DANS NOS CLASSES

ÉCHECS ET MATHS

Sébastien Daniel
Collège Louis Armand
Petite Rosselle (57)

Les origines

L'idée de départ de cette série d'activités était de trouver un support concret pour travailler les calculs d'aire et de volume en 4e. Je n'arrivais pas à trouver une place satisfaisante à cette partie de mon cours dans laquelle on passait souvent notre temps à calculer l'aire et le volume de nombreux objets dessinés sur des fiches d'exercices. Je souhaitais que les élèves puissent manipuler concrètement ces notions d'aire et de volume.

Par ailleurs j'utilisais déjà régulièrement une activité sur la légende du jeu d'échecs pour introduire les puissances. Je me suis donc lancé dans une séquence prévoyant d'utiliser cette activité cette fois pour réinvestir les puissances et s'orienter ensuite vers des calculs de volumes d'objets concrets. Je n'avais pas anticipé les multiples notions qui finalement se greffent de plus en plus sur ce projet.

Le problème, fil rouge de la séquence

Une légende sur l'invention du jeu d'échecs : un sage nommé Sissa

L'histoire se passe en Inde, des années avant Jésus-Christ.
L'inventeur présumé des échecs serait un brahmane nommé Sissa. Il aurait inventé le chaturanga pour distraire son prince de l'ennui, tout en lui démontrant la faiblesse du roi sans son entourage.
Souhaitant le remercier, le monarque proposa au sage de choisir lui-même sa récompense. Sissa demanda juste un peu de riz. Il invita le souverain à placer un grain de riz sur la première case de l'échiquier, puis deux sur la deuxième case, quatre grains sur la troisième case et ainsi de suite jusqu'à la dernière case en doublant à chaque fois le nombre de grains. Il devra ensuite lui donner l'ensemble du riz posé sur le plateau de jeu.
Cette demande sembla bien modeste au souverain fort surpris et amusé par l'exercice.
Le conseiller du prince devait maintenant satisfaire la demande de Sissa et lui livrer le riz.

Le déroulement

Séance 1

Recherche de sous-problèmes et résolution du premier sous-problème
J'informe les élèves que nous allons nous intéresser au jeu d'échecs et commence par un échange avec la classe sur le jeu lui-même : quels sont ceux qui connaissent, quelle est la taille du plateau, quel est le nom et le mode de déplacement des pièces ? Je présente ensuite oralement la légende sur l'origine de ce jeu et la problématique choisie.
Je mets ensuite en place un travail de groupe autour de la question : **« Quel récipient emporter pour aller aider le conseiller du prince en remontant le temps ? »** La fiche distribuée aux élèves se situe en Annexe 1
.

Retour au sommaire

Après une première réflexion en groupe, les échanges au niveau de la classe permettent de décomposer le problème en trois sous-problèmes :

- → recherche du nombre total de grains de riz ;
- → calcul du volume de chaque objet présenté ;
- → détermination du volume d'un grain de riz.

Un sondage est effectué dans la classe pour connaître le récipient choisi par chacun, surtout dans le but de mettre en évidence l'énormité de la quantité de riz par rapport aux objets fréquemment choisis par les élèves.

Une recherche individuelle est lancée, suivie d'un travail en groupe, pour résoudre le premier sous-problème. Arrive ensuite pour tous les élèves un moment où l'écriture de la réponse du calcul du double prend trop de place.

Une synthèse est réalisée avec la classe entière.

- Présentation de certaines recherches au visualiseur,
- Réactivation de l'écriture puissance qui pour le coup simplifie grandement la représentation du nombre de grains de riz sur chaque case,
- Recherche collective du nombre total de grains de riz.

Bilan

Les élèves sont intéressés par la présentation du jeu d'échecs, certains ont déjà entendu parler de la légende.

La décomposition du problème en sous-problèmes est difficile pour beaucoup d'entre eux, mais demeure compréhensible. La compétence CHERCHER est ainsi travaillée sans que les élèves soient mis en échec.

Quelques-uns ne comprennent pas le doublement du nombre de grains de riz à chaque case. La mise en route de la recherche du nombre total de grains de riz, comme à chaque fois, est difficile pour ceux qui ne pensent pas à essayer de représenter le problème. L'utilisation d'un visualiseur pour projeter des recherches d'élèves est bien utile.

Lors de la synthèse, je propose la recherche d'une formule générale pour déterminer la somme des contenus des cases en écrivant, ligne par ligne, le nombre de grains sur la case correspondante à côté du nombre total de grains jusqu'au rang 6 :

Numéro de la case	Nombre de grains sur la case	Nombre total de grains jusqu'à la case
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63
… n	… 2^{n-1}	… 2^n-1

J'ai continué à remplir le tableau avec la classe en relançant les élèves jusqu'à ce qu'ils voient une propriété intéressante reliant le nombre de grains d'une case et le nombre total.

Une fois remarqué que pour la case n le total vaut $2^n – 1$, on le prouve ensemble, c'est l'occasion de réinvestir le calcul littéral pour prouver une formule générale.

$$2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) = 2 \times 2^{n-1} - 1 = 2^n - 1$$

(Contenu d'une case ajouté au total de toutes les cases précédentes)

Retour au sommaire

C'est un peu rude pour certains mais je pense qu'il faut parfois montrer des raisonnements plus complexes même si tout le monde ne comprend pas tout.
On se met assez facilement d'accord que 2^{64} est une très bonne approximation du nombre total de grains de riz.
Suite à ce travail, je refais un sondage. Chacun revoit sa première réponse et change éventuellement d'avis sur le récipient à utiliser pour contenir tous ces grains de riz.

Remarques
Le jour où l'écriture binaire arrivera au collège dans le cadre de l'informatique on pourra effectuer l'addition des nombres de grains de riz plus facilement !
Il est intéressant de faire noter complètement l'écriture décimale du nombre total de grains de riz.

Séance 2

Résolution du deuxième sous-problème : recherche du volume de chaque récipient proposé
Après un échange avec les élèves on se met d'accord sur le fait que, pour calculer le volume d'un objet, il est nécessaire de le MODÉLISER par un solide mathématique connu, quitte à n'avoir qu'une valeur approchée du résultat, et de connaître les DIMENSIONS de l'objet en rapport avec la formule de calcul de son volume.
Les élèves doivent avoir cherché au préalable, en travail à la maison, les dimensions de certains objets intransportables en classe.

En travail de groupe, la consigne donnée est pour chaque objet choisi de :
- noter le nom du solide mathématique modélisant l'objet,
- réaliser un croquis à main levée,
- écrire la formule de calcul,
- calculer son volume et préciser son unité de mesure.

Le matériel : des louches les plus « demi-sphériques » possibles, des boites à chaussures, des boites de conserve sont à disposition dans la salle.

Les élèves possèdent également une fiche avec des extraits de documentation sur les objets intransportables en classe et un formulaire Périmètre-Aire-Volume, qui sera collé dans le cahier de cours. La compétence CHERCHER → extraire des informations est ainsi mobilisée.

Bilan
Les élèves sont très actifs pendant la séance ; mesurer un rayon sans avoir le centre est un moment « particulier ». Il est nécessaire d'insister sur le fait de noter ce qui est demandé dans le cahier ; j'aurais dû faire une pause et le rappeler à tous car ils ont tendance à vouloir tout faire assez vite.

Retour au sommaire

Remarques

J'ai mis à profit ce travail de recherche en passant dans les rangs pour interroger sur l'utilisation du formulaire, notamment pour insister sur la nécessité d'avoir la même unité de mesure de longueur pour toutes les dimensions utilisées. J'ai également fait réfléchir les élèves sur la notion de hauteur dans un solide en observant les objets. J'ai pu également leur faire manipuler des solides pour visualiser différentes unités de mesure de volume en (re)montrant, en « vrai », un cm³ et un dm³.

Je vais réfléchir à faire rédiger une fiche récapitulative à mettre dans un petit dossier sur le projet, peut-être une par groupe, à partir de copies d'écran de ce que l'on a écrit en classe.
C'est l'occasion d'utiliser des pieds à coulisse et d'avoir un échange avec son collègue de techno.
On peut faire acheter des pieds à coulisse et/ou en bricoler un avec deux équerres et une règle.

Séance 3

Résolution du troisième sous-problème : volume d'un grain de riz

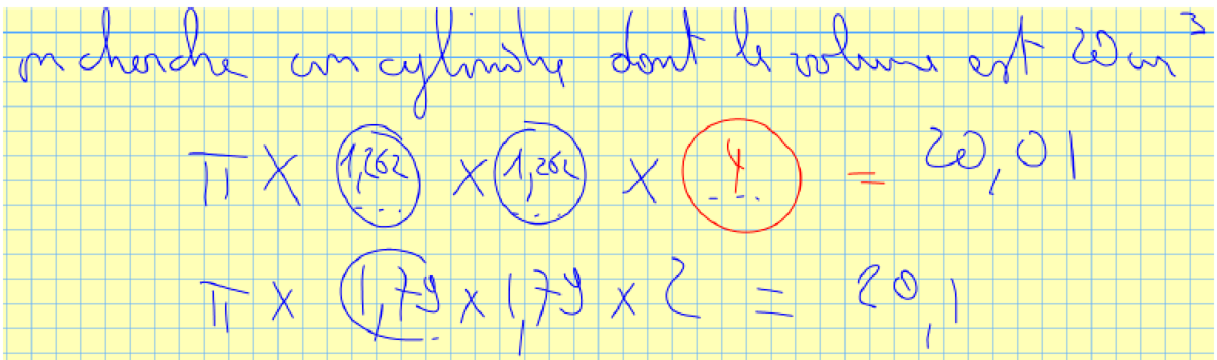
En classe entière une discussion est engagée sur la manière de mesurer le volume d'un grain de riz. Il est impossible de procéder comme pour les objets étudiés précédemment. Les formes des grains de riz sont variées et les mesures impossibles.
Comme le volume d'un grain est inaccessible, prenons-en plusieurs ! Sur les paquets de grains de riz le volume n'est pas indiqué ; on connaît plutôt la masse. Si l'on veut compter des grains de riz il ne faut pas en avoir de trop. Nous nous sommes mis d'accord pour compter le nombre de grains de riz contenus dans 20 cm³. Un nouveau sous-problème émerge : quelles dimensions doit avoir un récipient ayant une contenance de 20 cm³ ?
Une recherche en groupe commence pour répondre à la question suivante : si l'on considère certaines dimensions fixées d'un solide donné quelle valeur attribuer aux autres dimensions pour obtenir un volume de 20 cm³ ?

Par exemple, pour un **cylindre** de rayon 3cm et de volume 20 cm³, quelle hauteur choisir ?

Les élèves se sont retrouvés à résoudre des équations du type $ax = b$. On travaillait en parallèle en exercice rapide des multiplications à trous. C'était l'occasion d'un bon réinvestissement.
Quand il y a plusieurs variables inconnues il est nécessaire de faire des essais pour obtenir un volume de 20 cm³. Un concours a été lancé à qui trouvera le volume le plus proche de 20 cm³.

Quelques productions de la classe

- Pour un cylindre avec deux variables inconnues



Retour au sommaire

- Pour un cube

Une recherche par dichotomie et par essais successifs pour obtenir une meilleure approximation.

on cherche un cube de volume 20 cm^3.

$20 \times 20 \times 20 = 8000$

$10 \times 10 \times 10 = 1000$

$5 \times 5 \times 5 = 125$

$3 \times 3 \times 3 = 27$

$2 \times 2 \times 2 = 8$

$2,5 \times 2,5 \times 2,5 = 15,6$

2,

$2,7 \times 2,7 \times 2,7 = 19,6$

$2,8 \times 2,8 \times 2,8 = 21,9$

$2,71 \to 19,9$

$2,72 \to 20,1$

2,715

Séance 04

L'objectif est de visualiser concrètement les 20 cm^3.

J'avais imprimé plusieurs formes de récipient d'un volume de 20 cm^3. On pouvait visualiser que ces objets avaient le même volume en transvasant du riz de l'une à l'autre. Certes, certaines sont moins pratiques, notamment les pointues qui contiennent « moins bien » le volume équivalent de riz. On peut aussi, en imprimant (avec une imprimante 3D) des récipients de dimensions équivalentes, verser trois fois le cône dans le cylindre (ou la pyramide dans le prisme).

Le « meilleur » récipient cylindrique que l'on a pu obtenir a été imprimé à l'imprimante 3D du collège. Je l'ai modélisé moi-même avec TinkerCAD mais je vais essayer de voir avec ma collègue de techno si on peut s'organiser cette année pour faire la modélisation et l'impression en techno, peut-être avec chaque élève qui personnalise son récipient.

Pendant la séance, chaque groupe de 2 élèves reçoit 20cm^3 de riz et compte les grains. Des questions jaillissent au fur et à mesure du comptage. « Que fait-on des grains cassés ou des demi-grains ? ». Il est nécessaire de trancher. Nous recueillons les mesures et c'est l'occasion de réinvestir la notion de moyenne. Bonne surprise ! On ne tombe pas loin de 1000 grains par 20cm3, ce qui va nous permettre de faire des calculs assez facilement et d'utiliser le tableur pour le calcul de la moyenne.

	A	B
1		Nombre de grains de riz dans 20cm^3
2	Groupe1	954
3	Groupe2	917
4	Groupe3	923
5	Groupe4	902
6	Groupe5	1026
7	Groupe6	855
8	Groupe7	798
9	Groupe8	1062
10	Groupe9	
11	Groupe10	
12		7437
13		929,625
14		

Une séance riche en réinvestissement car nous avons ainsi travaillé des proportions, des valeurs approchées et de l'écriture scientifique pour répondre au problème initial.

Bilan individuel des élèves

Des affiches (voir Annexe 2) ont été réalisées individuellement par chaque élève à son domicile. Une mise en commun préalable avait eu lieu en classe pour lister les choses importantes à y faire figurer, le nombre total de grains de riz par exemple ou le récipient finalement choisi après une réflexion collective.

Retour au sommaire

Développements envisagés cette année

- Réinvestir les déplacements en utilisant les règles du jeu d'échecs (sur papier et peut-être sur scratch si c'est réalisable) ;
- utiliser le jeu de la brochure JEUX 6 sur les déplacements (Jeu de la reine, …) pour travailler d'autres compétences du programme ;
- voir avec ma collègue de technologie si on peut travailler sur le design et faire fabriquer des pièces d'un jeu d'échecs, peut-être en n'utilisant que des solides usuels ou encore en choisissant comme base pour chaque type de pièces un solide (Roi = cube, …) ; Graver des plateaux de jeu à la graveuse laser devrait se faire assez vite, si un jour on peut retourner au fablab …,
- faire jouer les élèves aux échecs ;
- construire, soyons fous, une machine du type de celles des Cobayes (voir ressources).

Ressources

- Vidéo « On n'est pas que des Cobayes ».
- Nombres de grains de riz par case.
- Une vidéo de jeunes qui mettent la légende en scène.
- Une vidéo avec à la fin un intéressant moyen de montrer les « sauts » d'ordre de grandeur entre million et milliard.
- Une intéressante vidéo qui met en évidence les puissances de 10.
- Une vidéo des DUDU qui donne un prolongement possible avec les aires.

Retour au sommaire

Annexe 1

Une légende sur l'invention du jeu d'échecs : un sage nommé Sissa

L'histoire se passe en Inde, des années avant Jésus-Christ.

L'inventeur présumé des échecs serait un brahmane nommé Sissa. Il aurait inventé le chaturanga pour distraire son prince de l'ennui, tout en lui démontrant la faiblesse du roi sans son entourage.

Souhaitant le remercier, le monarque proposa au sage de choisir lui-même sa récompense. Sissa demanda juste un peu de riz. Il invita le souverain à placer un grain de riz sur la première case de l'échiquier, puis deux sur la deuxième case, quatre grains sur la troisième case et ainsi de suite jusqu'à la dernière case en doublant à chaque fois le nombre de grains. Il devra ensuite lui donner l'ensemble du riz posé sur le plateau de jeu.

Cette demande sembla bien modeste au souverain fort surpris et amusé par l'exercice.

Le conseiller du prince devait maintenant satisfaire la demande de Sissa et lui livrer le riz.

Tu as été désigné pour remonter le temps et aller aider le conseiller du prince à livrer le riz à Sissa.

Tu as le droit d'emporter avec toi un récipient, lequel choisirais-tu ?








Conseils pour avancer dans un travail de recherche

Pour mener à bien un travail de recherche commencer par faire la liste de tout ce qu'il faudrait connaître pour répondre à la question.

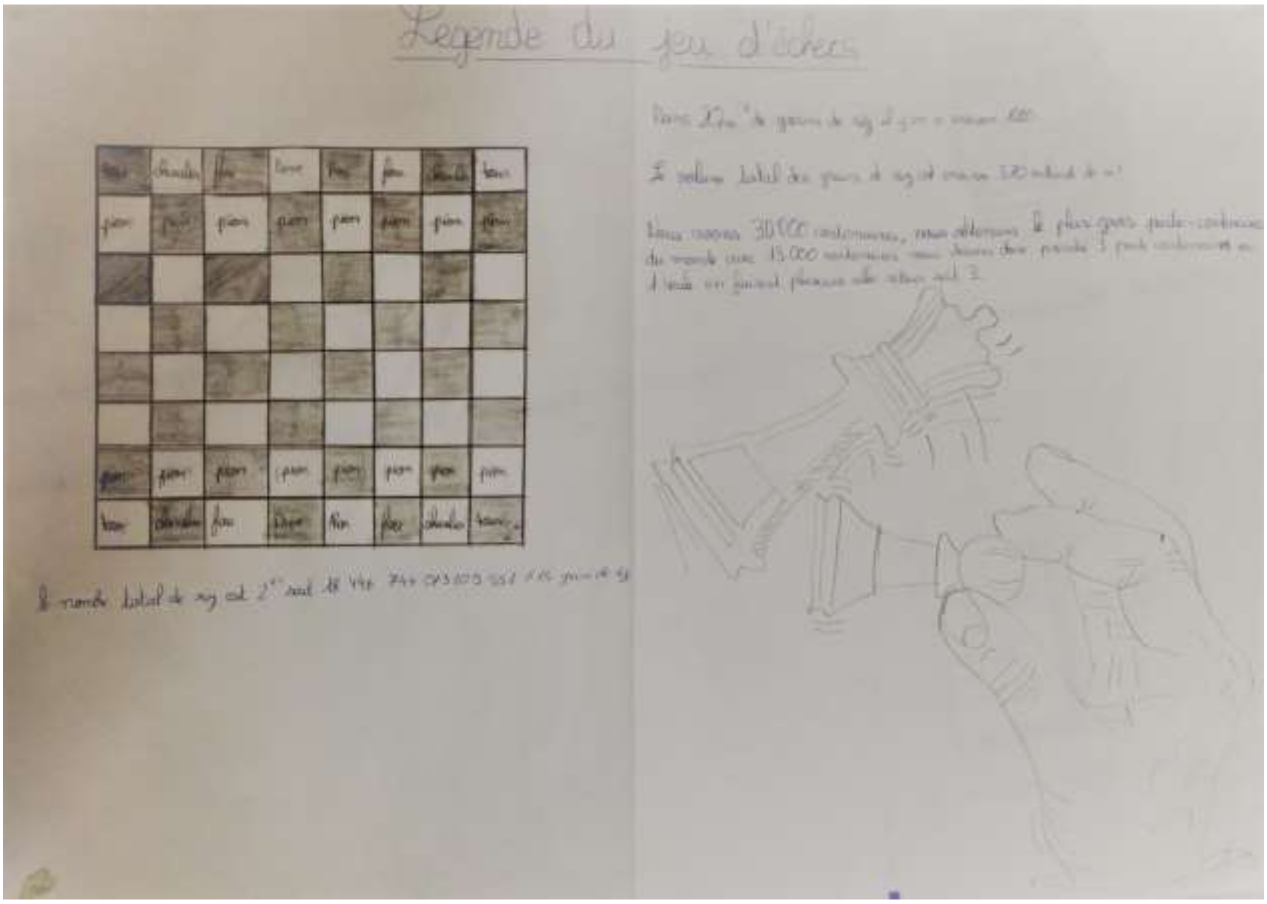
Cette liste représente des « sous-problèmes » qu'il faudra résoudre un par un pour ensuite pouvoir résoudre le problème principal.

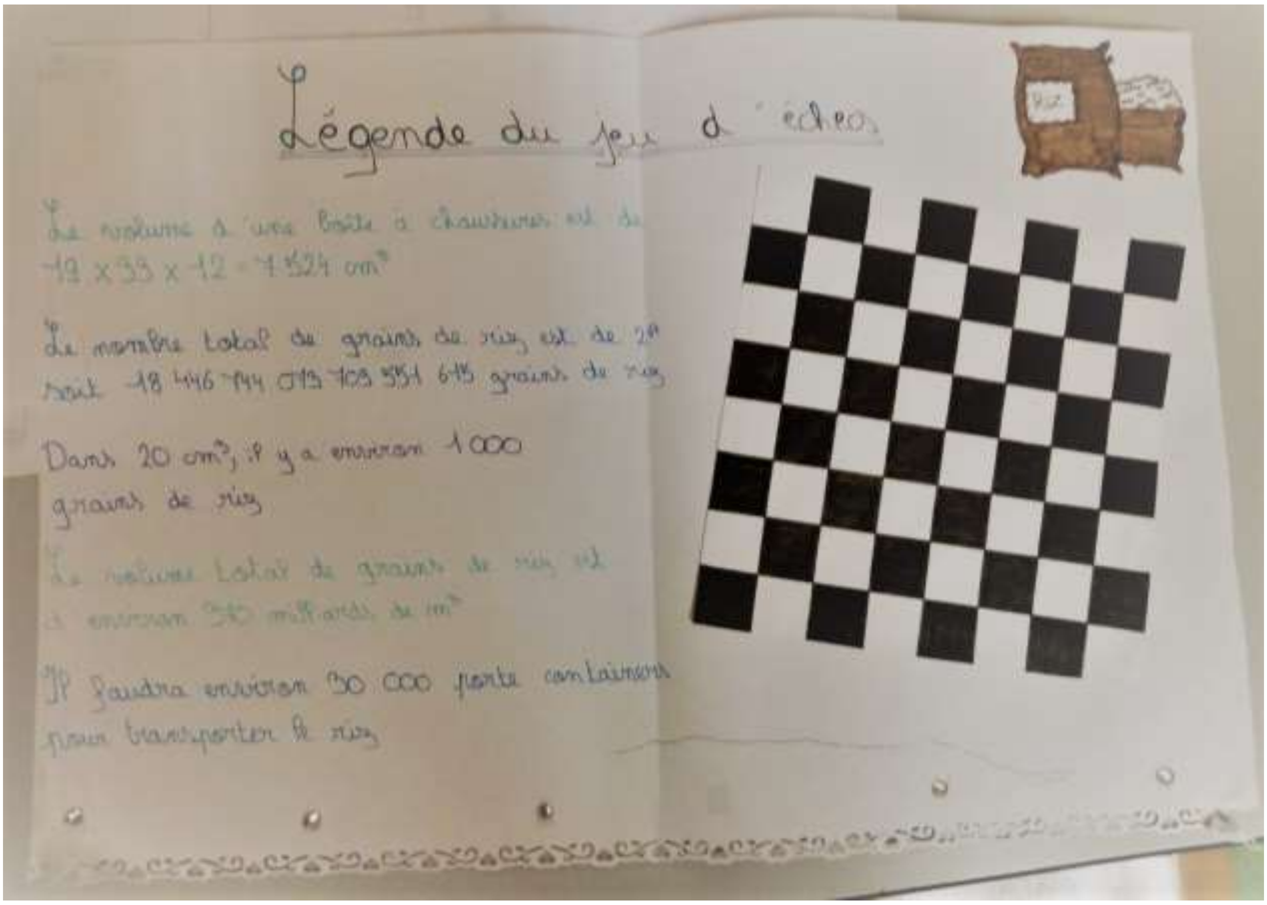
Parfois un « sous-problème » aura lui-même une liste de choses à trouver pour le résoudre.

Retour au sommaire

Annexe 2

Deux réalisations





Retour au sommaire