{np + pq + qn}$$

La répartition est

nombre de T : 8

nombre de 0 : 4(n-2) + 4(p-2) + 4(q-2)

nombre de U : 2(p-2)(q-2) + 2(q-2)(n-2) + 2(n-2)(p-2)

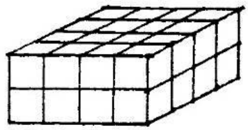
nombre de 0 : (n-2)(p-2)(q-2)

Le § III (décompositions de 6) n'est aucunement modifié.

Prenons l'exemple où l'on dispose de trois couleurs (k = 3). On constate, d'après ce qui précède, que les seuls pavés qui conviennent ont pour dimensions $2\times3\times6$ ou $2\times4\times4$.

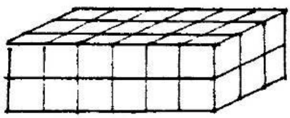
Dans le premier cas, la répartition est 8 T, 20 D, 8 U et aucun 0, et le tableau de coloriage est le suivant :

| couleur | 8x | | | 4x | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | U | T | D | D | D | D |
| b | D | U | T | D | D | D |
| c | T | D | U | D | D | D |



Dans le second cas, la répartition est 8 T, 16 D, 8 U et aucun 0, et le tableau de coloriage est :

| couleur | 8x | | | 4x | |
|---|---|---|---|---|---|
| a | U | T | D | D | D |
| b | D | U | T | D | D |
| c | T | D | U | D | D |



N.D.L.R. Le groupe "jeux" serait heureux de connaître les solutions pour 4 couleurs, afin de pouvoir réaliser (en bois peint) les pavés correspondant.

*Annexe (cas n ≥ 6) page suivante…*

# ANNEXE

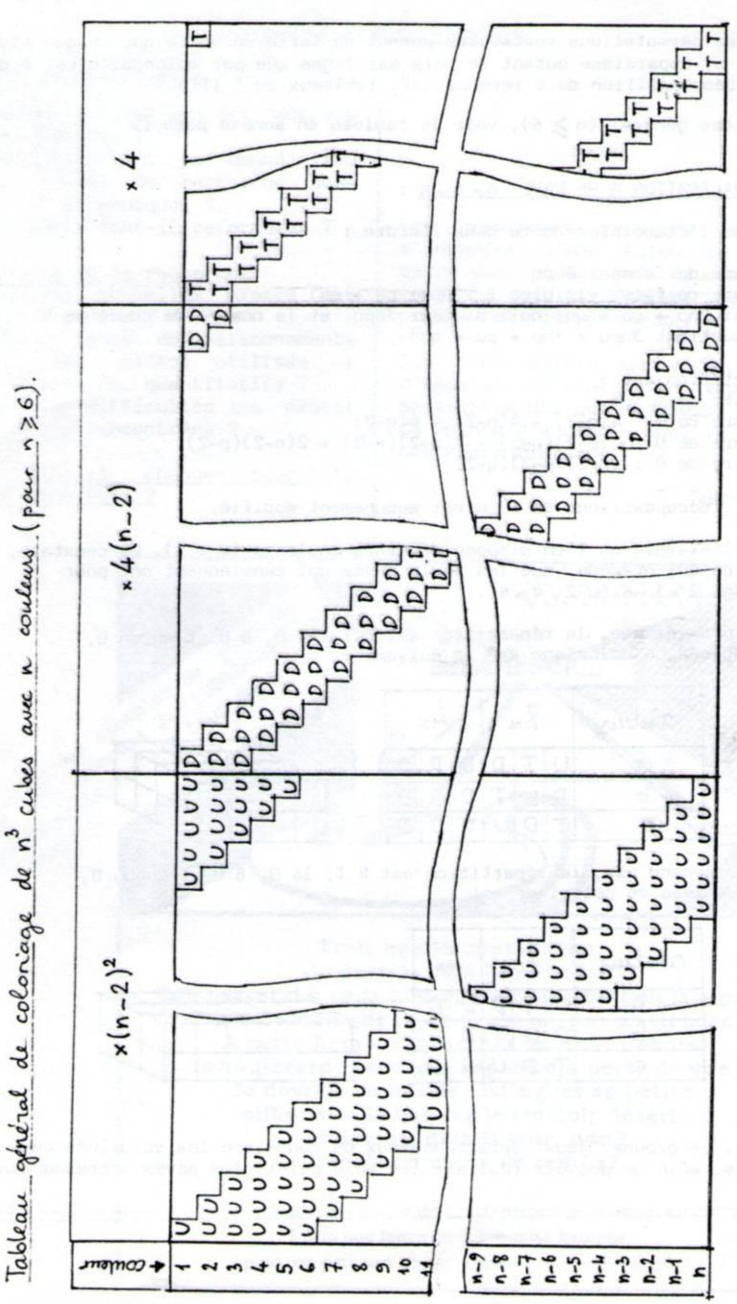


Tableau général de coloriage de $n^3$ cubes avec $n$ couleurs (pour $n \geq 6$).
$\times 4$
$\times 4(n-2)$
$\times (n-2)^2$
couleur
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
n-9
n-8
n-7
n-6
n-5
n-4
n-3
n-2
n-1
n

## LU POUR VOUS …

… un manuel destiné à la Seconde et qui se déclare (page 3) « rigoureusement conforme au nouveau programme » (celui de 1990, N.D.L.R.).
Nous y avons trouvé des problèmes intéressants et des exercices astucieux, bien que parfois un peu difficiles pour un élève de seconde tel qu'on peut imaginer - en lisant les nouveaux programmes de collège - qu'il sera.
Ceci dit, nous y avons trouvé des choses très surprenantes ; jugez vous-mêmes.

**Note de la rédaction (octobre 2010) : l'article publié comportait des extraits photocopiés du manuel et du programme. Nous les avons retranscrits sur des fons de couleur : rose pour le manuel, vert pour le programme.**

**CALCUL LITTERAL. CALCUL ALGEBRIQUE** (page 8, dans la partie "Cours") :

Les insuffisances de **N**, **Z**, **Q**, que nous rappellerons brièvement, ont progressivement conduit à la construction de l'ensemble **R**.

Or le programme de seconde nous dit que les notations **N**, **Z**, **Q** et **R** sont ajoutées en seconde :

(…) les notations **N**, **Z**, **Q**, **R** : sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et *aucun développement n'est au programme* .

On ne voit pas ce qu'on pourrait rappeler à des élèves qui n'ont jamais entendu parler d'ensembles de nombres. Cela n'empêche pas de découvrir (page 9) que l'addition dans **R** est interne, qu'il existe des éléments symétriques, etc. (on a cependant échappé à l'élément absorbant ; dommage, on l'aimait bien, celui-là !).

Page 11, toujours dans la partie « Cours » (sous le titre « Insuffisance de **Q** »), on peut y lire la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Page 14 :

1. *La relation ≤ est une relation d'ordre total.*

Quels que soient les réels *x, y, z.*

— $x \leq x$ : la relation est dite *réflexive.*

— Si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$ : la relation est dite *antisymétrique.*

— Si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$ : la relation est dite *transitive.*

— Quels que soient les réels $x$ et $y$ on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$; on dit que l'ordre est *total.*

Le programme nous dit (opérations sur les inégalités) :

Signe de $ax + b$. Signe d'un produit, d'un quotient. Le programme se limite à l'étude d'expressions à coefficients numériques.

On ne voit pas bien ce que l'expression « total » pourrait signifier à un élève à qui on ne demande de travailler que dans **R**.

Page 16, nous abordons la bijection (afin de pouvoir définir $\sqrt{x}$) :

Soit l'application : $f: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$. Nous admettrons que cette application est bijective, ce qui signifie que tout élément de $\mathbf{R}_+$ a un antécédent et un seul par $f$ dans $\mathbf{R}_+$.

## ÉQUATIONS. INÉQUATIONS. SYSTÈMES

Page 36 :

**Définition** : Soit $f_1$ et $f_2$ deux fonctions d'un ensemble E vers un ensemble F. Tout élément $x_0$ de E tel que $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ est dit *solution* de l'équation $f_1(x) = f_2(x)$ *d'inconnue x.*

et ensuite :

E est appelé le *référentiel.* Soit respectivement $D_1$ et $D_2$ les domaines de définition des fonctions $f_1$ et $f_2$, et soit $D = D_1 \cap D_2$. D est appelé *l'ensemble de validité* de l'équation.

Avec un exemple qui nous semble bien peu conforme à l'esprit du programme :

**Exemple** : Soit, dans **R**, l'équation $\dfrac{1}{x-3} = \sqrt{x-2}$

Il ne porte que sur *l'étude d'exemples* et se place dans le cadre de *fonctions définies sur un intervalle* ; on évitera tout exposé général sur les fonctions (statut mathématique du concept de fonction, notion d'ensemble de définition, opérations algébriques, composition, relation d'ordre, restriction....).

Page 37 :

**Définition** : Soit une fonction polynôme : $P: \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto P(x) \end{array} \right.$

Avec $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 \neq 0$.

L'équation $P(x) = 0$ d'inconnue $x$ est appelée équation *polynomiale de degré n.*

Page 46, apparition de la notation $\mathbf{R}^2$ qui n'est pas au programme.

Page 47, toujours dans la partie « Cours » :

La quantité *ab'-ba',* que l'on écrit sous la forme $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, s'appelle le *déterminant* du système.

**Théorème** : Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de deux équations affines dans $\mathbf{R}^2$ admette une solution et une seule est que son déterminant soit différent de zéro.

alors que :

(…) en particulier la notion de déterminant et les formules de Cramer ne sont pas au programme.

Et voici quelques exercices correspondant à ce chapitre :

$\boxed{53}$ *Résoudre* $2x^3 - 5x^2 - 8x + 20 = 0$, sachant qu'elle admet la racine $x_1 = \dfrac{5}{2}$

*Résoudre dans* **R** les *équations suivantes :*

$\boxed{59}$ $\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = 2$

$\boxed{60}$ $x - \sqrt{2x+7} = 4$

$\boxed{61}$ $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x} = 2$

$\boxed{62}$ $\sqrt{(x+2)(x+3)} = x+4$

$\boxed{63}$ $\sqrt{x+1} = \sqrt{4x-9} + \sqrt{x-2}$

$\boxed{97}$ *Résoudre dans* **R²** : $\begin{cases} 3x^2 - y^2 - 3 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 22 = 0 \end{cases}$

*Déterminer, suivant les valeurs du réel m, l'ensemble* S *des solutions des systèmes suivants (exercices 100 et 101) :*

$\boxed{100}$ $\begin{cases} (m+1)x - y - m = 0 \\ x + (m-1)y - 5 = 0 \end{cases}$

$\boxed{101}$ $\begin{cases} mx + 3y - 9 = 0 \\ 3x + my + m^2 = 0 \end{cases}$

Au programme :

- Dans ce domaine, c'est la maîtrise des mécanismes *élémentaires* indiqués par le programme qui est importante ; *toute virtuosité technique est exclue,* notamment en ce qui concerne les factorisations et les calculs ponant sur des fractions ou des radicaux. On tiendra compte du fait que, sur ces différents points, les exigences à l'issue de la classe de Troisième sont modestes. Il convient en outre de ne pas multiplier gratuitement les exercices de pur calcul littéral
- La résolution de problèmes menant à des *équations à une inconnue* constitue un objectif important. Toute étude introduisant a priori des paramètres est exclue. La technique de résolution de l'équation du second degré est hors programme.
- De nombreuses situations conduisent à des *inégalités* ou des *inéquations.* On se limitera à des exemples très simples et on s'appuiera sur des interprétations graphiques et sur la variation des fonctions, afin d'éviter un formalisme purement algébrique.

### GÉOMETRIE PLANE ET CALCUL VECTORIEL

Page 132, on apprend à faire la différence entre la « paire » {A,B} et les quatre bipoints (A,B), (B,A), (A,A) et (B,B) :

*5.2.1 Points et droites*

A et B sont deux points du plan affine $\mathscr{P}$ (A$\in\mathscr{P}$ ; B$\in\mathscr{P}$). On appelle *bipoint* le couple (A,B) : (A,B)$\in\mathscr{P}\times\mathscr{P}$ ou (A,B)$\in\mathscr{P}^2$.

**Remarque :** Si A et B sont deux points distincts du plan on peut, à l'aide de ces deux points, définir quatre bipoints différents (A,B), (B,A), (A,A) et(B,B), mais une seule paire {A,B}.

Page 138, on lit :

**Définition** : On appelle vecteur du plan l'ensemble des bipoints équipollents à un un bipoint donné (A,B) ; on le note $\overrightarrow{AB}$. (A,B) est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ : $\overrightarrow{AB} = \{(M,N) \in \mathscr{P}^2/(M,N) \sim (A,B)\}$

Bien sûr, on savait déjà que ~ était réflexive, etc., c'est écrit juste avant :

La relation d'équipollence est :
1) Réflexive. C'est-à-dire : tout bipoint est équipollent à lui-même.
2) Symétrique. C'est-à-dire : Si ((A, B)~(C, D)) alors ((C, D)~(A, B)).
3) Transitive. C'est-à-dire: Si [((A,B)~(C,D)) et ((C,D)~(E,F))] alors (A,B)~(E,F)

Ici, on sent bien que vous croyez qu'on en rajoute ! Surtout lorsqu'on relit le programme de seconde :

- Les *vecteurs* ont été introduits au Collège (par direction, sens et longueur) ; on n'y reviendra pas et on conservera le même point de vue pour étudier les opérations sur les vecteurs.

Et pourtant...

Mais il y a mieux (ou pire ?). Page 139, on apprend (enfin !) que :

L'ensemble des vecteurs du plan muni de l'addition des vecteurs (qui est une loi de composition interne par définition) a une structure de groupe commutatif (propriétés 2. 3. 4. 5).

Vite, tournons la page ... (on sent que vous flairez le canular). Page 141, toujours dans la partie « Cours », on a droit à la DÉFINITION suivante :

**Définition** : L'ensemble des vecteurs du plan muni de l'addition (loi de composition interne vérifiant les propriétés 2, 3, 4, 5) et de la multiplication par un réel (loi de composition externe à coefficients dans **R** vérifiant les propriétés 1, 2, 3, 4) a une structure *d'espace vectoriel* sur **R**.

Soufflons un peu avant de lire le § 5.4.3 intitulé « Représentation paramétrique d'une droite », dont nous n'avons pu trouver aucune trace dans le programme :

**Théorème et définition** : L'ensemble des points M($x$,$y$) dont les coordonnées relativement à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases} \text{avec } t \in \square \text{ et } (\alpha,\beta) \neq (0,0)$$

est la droite (D) passant par A($x_0$,$y_0$) et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$.

Le système $\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \end{cases}$ est une *représentation paramétrique* de (D).

## TRANSFORMATIONS DU PLAN

Page 179, on définit une application puis une bijection, avec, soyons honnête, un astérisque pour la définition du mot « transformation », astérisque qui signifie peut-être (mais ce n'est pas dit) que l'on « sort » alors du programme ?

Page 180 (toujours avec un astérisque, mais toujours dans le « Cours ») :

***Définition** : $f$ étant une transformation du plan, si à tout point M' on associe son antécédent par $f$, on définit une nouvelle transformation appelée *transformation réciproque* de $f$ et notée $f^{-1}$.

Or le programme nous indique que

La bijectivité des transformations, les notions de transformation composée et de transformation réciproque sont en dehors du programme.

Et, page 195, encore quelque chose qui a totalement disparu des programmes, la définition analytique de l'homothétie :

Le plan étant rapporté à un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ , une application du plan dans lui-même est une homothétie de rapport $k$ si et seulement si elle est définie analytiquement par un système de la forme :

$$\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases} \quad k \neq 0 \;\; et \;\; k \neq 1$$

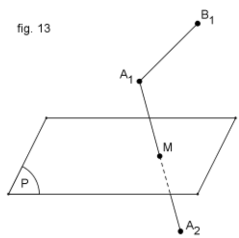
## GÉOMETRIE DANS L'ESPACE

On lit, page 219, la « définition du plan » :

1) Toute droite qui passe par deux points distincts d'un plan est incluse dans ce plan (fig. 12).
La droite (D), qui passe par les points A et B du plan $(\mathscr{P})$, est incluse dans $(\mathscr{P})$ ; elle partage $(\mathscr{P})$ en deux demi-plans ouverts $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$. On a :
$(D)\cap(\mathscr{P}_1) = \varnothing$, $(D)\cap(\mathscr{P}_2) = \varnothing$, $(\mathscr{P}_1)\cap(\mathscr{P}_2) = \varnothing$,
et $(D)\cup(\mathscr{P}_1)\cup(\mathscr{P}_2) = (\mathscr{P})$.
Toute droite joignant un point de $(\mathscr{P}_1)$ à un point de $(\mathscr{P}_2)$ coupe (D).

2) Par trois points non alignés il passe un plan et un seul.

3) Tout plan partage l'espace E en deux demi-espaces ouverts, $E_1$ et $E_2$.
— Si $A_1 \in E_1$ et $B_1 \in E_1$ alors : $[A_1,B_1] \in E_1$ (fig. 13)
c'est-à-dire que chacun des demi-espaces est convexe.
— Si $A_1 \in E_1$ et $B_1 \in E_1$ alors il existe un point M unique tel que : $\{M\} = [A_1,A_2] \cap \mathscr{P}$.




… alors que la partie correspondante du programme nous dit :

a) Propriétés usuelles (admises) du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite à un plan.

C'est à travers l'étude des objets usuels de l'espace que ces propriétés doivent être mises en évidence et mises en œuvre.
Elles ne doivent donc pas faire l'objet d'une étude en soi.

Alors que le programme nous précise que :

e) On a voulu s'en tenir à *un cadre et un vocabulaire théoriques modestes,* mais suffisamment efficaces pour l'étude des situations usuelles et assez riches pour servir de support à une formation mathématique solide,

l'ouvrage en question compte deux chapitres de géométrie dans l'espace, séparés, L'ESPACE AFFINE (d'abord) et L'ESPACE MÉTRIQUE (ensuite).

Finalement (bien que les chapitres concernant les fonctions nous semblent plus conformes au programme), vous comprendrez qu'on se demande si leurs auteurs ont lu en détail ce nouveau programme de seconde, et notamment les « intentions majeures » :

d) On a voulu mieux prendre en compte l'exigence de contenus présentant un intérêt pour la formation de *tous* les élèves. C'est pourquoi on a écarté résolument les sujets présentant de trop grandes difficultés conceptuelles et techniques pour la majorité des élevés ou préparant de façon trop spécifique à certaines sections de Première, au bénéfice d'une *meilleure solidité sur les points essentiels.*

Et vous ne nous en voudrez pas si on ne vous donne pas les références de ce manuel !

Jean PILLOY
Lycée Majorelle, TOUL

N.d.l.r. L'A.P.M.E.P. vient de publier une grille d'analyse des manuels de seconde. Voir en page 2 comment l'obtenir.

## Petite annonce **ASTRONOMIE**

Pour ceux que 1'astronomie intéresse (et notamment les enseignants en A2-A3) :

un PLANETARIUM MOBILE pourra circuler dans les établissements scolaires de l'académie. Pour tout renseignement, contacter Gilles MUNSCH, lycée polyvalent "Béchamp", B.P. 160, 88204 REMIREMONT Cedex.

# PROBLÈME DU TRIMESTRE N° 23

proposé par Christiane **ROHMER** (NEUFCHÂTEAU)

D’après un exercice du manuel TRANSMATH (Nathan) de terminale A-B.

On considère un cercle sur lequel on prend $n$ points ($n \geq 2$).
On dessine toutes les cordes joignant deux de ces points. On suppose que trois quelconques de ces cordes ne sont pas concourantes.
Notons $R_n$ le nombre de régions intérieures au cercle ainsi délimitées.
Déterminer $R_2$ , $R_3$, $R_4$, $R_5$.
Qu’êtes-vous tenté de conjecturer pour $R_n$ ?
Déterminer $R_6$ à l’aide d’un dessin ; confrontez votre conjecture à ce résultat.

Le but de cet exercice est de mettre les élèves en garde contre des conjectures trop hâtives... mais il ne donne pas la solution du problème : calculer $R_n$ en fonction de $n$.

---

LU DANS TÉLÉRAMA :

*Fiable, inaltérable, inusable, le CD a sauvé la musique du couac et les maisons de disques de la faillite. Histoire d’un miracle.*

**En quatre ans, le prix du CD a baissé de 300 %.**

En quatre ans, les prix ont chuté de 300 %. Un CD sorti d’usine (support + boîtier + livret quatre pages) revient royalement à 8,50 F hors taxe.

*Problème* : à combien revenait-il donc (hots taxe) il y a quatre ans ?

## SOMMAIRE




**LE PETIT VERT n° 23**

(BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt légal : 1990

Imprimé au siège de l'Association :

IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à **600** exemplaires


ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F

L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :

ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)