DANS NOS CLASSES

UNE ERREUR D'APPRÉCIATION
DÉRAPAGE SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Gilles WAEHREN

Le programme de Terminale STI a toujours fait apparaître un chapitre consacré aux équations différentielles du premier ordre (et second ordre jusqu'en 2019). On retrouve maintenant cette notion dans l'option de mathématiques complémentaires de Terminale Générale. Pour les STI, certains reverront l'équation $y' + ay = b$ dans leurs études. Enseignant en Terminale STI et en BTS, il m'est souvent arrivé de faire le lien entre ces deux niveaux, reprenant, en deuxième année de BTS, parfois avec mes propres élèves de Terminale, ce qui avait été vu deux ans auparavant. C'est souvent l'occasion de constater que les connaissances s'envolent assez facilement (« On n'a jamais vu ça, monsieur ! »), mais que les compétences restent.
On pourrait limiter le travail sur les équations différentielles à l'application de résultats de cours sur des exercices qui se ressemblent. Bien entendu, notamment pour les élèves issus de Bac Professionnel, ces répétitions techniques sont nécessaires. Mais lorsque l'on sort du contexte mathématique pour étudier des situations liées à la Physique, le manque d'aisance dans le sens de ces équations gêne la résolution de problèmes. Comprendre la construction d'une équation différentielle, qui donne, par exemple la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC, peut devenir ardu si l'on n'a pas pris le temps d'intégrer l'élaboration, la modélisation d'un problème par une équation différentielle. Bien entendu, ce n'est pas une capacité exigible de mes étudiants, mais il me semble difficile de consacrer un chapitre aux équations sans faire de « mise en équation ».

Pendant plusieurs années, j'ai proposé une activité d'introduction (quasiment la même en Terminale et BTS) sur le thème de la désintégration radioactive, un élément du programme de Sciences Physiques de Terminale. J'y ai régulièrement apporté des modifications, une approche différente selon les années : certaines des versions sont données ci-après.

Version 2015 (Tle et BTS)

Désintégration radioactive

Un élément radioactif est un élément dont les atomes ont un noyau qui se désintègre régulièrement. La vitesse de désintégration est appelée activité du noyau. Comme ces désintégrations produisent des émissions de rayons, on parle de radioactivité.
On a pu établir que, pendant une courte durée dt, le nombre de noyaux qui se désintègrent dN est proportionnel au nombre N de noyaux restants. Le coefficient de proportionnalité est −λ.
Écrire la relation qui lie dN à λ, N et dt.
Info : $\frac{dN}{dt} = N'(t)$
Écrire $\frac{N'}{N}$ en fonction de λ. Chercher alors l'expression de $N(t)$.
La période ou demi-vie radioactive est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs disparaissent. La période de l'uranium 235, utilisé dans les réacteurs nucléaires, est d'environ 700 millions d'années.
Déterminer la valeur de λ pour l'uranium 235.
À l'aide de GeoGebra, **représenter** graphiquement la famille de fonctions ainsi obtenues.

Retour au sommaire

Cette première version n'est guère guidée. Tous les élèves de Terminale ne se mettant pas en situation d'autonomie pour répondre aux questions posées, la résolution a été menée conjointement avec le professeur. Le lien entre $\frac{dN}{dt}$ et N' revient maintenant en spécialité Sciences Physique et Mathématiques, mais il faut toujours y consacrer un moment d'explication, en repassant par les tangentes et sécantes vues en Première. Tous les élèves ne font pas le lien entre $\frac{N'}{N}$ et $\frac{u'}{u}$. Le choix de certaines notations rituelles dans les formules rassure, mais limite le passage à d'autres lettres ; c'est un problème régulièrement rencontré en Sciences Physiques. Il faut également prendre le temps d'expliquer que trouver N dans $\frac{N'}{N} = -\lambda$ revient à faire une recherche de primitives : le problème ne s'est alors jamais posé à eux dans ces termes. La notion et le calcul de primitives représentent, en Terminale STI, une vraie difficulté pour des élèves qui ne maîtrisent pas très bien leurs formules de dérivation. Il n'est pas sûr que d'avoir avancé, en 2019, cette partie du programme à la classe de Première soit un remède à cette situation.
La résolution passe ensuite par la substitution de la constante d'intégration dans $\mathrm{N}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t+k}$, en posant $\mathrm{C} = \mathrm{e}^{-k}$, un tour de passe-passe mathématique pas si simple. Enfin, il était bien sûr très perturbant de ne pouvoir donner de valeur à C (donnée non fournie ici). L'objectif était de ne lui attribuer de valeur que lors de la représentation graphique, pour mettre en évidence la famille de solutions. Il faut encore noter que, pour nombre d'élèves qui sont encore fragiles sur la résolution d'équations en général, l'idée d'une équation dont l'inconnue est une fonction demande un saut conceptuel. Ce n'est pas faute de leur expliquer que chercher une primitive est un premier exemple de ce genre de problème en mathématique, la résolution de $F' = f$ est d'abord vue comme l'opération réciproque d'une dérivation.
Ce parti pris d'une activité assez peu directive venait d'une part de l'envie de faire émerger un questionnement ; d'autre part de l'observation d'un élève qui, quelques années auparavant, n'utilisait pas le théorème du cours donnant l'écriture des solutions. Il refaisait systématiquement les étapes du raisonnement. Cette attitude est évidemment très rare, mais pose la question de ce qu'on peut retenir d'une formule : les étapes qui l'ont faite émerger ou son écriture, hiéroglyphique pour certains élèves.

Pour impliquer davantage les élèves dans cette activité, je l'ai développée dans la forme ci-après en 2019. Beaucoup d'étudiants de BTS apprécient les travaux avec un grand nombre de petites questions ; leurs épreuves finales, en Sciences, ont souvent ce format. Ce que l'on perd en sens, on le gagne en autonomie. Il fallut alors amener le liant entre les étapes en envoyant, à tour de rôle, les étudiants résoudre une question au tableau.

Version 2019 (BTS)

Désintégration radioactive

(Premier paragraphe d'explication de la radioactivité identique dans les versions)
On a pu établir que, pendant une courte durée dt, le nombre de noyaux qui se désintègrent dN est proportionnel au nombre N de noyaux restants.
Le coefficient de proportionnalité est −λ : $dN = -\lambda N dt$
On voudrait connaître l'évolution du nombre de noyaux $\mathrm{N}(t)$ au cours du temps t, en années.
1. Recherche de l'expression de N (t).
a) Exprimer $\frac{dN}{dt}$ en fonction de N et λ. Info : En fait, $\frac{dN}{dt} = N'$
b) Écrire $\frac{N'}{N}$ en fonction de λ.
c) Donner une primitive de $\frac{N'}{N}$ Rappel : La dérivée de ln(u) est $\frac{u'}{u}$.
d) Donner une primitive de −λ. Rappel : La dérivée de $f(x) = ax + b$ est $f'(x) = a$.
e) En déduire l'expression du nombre de noyaux $N(t)$ en fonction du temps t.

Retour au sommaire

2. Le nombre de noyaux au début de l'étude est de 10^8 .
a) Écrire la condition initiale.
b) En déduire la constante d'intégration.
3. La période ou demi-vie radioactive est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs disparaissent. La période de l'uranium 235, utilisé dans les réacteurs nucléaires, est d'environ 700 millions d'années.
a) Écrire l'équation de la demi-vie.
b) En déduire la valeur de λ.
c) Représenter graphiquement, sur GeoGebra, la fonction ainsi obtenue.
d) Calculer $\lim_{t \to +\infty} \mathrm{N}(t)$

Lors de l'année précédente, le fiasco rencontré par la version 2015 m'avait engagé à rédiger une série de questions très guidées pour exprimer N en fonction de t, sans donner de valeurs à λ ou à la constante d'intégration. La donnée de la condition initiale permettait de stabiliser les élèves les moins sûrs. En même temps, l'étudiant (re) découvrait ce qu'est une équation différentielle et se familiarisait avec les principales capacités requises en exercice.

Mais cette histoire de proportionnalité me laissait un arrière-goût d'inachevé. Il y avait trop de grandeurs en jeu pour identifier clairement celles que l'on voulait relier. Le confinement du printemps 2020 m'amena à modifier la version 2019 de cette activité pour mettre en évidence cette relation et permettre aux élèves de travailler à distance, y compris en direct, avec moi, sur Internet.

Version 2020 (Tle)

(Premier paragraphe d'explication de la radioactivité identique)

ÉTUDE PRELIMINAIRE

[...] l'uranium 235 se désintègre en thorium 231 et perd la moitié de ses noyaux en 700 millions d'années. On a simulé des mesures de nombre de noyaux sur plusieurs millions d'années :

t(années)	0	1 000 000	2 000 000	4 000 000	8 000 000	16 000 000
Δt		1 000 000				
N (noyaux)	10 000	9 990	9 980	9 960	9 920	9 840
$\Delta \mathrm{N}$		-10				
$\dfrac{\Delta \mathrm{N}}{\mathrm{N} \times \Delta t}$						

Compléter le tableau et vérifier que la dernière ligne est constante.

Retour au sommaire

RECHERCHE D'UNE LOI

Cette constante est le coefficient de proportionnalité entre ΔN et N $\times \Delta t$, on le note $-\lambda$. Comme le coefficient de proportionnalité est négatif, λ est positif.
On peut donc écrire : ΔN $= -\lambda$N $\times \Delta t$.
Pour établir cette loi, les pionniers de la radioactivité (Henri Becquerel, Marie Curie …) n'ont pas pu faire de mesures sur des millions d'années. Ils ont travaillé sur des temps beaucoup plus courts, très courts.

Mathématiquement, cela revient à passer de Δt, un nombre relativement grand, à dt un temps très petit positif (surtout par rapport à la demi-vie). On passe, de même, de ΔN à dN.

1. Exprimer $\frac{dN}{dt}$ en fonction de N et λ

La suite du texte de l'activité reprend des questions de la version 2019, avec des inserts fournissant des définitions, une étude plus complète de la fonction, des espaces vides pour rédiger les réponses fournies en classe à distance. Le document complet est disponible en ligne.
La véritable nouveauté est le tableau permettant d'établir le lien de proportionnalité. Il est clair que ce tableau peut sembler artificiel et j'ai rapidement expliqué aux élèves que nul homme n'avait pu réaliser les mesures du nombre de noyaux sur de telles périodes géologiques. Ils comprirent que le calcul de l'expression de N leur donnerait le fin mot de l'histoire.

t(années)	0,00	1 000 000,00	2 000 000,00	4 000 000,00	8 000 000,00	16 000 000,00
Dt		1000000	1000000	2000000	4000000	8000000
N	10000	9990,104898883	9980,2195890691	9960,478304604	9921,11280564834	9842,84793024
DN		-9,895101116765	-9,8853098141535	-19,7412844653	-39,3654989554798	-78,26487540839
DN/(N*Dt)		-9,90490212E-10	-9,904902118E-10	-9,90980747E-10	-9,91962790028E-10	-9,9393077E-10
Ecart avec lambda		0,0495 %	0,0495 %	0,0991 %	0,1983 %	0,3970 %

Le remplissage du tableau a été l'occasion d'une réflexion sur les formules tableur. Les valeurs de $\frac{\Delta N}{N\Delta t}$ sont très proches les unes des autres et le calcul de λ (grâce à la demi-vie) confirmera ces résultats. Les différences observées seront alors mises sur le compte d'arrondis et de divisions sources de valeurs approchées (voir dernière ligne ajoutée à la rédaction de l'article). Grave erreur !

Encouragé par l'effet de ce tableau de valeurs sur l'entrée des élèves dans le monde des équations différentielles, je me décidais à reprendre le principe de cette activité et de son tableau à l'automne 2020 pour les secondes années de BTS Systèmes Numériques. Quatre étudiants de cette classe, qui m'avaient eu en Terminale, ayant déjà été confrontés à cette étude, je me proposais de changer de thème et de m'inspirer d'un sujet de baccalauréat sur un tunnel de congélation de poulets. Très confiant dans mon travail du mois de mai, je reprenais la même stratégie pour créer le tableau de valeurs… sans vérifier les résultats de la dernière ligne.

Retour au sommaire

Version 2020 (BTS)

Une entreprise congèle des ailerons de poulets dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant t = 0 (t en secondes), les ailerons, à une température de 35 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à −24 °C.

Étude préliminaire

On a relevé la température, notée f, à des instants t :

t (secondes)	0	300	600	1200	2400	4800	9600
Δt		300					
f (degrés)	35	30,63	26,81	20,53	12,05	4,15	0,49
Δf		$-4{,}37$					
$\dfrac{\Delta f}{f \times \Delta t}$							

1. À l'aide du tableur, compléter le tableau et vérifier que la dernière ligne est constante.
2. Placer les points de la courbe de f du tableau.
3. Quel semble être le sens de variation de f sur $[0; +\infty[$?
4. Comment doit être la limite de f en $+\infty$?

RECHERCHE D'UNE LOI

Pour les premiers relevés, le rapport $\frac{\Delta f}{f \times \Delta t}$ semble à peu prés constant.
Cette constante est le coefficient de proportionnalité entre Δf et $f \times \Delta t$, on le note α.
On peut donc écrire : $\Delta f = \alpha f \times \Delta t$.

Objectif : trouver une fonction f qui vérifie cette loi.

Pour ce faire, on va réduire les intervalles de temps de Δt, un nombre relativement grand, à dt un temps très petit positif. On passe, de même, de Δf à df.

L'échec fut retentissant. L'écart entre les valeurs de la dernière ligne allait croissant, sans borne :

t	0	300	600	1200	2400	4800	9600
Dt		300	300	600	1200	2400	4800
f	35	30,63000430795	26,805633254427	20,5297706906	12,0420424173834	4,143165302345	0,49045196350149
Df		-4,369995692052	-3,8243710535216	-6,27586256383	-8,48772827321174	-7,898877115039	-3,6527133388431
Df/(f*Dt)		-0,000475568079	-0,0004755680789	-0,00050949283	-0,000587367711322	-0,000794368208	-0,00155159322874
Ecart avec lambda		6,9750 %	6,9750 %	14,6061 %	32,1234 %	78,6864 %	249,0177 %

Devant les étudiants, je ne voyais pas d'explication *a priori* et leur demandais de me croire, sur parole, de l'existence de la relation de proportionnalité attendue par la suite.
Le reste du texte de cette version est également en annexe. Le contenu était suffisamment dense pour estomper cette déconvenue. Je n'étais pas mécontent des premières questions où je leur demandais de conjecturer certains résultats, ni des changements de modèle opérés dans la suite de l'étude. Mais l'entrée en scène était manquée.

J'ai donc cherché récemment la source de cette distorsion entre les versions du printemps et de l'automne. Était-ce dû à l'ordre de grandeur des valeurs choisies ? À des écarts comme on les

Retour au sommaire

rencontre dans la résolution approchée par la méthode d'Euler ? Au fait que la validité de la relation se limite à un voisinage de 0 ?

J'ai donc repris mon calcul :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t} = \frac{f(t+h) - f(t)}{f(t) \times h}$$

en posant $h = \Delta t$ pour des commodités d'écriture (et parce que Δt parle plus aux élèves de STI)

Comme $f(t) = \mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda t}$, on a :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t} = \frac{\mathrm{Ce}^{-\lambda(t+h)} - \mathrm{Ce}^{-\lambda t}}{h\mathrm{Ce}^{-\lambda t}}$$

soit :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t} = \frac{\mathrm{Ce}^{-\lambda t}\left(\mathrm{Ce}^{-\lambda h} - 1\right)}{h\mathrm{Ce}^{-\lambda t}} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1}{h}$$

Pour λh proche de 0 on a : $\mathrm{e}^{-\lambda h} - 1 = -\lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + o((\lambda h)^2)$ d'où :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t} = -\lambda + \frac{\lambda^2 h}{2} + o(\lambda^2 h)$$

L'erreur commise, relativement à λ, est donc $\frac{\lambda h}{2}$

Elle est d'autant plus petite que λh est proche de 0. Mais surtout, elle reste bornée si h est constant !

Comme on l'observe dans les deux tableaux, pour travailler avec ces valeurs de temps suffisamment grandes, j'avais un pas non constant pour les valeurs de t. Pour la radioactivité, l'impact dû à la constance de la première ligne était très limité du fait que la quantité λh restait assez proche de 0. Ce n'est plus le cas pour la congélation des poulets.

t	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100
Dt		300	300	300	300	300	300	300
f	35	30,63000430795	26,805633254427	23,45876177315	20,5297706905951	17,96648470555	15,7232429694163	13,76008571109
Df		-4,369995692052	-3,8243710535216	-3,34687148127	-2,92899108255847	-2,563285985049	-2,24324173612996	-1,9631572583266
Df/(f*Dt)		-0,000475568079	-0,0004755680789	-0,00047556808	-0,000475568078946	-0,000475568079	-0,00047556807895	-0,0004755680789
Ecart avec lambda		6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %

Mettre les valeurs en progression géométrique, intéressant pour observer le phénomène sur une longue échéance, a joué contre le fond de mon activité. Il faut savoir garder un pas constant et de la mesure en toute chose.

Conclusion

La réussite des étudiants sur ce chapitre n'est pas nécessairement liée à cette activité d'introduction, mais je suis convaincu qu'elle laisse le moins de saletés possibles sous le tapis. La mémorisation des formules, le sens de l'expression « solution d'une équation » ou la recherche de la constante d'intégration apportent d'autres embûches que ne saurait résoudre un travail d'approche qui se veut à la portée de élèves. Je souhaite que mes errements puissent servir à faciliter le travail de collègues voulant aborder les équations différentielles en dehors de l'énonciation de formules vides de sens.

Retour au sommaire