N° 147 Septembre 2021

LE PETIT VERT

BIEN TAILLÉ POUR LA RENTRÉE !

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

La Nuit du Jeu le 10 septembre à Moulins-lès-Metz

Les profs de maths travaillent-ils vraiment ?

Une balade à Toul

Les Journées Nationales à Bourges du 23 au 26 octobre

Régionale de Lorraine APMEP

www.apmeplorraine.fr

SOMMAIRE

ÉDITORIAL

VÉRIFIONS

Gilles Waehren

Notre ministre préféré a déclaré, sur France Info le 28 juillet (selon le Café Pédagogique) que 80 % des enseignants étaient vaccinés contre la Covid-19, mais que ses sources reposaient sur des enquêtes non communicables. Ceci empêche quiconque de vérifier cette proportion. Qu'elle soit officielle ou non, tout un chacun devrait pouvoir se référer à l'origine d'une telle annonce. Alors que les outils numériques permettent de falsifier aisément tout document (y compris les fameux passes sanitaires), nous devrions tous être attentifs à la validité des données que l'on nous fournit ; une image, un document même avec le bon tampon, ne peuvent plus être considérés comme fiables si on ne peut pas les tracer méthodiquement. Que vaut la déclaration d'un ministre si personne ne peut la confirmer ou la contredire ?

Souvent, à l'école, la parole du maître est sacralisée et le professeur est vu comme le seul garant de la valeur de son propos. Pourtant, les programmes d'enseignement ont changé depuis la Troisième République et ce qui était vrai à la fin du dix-neuvième siècle ne l'est plus au début du vingt-et-unième (notamment les considérations colonialistes qui émaillaient les cours de géographie). Le problème, ici, n'est pas de remettre en cause les programmes d'enseignement à la lueur de l'Histoire, mais de se poser la question de ce que l'on doit effectivement transmettre. En mathématiques, si certaines notions semblent plus importantes que d'autres, les pays d'Europe ne choisissent pas tous les mêmes.
Et, de nos jours, les débats portent de plus en plus souvent sur les méthodes d'enseignement (apprentissage de la lecture de façon syllabique ou de façon globale, miracle de Singapour) que sur les contenus.

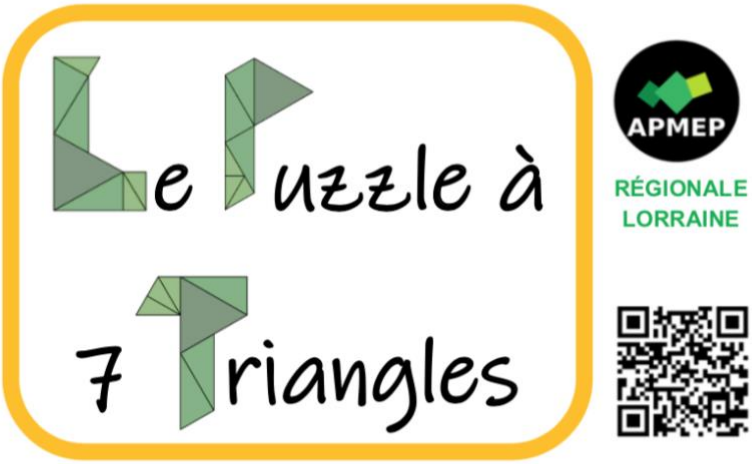
Cependant, les programmes de mathématiques, avant les paragraphes relatifs aux points de programme à traiter, commencent tous par une liste des compétences à acquérir. Parmi celles-ci, on trouve Chercher et Modéliser, souvent difficiles à travailler car elles ne reposent pas sur des techniques toutes faites, prêtes à l'ingestion. Chercher nous demande, certes, de s'investir dans un problème, mais aussi de se lancer dans une quête d'informations utiles, propres à la résolution de ce problème. Modéliser nous demande, certes, de trouver un cadre, une méthode, adapté à la résolution dudit problème, mais aussi d'évaluer la pertinence du modèle choisi. La compétence Calculer, au centre de polémiques sans fin, ne peut pas seulement servir de support à l'évaluation d'une virtuosité que seul un ordinateur peut atteindre ; elle peut aussi sous-entendre de s'assurer que le résultat d'un calcul est correct ou a des chances d'être correct. Le recours au contexte de l'exercice, aux ordres de grandeur, fait partie des stratégies enseignées dès le collège pour vérifier la réponse à une question. Un usage cartésien de la calculatrice, de l'ordinateur, peut aider l'élève dans son travail de vérification, tout en lui rappelant qu'un calcul mal saisi, une instruction incorrecte, ne peuvent pas fournir un résultat juste.

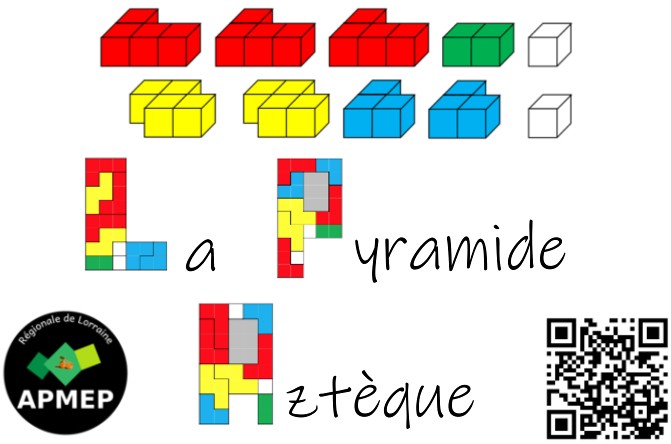
Il n'est donc pas rare que, si un élève m'interroge sur la correction d'une réponse, je lui demande, dans un premier temps, son avis personnel. Puis nous essayons d'imaginer des méthodes pour vérifier cette réponse. Parfois, nous allons questionner les voisins pour comparer. Il est quelquefois nécessaire d'insister sur le fait que les élèves ayant les meilleures notes peuvent aussi se tromper. Ce travail de vérification prend du temps, mais on peut espérer que cette attitude devienne un réflexe professionnel dans leur future carrière, que ce soit pour l'établissement d'un bilan comptable ou la réalisation d'une pièce de menuiserie.

Retour au sommaire

Nous avons également la responsabilité de proposer à nos élèves des situations qui permettent ces vérifications. On notera, au passage, que les données réelles fournies dans les sujets d'examen sont toujours sourcées : évitons de recourir à des situations improbables ou fausses pour ne plus dire que « un livre de maths est le seul endroit où il est normal d'acheter 53 melons ». Il peut aussi être utile d'assister nos élèves dans la recherche des informations utiles, y compris en mathématiques (énoncé d'une propriété oubliée…), sur la Toile. Je crois que cela fait partie des orientations que l'on peut envisager pour développer un esprit critique. Il ne s'agit pas de les former à la contradiction systématique, mais de leur donner les moyens de vérifier des affirmations : les leurs d'abord, celles du professeur aussi, celles d'un ministre parfois.

Des produits de notre régionale à ne pas manquer !





En complément, des documents complémentaires sont accessibles en utilisant le QRcode de l'étiquette ou le lien indiqué sur la feuille jointe aux pièces. Ces dossiers seront modifié et complétés au fur et à mesure des envies et des propositions des utilisateurs.

Le puzzle à 7 triangles est vendu au prix de 5€, la pyramide aztèque 8€. Pour un envoi postal, il faut rajouter les frais de port (2 x 1,08 €).

Les commandes peuvent être envoyées à cette adresse .

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS

Voici ce que nous proposait Jacques Verdier à propos d'un **exercice de Bac**.

Dans la série ACA (Action et Communication Administrative, ex-G1 pour simplifier) du baccalauréat STT, un des deux exercices commençait par la question reproduite ci-dessous (sur laquelle se greffait un exercice de probabilités).
J'ai pensé que, en dehors de tout contexte « mathématique », une telle question rassortissait aux Mathématiques du Citoyen dont il est tant question en ce moment. J'ai également pensé que, à un tel exercice, tout jeune passant un Bac se devait d'y répondre sans faute (d'autant qu'on ne demandait que le « remplissage » du tableau, et non pas une explication rédigée du processus suivi) : je m'attendais donc à une réussite de 100%.
Voici d'abord l'énoncé :

> *Une administration emploie 250 personnes classées en trois catégories : A, B et C. 32% des employés sont des hommes.*
> *40% des hommes sont dans la catégorie A.*
> *La catégorie C compte 20% du personnel dont 10 hommes*
> *Dans la catégorie B, il y a autant d'hommes que de femmes.*
> *Recopier et compléter ce tableau en utilisant les renseignements précédents :*

Sexe/catégorie	*A*	*B*	*C*	*D*	*total*
femme					
homme					
total					*250*

Et voici maintenant les résultats. Il ne s'agit que de résultats partiels : j'ai interrogé quelques collègues qui, comme moi, corrigeaient cette série.
Sur 208 copies, 168 candidat(e)s ont répondu correctement, soit environ les trois quarts.
Je dois être d'un naturel plutôt pessimiste, car je considère comme une faillite de notre système qu'un jeune adulte sur quatre, ayant passé au moins trois ans au lycée, ne réussisse pas un tel exercice (ne parlons pas des dérivées et tangentes à un courbe, dont on peut se demander quel sens elles peuvent avoir…).
Mes collègues contactées sont, elles, plus optimistes : trois personnes sur quatre ont réussi la première question du problème de math ... et quand on sait ce que représentent les maths pour elles…
Jacques Verdier

P.S. J'aimerais que quelques enseignants de collège posent ce même exercice à des élèves de quatrième, pour comparer les résultats.

Les dernières semaines nous ont montré le manque d'aisance de nos concitoyens avec les proportions sur des populations et des sous-populations. Vingt-cinq ans après ce texte écrit par Jacques, nos lecteurs n'auraient-ils pas envie de répondre à son souhait ?

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

DIPLÔME NATIONAL DU BREVET, SÉRIE GÉNÉRALE

Des échanges au sein de la régionale ont porté sur le contenu mathématique du sujet du Brevet 2021. De plus, l'article page 73 « Dessin d'un composteur » évoque l'aspect visuel des dessins proposés aux élèves.

Exercice 1

Une moyenne de moyennes est demandée avec des mois qui n'ont pas le même nombre de jours. La « moyenne sur l'année » devrait être pondérée par ces durées de mois différentes. Cela pourrait être fait « plus tard » en complétant par une recherche pour comprendre comment ces températures moyennes mensuelles sont calculées.

Par ailleurs, la température est une grandeur mesurée. On peut donc regarder une évolution. Mais cela a t-il un sens (non mathématique) de regarder un pourcentage d'évolution sur une échelle (Celsius) où la valeur 0 est purement conventionnelle ? Que vous mesuriez une longueur en mètres, kilomètres, hectomètres, pieds, miles ou autres, le pourcentage d'évolution restera le même (et une longueur nulle mesurera 0 km, 0 cm, 0 pied).
Que deviennent les pourcentages d'évolution calculés en degrés Celsius si vous aviez l'idée de travailler avec des degrés Fahrenheit ou (plus raisonnablement peut-être) en Kelvin (échelle dans laquelle 0 = pas d'agitation) ? Réponse : autre chose.
Et question : quelle est l'évolution en pourcentage si vous passez de (-2)°C à (+3)°C ? (Bon courage ! mais ce pourcentage peut être calculé si les températures sont mesurées en Kelvin ou degrés Fahrenheit, et les valeurs seront bien différentes).

Nul doute que cela n'a pas gêné les candidats, mais cela nous fait « mal aux maths ».

Exercice 4

Est proposé un algorithme qui utilise une variable par étape d'un programme de calcul. D'un point de vue informatique, cela est très surprenant.

Exercice 5

Concernant la figure avec « grand côté » et « petit côté », nous avons remarqué qu'en 2021 le mot « trapèze » pouvait être rencontré en évaluation (cela ne l'était pas dans des programmes précédents), les expressions « petite base » et « grande base » n'ont pas été utilisées, sans doute pour ne pas risquer de confusion avec la notion de « base d'un prisme ». Ces « petit côté » et « grand coté » ne pourraient-ils pas être les deux côtés non parallèles du trapèze ?

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

ENSEIGNER LES MATHS AU DÉBUT DU 21ÈME SIÈCLE

En mars-avril 2021, les membres du Comité de la Régionale de Lorraine, ont échangé, par courrier électronique, leurs points de vue sur l'enseignement des mathématiques en ce début de vingt et unième siècle. À l'origine de ces échanges, on trouve, entre autres, une vidéo qui a provoqué de nombreuses réactions : https://www.youtube-nocookie.com/embed/Zh3Yz3PiXZw. Les lignes qui suivent s'efforcent de faire une synthèse organisée de ces échanges, en essayant de préserver un maximum des idées qui se sont alors exprimées. Le style général peut ainsi paraître hétérogène et avoir une tournure assez directe dans certains paragraphes.

SUR L'USAGE DES MATHÉMATIQUES PAR LE POLITIQUE

Une personne, que le ministre de l'EN (Note : M. Blanquer qui évoque le Président Macron) a qualifiée de très intelligente au point de devenir experte sur le sujet, a refusé TOUTES les modélisations mathématiques convergentes qui annonçaient une inflation forte (exponentielle) de l'épidémie de Covid 19 pour le mois de mars. Cette personne a choisi de ne pas confiner la France le 28 janvier (soit), ni le 4 février (encore), ni le 11 février (toujours), ni le 18 février, ni le 25 février, ni le 4 mars, ni le 11 mars, ni le 18 mars, ni le 25 mars (*Errare humanum est, perseverare diabolicum*), alors que les faits confirmaient au fur et à mesure les modèles d'évolution de la pandémie. Il y a donc bien en France une vision alternative des modélisations de toute une communauté scientifique.

Les modélisations sont proposées par les scientifiques, mais c'est le politique (en l'occurrence la personne très intelligente précitée) qui, au final, prend la décision, en tenant compte de toutes les informations à sa disposition. Il n'est pas question de juger la décision mais le principe de fonctionnement ; d'autant que les conséquences des décisions vont bien au-delà de la situation à l'instant *t*.

Les politiques semblent accepter les arguments scientifiques lorsqu'ils rentrent dans leurs « dogmes » et les mettent de côté lorsqu'ils s'en écartent. « Faites ou ne faites pas ceci, mais on ne vous dira pas toujours pourquoi. » : pourquoi peut-on sortir non masqué dans une commune alors que l'absence de masque peut entraîner une amende de 135 euros dans une autre ?

Cela pose la question de la place du fait scientifique dans notre société et de la façon dont on considère son enseignement : est-il encore suffisant ? Est-il encore adapté ?
On peut alors se demander comment on peut exiger un niveau à peine plus élevé que celui du cycle 4 à des étudiants en Master parce qu'ils ne présentent « que » le CRPE. Le but n'est-il que de recruter des enseignant(e)s qui ont des connaissances mathématiques qui dépassent tout juste ce qu'ils auront à enseigner ? Pourtant, il faut beaucoup de temps, en L3, pour construire N et l'addition, pour montrer en passant que 2+2=4, et éviter certains écueils logiques ("ce n'est pas parce que 1+1=2 que 2+2=4" ; en effet, il faut avoir défini 1,2,3,4, construit l'addition et montré l'associativité).

Retour au sommaire

SUR LE SENS DES ÉCRITURES FRACTIONNAIRES

Suite à la vision de la vidéo (2+2=4, mais 2 et 2 peut s'écrire 22, grande difficulté pour certains élèves de CP), on peut signaler, depuis quelques années, l'apparition de calculs du style $\frac{23}{36}=\frac{2\times3}{3\times6}=\frac{2}{6}$ dans des copies ou sous la forme $\frac{23}{36}=\frac{2}{6}$ et souvent en poursuivant … $=\frac{1}{3}$ Le plus inquiétant, c'est que cela apparaît chez les "plus grands", quatrième ou troisième. Que faut-il en penser ? Qu'a-t-on raté ? La simplification en divisant numérateur et diviseur d'une même fraction est assimilée certes, mais pas la fonction des chiffres dans la numération.
L'origine du problème est aussi liée à l'introduction du calcul littéral : une simplification de $\frac{2a}{6a}$ par exemple, où le statut de la lettre est confus : nombre ou chiffre ? La suppression du signe de multiplication permet la juxtaposition de deux caractères, tout en rendant implicite la multiplication. Le problème vient souvent de l'implicite. Si $2a$ signifie $2\times a$, 23 ne signifie pas 2×3. Cela peut paraître simplissime, mais, dans le cadre de la simplification de la fraction, c'est pourtant ce qui est en jeu. Dans la vidéo, on a même $2\times2=22$!!!

Inversement, on peut retrouver ce problème de statut de la lettre lorsqu'il s'agit d'un élève qui considère que 2a peut désigner $2\times10+a$. Cela peut être associé à un raisonnement correct, mais l'écriture ne l'est pas. Pour revenir à la fraction, les élèves qui retiennent la formule de simplification d'une fraction avec l'écriture littérale mémorisent cela : $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$. Si la règle est apprise sans compréhension de la situation, tout est alors possible... On est ici dans une erreur d'apprentissage, où on apprend sans comprendre. Savoir énoncer une formule du cours est une compétence cognitive de bas niveau (mémoriser) qui est souvent attendue par les enseignants, mais ce ne devrait pas être un objectif prioritaire hors contexte de son usage (nécessité de l'activité mathématique d'introduction, nécessité d'illustrer les formules par des exemples, des images mentales, etc.). Que faire pour éviter ce genre de chose ?

Concernant les fractions, mettre en avant une formule qui résume tout semble faire des dégâts. Ce qui est à retenir serait peut-être qu'on divise numérateur et dénominateur par le même nombre : une phrase à écrire, à lire et à savoir appliquer. Faudrait-il éviter les formules dans le cahier de cours ? Leur utilisation est pourtant une entrée dans le fonctionnement du calcul algébrique.

Une autre pratique qui peut générer des erreurs est la simplification "par zéro". Le fait de barrer des zéros dans une fraction au numérateur et au dénominateur d'une fraction est une méthode rapide, pratique, utilisée assez tôt et très répandue, mais qui peut ouvrir une porte au fait de barrer des 1, des 2, … Encore une fois, il s'agit d'une multiplication (d'une division ?) implicite : il est plus aisé décrire $\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$ en barrant les deux zéros plutôt que $\frac{20}{30}=\frac{2\times10}{3\times10}$ en barrant les $\times 10$. Une autre pratique consiste à écrire : $\frac{20}{30}=\frac{20\div10}{30\div10}=\frac{2}{3}$ ou même : $\frac{20}{30}=\frac{\frac{20}{10}}{\frac{30}{10}}=\frac{2}{3}$ avec confusion possible lors de la découverte de la division de deux fractions.

Les collègues de maths ne montrent pas (plus ?) cet exemple de raturage des zéros du numérateur et du dénominateur à leurs élèves, mais quid des profs d'autres matières, voire des parents ?

Retour au sommaire

SUR LES AUTRES VISIONS DES MATHÉMATIQUES

Chaque année, le collègue de physique, qui utilise les puissances de 10 et les notations scientifiques, les introduit avant que les profs de maths n'aient le temps d'expliquer proprement les puissances en général. La vision très utilitariste du physicien occulte toute la phase de compréhension et d'appropriation des puissances par l'élève qui n'a retenu que la technique.
L'utilisation des mathématiques par les collègues d'autres disciplines est souvent contre performante pour donner du sens. L'origine de la notion mathématique n'est pas leur préoccupation première ; c'est flagrant en enseignement scientifique. Mais on trouve aussi cela entre collègues, entre l'école et le collège, le collège et le lycée, ... sur le nombre décimal, la proportionnalité.
Dans le travail hors de la classe, les parents, grands frères et sœurs, et même parfois les profs particuliers... n'aident pas forcément l'élève comme il en a vraiment besoin. Il est difficile d'intervenir sur ce point : c'est un des axes du triangle didactique qui nous échappe, le lien entre les élèves et les contenus, voire les ressources.

SUR LA PROGRESSIVITÉ DE L'INTRODUCTION DU CALCUL LITTÉRAL

Les formules littérales pour les techniques opératoires nécessitent une temporisation : il faut vérifier que l'élève sait calculer avec des nombres d'abord, puis résumer cette méthode par une phrase et/ou une formule ensuite. Pour savoir simplifier des fractions ou en ajouter, multiplier, ... on n'a pas réellement besoin de formules littérales.

Par contre, il y a des formules incontournables à mémoriser, comme celles qui permettent de calculer des aires, des volumes, la longueur du cercle, ... Mais elles ne posent pas réellement problème au départ, car elles sont introduites pour effectuer des calculs automatisés avec des données connues comme dans un programme de calcul en quelque sorte.

Ainsi, les formules littérales de règles de calcul doivent-elles apparaître dans un cours d'élève ? On manipule ces formules d'aire/volume/trigo/... et on en cherche dans les problèmes mais le collège n'est pas le moment d'écrire ces formules, mais plutôt de comprendre et d'en assimiler les règles.

L'objectif reste la résolution de problèmes. C'est là que les petites incompréhensions prennent de grandes proportions. En effet, il faut alors maîtriser des techniques opératoires, des règles de factorisations, de simplifications d'écritures, de résolution d'équations, etc. C'est sans doute à partir de ces situations complexes, lorsqu'il faut vraiment utiliser le calcul littéral, lorsqu'il devient réellement incontournable, que les difficultés surgissent.

Par exemple, lorsque dans une recherche, l'élève (le prof ?) introduit une inconnue, exprime la situation en utilisant des " formules" exprimées à l'aide de cette inconnue, et se retrouve à devoir résoudre une équation ou inéquation, il est amené à utiliser des règles de calcul. Et même s'il les maîtrise avec des nombres, il n'est pas si simple pour lui de les reconnaître lorsque certains nombres sont représentés par une lettre.

Au lycée, on voit des élèves perdus lorsqu'il faut calculer $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a$, alors qu'ils savent calculer $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ (ou savent utiliser la calculatrice pour le faire). On retrouve aussi des difficultés avec $\frac{a+5}{a+2}$, qui peut être vite remplacé par $\frac{5}{2}$, en barrant les $+a$. Certains hésitent lorsqu'ils ont $\frac{5a}{2a}$: peut-on « barrer » ? Des incompréhensions surgissent lorsqu'on remplace, en une ligne, $\frac{2a}{5}$ en $\frac{2}{5}a$.

Ces difficultés vont revenir, en Première, lors de la simplification par h d'un taux d'accroissement comme $5h^2 + 6h$. Parfois, la factorisation par h au numérateur reste artificielle et l'élève a besoin

Retour au sommaire

pour comprendre de voir réapparaître la formule $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$ et de simplifier ensuite chaque terme : on est ici sur la somme de deux fractions de même dénominateur !!

Avec le calcul littéral, les priorités opératoires ne sont plus visibles, les formules sont déguisées, les élèves ne savent plus ce qu'ils savent faire ou pas... et dans ce flou, parfois ils inventent de nouvelles règles.

Concernant le "Développer et réduire", on peut l'introduire, au début, avec un petit tour de mathémagie. On fait faire plein de calculs sur un nombre choisi au départ et selon le niveau :

- en Quatrième, tout le monde trouve le même résultat et en plus il était déjà écrit sous le pot de fleur au fond de la classe
- en Troisième, chaque élève donne son résultat au professeur qui devine le nombre choisi.

On peut alors leur demander, s'ils préfèrent, par exemple, remplacer x par 2 dans $2x+5x+8x^2+15x^2+15+27$ ou dans $23x^2+7x+42$ (et pourquoi pas dans $42 + 23x^2 +7x$?). Enfin, on peut expliquer que, si on sait ramener n'importe quelle expression littérale (du premier ordre par exemple) à une expression de la forme $ax + b$ (ou $b + ax$) et si on connaît une méthode pour résoudre l'équation $ax + b = c$, alors on saura résoudre tous les problèmes du premier ordre avec un minimum de connaissances (développer, réduire, résoudre ax+b=c). À un moment on sera aussi confronté au fameux "À quoi ça sert ?"...

Le calcul littéral peut aussi s'introduire en parallèle avec l'utilisation du tableur : quand l'élève comprend que la cellule s'apparente à la variable x et qu'on a comme objectif la résolution d'équations, il peut avancer. Malheureusement, cette démarche est vite oubliée et, au moment de décontextualiser, de faire comprendre quelques petites transformations d'expressions littérales, le sens a été perdu.

SUR L'ÉVOLUTION DES PPRATIQUES ET DES ATTENDUS

L'enseignement des mathématiques au XXème siècle a beaucoup reposé, que ce soit dans la scolarité primaire, secondaire ou post bac, sur des calculs à faire de tête, à la main (parfois à la règle à calcul…). Il était facile de comprendre pourquoi nous avions tout intérêt à utiliser des fractions irréductibles, des dénominateurs ne comportant pas de nombres « à virgule » ou de radicaux, cela rendait plus simples les calculs qui allaient suivre.

La calculatrice est arrivée, on a continué à demander les mêmes choses aux élèves sans que ces mêmes choses ne deviennent aussi utiles qu'avant. Pourquoi cet usage se poursuit-il ?

En 2021, il peut être intéressant de comprendre comment obtenir diverses écritures fractionnaires égales, sans avoir besoin de dire que l'une est plus simple (meilleure ?) que l'autre, et comprendre qu'utiliser des fractions irréductibles facilitera le calcul mental ou rapide.

Le triptyque « Développer, réduire et ordonner » fait encore partie des « us et coutumes » de l'enseignement secondaire. Longtemps, il était justifié non par une écriture plus simple ou par l'application de normes en vigueur, mais comme la possibilité d'obtenir visuellement la preuve que deux expressions algébriques étaient égales. En 2021, quelles « coutumes » doit-on conserver dans l'enseignement des mathématiques ? Se confronter à la réalité de l'usage des mathématiques en dehors ou au-delà de l'enseignement primaire ou secondaire, permettrait de recentrer nos pratiques.

Certaines "coutumes" ont la vie dure chez les jeunes enseignants, mais peu se posent la question de leur utilité/nécessité à ce moment-là de leur carrière, posant des exigences plus importantes que leurs aînés. Leur évolution professionnelle permettra peut-être de recentrer certaines exigences.

Retour au sommaire

Les enseignants qui ont connu, comme élèves voire comme professeurs, la réforme des maths modernes, ont pu apprécier le niveau d'abstraction et d'imaginaire requis, mais ils se sont aussi construit des habitudes de rigueur (pas d'unités dans les calculs...). Les réflexions sur "grandeurs et mesures", par exemple, peuvent toutefois mettre à mal certains *a priori*. La confrontation à d'autres pratiques, tout aussi rigoureuses, permet d'inscrire l'enseignement des mathématiques dans le réel, de donner du sens aux unités, produits, quotients, de sortir d'une sorte de zone d'ombre dans laquelle l'exercice de l'enseignement n'est pas chose aisée et de mieux articuler certains savoirs. L'évolution des pratiques se fait lentement, et parfois ne se fait pas... Il est bon d'y réfléchir.

La technicité à tout prix n'est plus nécessaire (à l'époque de la calculatrice...). Mais à trop pencher dans l'autre sens, sait-on encore ce qui est utile/nécessaire/indispensable dans les pratiques calculatoires ? en particulier dans le calcul littéral ? Comment choisir ce qui va permettre aux élèves de pouvoir entrer dans la résolution de problèmes avec un outillage suffisant ? Est-il nécessaire de mettre les élèves de Seconde devant d'énormes calculs avec des racines carrées, des fractions continues, des enchaînements de puissances, de résolutions d'équations complexes avec des valeurs absolues, etc. ? C'est souvent un gros chapitre de début d'année - qui peut durer jusqu'à un mois, voire plus chez un stagiaire consciencieux - conséquence de l'interprétation que beaucoup de profs de lycée font du chapitre "nombres et calculs" dans le nouveau programme (2019) ... Chapitre qui laisse souvent perplexe et qui en décourage plus d'un (professeur comme élève).

En BTS, les applications de la transformée en z sont un thème où le niveau calculatoire est redoutable, où le retour aux règles de base du calcul fractionnaire, du développement, de la factorisation, de la résolution d'équations, est permanent... et doit se faire par des élèves qui sont allés en Bac Pro sans valider tous les acquis du collège. Comment résoudre alors $zY(z)-z-3Y(z)=2z/(z-1)$? Sachant que l'inconnue est la fonction Y de la variable complexe z... On leur montre comment procéder avec un logiciel de calcul formel : dans XCas, on tape solve(z*Y-*z*-3*Y=2**y*/(*z*-1),Y). Le décalage est énorme entre les contenus abordés et le niveau calculatoire requis. De même, résoudre une équation différentielle peut être difficile pour les anciens Bac Pro, mais aussi les Bacs Technos : il faut déjà résoudre une équation du premier degré pour trouver la solution particulière. Reste alors à apprendre par cœur la solution générale avec l'exponentielle.

Il semble donc toujours utile de développer, réduire, ordonner ; mais le sens de l'égalité, de l'usage du symbole « = », mériterait qu'on y consacre plus de temps, pour mieux accompagner l'élève dans son usage depuis sa découverte dans le premier degré jusqu'au lycée. Le calcul ne peut se désolidariser du raisonnement, au risque de faire des élèves des machines qui calculent mal. Le calcul littéral est devenu le point d'achoppement de notre enseignement, entre ceux qui veulent le voir disparaître, ceux qui en font la pierre angulaire de l'enseignement secondaire et, ceux qui croient encore que c'est un mal nécessaire.

SUR DES PISTES DE REMÉDIATION

Peut-être peut-on inciter l'élève à vérifier la validité de ses formules en cherchant un contre-exemple rapide, dans un coin de feuille, en cas de doute ! Peut-être faut-il se convaincre par soi-même qu'une technique de calcul est un "faux ami" !

Comment faire pour aider les élèves ? Quelles pourraient être les bonnes pratiques de l'enseignant ? À quel niveau de maîtrise se placer ?

Retour au sommaire

Quelques pistes convergentes :

- revenir dès qu'il y a un doute, même léger, dans un calcul littéral à la résolution du même type de calcul mais sans lettre dans un coin du tableau… prendre des exemples numériques semble une stratégie utile aux élèves, surtout quand on cherche une formule générale ;
- ne pas sauter trop d'étapes, ou s'assurer, à chacune, du suivi des élèves, par un retour vers la classe, en renvoyant chaque question pour une validation par les pairs ; on est cependant vite partagé entre ceux qui ont saisi tout de suite et ceux qui ont le plus de mal, y compris avec une multiplicité de points de vue ;
- réécrire certaines étapes intermédiaires, même évidentes, car elles ne le sont pas pour les élèves. (La perte de temps n'est pas si importante et le profit considérable si cela évite de couler la moitié de la classe) ;
- ne pas considérer les techniques comme acquises par tous (laisser la porte ouverte aux questions, au doute possible, autoriser la plus "bête" des questions, à laquelle l'élève en la posant saura peut-être même répondre tout seul...) ;
- revenir au sens de ce qu'on fait, même si cela doit sûrement coûter plus d'énergie aux élèves.

Pour ce dernier point, l'automatisation du calcul littéral peut devenir contre-productive. En effet, s'il y a de bons automatismes, la perte du sens en engendre souvent de mauvais. Asséner par la répétition est une méthode d'enseignement discutable.

Pour remédier aux difficultés des élèves, on peut faire un rappel permanent à l'oralisation de ce qui est caché ($2a$ est bien 2 multiplié par le nombre a). Comment rédiger les simplifications de fractions ? Deux approches :

1. Rappeler, à chaque fois, la règle des écritures fractionnaires égales, si on multiplie ou divise le numérateur et le dénominateur par un même nombre :

- en écrivant les **<u>deux</u>** multiplications ou divisions ;
- en explicitant qu'on agit sur chaque nombre (numérateur et dénominateur) et pas sur le nombre en écriture fractionnaire ;

2. Énoncer la règle d'égalité qui garantit qu'on a le même nombre (sous forme fractionnaire), qu'on écrive les multiplications ou pas.

Ensuite, concernant le fait que les élèves inventent des règles, on peut penser que la mémorisation du cours n'a pas été faite et les lacunes sont alors comblées à la va-vite. Certains travaillent donc en essayant toujours de faire "comme la dernière fois" et passent à côté du fait, par exemple, qu'on applique le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle pour calculer la longueur d'un côté.

SUR LA PLACE DU TRAVAIL PERSONNEL

Les élèves qui apprennent parfois au dernier moment de manière superficielle des contenus, formules, vite et mal, ne sont pas prêts quand il s'agit de s'en servir (que ce soient les tables de multiplication ou les formules de dérivées, par exemple...). Il faut les distinguer des élèves qui cherchent des modèles d'exercices à reproduire dans la résolution de problèmes, avec un souci d'économie d'efforts, et veulent retrouver le même exercice que la veille. Dans le premier cas, on a un travail cognitif de bas niveau mal fait, un problème de méthode. Dans le deuxième, on trouve une difficulté à développer des compétences comme chercher, raisonner, modéliser, voire une résistance à entrer dans une démarche de recherche, ou un manque de confiance en soi, … Certains élèves scolaires apprennent tout par cœur, mais ont du mal à utiliser les contenus

Retour au sommaire

mémorisés. D'autres apprennent avec désinvolture, mais sont capables de faire preuve de curiosité et de créativité face à une situation nouvelle.

On trouve aussi des élèves qui, par économie de moyens, retiennent juste ce qui leur permet de donner un résultat, mais n'intègrent pas la rédaction qui accompagne la méthode de résolution. Ils restent incapables de rédiger un exercice de manière rigoureuse. Par exemple, ils savent utiliser l'égalité de Pythagore, mais ne précisent pas que le triangle est rectangle, ou ne citent pas le résultat utilisé, n'écrivent pas l'égalité avec les lettres, le résultat exact avec la racine carrée, placent des égalités à tort et à travers. Cela exaspère le professeur qui va sanctionner le travail par une remarque telle que "Tu n'as pas bien appris ta leçon !".

On peut ici placer cette anecdote d'une professeure stagiaire, braquée contre sa classe qui avait raté l'interrogation de cours sur Pythagore. Elle expliquait, pendant un groupe de discussion d'analyse de pratiques, qu'elle avait réclamé la phrase du cours, l'égalité avec les lettres, ... et la moyenne de la classe était inférieure à 5/10. Elle était furieuse : "Ils n'ont pas appris la leçon, pourtant je les avais prévenus". Elle ajoute : "Ils n'ont eu des points que sur les exercices !!!". On lui demande alors de préciser : "Ils savaient les faire ?" ; " Oui, ça oui, ils savaient faire les bons calculs, mais ils ne connaissaient pas leur cours" ...

Nous devons trouver des moyens de différencier l'évaluation de l'apprentissage du cours de l'évaluation de sa mise en œuvre. On peut séparer ces deux types d'évaluations, en donnant accès au cours lorsqu'on évalue les applications, et clarifier ainsi nos attentes. Certains élèves peuvent ainsi prendre conscience, qu'en travaillant un peu, ils progressent. Mais il faut aussi leur rappeler que les conditions d'examens sont forcément différentes. Nous sommes souvent amenés à justifier l'écart entre les résultats de nos élèves au contrôle continu et aux épreuves écrites du brevet. L'institution a-t-elle conscience du fossé entre ce qu'on demande en maths à l'écrit du brevet et ce qu'on demande au cours de l'année ? L'évaluation par contrat de confiance employée par certains collègues ne semble pas avoir de prolongement dans les examens nationaux. Pourtant, les élèves aimeraient avoir une récompense pour le travail fourni – surtout qu'elle est souvent méritée. Il est essentiel d'annoncer les évaluations à l'avance mais aussi de proposer, au moins une fois dans le contrôle, le même exercice que celui qui était à faire à la maison. Ce contrat n'est pas toujours respecté malheureusement… On ne peut pas parler d'évaluation sans évoquer l'évaluation par compétences, mais aussi la notation chiffrée qui peut, à elle seule, écraser tous les efforts de ce qui était voulu par cette évaluation par compétences...

Le professeur de mathématiques est finalement obligé (certes, c'est son devoir) de gérer les contraintes imposées et le temps imparti à son enseignement. Mais celui-ci est-il suffisant pour que l'élève retienne les notions ? Les contraintes (travail sur les automatismes à généraliser, alors qu'il manque des acquis) semblent s'accumuler au lieu de se compléter et les réformes sont menées tambour battant, sans laisser le temps aux précédentes de se décanter. Alors que le public est de plus en plus hétérogène à tous les niveaux de la scolarité, l'horaire hebdomadaire de mathématiques a diminué, en moyenne. Pour y remédier, la co-intervention (deux professeurs pour une même classe, dans la même salle, à la même heure) se développe en LP ou dans certaines classes de collège. Proposer aux élèves deux approches du même contenu peut être salutaire, notamment s'il s'agit de professeurs de matières différentes, car le décloisonnement est souvent primordial pour donner du sens. Cependant, le contexte actuel n'a pas encore permis de faire un bilan de ce mode d'enseignement.

Retour au sommaire

N'hésitez pas à donner votre avis, il est encore temps !

ENQUÊTE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES AU XXIÈME SIÈCLE

Par cette enquête au niveau national, l'APMEP désire savoir ce que pense notre profession aujourd'hui et ce qu'elle souhaiterait à propos de l'enseignement des mathématiques dans les années qui viennent.

https://vote.apmep.fr/index.php/85253?lang=fr

JOURNÉES NATIONALES & JOURNÉE RÉGIONALE DE L'APMEP

Vous pouvez vous inscrire au PAF pour les Journées de l'APMEP, **avant le 4 octobre**.
Après vous être connecté sur PARTAGE, il faut se rendre sur le Portail ARENA (colonne de gauche) puis sélectionner (toujours à gauche) « Gestion des personnels » et enfin « GAIA Accès individuel » (au centre). Vous êtes sur le PAF !
Dans Inscription individuelle, vous choisirez comme identifiant de module le numéro 21A0120911. Vous pourrez ainsi visualiser les deux modules proposés par l'APMEP.

- Pour l'inscription pédagogique aux **Journées Nationales de Bourges** du 23 au 26 octobre, il faut se créer un compte sur le site des journées avant le 15 octobre. Le Comité vous recontactera alors pour le traditionnel repas de la Régionale de Lorraine aux Journées. (Si ce n'est pas le cas, c'est que vous n'êtes pas lorrain ou qu'on vous a oublié ; écrire alors à president@apmeplorraine.fr).

- Pour l'inscription à la **Journée Régionale de la Lorraine à Nancy**, le 23 mars 2022, l'inscription sera ouverte sur le site de la Régionale dans le courant du mois de Février 2022.

Retour au sommaire

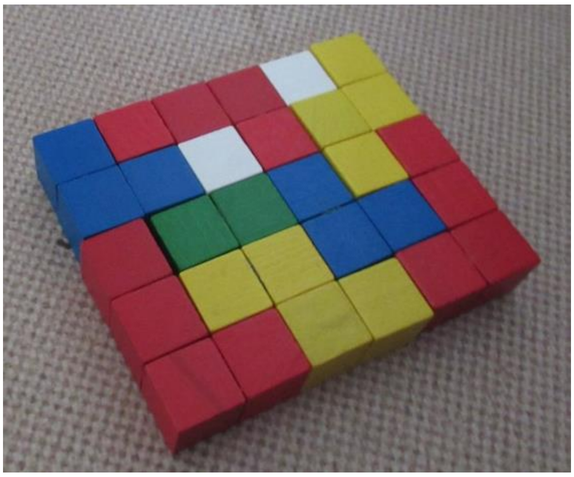
VIE DE LA RÉGIONALE

UNE JOURNÉE « BRICOLAGE » TRÈS CONVIVIALE

Début août, restaient à coller les pièces de quatre-vingt-dix pyramides aztèques. Après cette belle journée (quel plaisir de se rencontrer en vrai !), plus des deux tiers du travail prévu a été réalisé.

Merci tout plein à Ghislaine et Philippe pour l'accueil et le bon repas.

Reste à regrouper les dix pièces de chaque jeu, faire leur conditionnement dans des boites cartonnées, préparer une étiquette pour ces boites et un document d'accompagnement. Tout cela sera prêt pour les futures rencontres en présentiel (Journées Nationales et Journée Régionale par exemple). Le jeu sera également mis en vente à partir de notre boutique en ligne.



Retour au sommaire

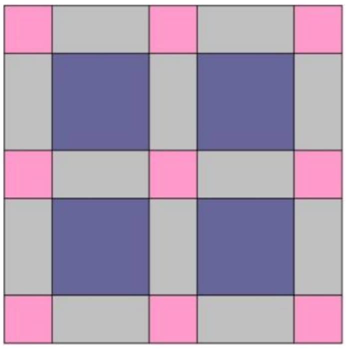
VIE DE LA RÉGIONALE

À L'ÉCOLE PAUL VERLAINE DE MOULINS-LÈS-METZ

Le vendredi 2 juillet, les ressources de l'APMEP Lorraine ont été utilisées dans la classe de CM2 d'Élisabeth Burnaty. Deux adhérents enseignant les mathématiques au collège du secteur sont venus épauler l'enseignante.
Une partie des élèves a utilisé les manipulations proposées dans la riche version mosellane de notre exposition régionale.

L'autre partie des élèves s'est lancée dans le jeu d'aventures proposé sur notre site.

Arrivés dans l'espace des « récompenses », ils ont eu la surprise de découvrir que le motif du carrelage présent dans leur école était très voisin de celui entourant le tombeau de Guillaume le Conquérant à Caen, dans l'Abbaye aux Hommes…



Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

NUIT DU JEU MATHÉMATIQUE

La Régionale de Lorraine organise sa première nuit du jeu mathématique. Elle aura lieu le vendredi 10 septembre 2021, de 18 heures à 21 heures à l'École Paul Verlaine de Moulins-les-Metz (31 rue Chanopost).
Elle s'adresse à tous les enseignants de mathématiques, de la maternelle à l'université, mais aussi aux parents et élèves en cycle 3 des établissements scolaires du secteur. Tous les adhérents y sont cordialement invités et sont incités à faire circuler l'information chez les personnes que cela pourrait intéresser.
Cette soirée sera l'occasion de parcourir différents stands animés par tous les acteurs qui pratiquent le jeu mathématique et d'échanger avec eux.

Liste des stands prévus :

- Maths et Puzzles
- « Jeu de Nim »
- Labo Maths et Jeux
- Escape Game
- Jeux d'aventures et d'enquêtes
- Canopé de Metz
- « Le parallélogramme qui rit »
- L'expo « objets mathématiques »
- Groupe Jeux de l'IREM
- Les jeux de l'APMEP Lorraine
- « Labyrinthe »
- Brochures Jeux
- L'expo itinérante
- …

Des productions de l'APMEP Lorraine (brochures, puzzle à 7 triangles, pyramide aztèque, calendrier pentaminos) seront en vente à cette occasion.

Nous espérons vous y retrouver aussi nombreux que possible, masqués et munis de votre pass sanitaire. Du gel HA sera mis à votre disposition à l'entrée et aux différents stands.

Le Comité

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

PALMARÈS RALLYE 2021

Merci aux collègues qui ont maintenu l'épreuve et ont réussi à nous communiquer les fiches réponses de leur classe (sur notre site ou par courriel ou encore par courrier postal).

Merci à nos partenaires, TEXAS INSTRUMENT qui équipe la classe de troisième gagnante d'une calculatrice TI 83 et à ALEPH qui a doté les 3 premiers de chaque catégorie (3ème et 2nde) d'une réquerre et/ou d'un rapporteur trigonométrique.
De plus, chaque élève classé dans les 3 premières classes a reçu un « puzzle à 7 triangles » offert par l'APMEP Lorraine.

Vous pouvez retrouver les énoncés des 10 exercices, de la question subsidiaire et leurs réponses sur notre site.

- **<u>Lycée</u> :** Beaucoup d'élèves ne sont pas revenus dans leur lycée, leurs professeurs leurs remettront diplôme et puzzle à la rentrée.

1. 2nde 07 du lycée Saint-Exupéry à Fameck (57)
2. 2nde 01 du lycée Saint-Exupéry à Fameck (57)

3. 2nde 4 du lycée Rosa Parks à Thionville (57)

Retour au sommaire

- **<u>Collège</u>**

1. 3èmeB du collège Les Avrils à Saint-Mihiel (55)

SAINT-MIHIEL

Le 1er prix du concours régional de mathématiques

La 3e B du collège est facilement venue à bout du concours, avec un score final de 41 points sur 40 !

La classe de 3e B du collège Les Avrils a brillamment remporté le « Rallye mathématique de Lorraine 2021 ». Une fierté pour tous les élèves et M. Elophe, leur professeur.

Ouvert aux classes de 3e et de seconde de l'académie Nancy-Metz, ce concours était comme chaque année organisé par la branche régionale de l'A.P.M.E.P. (Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public). Les élèves de M. Elophe sont facilement venus à bout, collectivement, des 10 exercices et autres énigmes proposés, ainsi que de la question subsidiaire à résoudre.

Ils ont en effet obtenu un impressionnant score final de… 41 points sur 40. Représentant de l'association, M. Ruiba est venu à cette occasion les féliciter chaleureusement et a remis à chacun un diplôme, du petit matériel, ainsi qu'une calculatrice d'une valeur de 80 euros pour le lycée.

« Une belle réussite et une belle reconnaissance pour ce petit collège rural sammiellois » confiait leur professeur, fier de la belle prestation de sa classe au concours.

2. 3èmeC du collège Hubert Curien à Cornimont (88)
3. 3èmeA du collège Hubert Curien à Cornimont (88)

Deux classes lauréates dans un cadre montagnard très sympa.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

APPRÉHENDER LE THÉORÈME DE PYTHAGORE EN SEGPA

Julie BERQUE
Collège Louis Armand - Moulins-lès-Metz

Cette expérimentation s'est faite suite à des échanges entre collègues enseignant les mathématiques dans l'établissement. Le souhait de faire découvrir le théorème en utilisant des aires était présent dans un ancien document de formation de professeurs du second degré. Des versions papier avaient été retrouvées et utilisées comme ressource, il est actuellement téléchargeable sur notre site.

En tant que jeune enseignante, j'ai été affectée pour ma deuxième année consécutive en classe spécialisée : la SEGPA. Cette année, j'ai eu pour la première fois Mathématiques en 4ème/3ème. Les compétences de cycle 4, le DNB professionnel, le double niveau étaient autant d'enjeux que de découvertes pour moi cette année. La difficulté majeure selon moi, était l'écart entre le niveau de mes élèves et les attentes du DNB pro. Avec l'aide de l'équipe de mathématiques au sein de mon collège, j'ai pu être aiguillée, soutenue et ainsi aborder mon année plus sereinement et efficacement. En effet, ma façon d'enseigner les mathématiques est la suivante : un état des lieux des connaissances par le biais d'évaluation diagnostique, révisions des prérequis pour enfin aborder des chapitres de compétences cycle 4. Je vais donc vous présenter une proposition de séquence sur le théorème de Pythagore en SEGPA, un chapitre incontournable lorsqu'on prépare nos élèves au DNB professionnel.

La problématique que je vais aborder dans cet article est la suivante : Comment appréhender un chapitre complexe, tel que le théorème de Pythagore, tout en prenant en compte la difficulté scolaire afin de mettre les élèves en situation de réussite ?

Cette séquence a été réalisée avec une classe SEGPA comprenant 17 élèves de 4ème/3ème en difficulté scolaire.

1 – État des lieux des connaissances

Pour aborder un tel chapitre, il est important de s'intéresser aux prérequis qu'il sollicite. En effet, le théorème de Pythagore implique différentes compétences à maitriser en amont.

- Connaitre les propriétés du carré ainsi que ses formules (aire/périmètre).
- Construire des figures usuelles (carré, rectangle, triangle).
- Distinguer aire/périmètre.

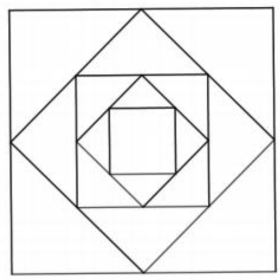
À partir d'une évaluation diagnostique, il a été possible de constater que la classe de 4ème/3ème devait retravailler ces différentes notions afin d'enlever tout obstacle à la compréhension et à l'application du théorème.

Retour au sommaire

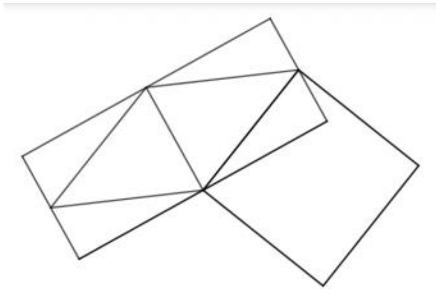
Exemples d'activités proposés en amont sur la remédiation sur les carrés/rectangles

Activité

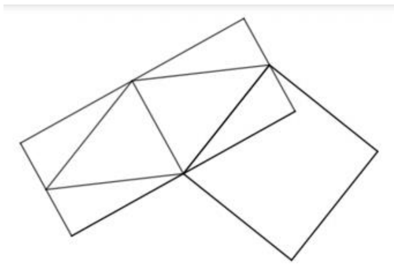
a) Observe bien la figure géométrique ci-contre. Combien de carrés vois-tu ? Repasse-les en rouge.



a) Sur la figure ci-contre, repasse en vert le contour des rectangles que tu reconnais (vérifie les propriétés en utilisant des instruments).



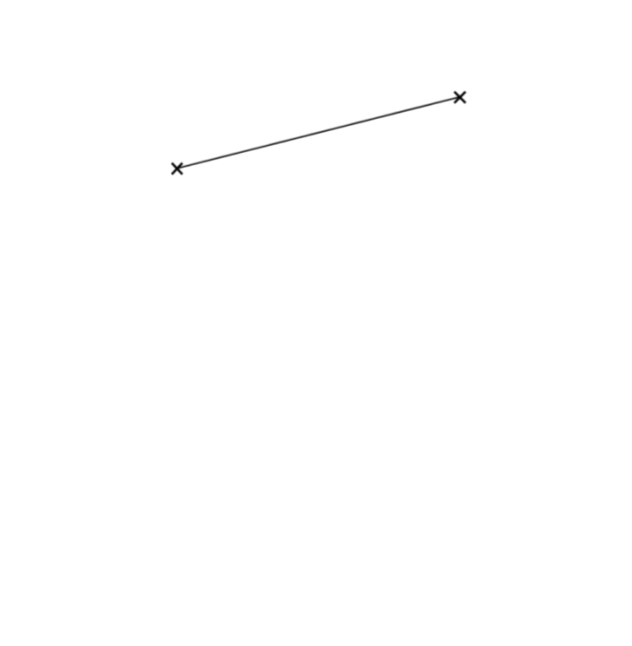
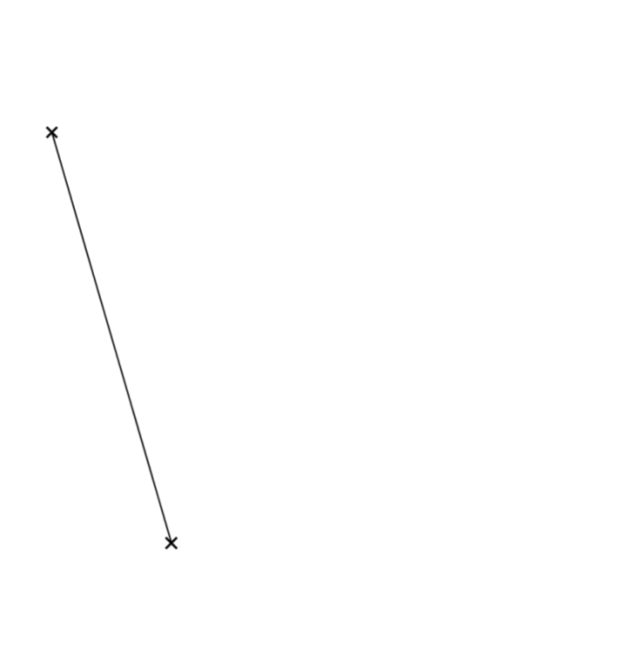
b) Reconnais-tu un carré dans cette figure ? Si oui, repasse en rouge son contour.



Activité

Dans chacune des 2 cases ci-dessous se trouve le début d'une construction d'un carré.
Termine ces constructions en utilisant seulement les instruments indiqués.

N'efface pas tes traits de construction.

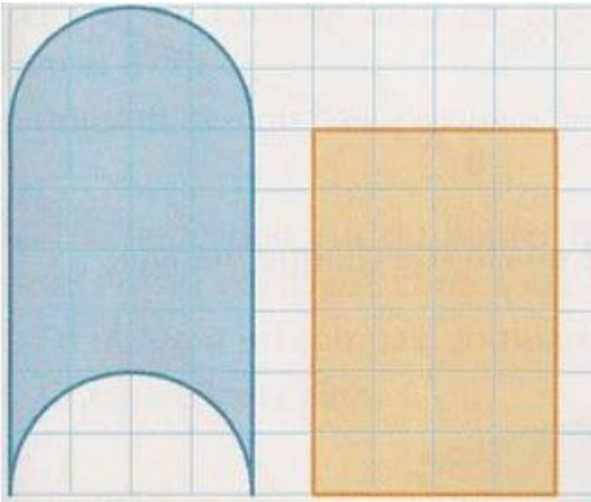
	
Équerre et règle graduée	**Règle non graduée et compas**

Retour au sommaire

Exemples d'activités proposées en amont sur la remédiation aire/périmètre

Activité

Observe les figures suivantes et coche les bonnes réponses.



La figure bleue a un périmètre plus grand que la figure orange	☐
La figure bleue et la figure orange ont le même périmètre	☐
La figure orange a un périmètre plus grand que la figure bleue	☐
La figure bleue a une aire plus grande que la figure orange	☐
Les deux figures ont la même aire	☐
La figure orange a une aire plus grande que la figure bleue	☐

Activité

Classer les situations suivantes en deux catégories en cochant la case "Périmètre" ou la case "Aire".

	Aire	**Périmètre**
On veut acheter du parquet pour changer le sol d'une chambre	☐	☐
Pour le tout nouveau stade de foot on souhaite entourer le stade avec des barrières	☐	☐
Je souhaite rénover mon balcon et le carreler entièrement	☐	☐

2 – Les objectifs de la séquence sur le Théorème de Pythagore

Séances Prérequis (3 séances) : Connaitre les propriétés d'un carré/rectangle, tracer carré, rectangle et triangle, distinguer aire et périmètre.
Chapitre prérequis aire/périmètre (3 séances) : Distinguer aire et périmètre.
Séance 1 : Activité introductive sur les puzzles : Découvrir la propriété du théorème de Pythagore.
Séance 2 : Calculer l'aire du 3eme carré, déterminer la longueur de côté des carrés, compléter le théorème de Pythagore à l'aide de la méthode des puzzles.
Séances 3 et 4 : Calculer une longueur (cas de l'angle droit et de l'hypoténuse).
Séances 5 : Évaluation.
Séance 6 : Problème en lien avec Pythagore.

Retour au sommaire

3 - Déroulement de la séquence sur le théorème de Pythagore

a) Séance 1

Puzzles de Pythagore

Puzzle 1

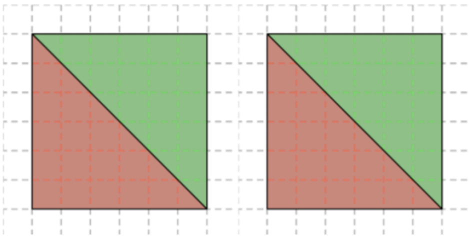
Nous avons entouré un triangle rectangle et isocèle de trois carrés.

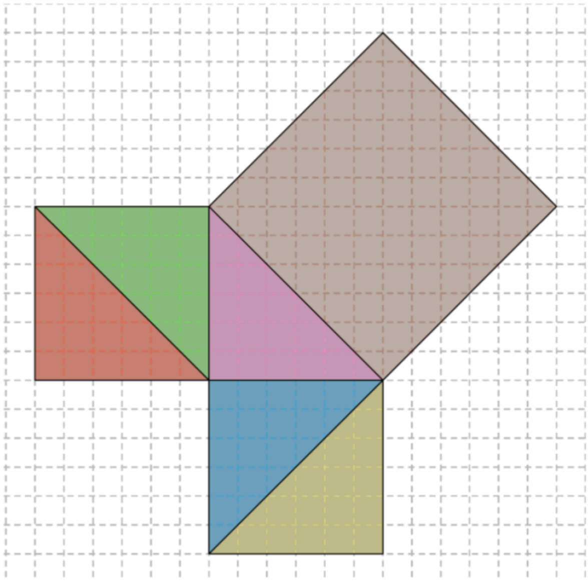
Avec les 4 triangles ci-dessous tu peux recouvrir exactement le plus grand carré.

Découpe et colle ces 4 triangles sur la figure de droite de telle sorte qu'ils recouvrent le grand carré.

Complète la phrase suivante :

L'………….. du grand carré est égale à la ………………des aires des deux autres…………





Puzzle 2

Nous avons choisi cette fois un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit mesure le double de l'autre.

Le carré intermédiaire a été partagé en 4 triangles identiques.

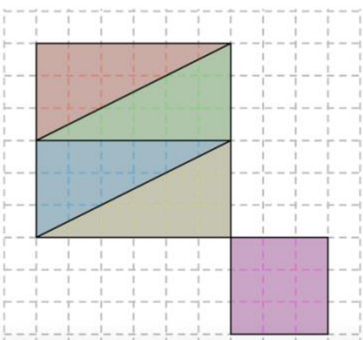
Avec les 4 triangles et le plus petit carré tu peux recouvrir exactement le grand carré.

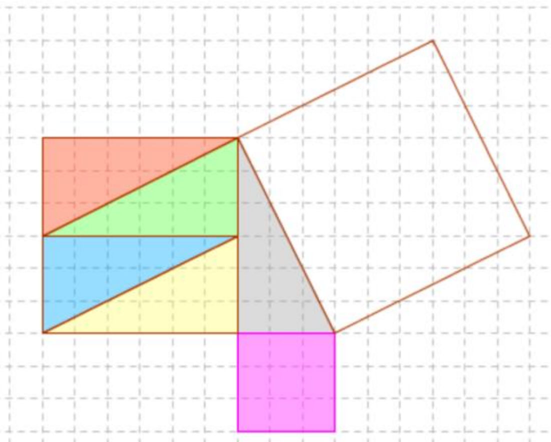
Découpe les 4 triangles et le carré ci-dessous et colle-les sur la figure de droite de telle sorte qu'ils recouvrent le grand carré.

La phrase encadrée (puzzle 1) est-elle encore vraie ?

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………





Retour au sommaire

Puzzle 3

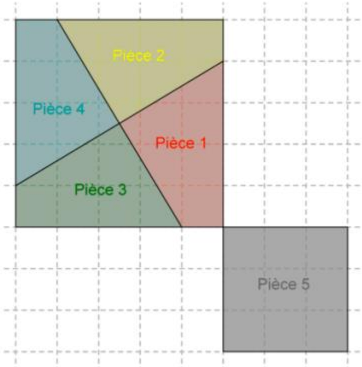
Pour ce puzzle, le carré intermédiaire a été partagé en 4 quadrilatères identiques.

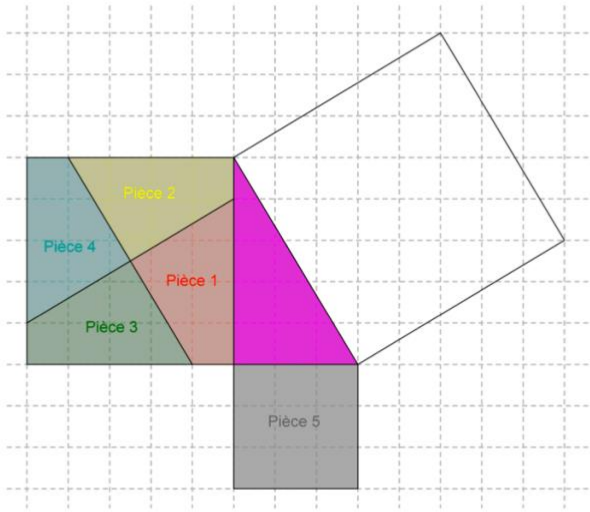
Découpe les 5 pièces ci-dessous et colle-les sur la figure de droite de telle sorte qu'elles recouvrent le grand carré.

La phrase encadrée (puzzle 1) est-elle encore vraie ?

....

....





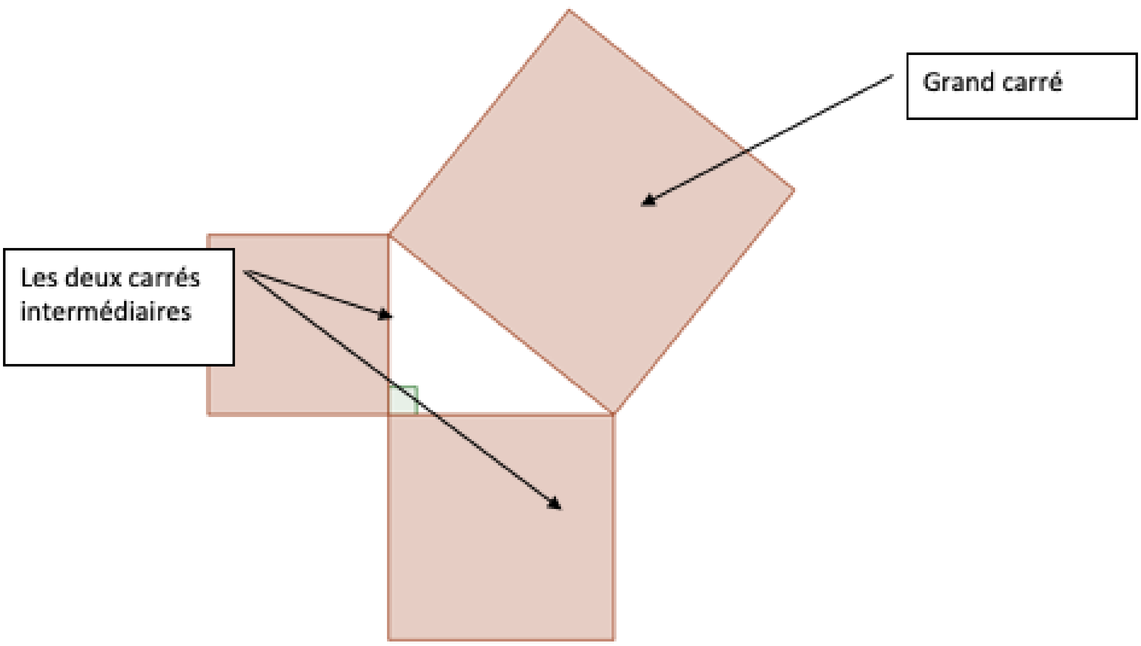
L'objectif de cette activité est de faire comprendre aux élèves par la manipulation que « L'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés. » Lors de l'activité, le puzzle n°2 a posé quelques difficultés pour les élèves puisque la pièce « carré » devait se mettre au milieu. Le puzzle n° 3 est un réinvestissement du puzzle n°2.

b) <u>Séance 2</u>

Rappel de la propriété découverte lors de la séance 1 et début d'institutionnalisation.

Le théorème de Pythagore

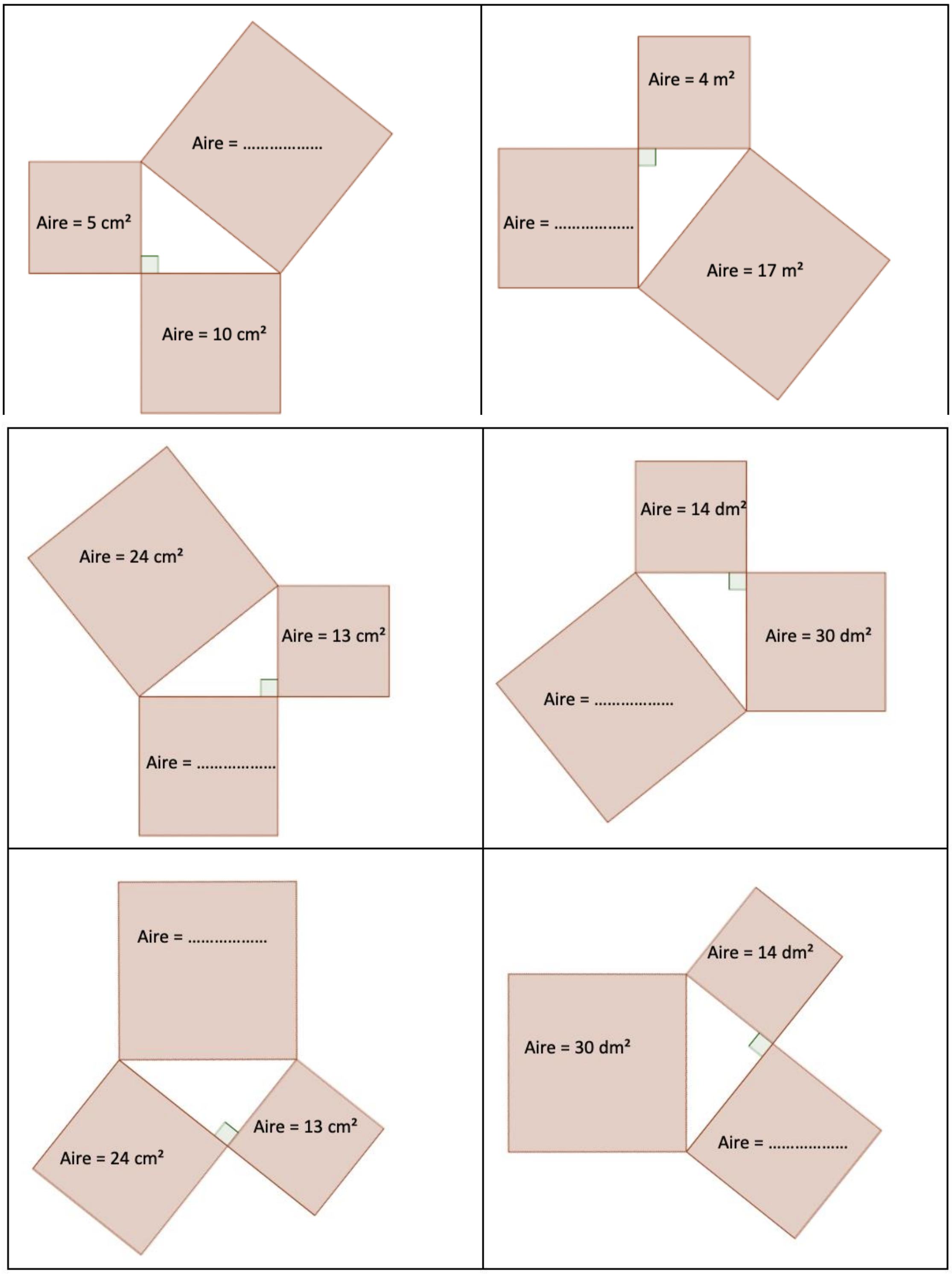
Si l'on entoure <u>**un triangle rectangle**</u> par trois carrés, alors <u>**l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés**</u>.



Retour au sommaire

Exercice 1

Calcule l'aire du troisième carré.

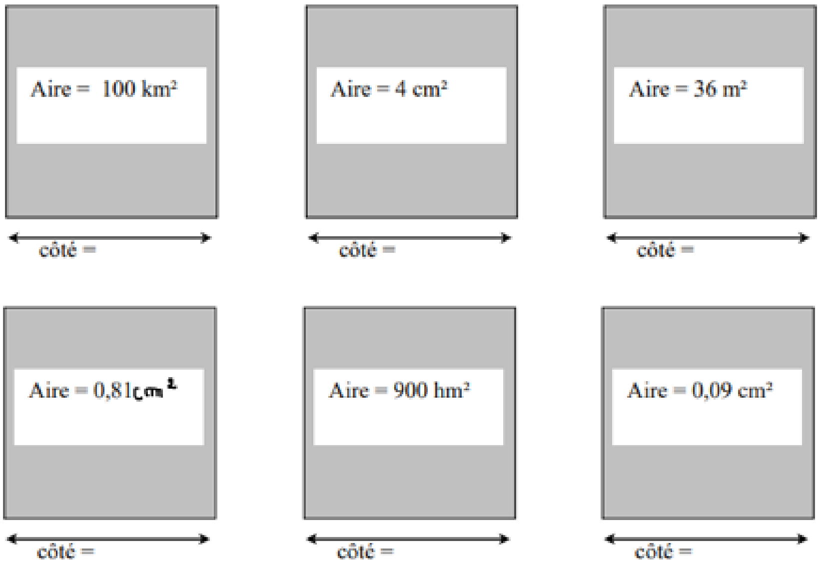


Dans cette activité, mes élèves devaient calculer l'aire du troisième carré à partir des deux autres. Ici, la difficulté pour l'apprenant était d'utiliser deux types d'opérations : soit l'addition lorsqu'on devait chercher l'aire du plus grand carré soit la soustraction lorsqu'on devait trouver l'aire d'un petit carré. Dans un mécanisme de rapidité, certains élèves passaient par l'addition systématiquement. Il est donc important, lors de cette phase, de prendre le temps avec l'élève de distinguer dans quel cas il faut additionner et dans quel cas il faut soustraire.
Attention tout de même à l'unité de longueur, certains élèves ont tendance à mettre tout en cm².

[Retour au sommaire](#)

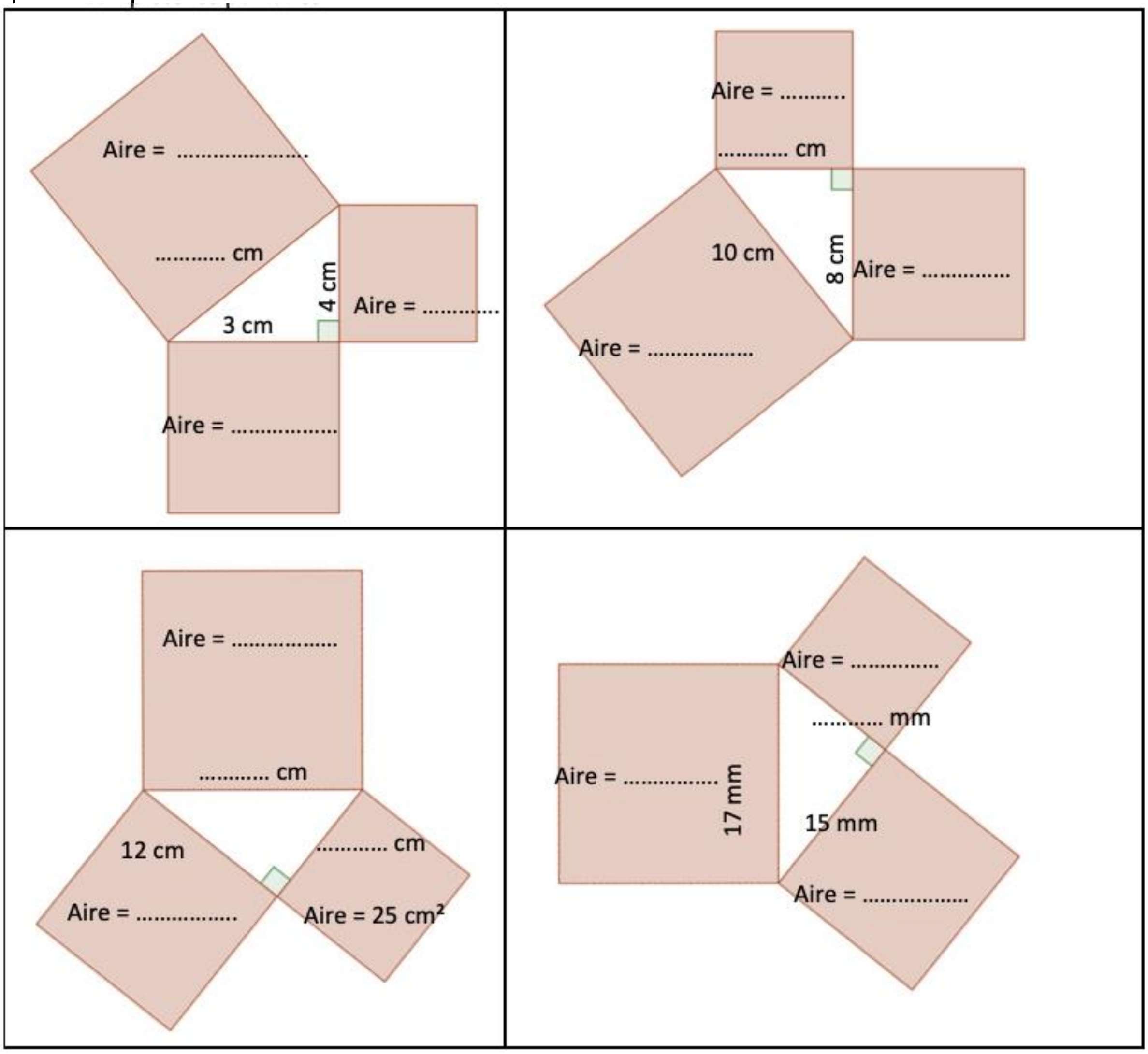
Exercice 2

Déterminer la longueur du côté des carrés.



Exercice 3

Complète les pointillés



Retour au sommaire

L'exercice 2 demande un réinvestissement des prérequis vus lors des premières séances : « connaitre la formule de l'aire d'un carré », « distinguer aire et périmètre ». Ici, les élèves devaient retrouver à partir de l'aire du carré la longueur du côté du carré. Ils découvrent la racine carrée.

L'exercice 3 est la démarche attendue par un élève de SEGPA pour déterminer une longueur à l'aide du théorème de Pythagore.

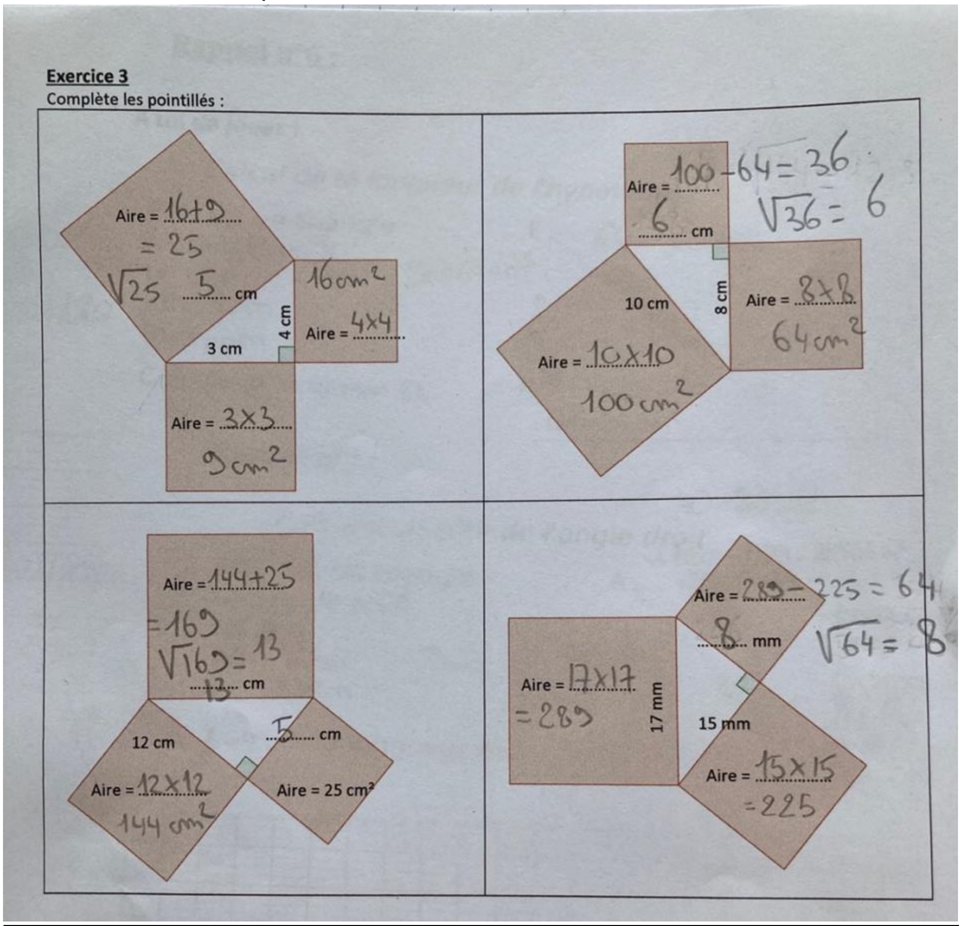
<u>La démarche lorsqu'il faut calculer la longueur du grand carré (l'hypoténuse)</u>

1) L'élève doit calculer les aires des deux plus petits carrés.
2) L'élève doit additionner les deux aires des petits carrés pour déterminer l'aire du grand carré (cf propriété : **l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés**).
3) Une fois l'aire du grand carré connue, l'élève réinvestit ce qu'il a appris dans l'exercice 2 et utilise la racine carrée pour déterminer la longueur du grand carré.

<u>La démarche lorsqu'il faut calculer la longueur du petit carré (un côté de l'angle droit)</u>

1) L'élève doit calculer les aires du grand et d'un des deux petits carrés.
2) L'élève doit soustraire l'aire du grand carré à l'aire du petit carré pour déterminer l'aire du troisième carré.
3) Une fois l'aire du petit carré connue, l'élève réinvestit ce qu'il a appris dans l'exercice 2 et utilise la racine carrée pour déterminer la longueur du petit carré.

Ci-dessous, l'exercice 3 réalisé par un élève.



Retour au sommaire

c) Séances 3 et 4

La séance 3 est l'institutionnalisation du chapitre. Elle permet à l'élève de distinguer les différentes étapes pour appliquer le théorème. Il peut s'y référer autant de fois que nécessaire. La séance 4 est une application de l'institutionnalisation dans une série d'exercices.

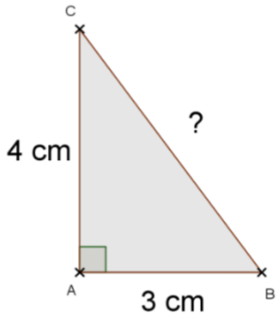
Le théorème de Pythagore

Si l'on entoure **un triangle rectangle** par trois carrés, alors **l'aire du grand carré est égale à la somme des aires des deux autres carrés**.

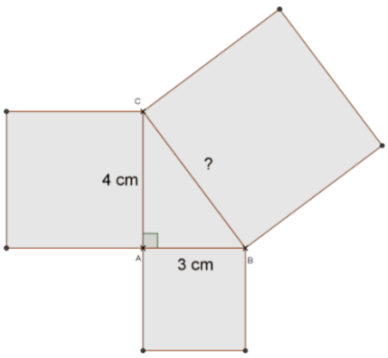
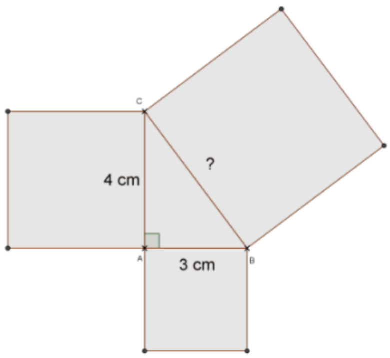
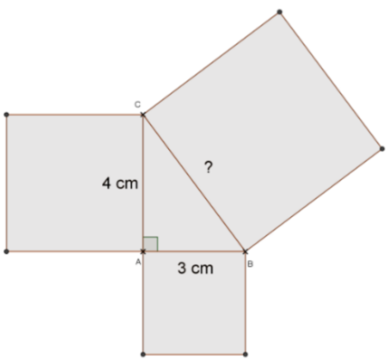
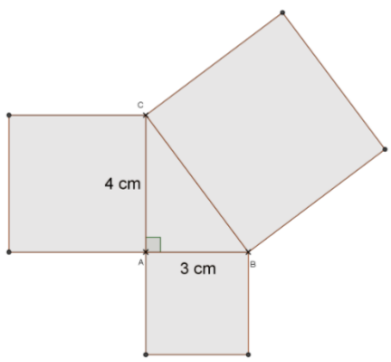
Quand utiliser ce théorème ?
On utilise **le théorème de Pythagore** pour déterminer la longueur d'un des trois côtés d'un **triangle rectangle** connaissant la longueur des deux autres.

Exemple

Le triangle ABC est rectangle en A avec AB = 3 cm et AC = 4 cm.
Calculer BC.



Solution

Etape 1 : On entoure le triangle rectangle par trois carrés.	**Etape 2 :** On calcule l'aire des deux carrés (ceux dont on connait la longueur du côté).
	
Etape 3 : On calcule l'aire du troisième carré à l'aide du théorème de Pythagore.	**Etape 4 :** On calcule la longueur du côté de ce carré.
	

Retour au sommaire

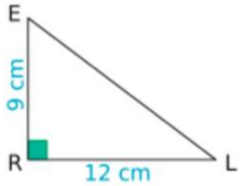
Exercices (extraits du manuel Parcours Maths – cahier d'exercices 4ème – Génération 5)

À toi de jouer !

2 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse*

ERL est un triangle
rectangle en R,
tel que :
ER = 9 cm ;
RL = 12 cm.

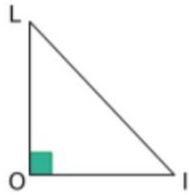
Calcule la longueur EL.



3 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse (bis)*

LOI est un triangle
rectangle en O,
tel que :
LO = 21 cm ;
OI = 20 cm.

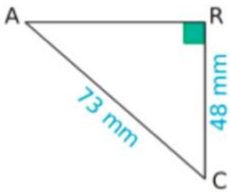
Calcule la longueur LI.



4 *Calcul d'un côté de l'angle droit*

ARC est un triangle
rectangle en R,
tel que :
AC = 73 mm ;
RC = 48 mm.

Calcule la longueur AR.

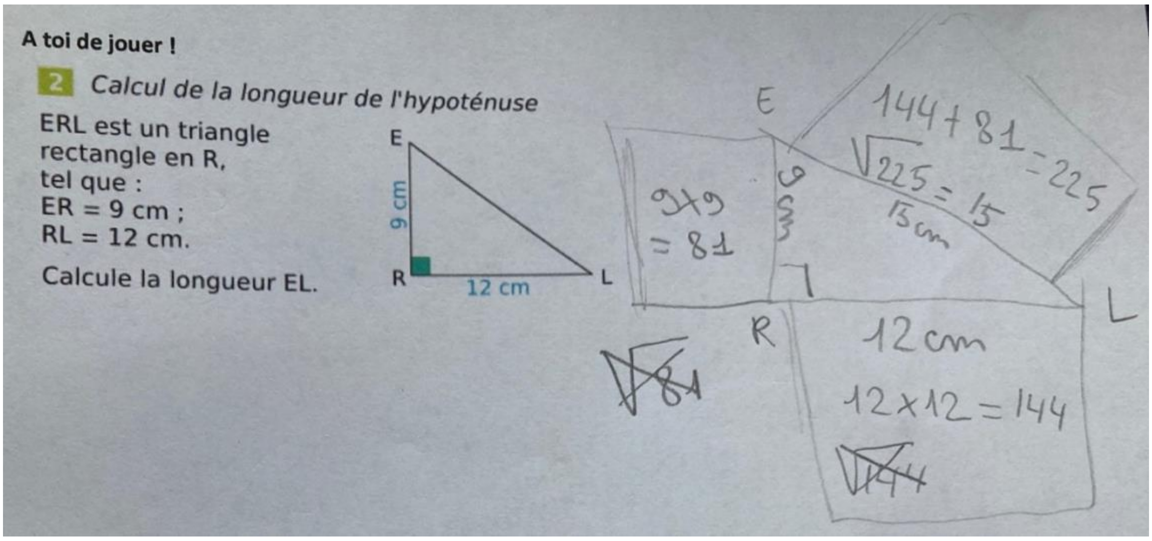


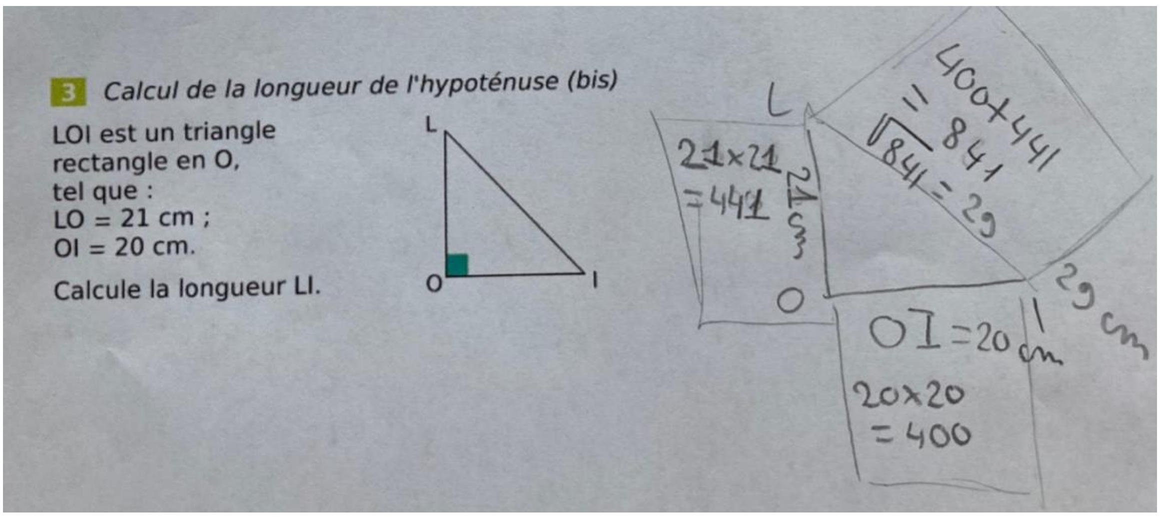
5 *Calcul d'un côté de l'angle droit (bis)*

KXZ est un triangle
rectangle en K,
tel que :
KX = 6,5 cm ;
ZX = 9,7 cm.

Calcule la longueur KZ.

Exemple de productions d'un élève





[Retour au sommaire](#)

d) Séance 5 **: Évaluation sur le chapitre**

Nom : ________________

Prénom : ____________________

Évaluation : Théorème de Pythagore

Compétences :

- Connaître le théorème de Pythagore 1 2 3 4
- Utiliser le théorème pour calculer une longueur 1 2 3 4

Exercice 1 : Citer la définition du théorème de Pythagore. **(2pts)**

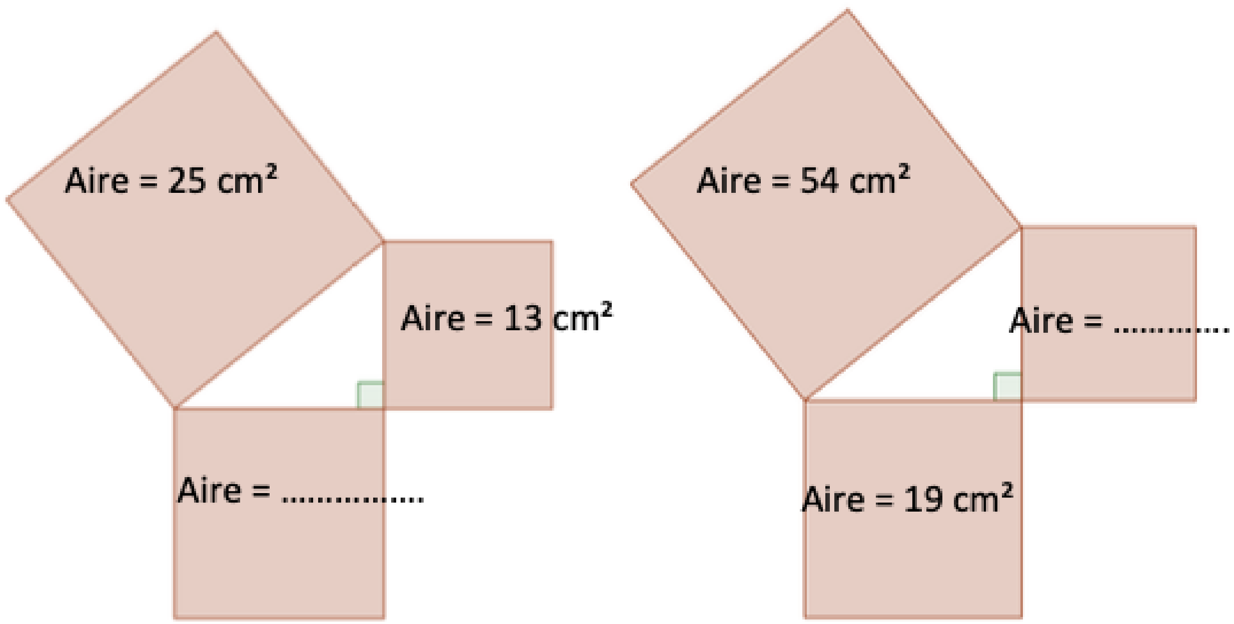
____

____

____

____

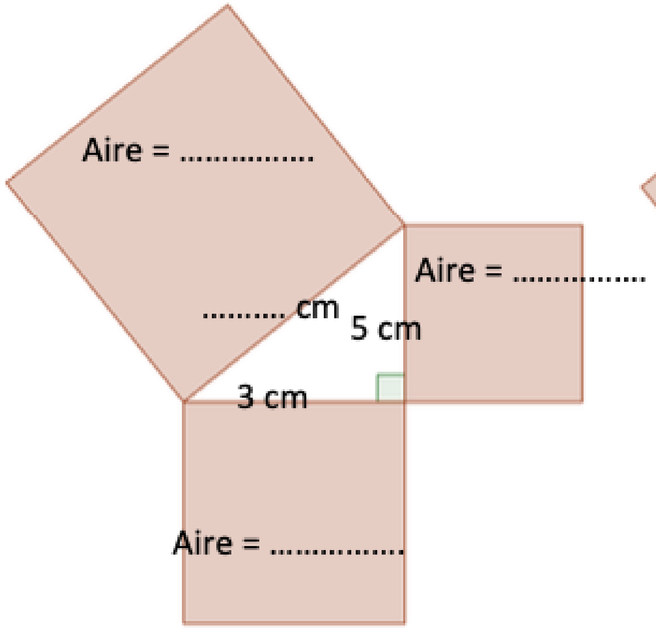
Exercice 2 : Consigne : Calculer l'aire du 3eme carré**. (2pts)**

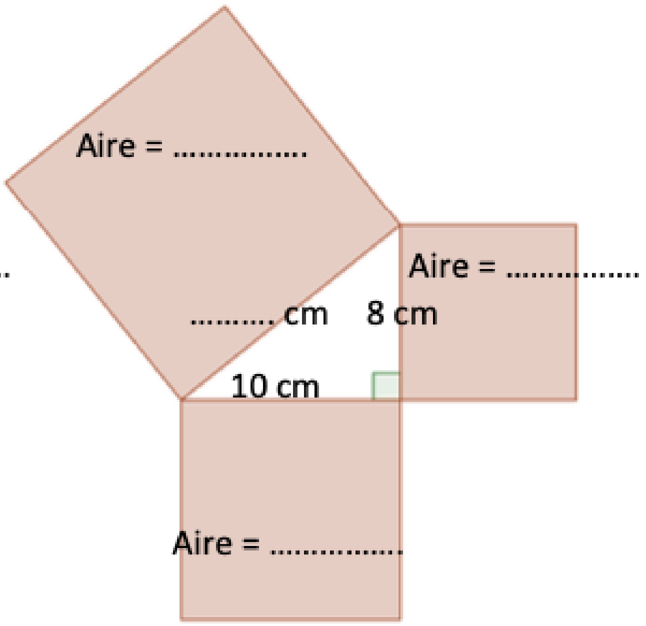


____

Retour au sommaire

Exercice 3 : Consigne : Compléter les pointillés. **(2pts)**



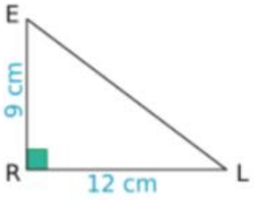


Exercice 4 : (5pts) (Exercice extrait du manuel Parcours Maths – cahier d'exercices 4ème)

Consigne : Calculer la longueur de l'hypoténuse de chaque triangle rectangle.

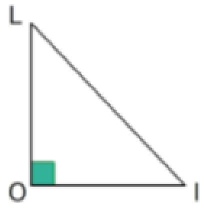
ERL est un triangle rectangle en R,
tel que :
ER = 9 cm ;
RL = 12 cm.

Calcule la longueur EL.



LOI est un triangle rectangle en O,
tel que :
LO = 21 cm ;
OI = 20 cm.

Calcule la longueur LI.

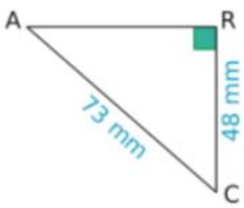


Exercice 5 : (5pts) (Exercice extrait du manuel Parcours Maths – cahier d'exercices 4ème)

Consigne : Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit de chaque triangle rectangle.

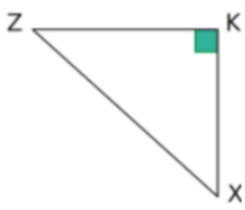
ARC est un triangle rectangle en R,
tel que :
AC = 73 mm ;
RC = 48 mm.

Calcule la longueur AR.



KXZ est un triangle rectangle en K,
tel que :
KX = 6,5 cm ;
ZX = 9,7 cm.

Calcule la longueur KZ.



Retour au sommaire

<u>Exercice 6</u> : (4pts)

Sur une carte, le triangle CLP formé par les villes de Caen, Lisieux et Pont l'Évêque est considéré comme étant rectangle en L.
On donne CP = 46 km et PL = 17 km.

Consigne :
Montrer par le calcul que la distance CL est d'environ 43 km.

(Exercice tiré de https://maths-pdf.fr/le-theoreme-de-pythagore-exercices-maths-quatrieme-2)

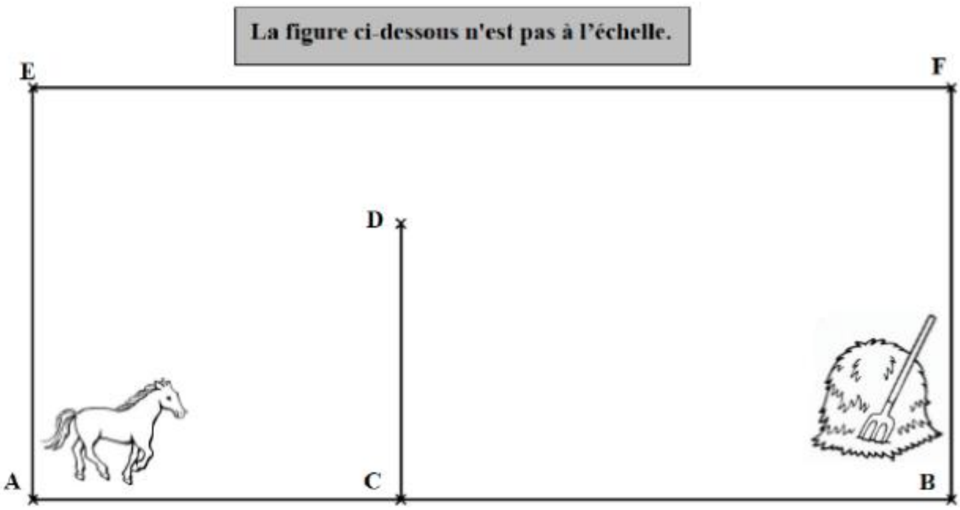
Après coup, les axes d'amélioration de cette évaluation seraient les suivants :

- Je supprimerai l'exercice 6. En effet, il intervient trop tôt pour mes élèves, la carte en fond les a perturbés.
- Je donnerai en préalable une petite feuille explicite sur ce qu'ils doivent connaitre et savoir faire.
- Pour les élèves encore en trop grande difficulté : uniquement des exercices sur le calcul de longueur d'une hypoténuse.

e) <u>Séance 6</u>

Problème tiré du site : https://www.maths974.fr

Dans l'enclos ABFE, Vincent attache un cheval au point A avec une corde de 25 m.
[DC] représente une barrière que le cheval ne peut pas franchir. Pour aller jusqu'au point B, le cheval doit contourner cette barrière.
La corde est-elle assez longue pour que le cheval aille jusqu'au point B ?
Toute trace de recherche, même partielle, sera prise en compte dans l'évaluation.



On donne : AC = 8 m, AE = 8 m, DC = 6 m et BC = 12 m.
AEFB est un rectangle et la barrière est perpendiculaire à [AB].

Retour au sommaire

Exemple de rédaction d'une élève de la classe de 4éme/3éme


On donne : AC = 8m, AE = 8m, DC = 6m et BC 12m
AEFB est un rectangle et la barrière est perpendicul
à [AR].

A et D	D et B
8x8 = 64	6x6 = 36
6x6 = 36	12x12 = 144
64 + 36 = 100	36 + 144 = 180
√100 = 10	√180 ≈ 13,41

La somme du grand carré et égale à la somme des deux autres petit carrés.

A et B mesure 10m
D et B mesure environ 13,41.

Oui la corde et assez longue car elle fait 23,4 mètre.

En amont, j'ai laissé le temps aux élèves de réfléchir seuls à ce problème. J'ai pu constater qu'ils avaient des difficultés à cerner ce qu'ils devaient chercher. Nous avons repris la fiche méthodologie pour résoudre un problème (réalisée lors de la première période cf annexe 1). Puis, au tableau, un élève est venu ajouter des informations supplémentaires au schéma telles que les segments [AD] et [DB], les mesures de certains segments. Les élèves encore en difficulté ont repris la leçon sur le théorème de Pythagore pour revoir la méthode, un petit groupe a réussi à faire seul.

Dans l'exemple ci-dessus, il reste encore quelques axes de progrès comme :

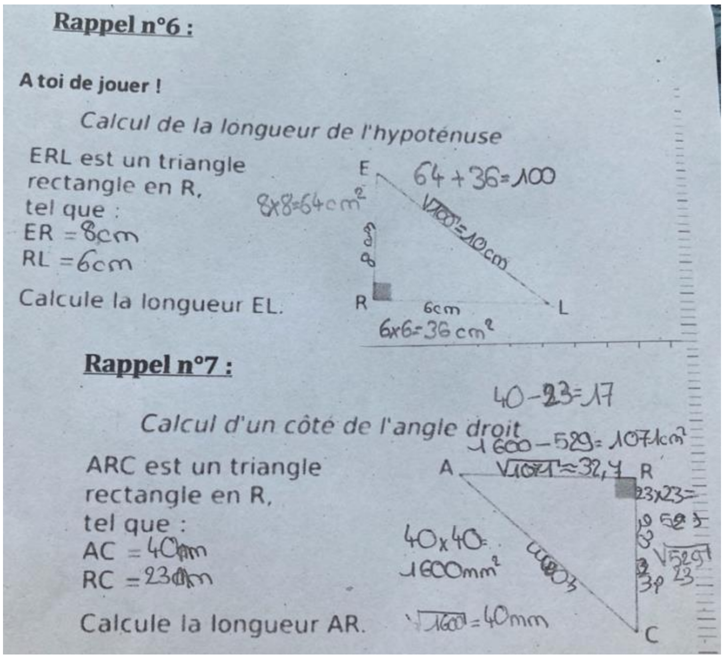
- expliciter l'utilisation du théorème de Pythagore ;
- faire un schéma pour que le correcteur comprenne la démarche ;
- citer la propriété exacte (omission du mot « aire »).

Dans l'ensemble, la démarche reste assimilée. Le résultat a pu être trouvé, ce qui est encourageant pour l'élève.

Retour au sommaire

f) Quelques rappels au cours de l'année

exemple de production d'un élève



g) Annexe 1

Méthodologie : Les étapes pour résoudre un problème

Étape 1 : Lire l'énoncé

Je lis attentivement l'énoncé, si nécessaire je lis l'énoncé plusieurs fois.

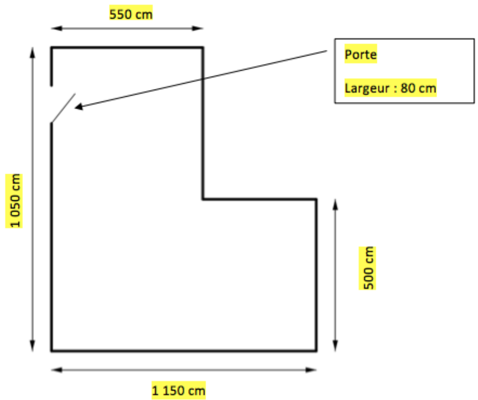
Étape 2 : Repérer ce que je cherche

Je **repère** dans mon problème **ce que je cherche,** je le **surligne** et je le **note** dans mon **cahier de brouillon.**

Exemple problème 1 :
« Le carreleur-mosaïste doit estimer la quantité de carrelage à poser ainsi que la longueur totale de plinthe ».

Étape 3 : Repérer les données utiles

Je **repère** les **données utiles** dans mon énoncé, je les **surligne** et je les **note** dans mon **cahier de brouillon**.



Retour au sommaire

Étape 4 : Chercher dans son classeur la leçon qui peut aider

Je **cherche** dans mon classeur, **quel a été le chapitre étudié** pour m'aider à résoudre le problème.

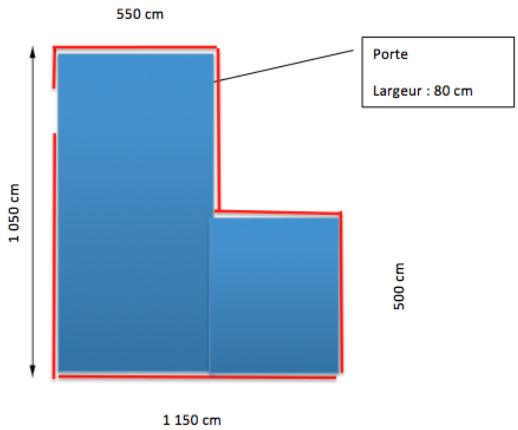
Exemple problème 1 : Chapitre sur les aires et les périmètres

Le carreleur-mosaïste doit estimer la quantité de carrelage à poser → aire

La longueur totale de plinthe → périmètre

Étape 5 : Faire un schéma/un dessin (éventuellement)

Je **construis** mon raisonnement en m'aidant éventuellement **d'un dessin ou d'un schéma.**



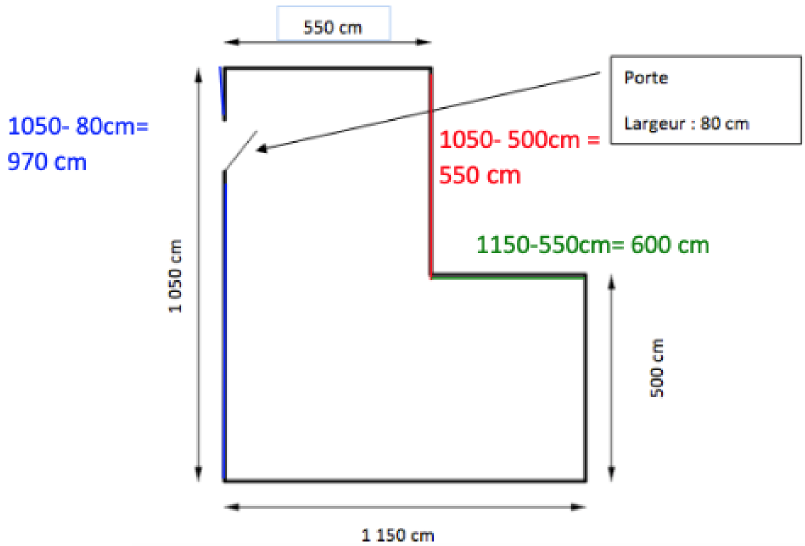
En rouge le périmètre

Attention il faudra enlever la porte

En bleu l'aire

Étape 6 : Écrire les calculs

J'écris le ou les **calculs** nécessaire(s) et je les **effectue.**



- **Pour calculer la longueur totale des plinthes**

Je trouve les valeurs qu'il me manque sur mon schéma.

Je déduis (-) la porte.

J'additionne toutes les valeurs :

550 + 550+600+ 500 + 1150+ 970 + 550 = 4870 cm

Retour au sommaire

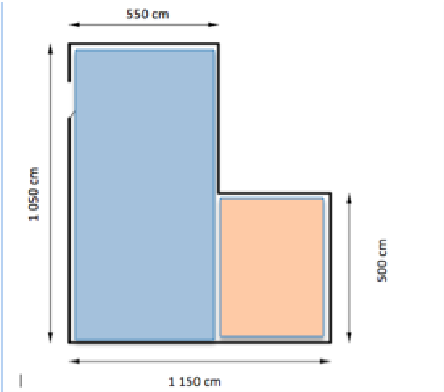
- **Pour calculer l'aire de la surface à carreler**

Il suffit de découper la figure en 2 rectangles et calculer l'aire de chaque rectangle.

Aire du rectangle bleu :
A = L x l
A = 550 X 1050
A = 577 500 cm^2

Aire du rectangle orange :
A = L x l
A = 550 X 600
A = 330 000 cm^2

Aire totale à carreler : 557 500 cm^2 + 330 000 cm^2 = 887 500 cm^2



Étape 7 : Se relire et rédiger une phrase réponse

- Je vérifie que la solution finale à mon problème est vraisemblable.
- Je rédige une phrase réponse. Elle doit être comprise par un camarade.
- L'aire de la surface à carreler est de 887 500 cm^2
- La longueur totale de plinthe à poser est de 4870 cm.

Bilan

À travers cette séquence, cela m'a permis en tant que jeune enseignante de :

- Travailler en collaboration avec l'équipe de Mathématiques, échanger sur les différentes pratiques afin de renforcer mon champ de compétences dans cette matière et ainsi renforcer ma pédagogie.
- Prendre confiance en moi car à la rentrée, je pensais qu'il me serait très difficile en tant que novice d'élaborer des séquences comprenant des compétences du cycle 4 en les menant de manière abordable et bien construites mathématiquement.

Pour mes élèves, cette séquence leur a permis :

- De retravailler différentes notions du cycle 3 et atteindre certaines compétences de cycle 4.
- De prendre confiance en eux car à la fin de cette séquence, certains se sentaient fiers de pouvoir dire qu'il réussissait à calculer une longueur à l'aide du théorème de Pythagore.
- D'acquérir une rigueur et de la méthodologie.
- D'avoir un autre regard sur le statut de l'erreur en mathématiques.

Retour au sommaire

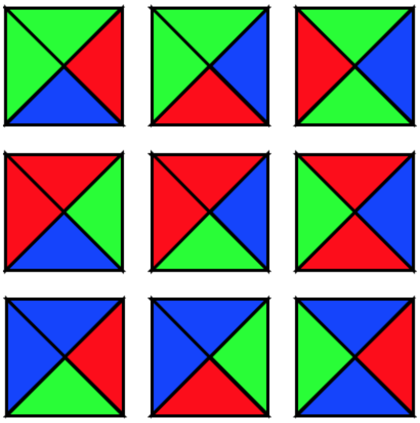
DANS NOS CLASSES

DES CARRÉS DE MAC-MAHON AU CYCLE 2

François DROUIN

Le Petit Vert n°146 relate l'utilisation en 2019 des neuf carrés de Mac Mahon tricolores appelés alors les carrés de Percy-Alexander (les prénoms du mathématicien). Il était alors question de d'essayer de faire découvrir ce qui caractérise le coloriage des pièces. Cet aspect reste présent dans ce qui a été expérimenté en fin de séquence dans la classe de CP-CE1.
En 2021, l'objectif dans les deux classes de CP-CE1 et CE1-CE2 était de faire vivre des moments de dénombrement ou de calcul à la suite des manipulations des pièces.
L'école possédait déjà un certain nombre d'ensembles de carrés de Mac-Mahon utilisés lors d'autres expérimentations, d'autres ont été donnés à l'école, en particulier des ensembles de neuf pièces tricolores, ensembles plus faciles à utiliser par de jeunes élèves.
Dans les deux classes est apparu l'intérêt de jeux marqués au dos par des gommettes, des lettres ou d'autres symboles. Lorsqu'une pièce est retrouvée par terre, il est plus aisé de savoir à quel ensemble elle appartient…
J'adresse un grand merci à Carole Hofbauer et Sylvie Barré, les enseignantes de ces deux classes de l'école de Sampigny qui m'ont gentiment accueilli pour ces expérimentations.

En classe de CP-CE1 (après la récréation)



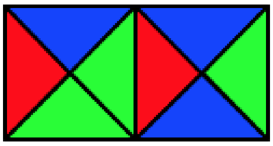
Les neuf carrés de Mac-Mahon tricolores

Les élèves en situation de recherche

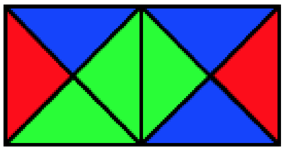
Les pièces ont été observées en préalable de la manipulation des pièces. Voici quelques réponses des élèves : c'est du carton, il y a de la peinture, du bleu, du vert et du rouge, des traits. Après quelques échanges, il a été convenu que ces traits n'étaient pas placés n'importe comment, qu'ils reliaient les « coins » des carrés. Il a été convenu que ces « traits » étaient les diagonales du carré, le mot « diagonales » a dû être rappelé.
Quatre triangles ont été dénombrés (la reconnaissance immédiate n'a pas toujours fonctionné, certains élèves de CP les ont comptés un par un). Les CE1 ont vite constaté qu'il y en avait toujours deux d'une même couleur. Une explication leur a été fournie : il y a quatre triangles, coloriés en utilisant trois couleurs, une couleur est donc utilisée deux fois.
Il leur a ensuite été montré qu'il y avait des pièces dans lesquelles ces triangles de même couleur se font face, d'autres où ils sont l'un à côté de l'autre. Cet aspect sera utilisé plusieurs fois dans les activités proposées.

Retour au sommaire

Les règles de juxtaposition ont été précisées visuellement.



NON

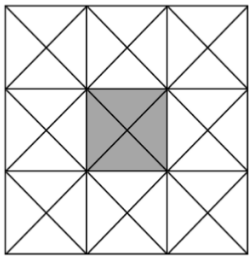


OUI

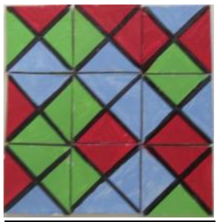
Première activité

Réaliser un carré en utilisant les neuf pièces

En aide éventuelle, des plateaux aux dimensions des pièces avaient été préparés pour les élèves de CP. Ils ont été peu utilisés.
Après un premier carré réalisé, les élèves avaient à en chercher un second pour lequel la pièce en position centrale n'était pas du même type que celle du premier carré : les triangles de même couleur se font face ou les triangles de même couleur sont l'un à côté de l'autre.



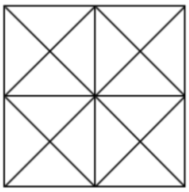
Les deux types de carré ont été trouvés.

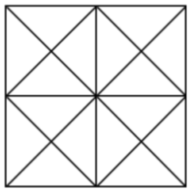


Deuxième activité

Réaliser deux carrés formés de quatre pièces

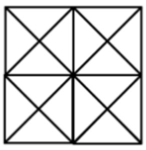
Les élèves ont su dire : pour deux carrés de quatre pièces, j'utilise huit pièces, il restera une pièce.



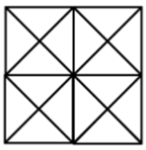


Troisième activité

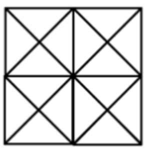
Réaliser un carré de quatre pièces avec le plus possible de triangles rouges puis un carré de quatre pièces avec le moins possible de triangles rouges. Ces carrés ont été trouvés, le dénombrement des triangles rouges s'est fait par du comptage un par un.
La suite de cette recherche consistait à trouver puis colorier des carrés de quatre pièces ayant 4, 5, 6 ou 7 triangles rouges.



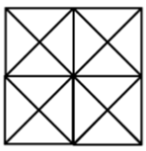
Avec 4 triangles rouges



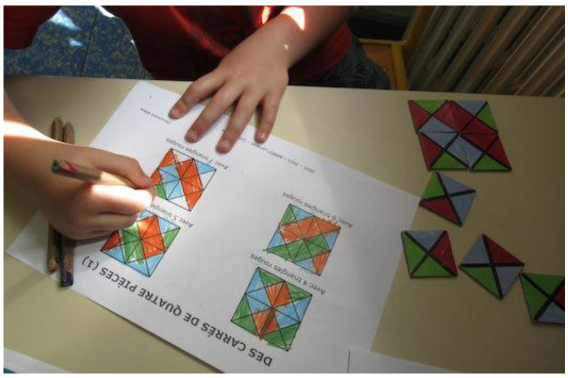
Avec 5 triangles rouges



Avec 6 triangles rouges



Avec 7 triangles rouges

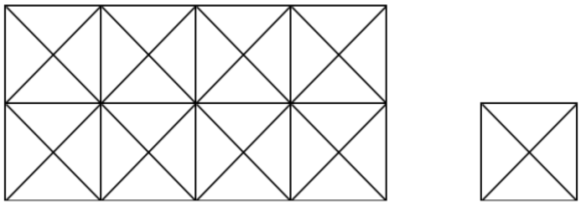


Quatrième activité

Retour au sommaire

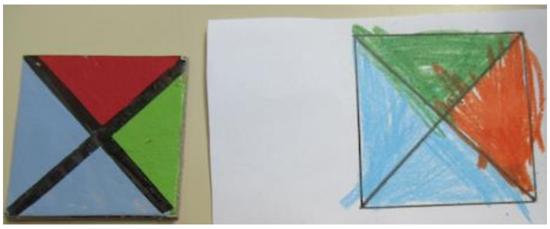
Réaliser un rectangle en utilisant huit pièces.

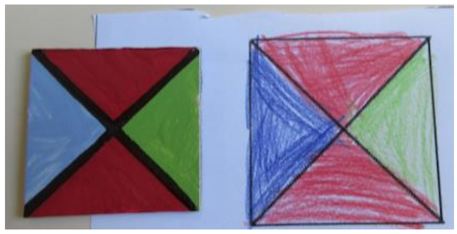
J'utilise huit des neuf pièces, il reste une pièce. Les deux types de ont été cherchés pour cette pièce restante.



Cinquième activité

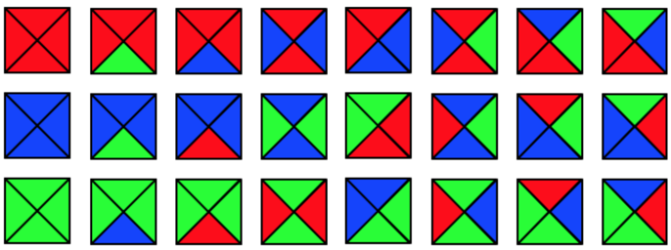
Elle a été proposée aux CE1 les plus en avance. Huit pièces sont posées sur la table, couleurs visibles, la neuvième est retournée. Il s'agit de retrouver et colorier le dessin de la pièce manquante. Cette activité avait été proposée en 2019 à des élèves de CE2, elle est évoquée dans le Petit Vert n°146.





Parmi les propositions des élèves nous repérons des échecs et des réussites. La gestion des deux zones de même couleur est correcte, mais les élèves oublient de vérifier qu'il n'y a pas de doublon parmi les pièces non retournées et la pièce dessinée.

En classe de CE1 CE2 (avant la récréation)



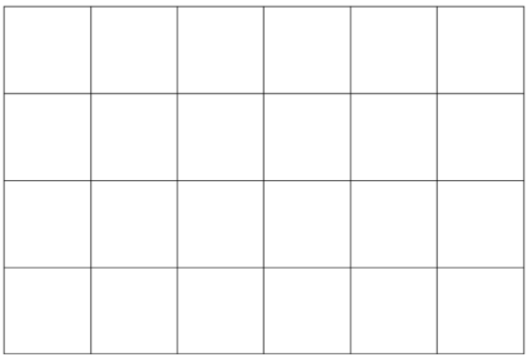
Les 24 carrés de Mac-Mahon

Les élèves en situation de recherche

Première activité

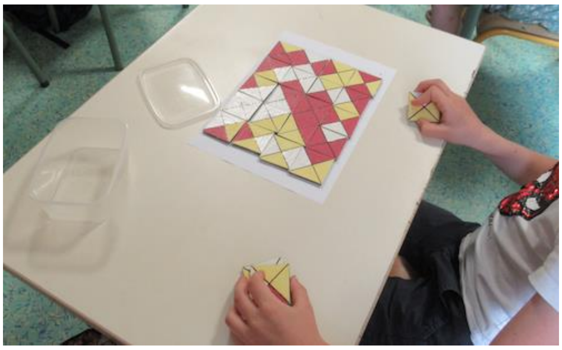
Les règles de juxtaposition ont été exposées oralement.

Il a été demandé aux élèves la réalisation de rectangles en utilisant le plus de pièces possibles. Le plateau fourni favorisait la recherche de rectangles de « largeur » égale à 4.
D'autres sont envisageables pour par exemple donner envie d'aller vers un rectangle 3x8.

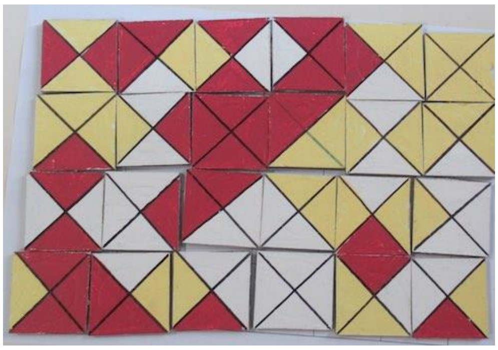


Certaines pièces de l'école n'étaient pas aux dimensions exactes du plateau. Cela a parfois perturbé les élèves.

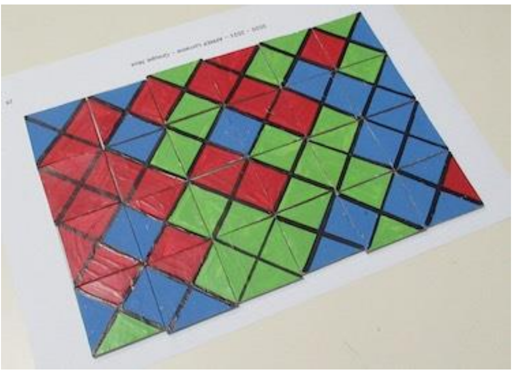
Retour au sommaire



4 fois 5 pièces qui recouvrent le plateau



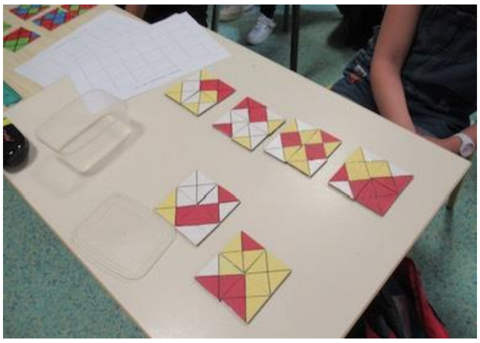
4 fois 6 pièces qui débordent du plateau



Quelques élèves ont réussi des rectangles 6x4.
Cela a été l'occasion de se persuader pourquoi il y avait bien 24 pièces placées (6 colonnes de 4 pièces ou 4 lignes de 6 pièces).

Deuxième activité

Construire le plus possible de carrés de 4 pièces. Le fait que 6 carrés étaient envisageables a émergé assez rapidement : une mise en situation de l'opération à trous « 4x… = 24 ».



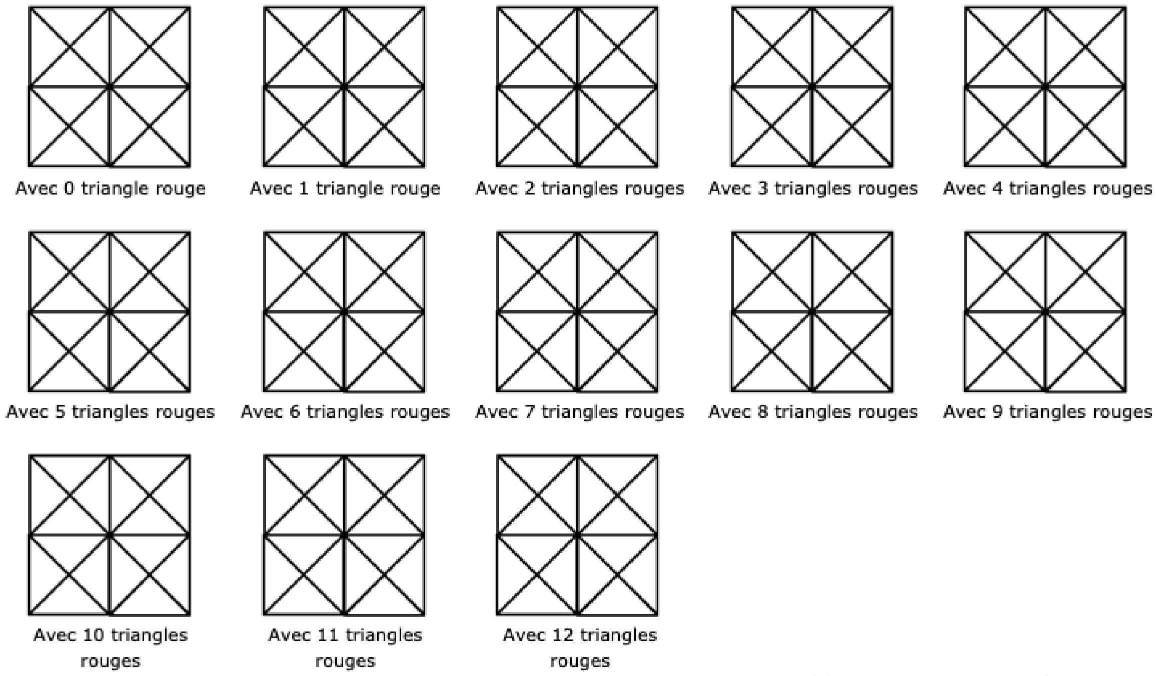
Troisième activité

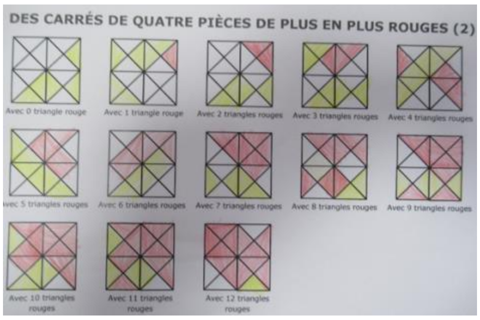
Réaliser un carré de quatre pièces avec le plus possible de triangles rouges puis un carré de quatre pièces avec le moins possible de triangles rouges. Ces carrés ont été trouvés pour un minimum de 0 et un maximum de 12, le dénombrement des triangles rouges se faisait souvent par comptage un par un, il a fallu insister pour les inciter à utiliser des méthodes utilisant des additions. L'automatisme des résultats des tables d'addition ne suffit donc pour privilégier l'automatisme des procédures.

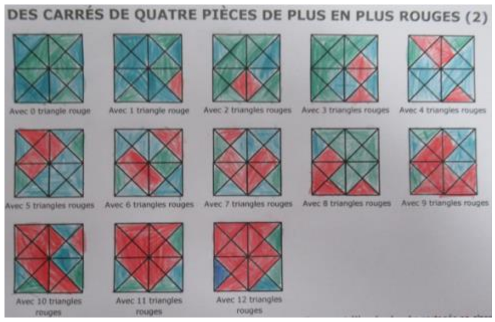
Quatrième activité

Trouver puis colorier des carrés de quatre pièces ayant 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 ou 12 triangles rouges.

Retour au sommaire







Cinquième activité

Elle a été proposée aux élèves les plus rapides. Faire deux tas, d'un côté les pièces ayant deux couleurs et de l'autre les pièces ayant une ou trois couleurs. Il a été précisé que les tas auront le même nombre de pièces.

Le fait qu'il y avait 12 pièces dans chaque tas n'a pas été trouvé immédiatement, or les élèves savaient que la moitié de 24 est 12. Il y a là une reconnaissance non immédiate d'une situation mettant en œuvre la notion de moitié. Cet automatisme de procédure reste à travailler. Il est par ailleurs à noter qu'il est plus facile pour les élèves de dénombrer des triangles que les couleurs sur une pièce, les couleurs ne sont pas des objets.

En complément

Un ensemble de 24 carrés de Mac-Mahon aux dimensions de celles utilisées est téléchargeable.
Il est facile d'en extraire les 9 pièces utilisées en CP-CE1.
Les documents utilisés ce jour-là ont été déposés pour être accessibles à de futurs utilisateurs.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

UNE ERREUR D'APPRÉCIATION
DÉRAPAGE SUR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Gilles WAEHREN

Le programme de Terminale STI a toujours fait apparaître un chapitre consacré aux équations différentielles du premier ordre (et second ordre jusqu'en 2019). On retrouve maintenant cette notion dans l'option de mathématiques complémentaires de Terminale Générale. Pour les STI, certains reverront l'équation $y' + ay = b$ dans leurs études. Enseignant en Terminale STI et en BTS, il m'est souvent arrivé de faire le lien entre ces deux niveaux, reprenant, en deuxième année de BTS, parfois avec mes propres élèves de Terminale, ce qui avait été vu deux ans auparavant. C'est souvent l'occasion de constater que les connaissances s'envolent assez facilement (« On n'a jamais vu ça, monsieur ! »), mais que les compétences restent.
On pourrait limiter le travail sur les équations différentielles à l'application de résultats de cours sur des exercices qui se ressemblent. Bien entendu, notamment pour les élèves issus de Bac Professionnel, ces répétitions techniques sont nécessaires. Mais lorsque l'on sort du contexte mathématique pour étudier des situations liées à la Physique, le manque d'aisance dans le sens de ces équations gêne la résolution de problèmes. Comprendre la construction d'une équation différentielle, qui donne, par exemple la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC, peut devenir ardu si l'on n'a pas pris le temps d'intégrer l'élaboration, la modélisation d'un problème par une équation différentielle. Bien entendu, ce n'est pas une capacité exigible de mes étudiants, mais il me semble difficile de consacrer un chapitre aux équations sans faire de « mise en équation ».

Pendant plusieurs années, j'ai proposé une activité d'introduction (quasiment la même en Terminale et BTS) sur le thème de la désintégration radioactive, un élément du programme de Sciences Physiques de Terminale. J'y ai régulièrement apporté des modifications, une approche différente selon les années : certaines des versions sont données ci-après.

Version 2015 (Tle et BTS)

Désintégration radioactive

Un élément radioactif est un élément dont les atomes ont un noyau qui se désintègre régulièrement. La vitesse de désintégration est appelée activité du noyau. Comme ces désintégrations produisent des émissions de rayons, on parle de radioactivité.
On a pu établir que, pendant une courte durée dt, le nombre de noyaux qui se désintègrent dN est proportionnel au nombre N de noyaux restants. Le coefficient de proportionnalité est −λ.
Écrire la relation qui lie dN à λ, N et dt.
Info : $\frac{dN}{dt} = N'(t)$
Écrire $\frac{N'}{N}$ en fonction de λ. Chercher alors l'expression de $N(t)$.
La période ou demi-vie radioactive est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs disparaissent. La période de l'uranium 235, utilisé dans les réacteurs nucléaires, est d'environ 700 millions d'années.
Déterminer la valeur de λ pour l'uranium 235.
À l'aide de GeoGebra, **représenter** graphiquement la famille de fonctions ainsi obtenues.

Retour au sommaire

Cette première version n'est guère guidée. Tous les élèves de Terminale ne se mettant pas en situation d'autonomie pour répondre aux questions posées, la résolution a été menée conjointement avec le professeur. Le lien entre $\frac{dN}{dt}$ et N' revient maintenant en spécialité Sciences Physique et Mathématiques, mais il faut toujours y consacrer un moment d'explication, en repassant par les tangentes et sécantes vues en Première. Tous les élèves ne font pas le lien entre $\frac{N'}{N}$ et $\frac{u'}{u}$. Le choix de certaines notations rituelles dans les formules rassure, mais limite le passage à d'autres lettres ; c'est un problème régulièrement rencontré en Sciences Physiques. Il faut également prendre le temps d'expliquer que trouver N dans $\frac{N'}{N} = -\lambda$ revient à faire une recherche de primitives : le problème ne s'est alors jamais posé à eux dans ces termes. La notion et le calcul de primitives représentent, en Terminale STI, une vraie difficulté pour des élèves qui ne maîtrisent pas très bien leurs formules de dérivation. Il n'est pas sûr que d'avoir avancé, en 2019, cette partie du programme à la classe de Première soit un remède à cette situation.
La résolution passe ensuite par la substitution de la constante d'intégration dans $\mathrm{N}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t+k}$, en posant $\mathrm{C} = \mathrm{e}^{-k}$, un tour de passe-passe mathématique pas si simple. Enfin, il était bien sûr très perturbant de ne pouvoir donner de valeur à C (donnée non fournie ici). L'objectif était de ne lui attribuer de valeur que lors de la représentation graphique, pour mettre en évidence la famille de solutions. Il faut encore noter que, pour nombre d'élèves qui sont encore fragiles sur la résolution d'équations en général, l'idée d'une équation dont l'inconnue est une fonction demande un saut conceptuel. Ce n'est pas faute de leur expliquer que chercher une primitive est un premier exemple de ce genre de problème en mathématique, la résolution de $F' = f$ est d'abord vue comme l'opération réciproque d'une dérivation.
Ce parti pris d'une activité assez peu directive venait d'une part de l'envie de faire émerger un questionnement ; d'autre part de l'observation d'un élève qui, quelques années auparavant, n'utilisait pas le théorème du cours donnant l'écriture des solutions. Il refaisait systématiquement les étapes du raisonnement. Cette attitude est évidemment très rare, mais pose la question de ce qu'on peut retenir d'une formule : les étapes qui l'ont faite émerger ou son écriture, hiéroglyphique pour certains élèves.

Pour impliquer davantage les élèves dans cette activité, je l'ai développée dans la forme ci-après en 2019. Beaucoup d'étudiants de BTS apprécient les travaux avec un grand nombre de petites questions ; leurs épreuves finales, en Sciences, ont souvent ce format. Ce que l'on perd en sens, on le gagne en autonomie. Il fallut alors amener le liant entre les étapes en envoyant, à tour de rôle, les étudiants résoudre une question au tableau.

Version 2019 (BTS)

Désintégration radioactive

(Premier paragraphe d'explication de la radioactivité identique dans les versions)

On a pu établir que, pendant une courte durée dt, le nombre de noyaux qui se désintègrent dN est proportionnel au nombre N de noyaux restants.
Le coefficient de proportionnalité est −λ : $dN = -\lambda N dt$
On voudrait connaître l'évolution du nombre de noyaux $\mathrm{N}(t)$ au cours du temps t, en années.
1. Recherche de l'expression de N (t).
a) Exprimer $\frac{dN}{dt}$ en fonction de N et λ. Info : En fait, $\frac{dN}{dt} = N'$
b) Écrire $\frac{N'}{N}$ en fonction de λ.
c) Donner une primitive de $\frac{N'}{N}$ Rappel : La dérivée de ln(u) est $\frac{u'}{u}$.
d) Donner une primitive de −λ. Rappel : La dérivée de $f(x) = ax + b$ est $f'(x) = a$.
e) En déduire l'expression du nombre de noyaux $N(t)$ en fonction du temps t.

Retour au sommaire

2. Le nombre de noyaux au début de l'étude est de 10^8 .
a) Écrire la condition initiale.
b) En déduire la constante d'intégration.
3. La période ou demi-vie radioactive est la durée nécessaire pour que la moitié des noyaux radioactifs disparaissent. La période de l'uranium 235, utilisé dans les réacteurs nucléaires, est d'environ 700 millions d'années.
a) Écrire l'équation de la demi-vie.
b) En déduire la valeur de λ.
c) Représenter graphiquement, sur GeoGebra, la fonction ainsi obtenue.
d) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{N}(t)$

Lors de l'année précédente, le fiasco rencontré par la version 2015 m'avait engagé à rédiger une série de questions très guidées pour exprimer N en fonction de t, sans donner de valeurs à λ ou à la constante d'intégration. La donnée de la condition initiale permettait de stabiliser les élèves les moins sûrs. En même temps, l'étudiant (re) découvrait ce qu'est une équation différentielle et se familiarisait avec les principales capacités requises en exercice.

Mais cette histoire de proportionnalité me laissait un arrière-goût d'inachevé. Il y avait trop de grandeurs en jeu pour identifier clairement celles que l'on voulait relier. Le confinement du printemps 2020 m'amena à modifier la version 2019 de cette activité pour mettre en évidence cette relation et permettre aux élèves de travailler à distance, y compris en direct, avec moi, sur Internet.

Version 2020 (Tle)

(Premier paragraphe d'explication de la radioactivité identique)

ÉTUDE PRELIMINAIRE

[...] l'uranium 235 se désintègre en thorium 231 et perd la moitié de ses noyaux en 700 millions d'années. On a simulé des mesures de nombre de noyaux sur plusieurs millions d'années :

t(années)	0	1 000 000	2 000 000	4 000 000	8 000 000	16 000 000
Δt		1 000 000				
N (noyaux)	10 000	9 990	9 980	9 960	9 920	9 840
ΔN		-10				
$\dfrac{\Delta \mathrm{N}}{\mathrm{N} \times \Delta t}$						

Compléter le tableau et vérifier que la dernière ligne est constante.

Retour au sommaire

RECHERCHE D'UNE LOI

Cette constante est le coefficient de proportionnalité entre ΔN et N $\times \Delta t$, on le note $-\lambda$. Comme le coefficient de proportionnalité est négatif, λ est positif.
On peut donc écrire : $\Delta \mathrm{N} = -\lambda \mathrm{N} \times \Delta t$.
Pour établir cette loi, les pionniers de la radioactivité (Henri Becquerel, Marie Curie …) n'ont pas pu faire de mesures sur des millions d'années. Ils ont travaillé sur des temps beaucoup plus courts, très courts.

Mathématiquement, cela revient à passer de Δt, un nombre relativement grand, à dt un temps très petit positif (surtout par rapport à la demi-vie). On passe, de même, de ΔN à dN.

1. Exprimer $\frac{d\mathrm{N}}{dt}$ en fonction de N et λ

La suite du texte de l'activité reprend des questions de la version 2019, avec des inserts fournissant des définitions, une étude plus complète de la fonction, des espaces vides pour rédiger les réponses fournies en classe à distance. Le document complet est disponible en ligne.
La véritable nouveauté est le tableau permettant d'établir le lien de proportionnalité. Il est clair que ce tableau peut sembler artificiel et j'ai rapidement expliqué aux élèves que nul homme n'avait pu réaliser les mesures du nombre de noyaux sur de telles périodes géologiques. Ils comprirent que le calcul de l'expression de N leur donnerait le fin mot de l'histoire.

t(années)	0,00	1 000 000,00	2 000 000,00	4 000 000,00	8 000 000,00	16 000 000,00
Dt		1000000	1000000	2000000	4000000	8000000
N	10000	9990,104898883	9980,2195890691	9960,478304604	9921,11280564834	9842,84793024
DN		-9,895101116765	-9,8853098141535	-19,7412844653	-39,3654989554798	-78,26487540839
DN/(N*Dt)		-9,90490212E-10	-9,904902118E-10	-9,90980747E-10	-9,91962790028E-10	-9,9393077E-10
Ecart avec lambda		0,0495 %	0,0495 %	0,0991 %	0,1983 %	0,3970 %

Le remplissage du tableau a été l'occasion d'une réflexion sur les formules tableur. Les valeurs de $\frac{\Delta N}{N\Delta t}$ sont très proches les unes des autres et le calcul de λ (grâce à la demi-vie) confirmera ces résultats. Les différences observées seront alors mises sur le compte d'arrondis et de divisions sources de valeurs approchées (voir dernière ligne ajoutée à la rédaction de l'article). Grave erreur !

Encouragé par l'effet de ce tableau de valeurs sur l'entrée des élèves dans le monde des équations différentielles, je me décidais à reprendre le principe de cette activité et de son tableau à l'automne 2020 pour les secondes années de BTS Systèmes Numériques. Quatre étudiants de cette classe, qui m'avaient eu en Terminale, ayant déjà été confrontés à cette étude, je me proposais de changer de thème et de m'inspirer d'un sujet de baccalauréat sur un tunnel de congélation de poulets. Très confiant dans mon travail du mois de mai, je reprenais la même stratégie pour créer le tableau de valeurs… sans vérifier les résultats de la dernière ligne.

Retour au sommaire

Version 2020 (BTS)

Une entreprise congèle des ailerons de poulets dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant t = 0 (t en secondes), les ailerons, à une température de 35 °C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à −24 °C.

Étude préliminaire

On a relevé la température, notée f, à des instants t :

t (secondes)	0	300	600	1200	2400	4800	9600
Δt		300					
f (degrés)	35	30,63	26,81	20,53	12,05	4,15	0,49
Δf		$-4{,}37$					
$\dfrac{\Delta f}{f \times \Delta t}$							

1. À l'aide du tableur, compléter le tableau et vérifier que la dernière ligne est constante.
2. Placer les points de la courbe de f du tableau.
3. Quel semble être le sens de variation de f sur $[0;+\infty[$?
4. Comment doit être la limite de f en $+\infty$?

RECHERCHE D'UNE LOI

Pour les premiers relevés, le rapport $\frac{\Delta f}{f \times \Delta t}$ semble à peu prés constant.
Cette constante est le coefficient de proportionnalité entre Δf et $f \times \Delta t$, on le note α.
On peut donc écrire : $\Delta f = \alpha f \times \Delta t$.

Objectif : trouver une fonction f qui vérifie cette loi.

Pour ce faire, on va réduire les intervalles de temps de Δt, un nombre relativement grand, à dt un temps très petit positif. On passe, de même, de Δf à df.

L'échec fut retentissant. L'écart entre les valeurs de la dernière ligne allait croissant, sans borne :

t	0	300	600	1200	2400	4800	9600
Dt		300	300	600	1200	2400	4800
f	35	30,63000430795	26,805633254427	20,5297706906	12,0420424173834	4,143165302345	0,49045196350149
Df		-4,369995692052	-3,8243710535216	-6,27586256383	-8,48772827321174	-7,898877115039	-3,6527133388431
Df/(f*Dt)		-0,000475568079	-0,0004755680789	-0,00050949283	-0,000587367711322	-0,000794368208	-0,00155159322874
Ecart avec lambda		6,9750 %	6,9750 %	14,6061 %	32,1234 %	78,6864 %	249,0177 %

Devant les étudiants, je ne voyais pas d'explication *a priori* et leur demandais de me croire, sur parole, de l'existence de la relation de proportionnalité attendue par la suite.
Le reste du texte de cette version est également en annexe. Le contenu était suffisamment dense pour estomper cette déconvenue. Je n'étais pas mécontent des premières questions où je leur demandais de conjecturer certains résultats, ni des changements de modèle opérés dans la suite de l'étude. Mais l'entrée en scène était manquée.

J'ai donc cherché récemment la source de cette distorsion entre les versions du printemps et de l'automne. Était-ce dû à l'ordre de grandeur des valeurs choisies ? À des écarts comme on les

Retour au sommaire

rencontre dans la résolution approchée par la méthode d'Euler ? Au fait que la validité de la relation se limite à un voisinage de 0 ?
J'ai donc repris mon calcul :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t}=\frac{f(t+h)-f(t)}{f(t)\times h}$$

en posant $h=\Delta t$ pour des commodités d'écriture (et parce que Δt parle plus aux élèves de STI)
Comme $f(t)=\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda t}$, on a :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t}=\frac{\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda(t+h)}-\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda t}}{h\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda t}}$$

soit :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t}=\frac{\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda h}-1\right)}{h\mathrm{C}\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda h}-1}{h}$$

Pour λh proche de 0 on a : $\mathrm{e}^{-\lambda h}-1=-\lambda h+\frac{(\lambda h)^2}{2}+o((\lambda h)^2)$ d'où :

$$\frac{\Delta f}{f\Delta t}=-\lambda+\frac{\lambda^2 h}{2}+o(\lambda^2 h)$$

L'erreur commise, relativement à λ, est donc $\frac{\lambda h}{2}$
Elle est d'autant plus petite que λh est proche de 0. Mais surtout, elle reste bornée si h est constant !
Comme on l'observe dans les deux tableaux, pour travailler avec ces valeurs de temps suffisamment grandes, j'avais un pas non constant pour les valeurs de t. Pour la radioactivité, l'impact dû à la constance de la première ligne était très limité du fait que la quantité λh restait assez proche de 0. Ce n'est plus le cas pour la congélation des poulets.

t	0	300	600	900	1200	1500	1800	2100
Dt		300	300	300	300	300	300	300
f	35	30,63000430795	26,805633254427	23,45876177315	20,5297706905951	17,96648470555	15,7232429694163	13,76008571109
Df		-4,369995692052	-3,8243710535216	-3,34687148127	-2,92899108255847	-2,563285985049	-2,24324173612996	-1,963157258326
Df/(f*Dt)		-0,000475568079	-0,0004755680789	-0,00047556808	-0,000475568078946	-0,000475568079	-0,00047556807895	-0,0004755680789
Ecart avec lambda		6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %	6,9750 %

Mettre les valeurs en progression géométrique, intéressant pour observer le phénomène sur une longue échéance, a joué contre le fond de mon activité. Il faut savoir garder un pas constant et de la mesure en toute chose.

Conclusion

La réussite des étudiants sur ce chapitre n'est pas nécessairement liée à cette activité d'introduction, mais je suis convaincu qu'elle laisse le moins de saletés possibles sous le tapis. La mémorisation des formules, le sens de l'expression « solution d'une équation » ou la recherche de la constante d'intégration apportent d'autres embûches que ne saurait résoudre un travail d'approche qui se veut à la portée de élèves. Je souhaite que mes errements puissent servir à faciliter le travail de collègues voulant aborder les équations différentielles en dehors de l'énonciation de formules vides de sens.

Retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

UN CROP CIRCLE EN MEUSE

Fathi DRISSI

L'Est Républicain a publié le 21 août 2021 un article sur l'apparition d'un *Crop Circle* dans le champ de blé de notre collègue Emmanuel Claisse à Chauvency-Le-Château en Meuse. L'article débute ainsi : « Humaine ou paranormale ? Quelle est l'origine de ce *Crop Circle* apparu fin juin dans le champ d'Emmanuel Claisse à Chauvency-le-Château ?
Sur une vingtaine d'ares, des cercles impeccables ont été réalisés dans les blés un mois avant la moisson ».

Crédit photo : Est Républicain

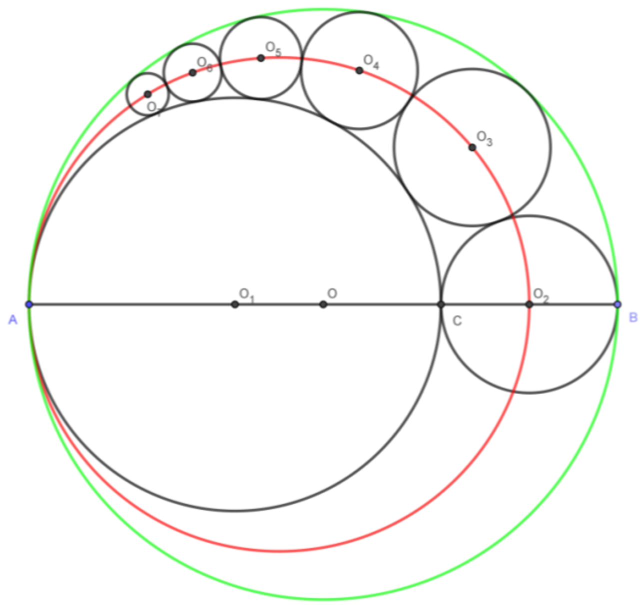
En parcourant l'article, on trouve peu d'explications mathématiques : on se contente de donner le diamètre du grand cercle en précisant que ceux des six autres, tangents au grand, sont dégressifs. Il est aussi indiqué la superficie occupée par ces dessins, mais comme souvent dans ce type d'article, l'auteur délaisse la recherche d'un programme de construction de la figure. Pourtant, le journal consacre une page à l'interview d'une « référence » en France en matière de *Crop Circle* mettant davantage en valeur le côté surnaturel et affirmant au passage que ce *Crop Circle* n'est pas un faux : « Ce n'est pas un faux, il y a une très forte énergie, il n'a rien à voir avec des *Crop Circle* faits avec des planches », comme l'avait été réalisé celui de Sarraltroff évoqué dans le Petit Vert n° 136.

Remarquons aussi que les informations données permettent difficilement de reproduire la figure géométrique. Est-ce volontaire ou un souci de l'auteur de ne pas ennuyer le lecteur avec du contenu mathématique ? Cet article soulève plus de questions qu'il n'apporte de réponses quant à l'origine de ces dessins.
Je trouve dommage que l'on n'accorde que peu ou pas de place dans ces articles à une étude mathématique de ces dessins géométriques car à mon sens cela ajoute au côté mystérieux de ces derniers. Trouver une manière de les reproduire permettrait de les rendre accessibles et de montrer la beauté des mathématiques.

Je ne vais pas me hasarder à apporter des réponses sur l'origine de ces *Crop Circle* ou la manière de les réaliser, mais je me permets de compléter l'article du journal en donnant un programme de construction.
En analysant la photo jointe à l'article, les six cercles tangents au grand me semblent former ce que l'on appelle une chaine de Pappus.

Retour au sommaire

Étant donnés un segment [AB], un point C situé sur ce segment et les cercles c, c_1 et c_2 de diamètres respectifs [AB], [AC] et [BC]. La famille de cercles $(c_n)_{n\geq 2}$ telle que c_{n+1} est tangent à c, c_1 et c_n pour tout entier $n\geq 2$ est appelée chaîne de Pappus.

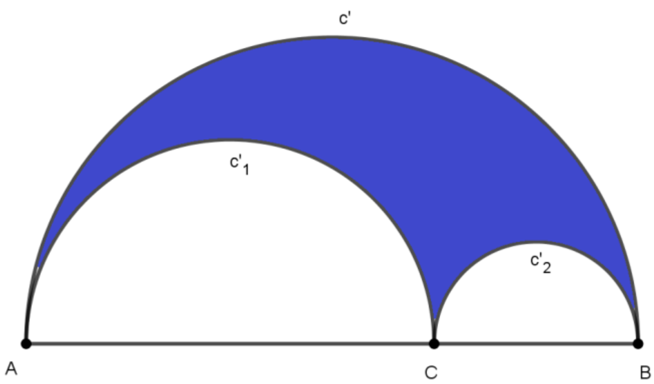


Une première propriété est que les centres des cercles de la chaîne sont sur une ellipse en vertu de la propriété suivante : « Le lieu des centres des cercles tangents à deux cercles donnés est une conique. »
En effet, on peut démontrer cette propriété pour le cas d'une ellipse en utilisant la figure composée des cercles c, c_1 et l'un des cercles c_n définis plus haut et de rayons respectifs r, r_1 et r_n avec n un entier supérieur ou égal à 3. En nommant I le point de contact du cercle c_n avec le cercle c et J avec le cercle c_1, on a :
O, O_n et I sont alignés et $OO_n=r-r_n$;
O_1, O_n et J sont alignés et $O_1O_n=r_1+r_n$;
Il en découle que $OO_n+O_1O_n=r+r_1$. Or $r+r_1$ est une constante, donc le point O_n décrit une ellipse de foyers O et O_1.
De plus, le cercle c_2 étant tangent aux cercles c et c_1, son centre O_2 est aussi sur l'ellipse, qui a ainsi pour grand axe AO_2 ou encore $AC+\frac{BC}{2}$.
Une autre propriété de cette chaîne est que les rayons des cercles c_n pour n entier supérieur ou égal à 2 vérifient la relation suivante :

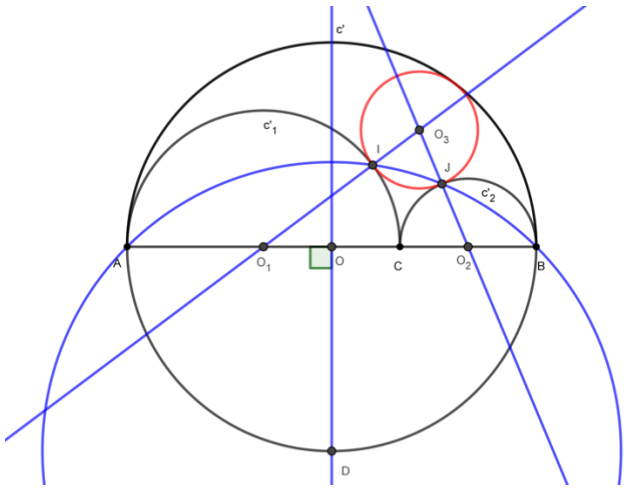
$$r_n = AB\frac{q(1-q)}{2((n-2)^2(1-q)^2+q)} \text{ où } q=\frac{AC}{AB}$$

Pour démontrer cette relation, il nous faut évoquer l'arbelos (du grec couteau ou tranchet du savetier), un objet géométrique étudié par Archimède et qui continue de fasciner les mathématiciens en raison de ses multiples propriétés remarquables.

Un arbelos est une région plane délimitée par la réunion de trois demi-cercles tangents deux à deux et situés dans le même demi-plan défini par la droite contenant leurs extrémités. Il se construit ainsi : Soient c' un demi-cercle de diamètre [AB] et C un point de ce diamètre. À l'intérieur du demi-disque ainsi défini on trace les demi-cercles c'_1 et c'_2 de diamètres respectifs [AC] et [CB].



Retour au sommaire



L'une des propriétés dont jouit l'arbelos est qu'il existe un cercle (en rouge) inclus dans cet arbelos et tangent à c', c'₁ et c'₂ ; on l'appelle cercle inscrit ou encore cercle de Pappus.
Archimède a également déterminé le rayon de ce cercle en fonction de celui des demi-cercles c'₁ et c'₂ :

$$r_3 = \frac{r_1 r_2 (r_1 + r_2)}{r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2}$$

En posant $q = \frac{AC}{AB}$ d'où l'on déduit que

$$r_1 = q(r_1 + r_2) = q\frac{AB}{2}$$

et $r_2 = (1-q)(r_1+r_2) = (1-q)\frac{AB}{2}$, on retrouve la relation à démontrer pour n=3 :

$$r_3 = \frac{ABq(1-q)}{2((1-q)^2+q)} = AB\frac{q(1-q)}{2((3-2)^2(1-q)^2+q)}$$

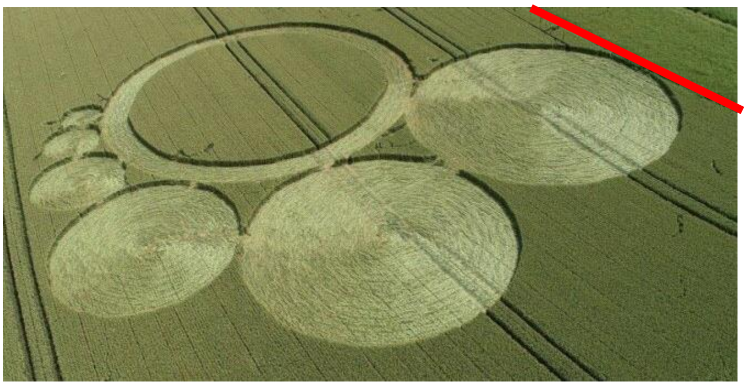
En poursuivant l'inscription de tels cercles successifs dans l'arbelos, on définit une suite de cercles inscrits : la chaîne de Pappus.
Le théorème de Descartes permet de donner une relation entre les rayons de deux cercles successifs de cette chaîne, le cercle c_1 et le cercle c. Son énoncé est le suivant :
Si quatre cercles tangents entre eux ont pour courbure k_i, i entier allant de 1 à 4, alors

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)$$

Ainsi, pour un entier n≥3, on a : $(k_n + k_{n-1} + k_1 + k)^2 = 2(k_n^2 + k_{n-1}^2 + k_1^2 + k^2)$
où $k_n = \frac{1}{r_n}$, $k_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1}}$, $k_1 = \frac{1}{r_1}$ et $k = -\frac{1}{r}$ sont les courbures successives des cercle c_n, c_{n-1}, c_1 et c.
Cette égalité, vue comme une équation du second degré en k_n, permet d'exprimer k_n en fonction de k_{n-1}, k_1 et k : $k_n = k_{n-1} + k_1 + k + \sqrt{k_{n-1}k_1 + k_{n-1}k + k_1 k}$.
Ces résultats permettent de démontrer par récurrence que pour tout n≥2,

$$r_n = AB\frac{q(1-q)}{2((n-2)^2(1-q)^2+q)} \text{ où } q = \frac{AC}{AB} = \frac{r_1}{r}$$

À ce stade, on peut donner un programme de construction du *Crop Circle*. Pour cela, il suffit de construire le segment [AB], d'y placer un point C, O_1 milieu de [AC], O_2 milieu de [BC], de tracer le cercle c_1 et le cercle c_2, de construire l'ellipse de foyers O et O_1 passant par O_2 pour enfin construire les centres O_n, avec n entier allant de 3 à 7, comme troisième sommet d'un triangle dont les deux autres sommets sont O_1 et O_2 et sachant que $O_nO_1 = \frac{AC}{2} + r_n$ et $O_nO_2 = \frac{BC}{2} + r_n$.



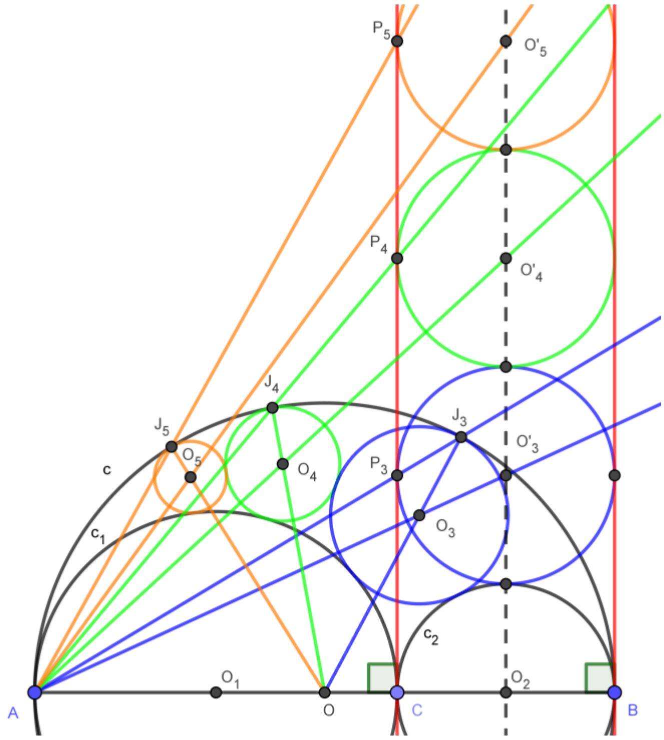
Par ailleurs, on distingue sur la photo des traces d'engin évoquant des droites parallèles dont l'une d'elles passe par le centre du plus grand des six cercles tangents à la couronne. De plus, celui-ci semble tangent à la bordure du champ de blé représentée ci-contre en rouge.

Or, il existe une méthode de construction de la chaîne de Pappus à l'aide d'une inversion transformant deux cercles bien choisis en deux droites parallèles et tous les autres cercles de la chaîne en des cercles identiques et tangents à ces deux droites parallèles.

Retour au sommaire

On peut alors se demander si c'est une simple coïncidence ou si ces traces ont joué un rôle dans la réalisation de ce *Crop Circle*.
Le choix de construire cette figure à l'aide d'une inversion permet d'éviter le recours au calcul des rayons des cercles de la chaîne de Pappus et par conséquent les erreurs d'approximation. De plus, la construction des centres des cercles de la chaîne de Pappus est plus aisée que la précédente comme l'illustre la méthode ci-dessous.

En choisissant par exemple l'inversion de pôle A qui laisse le cercle c_2 globalement invariant, le cercle c est alors transformé en la perpendiculaire en C à (AB) et c_1 en la perpendiculaire en B. Le cercle inscrit et tous les cercles de la chaîne sont transformés en des cercles identiques à c_2, tangents à ces deux perpendiculaires et conservant leur point de tangence.
Les centres O'_n et les points de contact P_n sont construits en reportant le rayon de c_2.
Le point de contact J_n de c_n avec c est alors l'intersection de (AJ_n) avec c et O_n est l'intersection de (AO'_n) avec $[OJ_n]$.



Grâce aux inversions, dont une présentation a été faite par Alain Satabin dans le Petit Vert n°137, la construction d'une chaîne de Pappus devient plus facile puisqu'elle est ramenée à la construction d'un simple empilement de cercles tous identiques et tangents à deux droites parallèles, nous permettant d'entrevoir au passage que les mathématiques sont aussi un art de transformer un problème où la solution n'est pas évidente en un problème simple.

On ne répétera jamais assez : la connaissance des choses permet la compréhension et évite l'obscurantisme ou la manipulation de ceux qui la détiennent. N'est-ce pas ce qui motive tout enseignant dans sa mission de transmettre ?
Et comme l'a si bien dit Christelle Kunc, on parle trop peu de la beauté des mathématiques dans notre société. Et hélas, la géométrie a perdu la place privilégiée qu'elle occupait autrefois et disparait peu à peu des programmes scolaires. Pourtant maitriser la construction d'une aussi belle figure est un art. De même que l'écoute d'un morceau de musique peut donner l'envie de pratiquer un instrument, l'observation de figures géométriques peut permettre au spectateur de rêver, mais aussi d'élever son esprit lorsqu'il lui prend l'envie de comprendre, de reproduire, de transmettre.

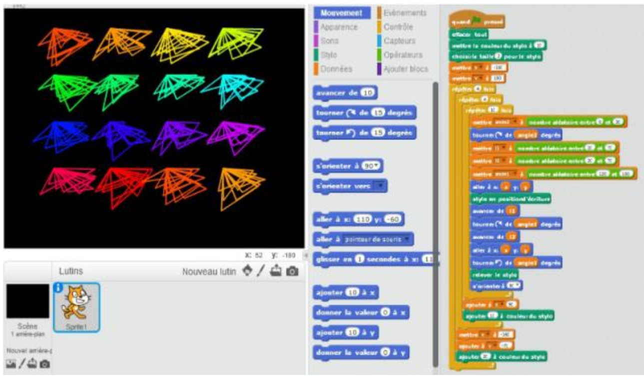
Retour au sommaire

VU SUR LA TOILE

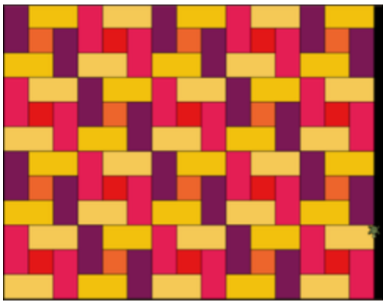
UNE TORTUE GÉNIALE

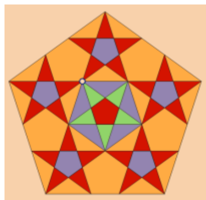
Gilles Waehren

Le Petit Vert s'est souvent efforcé de vous montrer les nombreux avantages de la tortue (qu'on l'appelle GeoTortue, turtle, Logo, chat) dans les tracés géométriques. Cette gentille bestiole demeure la clé de l'apprentissage de la programmation avec Scratch ou avec Python. Elle nous impose de nous placer dans le rôle de la machine pour dessiner et ses programmes ne sont pas sans rappeler les protocoles de constructions que l'on demande aux élèves de s'échanger. Ainsi, on peut retrouver dans le PV 138 ces programmes pour reproduire des œuvres de Josef Albers ou, dans le PV 130 un script pour s'approprier une œuvre de Vera Molnar. Les œuvres géométriques de François Morellet ont également fait l'objet d'une proposition de reproduction numérique.



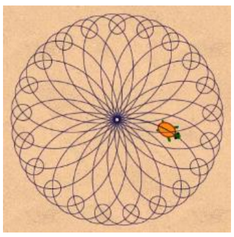
J'avais déjà référencé des propositions de l'IREM de Paris Nord pour l'utilisation de la tortue. On y retrouvera un lien pour installer GeoTortue (sur un site qui contient déjà de nombreuses propositions), ainsi qu'un parcours d'apprentissage dès le cycle 3 avec des réalisations d'élèves remarquables. Pour le cycle 4, on explorera cette activité.





Le collège de Bizanos a conçu pour ses élèves, six niveaux d'un diplôme « Géométrie dynamique et Programmation », tout en progressivité, vers des réalisations de plus en plus audacieuses.

Bien entendu, ces activités peuvent très bien être adaptées en Python ou en Scratch. Pour Python, Le site d'Olga Samy Modeliar du Lycée Michelis d'Amiens comporte un itinéraire de découverte de turtle en autonomie, très complet, tout en s'appuyant sur trinket qui permet de travailler en ligne.



Sesamath propose de s'initier avec les tortues de CaRMetal et de DGPad pour tracer, entre autres, des courbes lisses sur la base de représentations polaires. Une description assez complète de DGPad est exposée dans cet article du numéro 109 de la revue « Repère ».

Deux clins d'œil pour conclure :

- des pavages avec des tortues ;
- l'intervention de la géométrie dans les mouvements d'une tortue.

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

DES ICOSAÈDRES À VERNON

Ces chenilles formées d'isocaèdres constituent l'œuvre « IkosaAbsolem » imaginée par l'artiste Élodie Boutry. Elles ont été présentées durant l'été au pied de la tour des archives de Vernon (Eure).

Nous avons eu envie d'en savoir un peu plus sur cette artiste.

La visite de son site nous montre de bien belles choses comme « Entre Terre et Ciel » présentée en 2019 dans le jardin des Arts du Parc Pasteur à Châteaubourg (Ille et Vilaine).

L'artiste nous offre de belles occasions de rencontres avec des polyèdres, réguliers ou non, et ayant des faces triangulaires.

Retour au sommaire

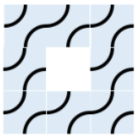
MATHS ET ARTS

VIRAGES AUTOUR D'UN CARRÉ CENTRAL

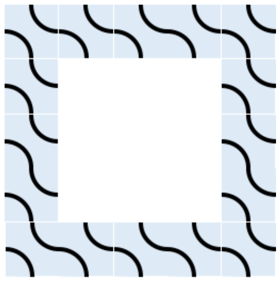
François Drouin

Une première série de motifs

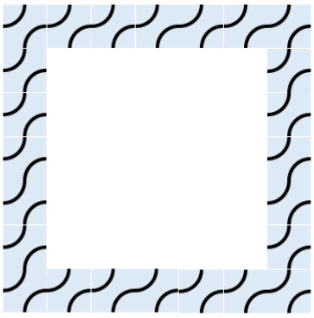
Partie 1



Partie 2

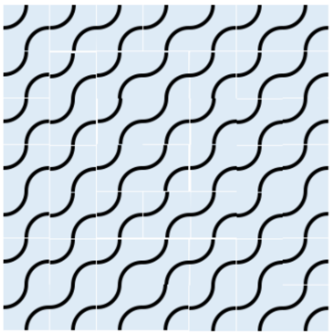


Partie 3



Partie 4

Les quatre parties assemblées



Un quart de tour vers la droite pour les parties 1 et 3

Un quart de tour vers la droite pour les parties 1 et 4

Un quart de tour vers la droite pour les parties 3 et 4

Les parties sur lesquelles agissent les quarts de tour pourraient être choisies aléatoirement dans un ensemble plus important de « couronnes ».

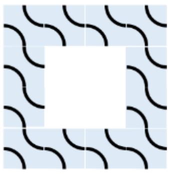
Les différentes parties pourraient être constituées différemment et/ou aléatoirement d'une des deux positions de la tuile de départ.

Peut-on imaginer des entourages pour que des boucles apparaissent.

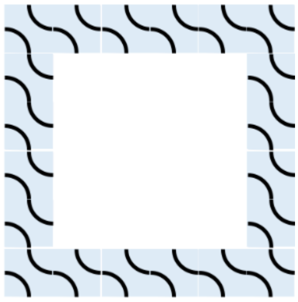
Retour au sommaire

Une deuxième série de motifs

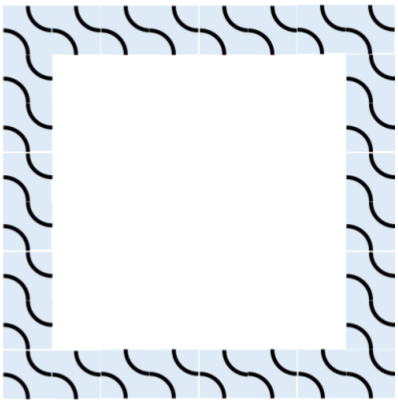
Partie 1



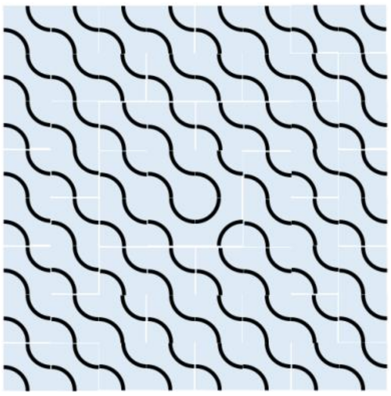
Partie 2



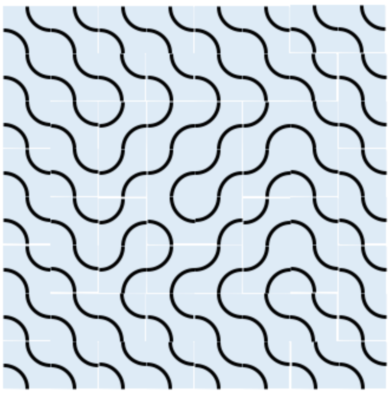
Partie 3



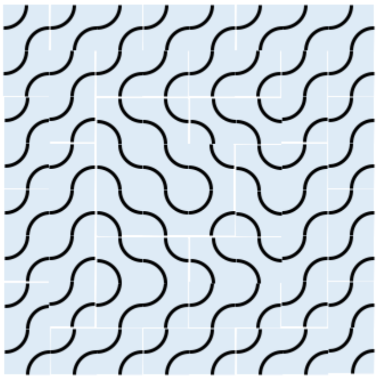
Partie 4



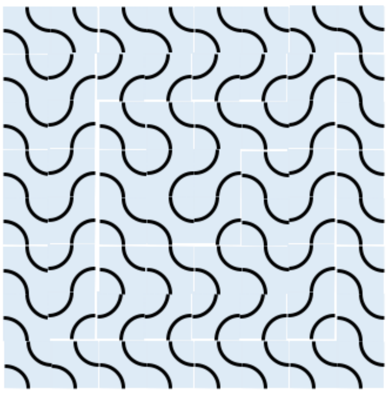
Les quatre parties assemblées



Un quart de tour vers la droite pour les parties 1 et 2



Un quart de tour vers la droite pour les parties 3 et 4



Un quart de tour vers la droite pour les parties 1 et 4

Les parties sur lesquelles agissent les quarts de tour pourraient être choisies aléatoirement dans un ensemble plus important de « couronnes ».
Les différentes parties pourraient être constituées différemment et/ou aléatoirement d'une des deux positions de la tuile de départ.
Imaginer des entourages pour que des boucles apparaissent

Informatiser le processus permettrait une création facile d'autres motifs. Affaire à suivre ?

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

À WEIL AM RHEIN

APMEP Loraine
Groupe Maths et arts

À *Weil am Rhein* (Land de Bade-Wurtemberg, tout près des frontières française et suisse), le campus VITRA et ses bâtiments à formes géométriques attirent l'amateur de belles choses.
L'un d'eux accueille le *VITRA Design Museum*.

Le campus VITRA

Le VITRA Design Museum

En 1999, la Schlaichturm a été construite dans la ville, nous donnant l'occasion de découvrir un escalier en double spirale, pouvant être mis en relation avec celui imaginé par Léonard de Vinci dans le château de Chambord.

Sur le terrain de *Green 99*, le site de l'exposition horticole de *Weil am Rhein*

Dans le château de Chambord

Retour au sommaire

MATHS LORS D'UNE BALADE

À TOUL

Des marquages au sol nous suggèrent des chemins vers plusieurs lieux.



La rosace de la cathédrale a été source d'inspiration des décors des oreilles de l'éléphant très coloré visible dans le Jardin de Hamm (Hamm-Mitte est jumelée avec Toul depuis plus de 30 ans).



La géométrie est présente dans les décors de cet ancien magasin de la faïencerie Toul-Bellevue.

Dans le cloître de la collégiale Saint-Gengoult est exposé un cadran révolutionnaire de l'an XI. Comme très souvent, des chiffres romains sont utilisés pour indiquer les heures. IV est noté IIII comme sur beaucoup d'autres cadrans. Lors de ballades futures trouverez-vous des cadrans avec IV indiquant la quatrième heure ?

Retour au sommaire

Dans la porte fermant ce soupirail, la croix de Lorraine peut être considérée comme dessinée en utilisant des nombres carrés et rectangulaires : 3x3, 3x9, 3x11. Il y a là un petit clin d'œil involontaire aux représentation figurées des nombres entiers utilisées par les mathématiciens grecs.

La deuxième ouverture laisse voir un pavage du plan par deux formes différentes.

Dans le faubourg Saint-Èvre, une pompe alimentant un abreuvoir présente une utilisation de rotations de 72°. À proximité, une bouche d'égout montre des cercles concentriques.

Promenez-vous dans Toul, d'autres belles choses vous y attendent.

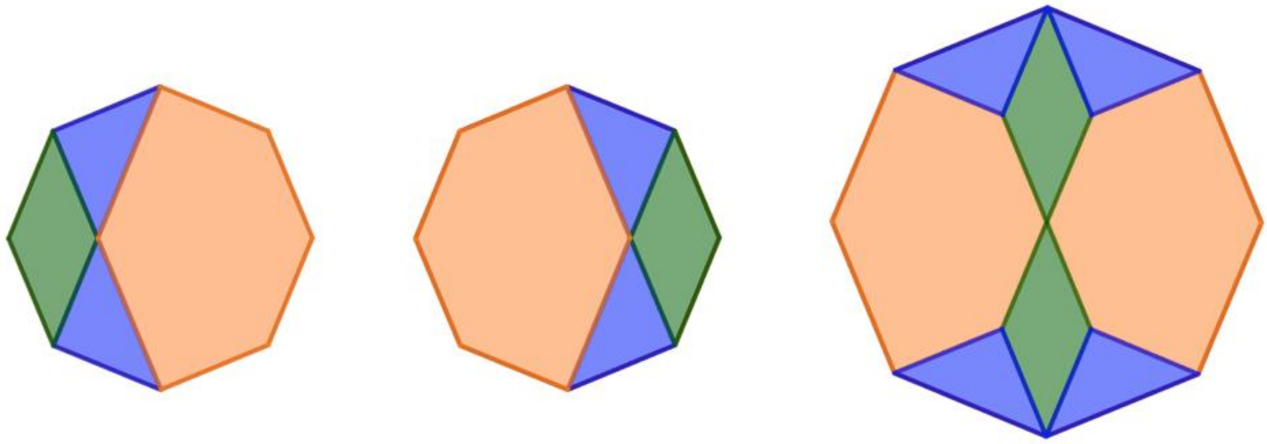
Retour au sommaire

MATHS ET DÉCOUPAGES

DES OCTOGONES RÉGULIERS DÉCOUPÉS

Groupe Jeux de l’APMEP Lorraine

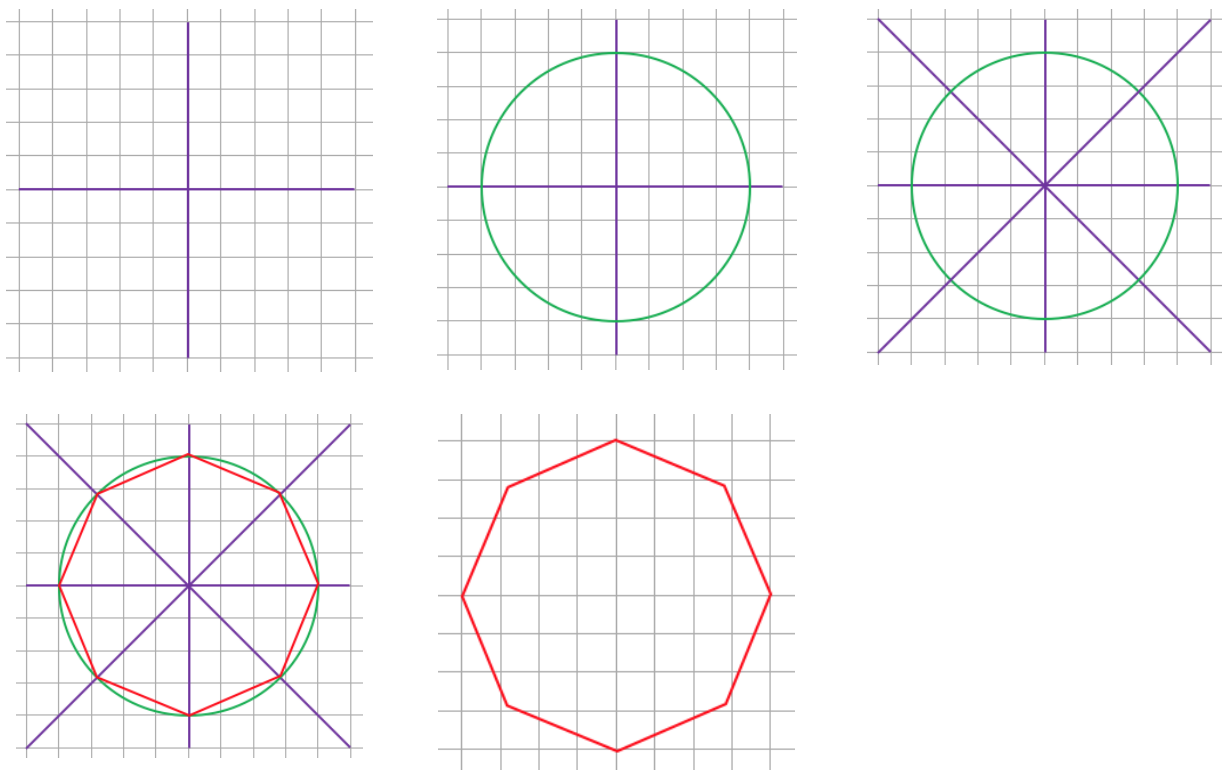
Le Petit Vert n°145 avait évoqué une bissection de l’octogone étoilé repéré dans le site de Gavin Theobald. L’exploration de ce site nous a fourni une belle pépite imaginée en 1964 par Harry Lindgren : elle nous présente la bissection d’un octogone régulier.



Les tracés permettant le découpage des deux petits octogones peuvent être proposés à des élèves de de cycle 3.

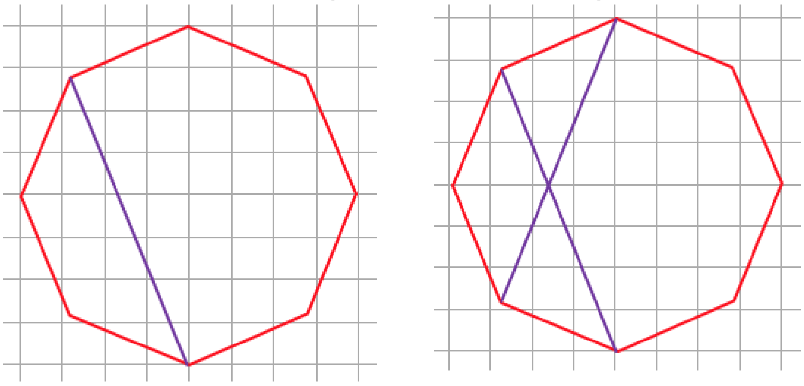
Tracé d’un octogone

Il utilise le quadrillage présent sur la feuille de papier.



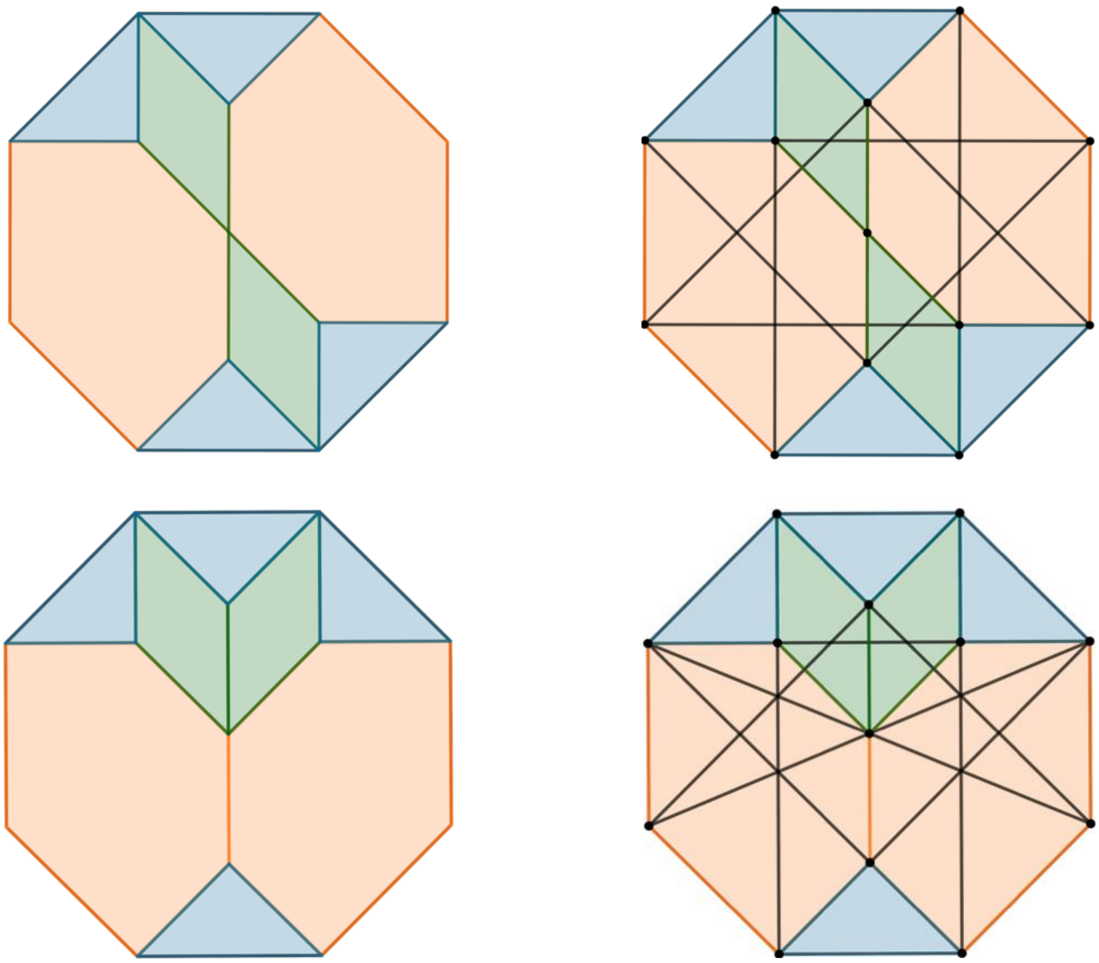
Retour au sommaire

Tracés pour le découpage des petits octogones

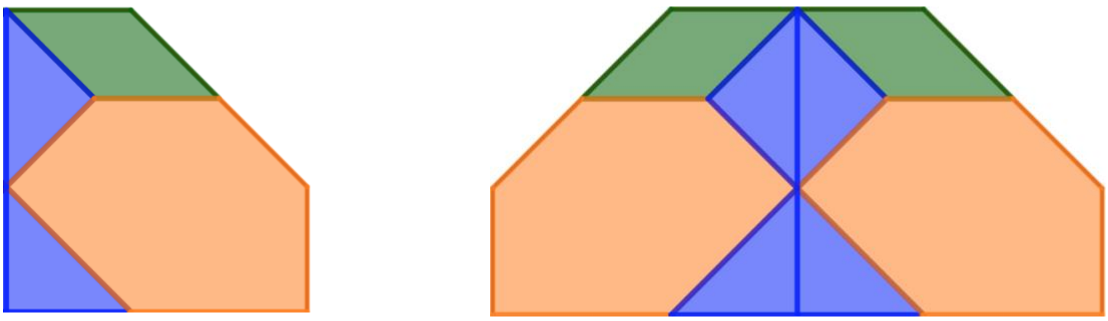


L'élève devra gérer les positionnements relatifs des sommets utilisés.

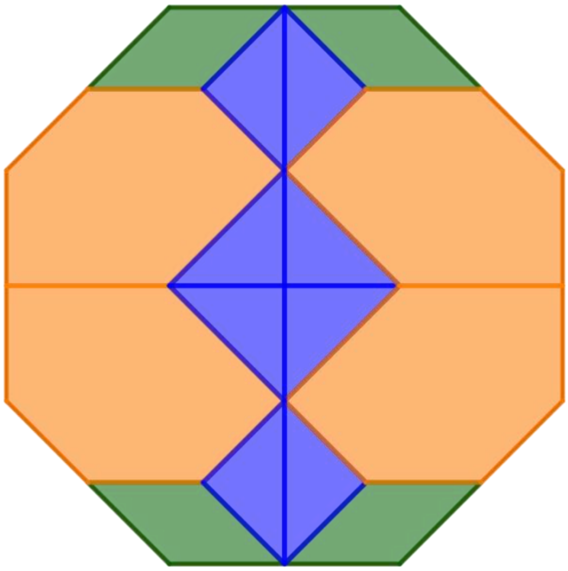
Il existe au moins deux possibilités pour réaliser un octogone avec les huit pièces des deux petits octogones. Dans les deux cas, une règle graduée et un crayon suffisent pour les tracés.

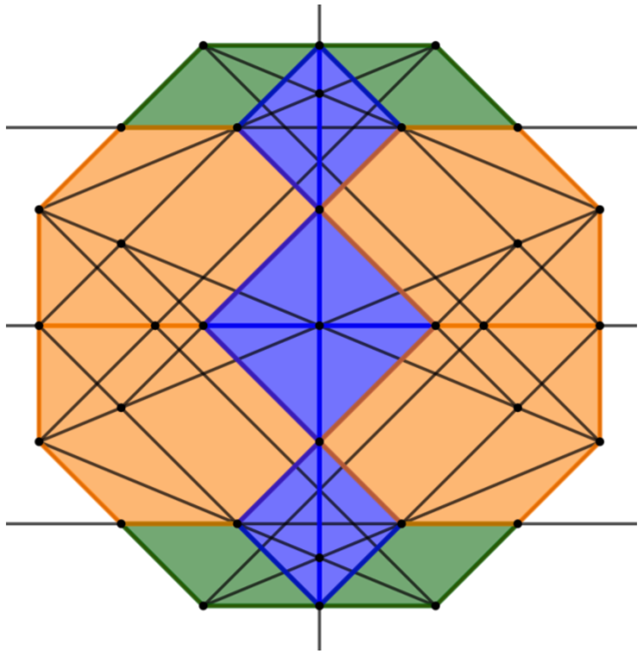


Les quatre pièces d'un petit octogone régulier permettent la réalisation d'un quart d'octogone régulier. En faisant intervenir des symétries axiales, les pièces de quatre petits octogones forment un grand octogone régulier.



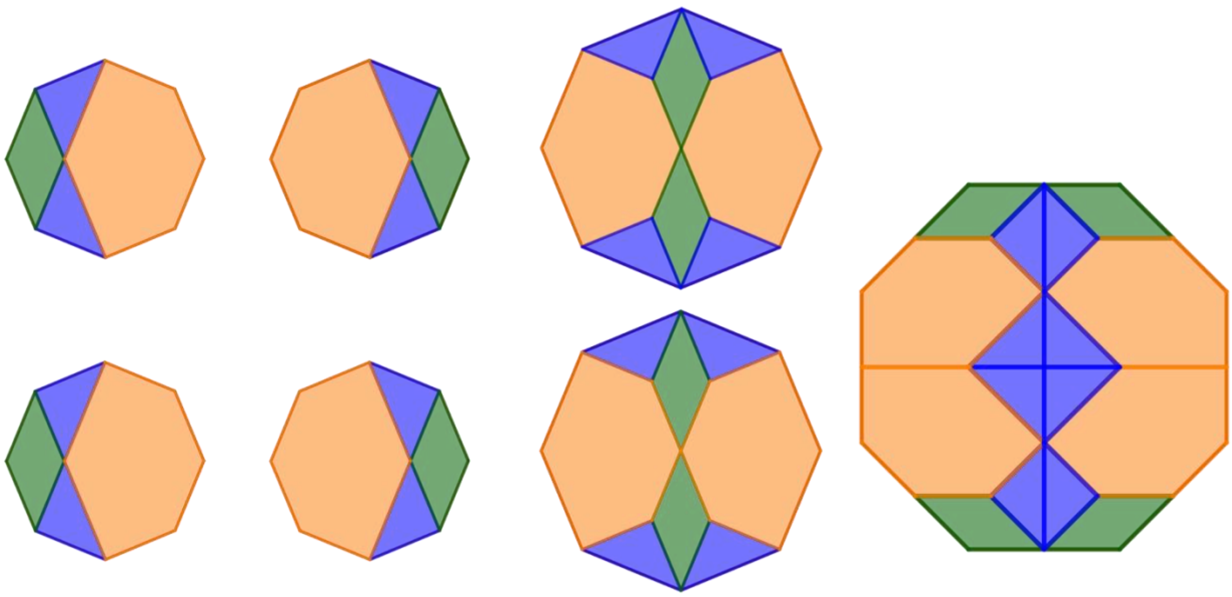
Retour au sommaire





Voici pour nos lecteurs des tracés utilisant une règle non graduée, un crayon et les sommets de l'octogone.

Les pièces utilisées et les octogones reconstitués présentent de nombreux éléments de symétrie.

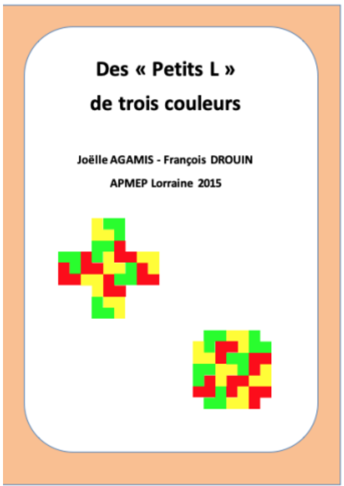


En complément à cet article, des activités ont été déposées sur notre site pour des élèves de cycle 3 (l'enseignement de la symétrie axiale est un des thèmes de recherche des collègues participant au labo de maths de Moulins-les-Metz).

MATHS ET JEUX

AVEC 4X4 « PETITS L »

Groupe jeux de l'APMEP Lorraine

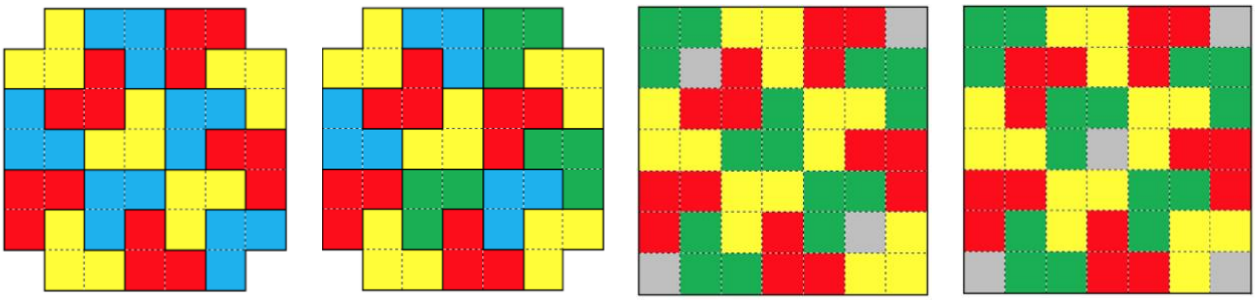


En 2015, des utilisations de cinq fois trois pièces de trois couleurs différentes ont permis le recouvrement de polygones formés de quarante-cinq carrés unitaires. Les pièces de même couleur pouvaient se toucher par un sommet.

Cette idée a été reprise dans le contenu du stand n°24 de la version meusienne de notre exposition régionale.

En 2018, le Petit Vert n°135 a relaté la mise en œuvre d'une activité abordant des coloriages symétriques et non symétriques d'un « Petit L » dessiné aux échelles 4 et 8 et recouvert par des pièces à l'échelle 1. Trois ou quatre couleurs avaient alors été utilisées.

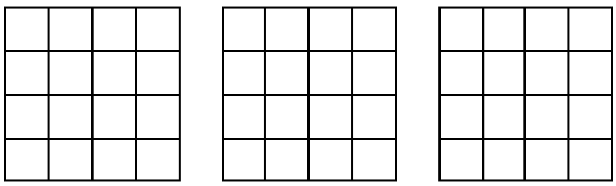
En 2020, lors de l'évènement virtuel « En attendant Bourges », le stand de notre régionale proposait en téléchargement un document étudiant des recouvrements symétriques d'ensembles de (7x7 – 4) carreaux unitaires.



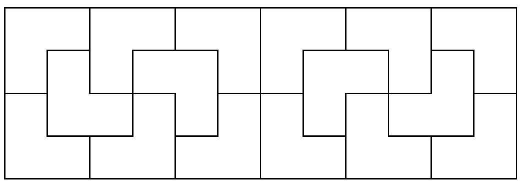
Fin 2020, le jeu **VILLAGEO** a été déposé au pied de certains sapins. Des rectangles 6x8 sont à recouvrir par quatre « Petits L » de quatre couleurs différentes. Chaque couleur de pièce représente un élément de la zone qui va être reconstruite (commerces, maison, lacs et jardins). Les pièces de même couleur ne peuvent pas se toucher, même par un sommet.

En 2021, l'envie est venue de poursuivre la recherche pour des polygones autres que le rectangle 6x8 exploré par les créateurs du jeu.

4x4x3 est égal à 3x(4x4). Une première piste de recherche est le recouvrement de polygones symétriques formés de trois carrés 4x4.

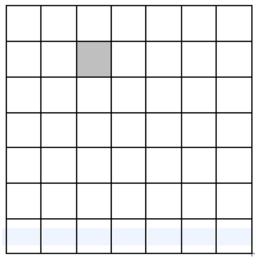


Ce rectangle 4x12 a été obtenu en assemblant les trois carrés 4x4 évoqués précédemment. Son recouvrement par les 3 « Petits L » donne envie d'explorer un jour les assemblages de deux rectangles 4x6.



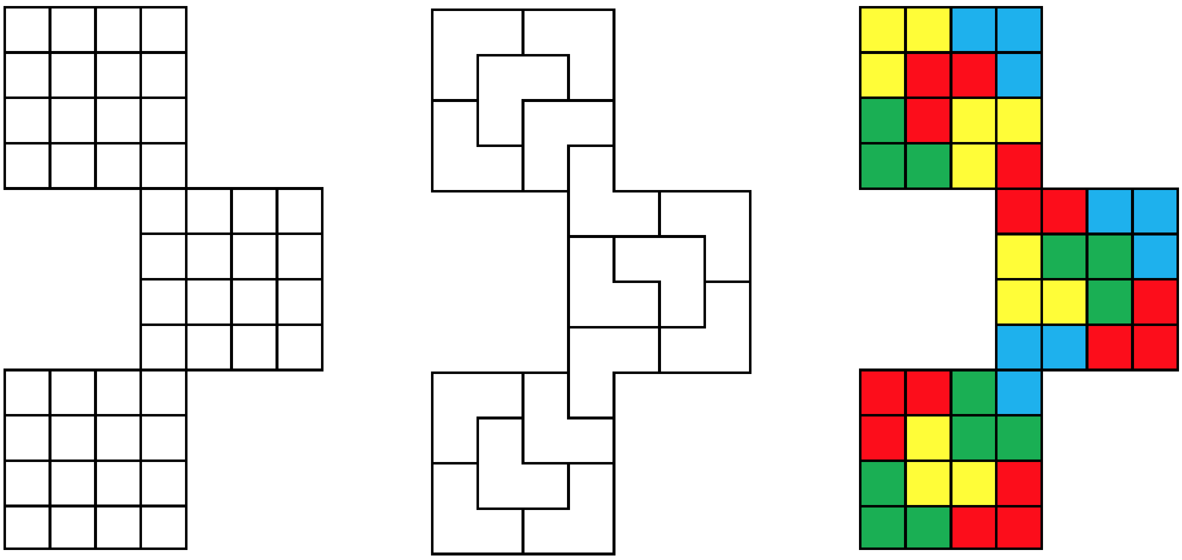
Retour au sommaire

Une deuxième piste de recherche est le recouvrement d'un carré 7x7 dans lequel une des cases a été « noircie » (4x4x3 = 7x7-1). La recherche des positions possibles de cette case (à une isométrie près) pourra être un préalable à la recherche de ces recouvrements.



Une troisième piste est le recouvrement d'un rectangle 5x10 dans lequel deux cases symétriques ont été « noircies » (4x4x3 = 5x10-2). La recherche des positions possibles de ces deux cases (à une isométrie près) pourra être un préalable à la recherche de ces recouvrements.

Le document complémentaire téléchargeable sur notre site présente plusieurs façons d'aborder les recherches, laissant l'utilisateur choisir celle qu'il a envie de mettre en œuvre.
Manipulations des « Petits L » sur un plateau et report éventuel sur papier de ce qui a été trouvé (pages 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 16 et 24, de nombreux plateaux correspondant aux recherches proposées par la suite se sont pas joints dans ce document).
Manipulation des « Petits L » sur la table de jeu et report éventuel sur papier de ce qui a été trouvé
Recherche « papier-crayon » des recouvrements par les « Petits L » puis coloriage des dessins des « Petits L » : c'est ce qui a été fait la plupart du temps lors de l'élaboration du document.
Coloriage des pièces dessinées à l'intérieur des polygones proposés et pour de très jeunes élèves, reproduction des assemblages présentés.



Des dessins laissent des quadrillages apparents en pointillés : ce sont les situations pour lesquelles le recouvrement n'a pas été trouvé.

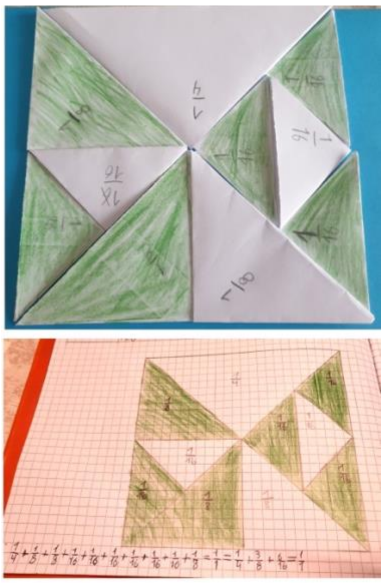
Retour au sommaire

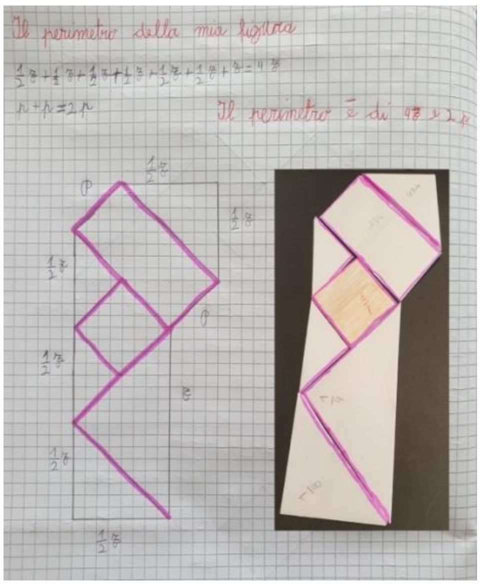
MATHS ET JEUX

UNE UTILISATION DU « CARRÉ DE METZ » EN ITALIE

Gabriella Romano, enseignante en école primaire dans la province de Varese nous a écrit pour nous informer qu'après avoir trouvé une image du puzzle sur la Toile, elle l'avait utilisé pour un travail avec ses élèves. Elle nous a donné l'adresse du site dans lequel nous pouvons retrouver ses expérimentations.

Fin Août, la collègue a présenté ce travail au « XLIV MORIN CENTER SEMINAR » au centre de recherche didactique Hugo Morin à Pieve del Grappa (province de Trévise, région de Vénétie). Le thème de ce séminaire était "*Come ripartire dopo l'esperienza di questi due ultimi anni? Bilanci, prospettive e speranze per l'insegnamento della Matematica*" « Comment repartir après l'expérience de ces deux dernières années ? Bilans, perspectives et espoir pour l'enseignement des mathématiques ».
Des configurations ont été proposées par les élèves. Leur créativité fait toujours plaisir à voir !
Grâce à des pliages, les triangles présents dans le puzzle sont devenus des fractions d'un carré, facilitant la recherche des fractions de ce carré correspondant à la pièce carrée et rectangulaire du Carré de Metz.
Les périmètres des configurations proposées par les élèves ont été exprimées en utilisant deux unités de longueurs différentes. Des sommes de fractions de longueurs sont mises en jeu.





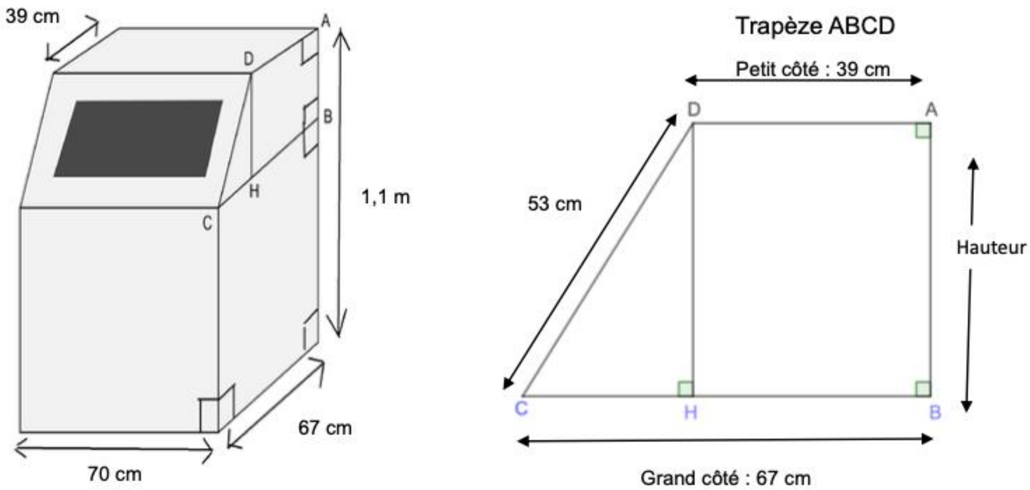
Nous l'avons remerciée de nous avoir transmis l'information de cette utilisation de ce puzzle qui nous rappelle de bien belles choses. Nous lui avons transmis les liens vers la brochure « Le Carré de Metz et le Pavé de Metz », le complément à ce document et le diaporama utilisé lors d'un atelier des journées de Metz organisées en 2012.
Cela fait toujours plaisir de constater que des ressources de notre régionale circulent, sont utilisées, et que des collègues pensent à nous signaler ce qu'ils ont fait.

Retour au sommaire

MATHS ET MEDIAS

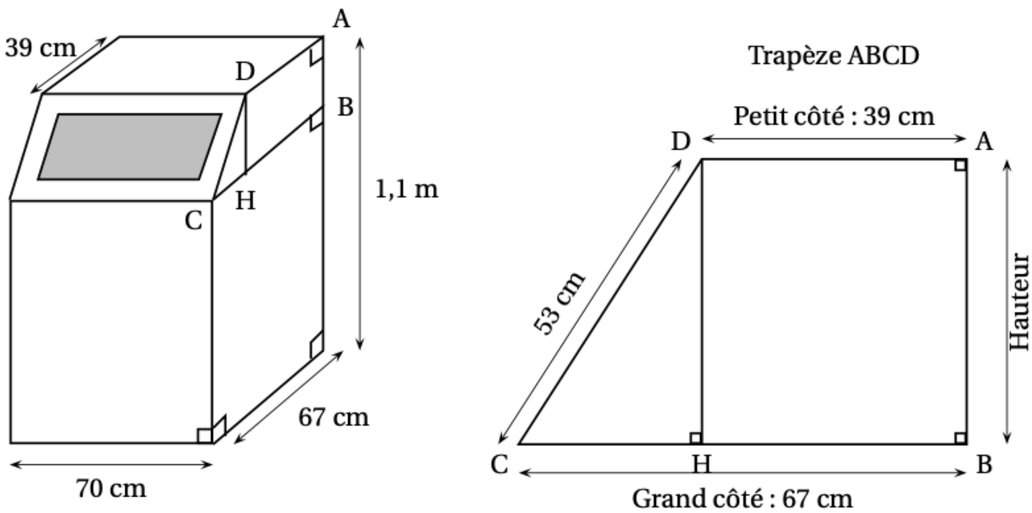
DESSIN D'UN COMPOSTEUR

Le 29 juin, le Café Pédagogique nous incitait à prendre connaissance des sujets de mathématiques proposés pour l'obtention du Diplôme National de Brevet. Dans celui de la série générale, les dessins proposés pour l'exercice 5 présentent des aspects un peu étonnants.



Les flèches indiquant les longueurs sont rarement bien positionnées. Celle indiquant la hauteur (dessin de droite) n'est pas parallèle au côté [AB] et sa longueur n'est pas égale à la longueur AB.
Dans le dessin de droite, les dessins des extrémités des flèches et des codages d'angle droit ont été sans doute faits avec la partie dessin d'une suite bureautique. Il est certain qu'on peut faire mieux en utilisant un logiciel professionnel pour les dessins. Voici une idée d'investissement pour l'Éducation Nationale.

Sur le site de l'APMEP, l'énoncé est téléchargeable avec des dessins nettement plus satisfaisants. Le monde associatif montre là ses compétences…



Remarque
On ne sait pas trop comment ce composteur pourra être vidé : cet aspect ne sera pas à négliger avant notre choix et cette question sera à poser en classe.

Retour au sommaire

MATHS ET VIE COURANTE

DES CARRÉS POTAGERS

Pendant les temps de confinement des envies de jardiner sont apparues. Un carré potager est vite posé, dans le jardin ou sur une terrasse. Un magasin de bricolage en proposait quelques-uns qui nous ont donné envie de continuer à défendre l'enseignement de la géométrie et des caractérisations des quadrilatères.

Après quelques heures de jardinage, nous avons mérité un petit goûter : un peu de pain et un morceau de Carré de l'Est, savoureux fromage qui n'est pas un carré…

Retour au sommaire

MATHS ET PHILO

LES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES TRAVAILLENT-ILS VRAIMENT ?

Didier Lambois

Nous nous laissons souvent prendre par des titres d'articles qui nous interpellent, des titres provocateurs, et c'est peut-être pour cette raison que vous lisez ce texte. La question a en effet de quoi surprendre, elle semble quelque peu incongrue, et elle pourrait tout aussi bien être posée à celui qui écrit ce texte : travaille-t-il vraiment ? D'une manière plus générale la question qui pourrait être posée est de savoir si le « travail intellectuel » est réellement un travail. Ce questionnement n'est pas sans intérêt car il peut nous éclairer sur la vraie nature du travail, sur son importance et sur sa nécessité. Nous qui demandons sans cesse à nos élèves de travailler davantage, que leur demandons-nous vraiment ?

Si la question du travail intellectuel peut être posée c'est parce que la tradition philosophique grecque a conduit à penser, pendant des siècles, que le travail était indigne de l'homme, et qu'il fallait le réserver aux esclaves.

« On ne doit pas reconnaître forcément la qualité de citoyen à tous ceux qui sont indispensables à l'existence de l'État. Certes, aux temps anciens et chez certains peuples, les gens de métier étaient des esclaves ou des étrangers, ce qui explique que la plupart des travailleurs manuels le sont encore à présent ; mais l'État idéal se gardera de faire d'un homme de métier un citoyen. De tous ceux qui se livrent aux travaux indispensables à l'existence, les uns rendent des services de ce genre à un particulier, et sont des esclaves, les autres, qui sont au service de la communauté, sont des ouvriers et des hommes de peine. Il n'est pas possible de se livrer à la pratique de la vertu quand on mène une vie d'ouvrier ou d'homme de peine ».

ARISTOTE (384-322 AV. J.-C.) *Politique,* III, 5.

Il est bien évident, pour Aristote, que l'activité à laquelle il se livrait n'était pas un travail ! Ce n'était pas digne de lui. Le travail est une punition[1], une peine, qu'il faut laisser à ceux qui méritent d'être punis : les faibles. La « pratique de la vertu », comme le dit Aristote, n'est possible que pour ceux qui ne travaillent pas, et au XVIIème siècle Pascal considérait encore le travail comme un « divertissement » qui nous détourne de la vraie vie et des vraies valeurs. Voilà pourquoi la noblesse et le clergé ont laissé pendant très longtemps les paysans travailler pour eux. Pour l'aristocrate, ce serait déchoir que de travailler.

Mais nous comprenons bien que nous ne parlons ici que du travail manuel, et c'est ce travail qui serait dégradant pour l'homme. Cette perception négative du travail manuel est d'ailleurs, hélas, encore bien présente dans nos mentalités actuelles. Quand bien même saint Benoit[2], au VIème siècle, cherche à faire du travail un devoir divin, cela reste encore une punition, le dur labeur, un travail de bénédictin qu'il vaut mieux fuir si nous en avons les moyens.

Le travail ne devient une valeur, au sens moral du terme[3], qu'à partir du moment où Adam Smith montre que le travail crée de la valeur, au sens économique du terme. Adam Smith (1723-1790), qui est considéré avec raison comme le père de l'économie moderne, montre que c'est l'organisation et la division du travail qui peuvent créer de la richesse.

---

1 C'est ainsi que le travail est présenté dans la mythologie chrétienne : « Tu gagneras ton pain à la sueur de ton front ».

2 On attribue à Benoît de Nursie (480-547), fondateur de l'ordre des bénédictins, la fameuse formule « *ora et labora* », prie et travaille (cette formule n'apparaît en réalité qu'au XIXème siècle).

3 La valeur c'est ce qui vaut, ce qui a du prix, ce qui est précieux, estimable, désirable.

Retour au sommaire

Karl Marx (1818-1883) ira un peu plus loin en précisant que c'est l'exploitation du travail qui produit réellement de la plus-value.

Dans notre système capitaliste, le travail est devenu une marchandise que l'on peut acheter (si on en a les moyens), il a une valeur marchande et son prix varie selon les lois du marché ; mais c'est une marchandise, une valeur, qui a cette particularité de pouvoir créer de la valeur lorsqu'on l'utilise. Toute la problématique du capitaliste est donc de pouvoir utiliser la force de travail qu'il a achetée suffisamment longtemps pour qu'elle produise plus de valeur que ce qu'elle a coûté. Travailler plus pour gagner plus, c'est ce que souhaite tout patron. Travailler plus et/ou travailler plus efficacement pour gagner du temps, donc de l'argent.

C'est dans ce contexte qu'il faut comprendre la rationalisation de la production, la mécanisation, et tout le « travail » intellectuel que cette quête de l'efficacité et du profit exige. Une nouvelle classe sociale voit le jour : les cols blancs. Ces derniers vont être chargés de penser, d'organiser, de contrôler le travail de ceux qui restent les mains dans le cambouis : les cols bleus[4].
Nous le voyons, les cols blancs ont un rôle à jouer, un rôle important dans la sphère économique, c'est indéniable. Si leur statut social est souvent enviable c'est non seulement parce que leur activité semble moins pénible, mais aussi parce qu'ils vont être mieux rémunérés pour la seule raison que la force de « travail » qu'ils proposent sur le marché du travail est plus rare, donc plus précieuse.
Mais nous revenons là à notre question initiale : pouvons-nous dire qu'il s'agit véritablement d'un travail ?

L'étymologie semble pouvoir répondre avec évidence à cette question.

** Le Larousse 1996 définit ainsi le travail :*

« Travail (bas lat. trepalium, machine faite de trois pieux, de trepaliare, torturer) [pl. travails]. Appareil servant à maintenir les grands animaux domestiques pendant qu'on les ferre ou qu'on les soigne » (voir photo ci-contre).

Si le mot « travail » (travailler) s'est substitué, à partir du XVIème siècle, au mot « labeur » (labourer)[5], il en a gardé principalement l'idée de souffrance. Le mot « travail » viendrait du latin *tripalium* qui désignait un chevalet formé de trois pieux qui servait à immobiliser les animaux rétifs, chez le maréchal-ferrant. Cet appareil étant aussi utilisé comme instrument de torture, le verbe *tripaliare* signifiait « tourmenter », « torturer », et il est vrai qu'une idée qui nous travaille nous torture. Aussi celui qui se torture les méninges à faire des mathématiques doit être considéré comme un travailleur, et celui qui ferait cela par plaisir ne serait qu'un pervers masochiste…
Non. Quand bien même cette étymologie est séduisante et convainc ceux qui refusent de travailler, elle peut être discutée et remise en cause. De grands linguistes n'hésitent pas à le faire et proposent d'expliquer la formation du mot « travail » à partir du latin *trabs*, la poutre. Ce terme désignait d'abord la poutre maitresse de la maison mais a ensuite généré l'idée

4 « *Il existe deux types de travail : le premier consiste à déplacer une certaine quantité de matière se trouvant à la surface de la terre, ou dans le sol même ; le second, à dire à quelqu'un d'autre de le faire. Le premier type de travail est désagréable et mal payé ; le second est agréable et très bien payé* » dit Bertrand RUSSELL.
5 Le mot latin *labor* désignait en même temps le travail et la souffrance.

Retour au sommaire

d'entrave. Certes, nous entravons les chevaux pour les ferrer, nous les immobilisons, mais l'idée de torture disparait pour laisser place à l'idée d'obstacle, de limite, et s'il y a souffrance c'est uniquement celle de ne plus pouvoir se mouvoir, de ne plus pouvoir progresser. Émile Littré, grand linguiste du XIXème siècle, fut le premier à suggérer ce nouvel étymon ; depuis, les recherches se sont multipliées[6] et elles conduisent à penser le travail comme une confrontation à l'obstacle. Nous préférons de beaucoup cette interprétation étymologique, et si nous précisons la nature de l'obstacle nous redonnons au travail toute sa noblesse.
Nous pouvons dire qu'il y a travail lorsque nous faisons un effort pour surmonter tout ce qui fait obstacle à l'humanité. De l'agriculteur qui cherche à cultiver, donc à humaniser la nature, à l'enseignant qui veut cultiver et conduire l'enfant à s'humaniser, en passant par le boulanger qui nourrit l'humanité, le philosophe qui veut définir l'humain et le mathématicien qui lui apporte la droiture de la raison, tous ces gens travaillent à servir l'humanité et à dépasser l'animalité. Tout effort pour vaincre l'animalité et la bêtise est un travail. Un travail qui nous déshumaniserait, et dans nos sociétés capitalistes il en existe peut-être, ne serait qu'une forme moderne de l'esclavage, ce ne serait plus un travail, ce serait une violence qu'il faudrait combattre.
Les professeurs travaillent, non parce qu'ils souffrent (cela peut arriver, parfois même à distance), non pas seulement parce qu'ils ont une fonction sociale reconnue (plus ou moins), mais parce que leurs efforts ont pour finalité d'humaniser, et lorsqu'ils demandent à leurs élèves de travailler ils ne leur demandent pas de souffrir (ce serait du sadisme), ils leur demandent un pas de plus vers l'humanité[7].

Tout travail travaille à faire un homme en même temps qu'une chose.

MOUNIER (1905 - 1950)

Si les travailleurs intellectuels cherchent souvent à revaloriser le travail manuel, ils ont raison, mais il faudra qu'un jour les travailleurs manuels cessent de regarder ceux qui ne font rien de leurs mains comme des privilégiés qui ne travaillent pas vraiment.

Cette présentation du travail reste bien sûr très et trop schématique. En réalité tout travail soucieux d'efficacité exige un effort intellectuel, et peut-être même une formation mathématique. C'est ce que proposera de montrer la nouvelle rubrique de notre revue du Petit Vert : Maths et métiers.

TRAVAIL. *Occupation journalière à laquelle l'homme est condamné par son besoin, et à laquelle il doit en même temps sa santé, sa subsistance, sa sérénité, son bon sens et sa vertu peut-être.*

Encyclopédie de Diderot et d'Alembert

---

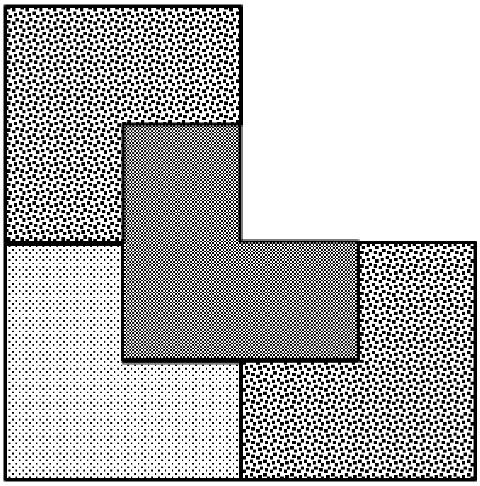
6 Vous pouvez lire l'impressionnant travail d'André Eskénazi dans la revue *Romania*, ou la recherche de Marie-France Delport dans son *étude lexico-syntaxique sur le mot espagnol trabajo,* ou le blog de Frank Lebas qui résume « *L'arnaque de l'étymologie du mot travail* ».
7 Nous reviendrons ultérieurement sur l'humanisation par le travail en abordant la question de la dialectique.

Retour au sommaire

DES DÉFIS POUR NOS ÉLÈVES

DÉFI N°147 : « LE COÛT D’UNE CONSTRUCTION »

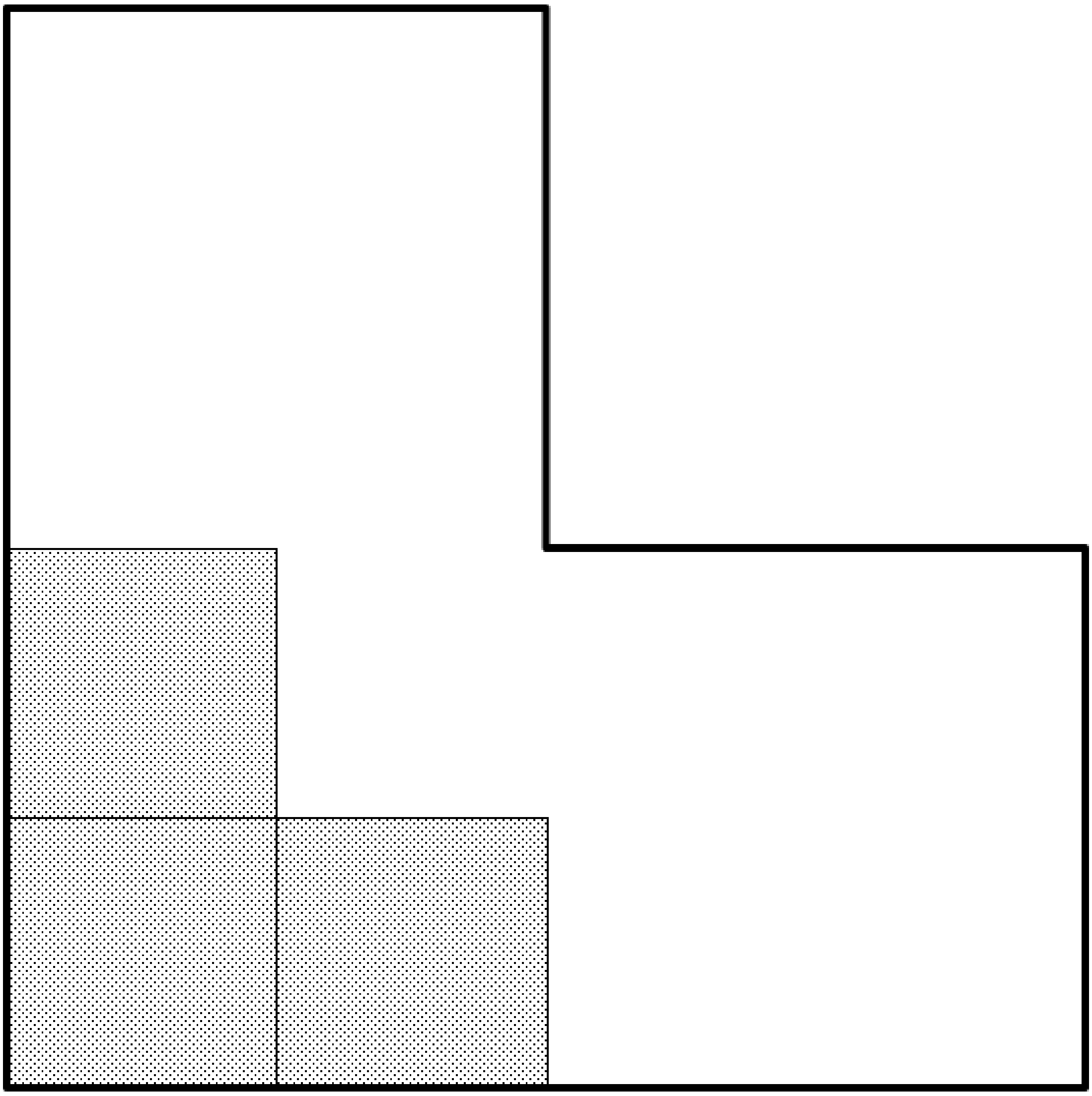
La figure ci-contre représente un assemblage de quatre « Petits L ».
Complète la figure commencée ci-dessous pour reproduire l’assemblage.



Coût des instruments

Règle non graduée	Gratuite
Règle graduée	10 €
Compas	5 €
Gabarit d’angle droit	2 €

Quel sera le coût de ta construction ?



Retour au sommaire

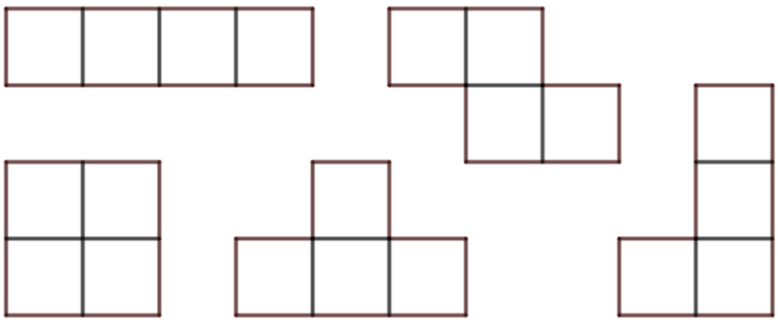
DÉFI ALGORITHMIQUE N° 147

Certaines énigmes du rallye mathématique de Lorraine auraient certainement été plus simples à résoudre à l'aide d'un petit programme informatique.
Nous vous proposons ici, comme défi, de résoudre l'exercice ci-dessous à l'aide d'un programme. L'exercice suivant avait été proposé en 2012.

Le commissaire Girard pose cette énigme à sa petite fille :
« Dans mon chapeau, j'ai mis des petits papiers. Sur chaque petit papier est écrit un des nombres entiers de 0 à 2012. Je me fais vieux, mais j'ai bien pris garde que tous les nombres entiers de 0 à 2012 soient écrits et que chacun d'entre eux ne soit écrit qu'une seule fois…
Je ferme les yeux et, abracadabra, je tire un papier de mon chapeau.
Quelle est la probabilité que le nombre inscrit soit le carré d'un nombre entier ? »

On demande d'écrire une fonction girard(N) qui, pour un entier N donné, renvoie la probabilité d'obtenir un carré parfait en choisissant, au hasard, un entier entre 0 et N.

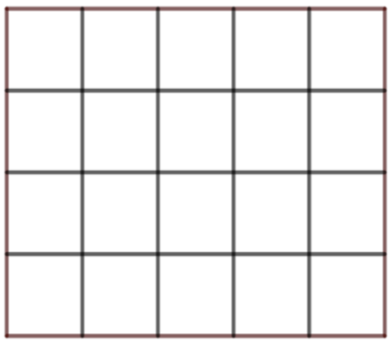
ÉNONCÉ ET PROLONGEMENTS DU DÉFI 146 -1
LES CINQ TÉTRAMINOS (d'après Martin Gardner)



Est-il possible de les assembler pour recouvrir le rectangle 4 × 5 ci-dessous ?

Si oui, faites une figure
et si non, démontrez-le.

NB : Les pièces sont retournables.

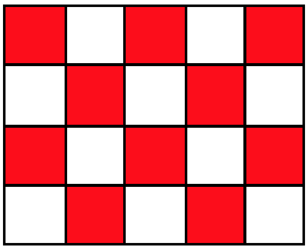


Prolongement 1 : on propose d'utiliser deux pièces de chaque sorte de tétraminos pour un rectangle deux fois plus vaste, c'est-à-dire ayant une aire de 40 carreaux (plusieurs rectangles ont cette aire).

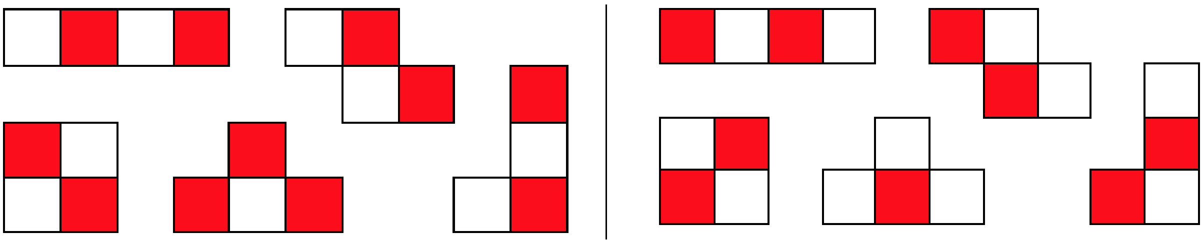
Prolongement 2 : Avec les pièces du jeu TETRIS (**pièces non retournables**), est-il possible de recouvrir un rectangle 7x4 ? Et avec deux exemplaires de chaque pièce, est-il possible de recouvrir un rectangle 7x8 ?

Retour au sommaire

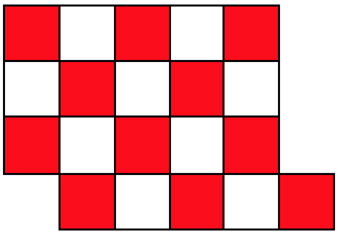
SOLUTION DÉFI 146 -1- LES CINQ TÉTRAMINOS

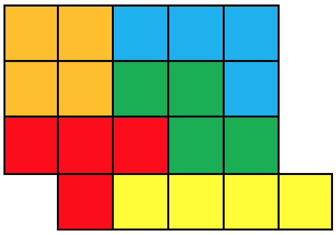


Dans le rectangle, il y a autant de cases rouges que de cases blanches.



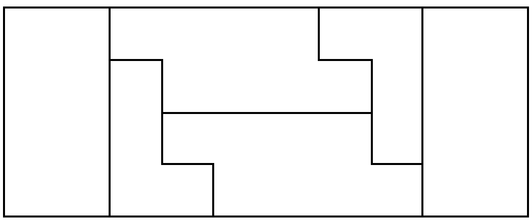
Dans les pièces, nous ne réussirons pas avoir pas à avoir autant de cases rouges que de cases blanches, le recouvrement du rectangle ne sera pas possible.
Arnaud Gazagnes nous signale avoir déposé l'an passé sur le site de l'académie de Lyon une telle solution à ce défi. Pour aller plus loin, il propose de déplacer d'une case une ligne du rectangle 4x5 pour obtenir un polygone pouvant être recouvert par les cinq pièces.

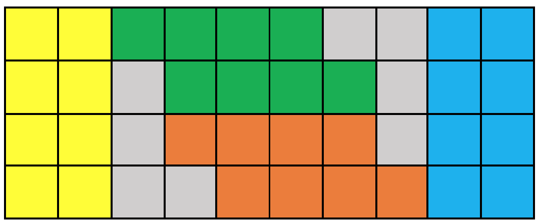


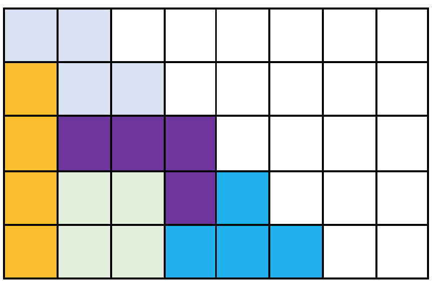


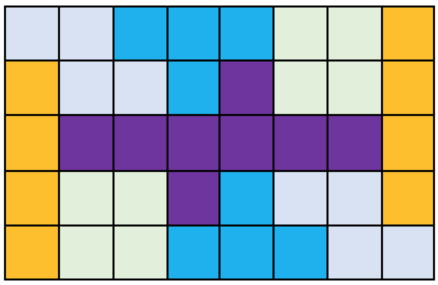
Voici de plus une ouverture vers les tuiles de pavage.

Arnaud propose lui aussi d'utiliser deux pièces de chaque sorte pour réaliser un rectangle deux fois plus vaste.
La symétrie centrale est présente dans des propositions de joueurs de la régionale.



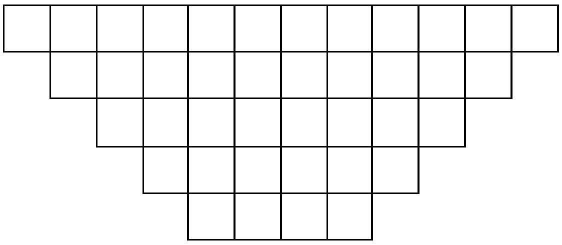


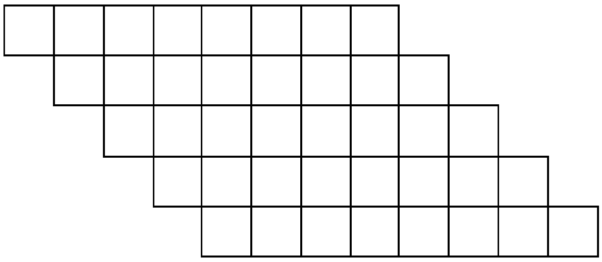




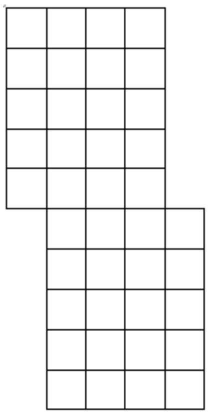
Retour au sommaire

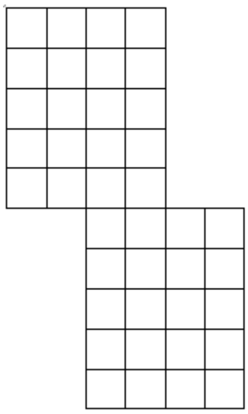
Dans le recouvrement précédent, des assemblages symétriques des deux ensembles de cinq pièces fournissent des polygones recouvrables par les 10 pièces. Nous pourrons nous intéresser à l'existence de recouvrement non symétriques de ces formes.

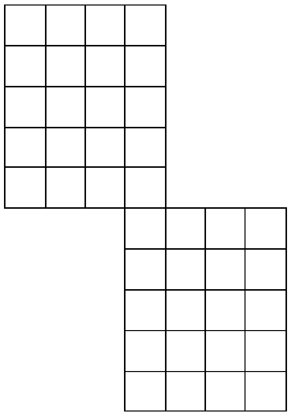


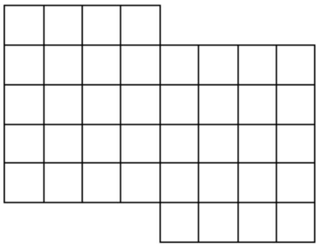


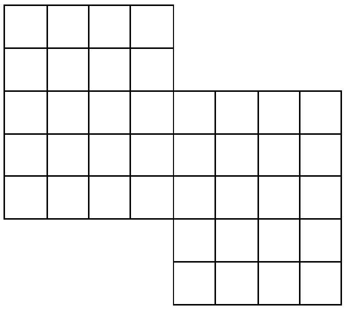
Les rectangles 4x10 et 8x5 correspondent à des assemblages de deux rectangles 4x5 à l'aide d'une symétrie axiale. Ces deux rectangles peuvent aussi être assemblés à l'aide d'une symétrie centrale.

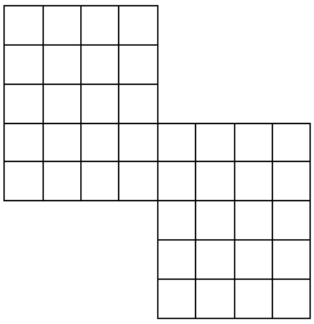


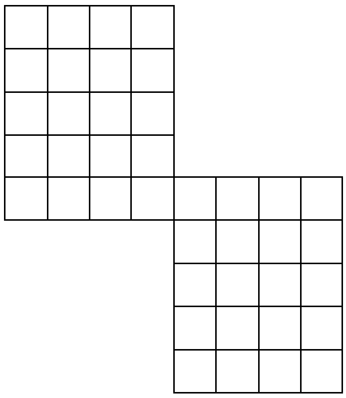










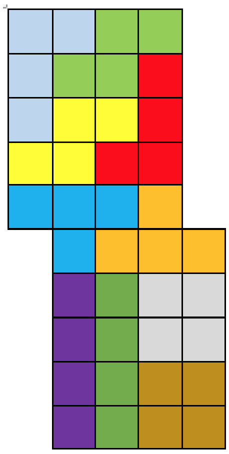


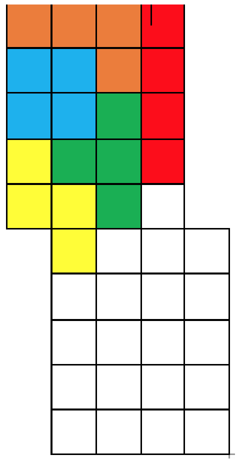
Retour au sommaire

Voici de quoi imaginer de nouvelles tuiles de pavage.

Ce n’est que le début de la recherche…

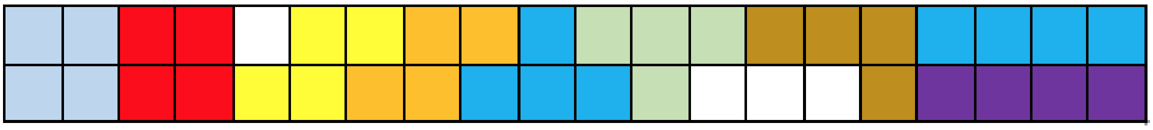
Plusieurs méthodes sont envisagées.



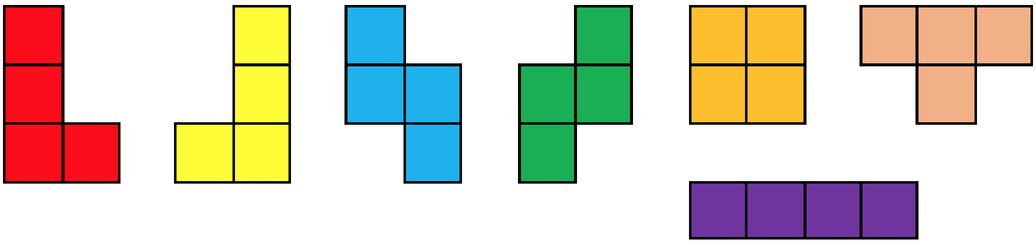


Compléments concernant les rectangles envisagés avec les deux ensembles de cinq tétraminos

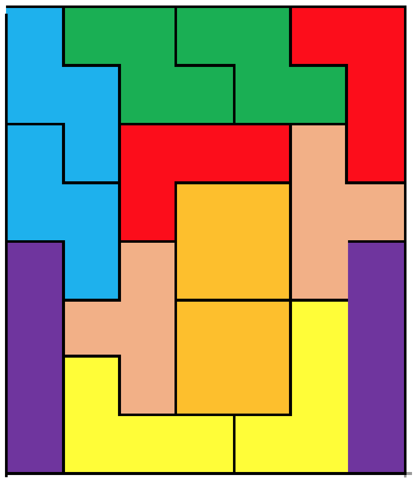
L’observation des pièces nous persuade de l’impossibilité du rectangle 1x40.
Après quelques manipulations, nous pouvons nous convaincre de l’impossibilité du rectangle 2x20.



Avec les pièces du jeu TETRIS (les pièces ne sont pas retournables)



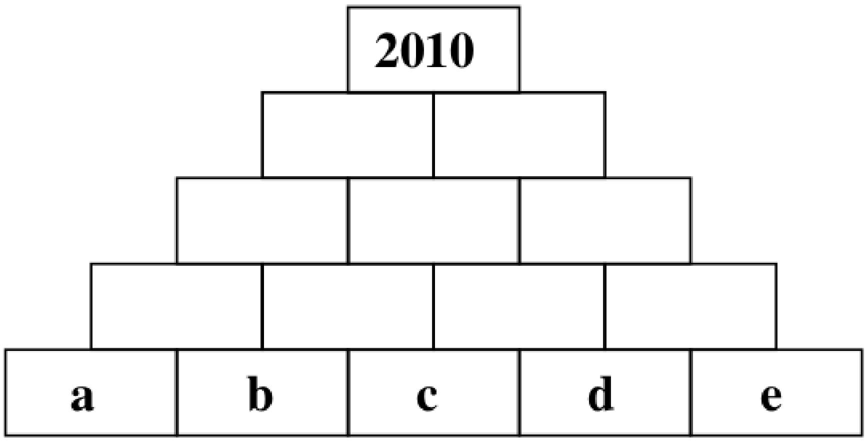
Ce qui a été imaginé avec les cinq tétraminos est transférable aux sept pièces du jeu TETRIS. Il est impossible de recouvrir un rectangle 7x4, mais avec deux exemplaires de chaque pièce, il est possible de recouvrir entre autres un rectangle 7x8.



Retour au sommaire

SOLUTION ALGO-RALLYE 146

Le défi algorithmique du PV 146 reprenait l'exercice 1 du Rallye 2010 et demandait de compléter la pyramide additive ci-dessous en donnant les valeurs des entiers strictement positifs a, b, c, d et e tous différents, avec a le plus grand possible.



L'algorithme de la fonction proposé ici est une imbrication de cinq boucles et ce n'est guère efficient. Le nombre au sommet de la pyramide est $a + 4b + 6c + 4d + e$; pour rendre a le plus grand possible, il faut minimiser b, c et d en priorité. Ainsi, la dernière boucle commence-t-elle à N.

Pseudo-code

```
Fonction mur(N : entier ; a, b, c,d ,e : entiers)
    pour c allant de 1 à N, faire :
        pour b allant de c+1 à N, faire :
            pour d allant de b+1 à N, faire :
                pour e allant de d+1 à N, faire :
                    pour a allant de N à e+1, faire :
                        si a+4b+6c+4d+e=N, alors :
                            renvoyer a,b,c,d,e ;
                        finSi ;
                    finPour ;
                finPour ;
            finPour ;
        finPour ;
    finPour ;
```

Python

```
def mur(N) :
    """
    N : entier
    renvoie les entiers a,b,c,d et e tels que a+4b+6c+4d+e=N,
    """
    for c in range(1,N+1) :
        for b in range (c+1,N+1) :
            for d in range(b+1,N+1) :
                for e in range(d+1,N+1) :
                    for a in range(N,b+1,-1) :
                        if a+4*b+6*c+4*d+e==N :
                            return a,b,c,d,e
```

Retour au sommaire

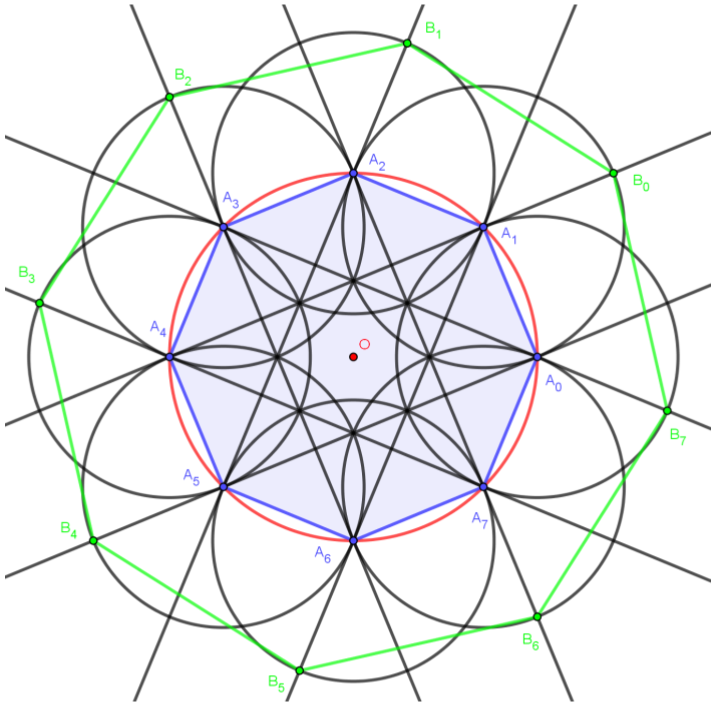
SOLUTIONS DÉFI POUR NOS COLLÈGUES N°146 « OCTOGONES »

La triplication de l'octogone régulier

Étant donné un octogone régulier, comment construire un octogone régulier d'aire triple ?
La figure ci-contre donne une méthode de construction de la "triplication" d'un octogone régulier à la règle et au compas.

La justification de cette construction avait été proposée comme défi dans le Petit Vert n°146. **Fabrice Laurent** nous en propose une que vous trouverez à la fin de cet article.

Dans ce qui suit, nous allons vous présenter d'autres démarches utilisant, pour la première, des notions enseignées au niveau collège et pour les deux dernières, les nombres complexes.



1ère démarche

On note *a* la longueur du côté de l'octogone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.
La couronne délimitée par les deux octogones est constituée de huit quadrilatères identiques à $A_1A_2B_1B_0$.
Ce quadrilatère est lui-même constitué des triangles $A_1A_2B_1$ et $A_1B_1B_0$ rectangles respectivement en A_2 et en A_1.
En effet, par construction, $A_1A_2B_1$ est rectangle et isocèle en A_2. Il en résulte que $\widehat{A_2A_1B_1} = 45°$
Par ailleurs, comme $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ est un octogone régulier, on peut aisément établir que $\widehat{A_2A_1A_4} = 45°$.
On peut donc en déduire que $\widehat{B_0A_1B_1} = 90°$.

L'application du théorème de Pythagore dans le triangle $A_1A_2B_1$ rectangle et isocèle en A_2, puis dans le triangle $A_1B_1B_0$ rectangle en A_1, permet d'obtenir : $A_1B_1 = a\sqrt{2}$ et $B_0B_1 = a\sqrt{3}$.

D'autre part, sachant que la somme des angles du quadrilatère non croisé $A_1A_2B_1B_0$ vaut 360°, que $\widehat{A_1A_2B_1} = 90°$ et que $\widehat{A_2A_1B_0} = 135°$, on a $\widehat{A_2B_1B_0} + \widehat{A_1B_0B_1} = 135°$.
Et puisque les quadrilatères $A_1A_2B_1B_0$ et $A_2A_3B_2B_1$ sont superposables, les angles $\widehat{A_1B_0B_1}$ et $\widehat{A_2B_1B_2}$ ont la même mesure.
Ainsi, $\widehat{B_2B_1B_0} = \widehat{A_2B_1B_0} + \widehat{A_2B_1B_2} = 135°$.

Retour au sommaire

En appliquant ce raisonnement aux sept autres quadrilatères constituant la couronne définie plus haut, on peut conclure que les angles internes de l'octogone $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ mesurent 135° et que ses côtés ont la même longueur valant $a\sqrt{3}$.
Il en découle que $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ est bien un octogone régulier et un agrandissement de $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ dans le rapport $\sqrt{3}$.

Pour les deux démarches suivantes, on se place dans le plan complexe et on se ramène au cas où $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ est un octogone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique de sorte que les affixes de ses sommets soient les racines huitièmes de l'unité.
Ainsi, pour tout entier $k \in [\![0\,;7]\!]$, le point A_k a pour affixe $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{8}} = e^{i\frac{k\pi}{4}}$.
Enfin, on note ω_k l'affixe des points B_k sommets de l'octogone $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ pour $k \in [\![0\,;7]\!]$.

2ème démarche

Par construction, B_k est l'image de A_k par la rotation de centre A_{k+1} et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour tout $k \in [\![0\,;6]\!]$ et B_7 l'image de A_7 par la rotation de centre A_0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
D'où :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], \omega_k = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_k - z_{k+1}) + z_{k+1} \; et \; \omega_7 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_7 - z_0) + z_0$

Or, $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ est un octogone régulier, donc pour tout entier $k \in [\![0\,;6]\!]$, le point A_{k+1} est l'image de A_k par la rotation de centre O (point d'affixe 0) et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et A_0 est l'image de A_7 par cette même rotation.
Il s'en suit que :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], z_{k+1} = e^{i\frac{\pi}{4}}z_k \; et \; z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}z_7$

Il en résulte que :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], \omega_k = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_k - e^{i\frac{\pi}{4}}z_k\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}z_k \; et \; \omega_7 = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z_7 - e^{i\frac{\pi}{4}}z_7\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}z_7$
Ou encore :
$\forall\, k \in [\![0\,;7]\!], \omega_k = [e^{i\frac{\pi}{2}}\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + e^{i\frac{\pi}{4}}]z_k = \; e^{i\frac{\pi}{4}}[e^{i\frac{\pi}{4}}\left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) + 1]z_k = (\sqrt{2} + i)z_k$

On en déduit que :
$\forall\, k \in [\![0\,;6]\!], \omega_{k+1} = (\sqrt{2} + i)z_{k+1} = (\sqrt{2} + i)e^{i\frac{\pi}{4}}z_k = e^{i\frac{\pi}{4}}\omega_k \; et \; \omega_0 = (\sqrt{2} + i)z_0 = (\sqrt{2} + i)e^{i\frac{\pi}{4}}z_7 = e^{i\frac{\pi}{4}}\omega_7$
Et par conséquent, $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ est un octogone régulier.

Il reste à établir que la longueur de son côté est $\sqrt{3}$ fois celle du côté de l'octogone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.
Pour ce faire, il suffit de déterminer le module de $\omega_1 - \omega_0$.
$|\omega_1 - \omega_0| = |(\sqrt{2} + i)(z_1 - z_0)| = |\sqrt{2} + i||z_1 - z_0| = \sqrt{3}|z_1 - z_0|$
Ainsi, on a bien : $B_1B_0 = \sqrt{3}A_1A_0$.

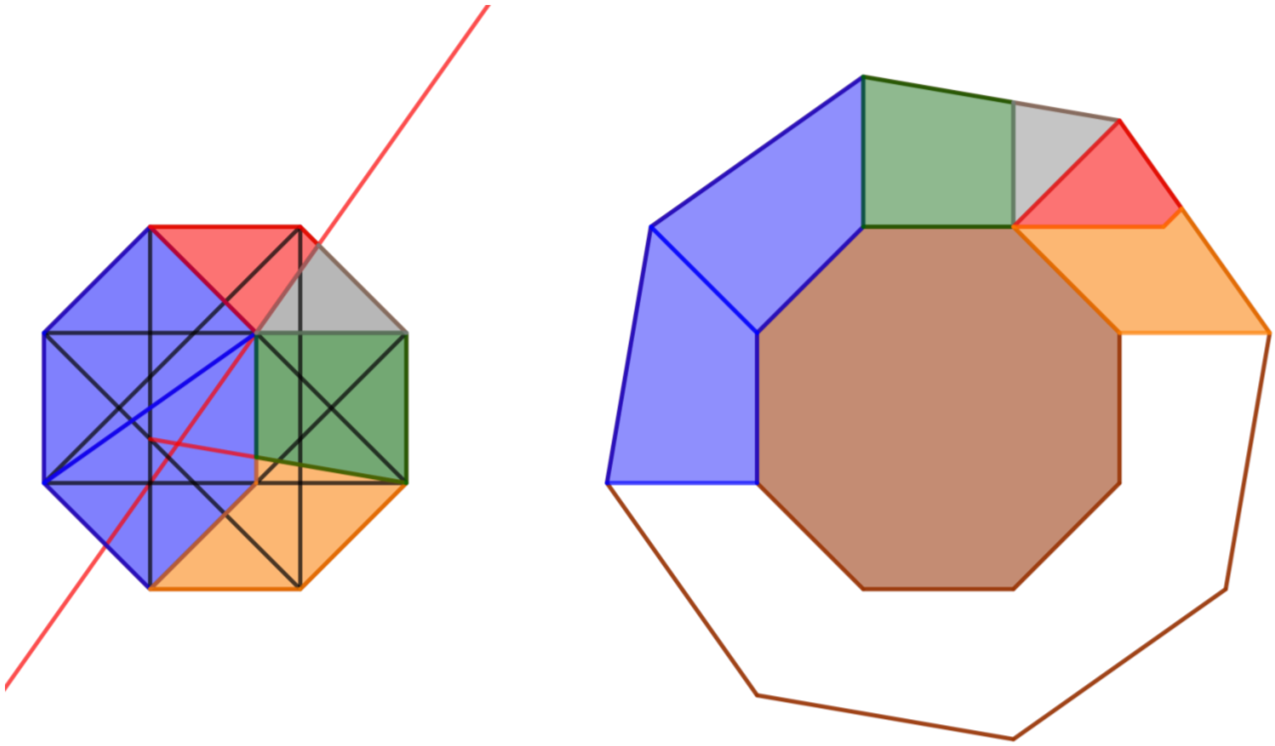
3ème démarche

Il a été établi précédemment que : $\forall\, k \in [\![0\,;7]\!], \omega_k = (\sqrt{2} + i)z_k$
Ce qui signifie que pout tout entier $k \in [\![0\,;7]\!]$, B_k est l'image de A_k par la similitude directe de centre O, d'angle l'argument de $\sqrt{2} + i$ et de rapport $|\sqrt{2} + i| = \sqrt{3}$.

Retour au sommaire

On peut donc conclure que $B_0B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$ est bien un octogone régulier et un agrandissement de $A_0A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ dans le rapport $\sqrt{3}$.

Pour finir, nous offrons aux lecteurs du Petit Vert le découpage ci-dessous permettant d'obtenir un octogone régulier à partir de trois octogones réguliers identiques dont un est laissé en un seul morceau.



Solution proposée par Fabrice Laurent

Voici une solution analytique pour le problème des deux octogones.

On place le centre O du petit octogone à l'origine d'un repère orthonormé, et cet octogone est inscrit dans un cercle de rayon 1.

Tout d'abord, on peut montrer que la longueur du côté du petit octogone est $c = \sqrt{2-\sqrt{2}}$.

Dans ce repère, les coordonnées des points A et B sont :

$$x_A = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

$$y_A = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$x_B = \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$y_B = \sin\frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Le point A' est à l'intersection de la droite (AD) et du cercle de centre A et de rayon c.
Le point B' est à l'intersection de la droite (BE) et du cercle de centre B et de rayon c.

Retour au sommaire

On en déduit que les coordonnées des points A' et B' sont :

$x_{A'} = x_A + c$ $\quad\quad$ $x_{B'} = x_B + \frac{c}{\sqrt{2}}$

$y_{A'} = y_A$ $\quad\quad$ $y_{B'} = y_B + \frac{c}{\sqrt{2}}$

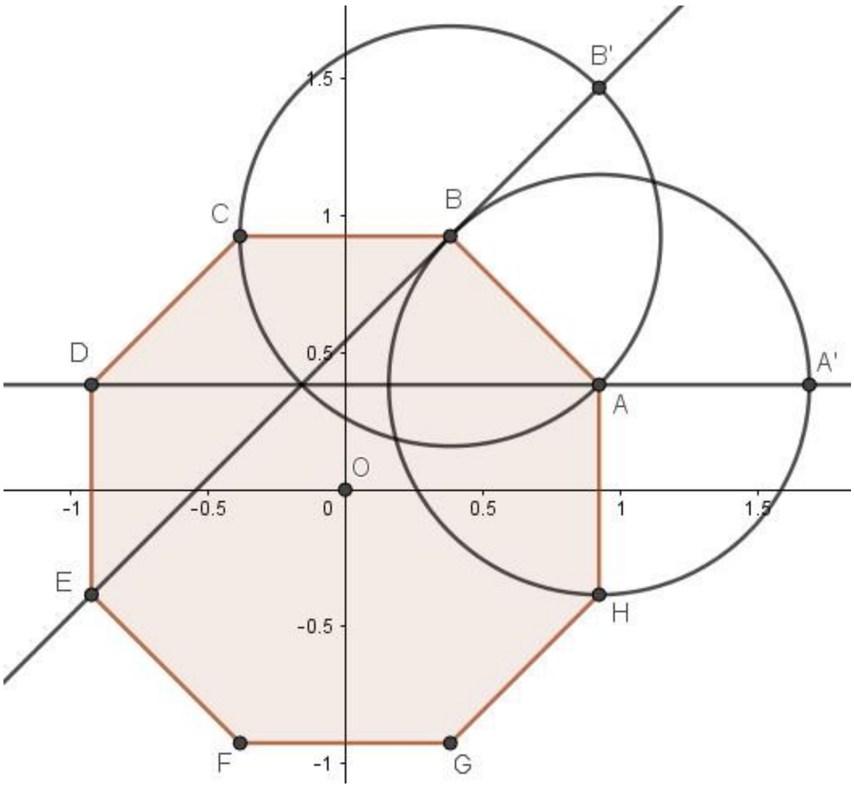
Après quelques calculs, on trouve :

$OA' = \sqrt{x_{A'}^2 + y_{A'}^2} = \sqrt{3}$ et $OB' = \sqrt{x_{B'}^2 + y_{B'}^2} = \sqrt{3}$

Pour des raisons de symétrie, on en déduit que :
- les autres points du grand octogone sont aussi sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$;
- les longueurs des côtés du grand octogone sont toutes égales.

Ceci prouve que le grand octogone est régulier.

Le rapport de longueurs entre le grand octogone et le petit octogone est de $\sqrt{3}$, donc le rapport d'aires est bien de 3.



PROBLÈME N°147

proposé par Philippe FÉVOTTE

Soient x, y, z trois nombres strictement positifs tels que $x + y + z = 1$.
Proposer plusieurs méthodes de résolution de l'équation (E) : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$

SOLUTION DU PROBLÈME N°146

proposé par Fabien LOMBARD

Énoncé :
On considère un livre de n pages, numérotées 1, 2, 3…, 10, 11, … et on note u_n le nombre de caractères utilisés pour la pagination. Ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = 2$,…. $u_{10} = 11$, $u_{11} = 13$…

1) Donner une expression explicite de u_n.
2) On écrit les nombres utilisés dans la pagination à la suite les uns des autres : 1234…101112…
   a) Quel est le 365ième chiffre écrit ? Sur quelle page se trouve-t-il ?
   b) Quel serait le 1 000 000ième chiffre écrit ? Sur quelle page se trouverait-t-il ?

Solution :
Une solution a été proposée. Les approches étant en partie différentes, je présenterai les deux solutions, celle de Jacques Choné et celle de l'auteur Fabien Lombard.

1) On remarque que $n \in \langle 1,2, \ldots 9 \rangle$ on a $u_n = n.$.

Dans un premier temps, on étudie un cas particulier, par exemple u_{2021}. Il y a 9 caractères pour les pages de 1 à 9, puis 90×2 caractères pour les pages 10 à 99, il y en a 900×3 pour les pages de 100 à 999, et enfin $(2021 - 999) \times 4$ pour les pages 1000 à 2021.
Donc $u_{2021} = 9 + 90 \times 2 + 900 \times 3 + (2021 - 999) \times 4 = 6977$.
On va généraliser en introduisant pour tout entier n le nombre $m(n)$ de chiffres du nombre n.
On a $m(n) = E(\log(n)) + 1$ où $\log(n)$ désigne le logarithme décimal de n.
On obtient alors $u_n = \left(\sum_{k=1}^{m(n)-1} 9 \times 10^{k-1} k\right) + \left(n - (10^{m(n)-1} - 1)\right) m(n)$.
Or $\sum_{k=1}^{p} k x^{k-1} = \frac{p x^{p+1} - (p+1) x^p + 1}{(1-x)^2}$ (obtenu en dérivant $\sum_{k=0}^{p} x^k = \frac{1 - x^{p+1}}{1-x}$)
On obtient alors $u_n = \frac{1}{9}\left((m(n) - 1)10^{m(n)} - m(n)10^{m(n)-1} + 1\right) + \left(n - (10^{m(n)-1} - 1)\right) m(n)$.
Soit après réduction $u_n = (n+1)m(n) - \frac{1}{9}\left(10^{m(n)} - 1\right)$
Fabien Lombard obtient le même résultat en utilisant une astuce élégante. Reprenons le cas $n = 2021$. On écrit une colonne de quatre 0 et sur chacune des colonnes de 1 à 2021, on complète les colonnes en précédant les nombres par des 0. Ce qui donne :
0 0 0 … 0 0 0 … 0 0 0 0 … 0 1 1 1 1 … 2 2
0 0 0 … 0 0 0 … 0 1 1 1 … 9 0 0 0 0 … 0 0
0 0 0 … 0 1 1 … 9 0 0 0 … 9 0 0 0 0 … 2 2
0 1 2 … 9 0 1 … 9 0 1 2 … 9 0 1 2 3 … 0 1
On a un tableau de 4 lignes et 2022 colonnes ; il suffit de compter les 0 « inutiles » qui ont été rajoutés. Ils sont au nombre de 10^3 pour la première ligne, 10^2 pour la deuxième ligne, 10^1 pour la troisième ligne et 10^0 pour la quatrième ligne, soit au total $1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 = \frac{10^4 - 1}{10 - 1}$.
Par conséquent $u_{2021} = 4 \times 2022 - \frac{10^4 - 1}{9} = 6977$.
On généralise aisément cette méthode à un nombre n de $m(n)$ chiffres.

Retour au sommaire

2) Jacques Choné répond à cette question en utilisant un programme écrit en langage Python.

```
def chif(xieme):
   s="0";k=1
   while len(s)<=xieme:
      s+=str(k);k+=1
   return(s[xieme],k-1)

>>> chif(365)
('5', 158)
>>> chif(10**6)
('1', 185185)
```

C'est-à-dire que le 365ième chiffre est un 5 et qu'il se trouve sur la page 158 ; le millionième chiffre serait un 1 et il serait sur la page 185 185

Fabien Lombard utilise des moyens plus « classiques » en considérant les valeurs de u_n correspondant au changement du nombre de chiffres. Ainsi,

$u_9 = 9$, $u_{99} = 189$, $u_{999} = 2\,889$, $u_{9\,999} = 38\,889$, $u_{99\,999} = 488\,889$ et $u_{999\,999} = 5\,888\,889$

$u_{99} < 365 < u_{999}$ donc le 365ième chiffre sera sur une page entre 100 et 999.

Or $365 - 189 = 176 = 3 \times 58 + 2$

Par conséquent après 99, on a écrit les chiffres des pages 100 à 157, puis les deux premiers chiffres de la page 158, soit le chiffre 5.

De même $u_{99\,999} < 1\,000\,000 < u_{999\,999}$ et $1\,000\,000 - 488\,889 = 511\,111 = 6 \times 85\,185 + 1$; le millionième chiffre serait le premier chiffre de la page 185 185, soit le chiffre 1.

Notez que la suite 9, 189, 2 889, 38 889, 488 889, … est référencée A033713 dans l'encyclopédie OEIS.

> *« Soit A un succès dans la vie.*
> *Alors A = x + y + z où x = travailler, y = s'amuser et z = se taire. »*
>
> Albert Einstein

« LE PETIT VERT » est le bulletin de la régionale APMEP Lorraine. Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin « Au fil des maths » et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la « vie mathématique » locale, et d'autre part de permettre les échanges « mathématiques » entre les adhérents. Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redaction-petivert@apmeplorraine.fr. Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Léa Magnier, Walter Nurdin, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

Retour au sommaire