LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

N° 125	MARS 2016

Anamophose devant le musée Dali de Figueres
(voir l'article « Anamorphose en classe de sixième »)

www.apmeplorraine.fr

N° ISSN : 0760-9825. Dépôt légal : mars 2016. Directeur de la publication : Gilles WAEHREN.

Pour les adhérents lorrains de l'APMEP, à jour de leur cotisation, l'abonnement au Petit Vert est gratuit. Il est proposé en version électronique (PDF) a tous les adhérents. Cependant, si vous désirez recevoir une version papier (sans la couleur) par la poste, envoyez une demande en ce sens à jacverdier@orange.fr. Les adhérents qui sont mutés dans une autre académie peuvent demander de continuer à recevoir le Petit Vert quelque temps encore (version électronique PDF uniquement).

Ce numéro a été tiré à 25 exemplaires papier, imprimés au centre de reprographie de l'U.L.

SOMMAIRE

édito

MAIS QUE FAIT L'A.P.M.E.P. ?

N.D.L.R. : Cet éditorial a été écrit suite à la démission de l'Éducation Nationale de quelques collègues (dont des professeurs stagiaires), mais aussi de la démission de l'A.P.M.E.P. d'un collègue en désaccord avec la politique de l'association concernant la réforme du collège.

L'Aide à la décision peut s'enseigner en mathématiques à un très haut niveau dans les plus grandes écoles de commerce ou d'ingénieur. Par exemple, on essaie de modéliser l'instant où une personne va décider d'acheter un article et donc de prévoir quand le vendeur pourra l'inciter à le faire. On s'appuie sur des théories mathématiques : statistiques, probabilités...

Dans la vie de tous les jours, prendre une décision pour un professeur de mathématiques peut être tout autant difficile que pour n'importe qui. Entre l'instant t où tout suivait son cours et l'instant $t+\delta t$ où la décision est irrévocablement prise, la réflexion pourrait, paradoxalement, être plus ou moins longue.

Démissionner, quelle décision importante ! Quelle conséquence peut-il y avoir pour la suite ? Quand prendre cette décision ? Pourquoi ? Etait-ce prévisible ?

On doit chercher un prétexte, on n'en peut plus... Plutôt que de se remotiver, on abandonne, on s'isole. On en oublie donc de regarder autour de soi, de constater qu'on n'est pas seul à ressentir un doute, une détresse. C'est à ce moment là que l'A.P.M.E.P. peut venir en aide à la personne.

Si l'A.P.M.E.P. est une association qui regroupe des professeurs cherchant à redonner du sens à leur enseignement, alors forcément, notre association doit jouer son rôle fédérateur mais aussi "familial" et convivial. Du coup, en partageant, on se sent moins seul pour pouvoir faire face à la classe, à l'institution, à l'équipe de direction de son établissement, à sa charge de travail, à sa gestion du travail... C'est à ce moment là que le δt pendant lequel on pense à démissionner peut devenir Δt puis finalement disparaitre et nous permettre de revenir à un enseignement qui suit le cours du temps, dans tout son aspect de variable, et qui peut donc évoluer.

Si démissionner de l'Éducation Nationale est un acte grave, démissionner de l'A.P.M.E.P. ne l'est pas autant. C'est également une décision à prendre (merci de ne pas le prendre au mot...) : après réflexion, parce qu'on ne se retrouve plus dans cette association, parce qu'elle ne nous apporte plus rien...

Dans le premier cas on est victime, dans ce deuxième cas, on peut devenir alors accusateur : « *Oui, l'A.P.M.E.P. est pour la réforme du collège* », « *Oui, mais que fait l'A.P.M.E.P. ? elle ne nous défend pas !* »... Il est facile de se tromper de cible.

Notre association réfléchit sur, propose ou juge une orientation ministérielle mais elle ne peut être tenue pour responsable de l'incompréhension d'une réforme (et donc celle du collège) ni de la mauvaise préparation de son accompagnement. A l'A.P.M.E.P., justement, les adhérents peuvent discuter et échanger à propos d'une réforme ; c'est le rôle qu'a choisi de tenir notre association. Partager les mathématiques, c'est aussi en parler mais pas que, les situer dans un contexte plus général, celui où elles peuvent enrichir un projet d'équipe par exemple.

Alors, que fait l'A.P.M.E.P. ? Elle s'efforce de rester un lieu privilégié d'échange et de réflexion sur les pratiques, sur les difficultés et les joies du métier !

Jean-Michel Bertolaso

retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

C'ÉTAIT IL Y A 25 ANS, DANS LE PETIT VERT

Nous présentons ci-dessous quelques extraits de l'éditorial du Petit Vert n°25 de mars 1991, signé de Michel Bonn, qui était alors directeur de l'IREM et secrétaire de la commission APMEP « Formation des Maitres ».

I.U.F.M. … OÙ EN SOMMES-NOUS ?

Les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres sont créés en application de la loi « d'orientation » du 10.07.1989. (…). Les Écoles normales et les Centres pédagogiques régionaux disparaissent, et leur potentiel est intégré à l'I.U.F.M. Les formateurs seront des personnels propres à l'I.U.F.M., ou sur des emplois d'une université ou d'un autre établissement, ou des personnes intervenant compte tenu de compétences particulières.
(...)
La bonne question est, semble-t-il : *quelles améliorations la création des IUFM apporte-t-elle à la formation de l'enseignant de base ?* La bonne parole ministérielle, voire gouvernementale, nous informe : au delà du savoir "savant", tout enseignant doit recevoir une formation à son métier, comportant des stages (d'observation, en situation, en responsabilité), une sensibilisation psycho-pédagogique, didactique, sur les technologies de l'éducation, sur le travail en équipe pédagogique, sur la recherche concernant son futur métier...
L'APMEP émet sur ces points un avis favorable, mais - quoique son Comité n'ait pas voté explicitement sur ce point - aurait souhaité plus d'ambition : durée de la scolarité de 3 années, avec prérecrutement au niveau DEUG, aménagement du temps d'étude pour permettre la préparation d'une maitrise, liaison forte avec la formation continue, tutorat. Il est bien entendu qu'un partenaire essentiel, pour ce qui concerne notre discipline, est le réseau des IREM dont les compétences semblent indéniables. (...)
Pourquoi aussi tant de Maîtres auxiliaires, tant d'emplois mis au concours et cependant non pourvus (près de la moitié en 1990) ? Pourquoi le malaise des collègues des Écoles normales, comment seront recrutés pour l'IUFM les enseignants du supérieur, didacticiens des maths ou pas ?

Les IUFM ne se feront pas en un jour, mais il faut être conscient de l'enjeu qu'ils représentent. Un pays moderne est un pays qui a des cadres bien formés et pour cela il lui faut des enseignants, maîtres d'œuvre de cette formation, qu'il soutient efficacement dans leur pratique quotidienne, qu'il prépare solidement, et envers qui il manifeste la même considération qu'aux ingénieurs qui ont suivi des cursus similaires. C'est pourquoi je plaide pour que la communauté des enseignants en place, et notamment tous ceux pour qui les maths sont un centre d'intérêt essentiel, serre les coudes, et se regroupe pour constituer un moyen de pression efficace sur les décideurs.

NOUS N'AVONS PAS LE DROIT DE RATER L'OPÉRATION I.U.F.M. !

Michel BONN

Et maintenant É.S.P.É. … OÙ EN SOMMES-NOUS ?

Après l'avoir supprimée, rétablir la formation initiale, quelle bonne idée ! Reconnaître la fonction de formateur dans le second degré à travers la création des Formateurs Académiques, quelle bonne idée !
Une formation digne de ce nom ne peut se faire sans formateur ; leur reconnaitre un statut, leur proposer une certification à l'instar du premier degré sont des premiers pas indispensables. Les former serait nécessaire... Nous n'en sommes qu'à l'affichage : sur le papier, la formation est enclenchée, tout comme la certification. Du côté des enseignants fonctionnaires stagiaires (EFS), c'est le même principe : les coquilles ont été pensées et existent. Le problème est le contenu ! Lourdeur du M2 à acquérir pour les EFS avec une multitude d'évaluations pour chaque ECTS (*European Credits Transfer System*), et surtout une difficulté à construire une cohérence entre tous les acteurs du master. De culture différente, avec des pratiques différentes, des conceptions de l'apprentissage différentes, des postures différentes (les EFS sont-ils avant tout étudiants ou professeurs stagiaires ? C'est-à-dire des pairs en devenir, en construction). Manque de concertation évident, problème de temps. Du temps pour nommer les objets en construction, ceux qui posent des difficultés aux EFS, ce qui fait obstacle à leur professionnalisation.
À l'heure de la crise de recrutement de professeurs de mathématiques, il est essentiel de dépasser les considérations praxéologiques (disons pratico pratiques : quelles heures sont prises en charge par qui ?) pour construire un dispositif formatif cohérent et digne de ce nom, un dispositif de suivi et d'accompagnement par exemple inexistant à l'heure actuelle dans les faits. Et pourtant :

NOUS N'AVONS PAS LE DROIT DE RATER L'OPÉRATION É.S.P.É. !

retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

SEMAINE DES MATHÉMATIQUES : MATH ET SPORT

A l'occasion de cette semaine « Maths et Sports », le comité de rédaction du Petit Vert vous propose quelques petits problèmes, que vous pourrez éventuellement soumettre à vos élèves.

1. À la régulière. Christophe et Marc participent à une course. Christophe, très régulier, court à la vitesse constante de 300 mètres par minutes. Marc, lui, court à la vitesse de 280 mètres par minute sur la première moitié du parcours et à 320 mètres par minute pour la seconde moitié. Qui arrivera le premier ? Et si le premier devance le second de 15 s, quelle est la longueur de la course ? (*inspiré de « Jogging International »*)

2. Compétition en eau vive. Un nageur a parcouru 10 km dans la Moselle en 1h 58min 53s.

Il a parcouru 6 kilomètres avec l'aide du courant et 4 km à contre-courant. Le débit de la Moselle était ce jour là de 40 m^3/s. La largeur de la Moselle à cet endroit est de 50 m et sa profondeur moyenne de 8 m.

Pouvez-vous l'aider à trouver sa vitesse moyenne pour estimer sa future performance dans un lac sans courant ?

3. Score et rugby. Je me souviens d'un match de rugby cet hiver où mon équipe a gagné par 20 à 18. Je me souviens également que chaque équipe avait marqué au moins un essai et qu'il y en avait eu trois au total. Mais je ne me souviens plus du décompte d'essai(s), d'essai(s) transformé(s) de chaque équipe et pas plus des pénalités ; mais je suis certain qu'il n'y avait pas eu de drop.

Pouvez-vous m'aider à retrouver ces détails de la feuille de match ?

4. Des sabliers dans un combat de MMA. Un combat de MMA (ou full-contact) avec la possibilité de gagner une ceinture se déroule sur 5 rounds de 5 minutes avec un repos également de 5 minutes entre deux rounds.

L'arbitre ayant perdu son chronomètre récupère dans un restaurant voisin de la salle des sabliers qui s'écoulent en 3 minutes pour les œufs à la coque et d'autres qui s'écoulent en sept minutes pour les œufs mollets.

Comment peut-il utiliser les sabliers pour que le combat puisse se dérouler dans les règles et combien en faut-il en supposant que le combat aille jusqu'à l'achèvement des 5 rounds ?

5. Cyclisme en montagne. Un cycliste monte un col à la vitesse de 15km/h. Arrivé au sommet, peu satisfait de cette performance, il décide d'accélérer dans la descente pour doubler sa vitesse moyenne sur le trajet aller-retour. Sachant qu'il redescend par le même chemin, à quelle vitesse doit-il rouler dans la descente ? (*Situation proposée par Marc Legrand, IREM de Grenoble*)

6. Record du 100 m. Le record du monde du 100 m masculin est détenu par le Jamaïcain Usain Bold en 9 s 58. Au dernier championnat du monde des vétérans le 10 août 2015, le Brésilien Frédérico Fischer, âgé de 98 ans, a couru le 100 m en 24 s 89.

En supposant qu'ils réalisent tous les deux la même performance (hypothèse plus réaliste pour Fischer) à quelle distance minimale, au centimètre près, le Brésilien doit-il se mettre du Jamaïcain pour qu'ils arrivent tous les deux dans le même centième de seconde ?

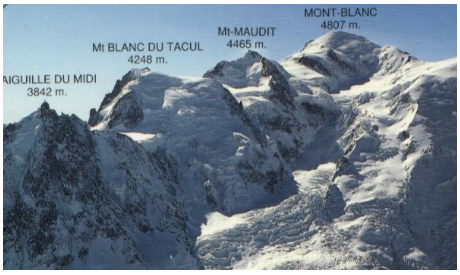
retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

LE MONT BLANC A GRANDI DE 3 MÈTRES : QUELLE HISTOIRE ?!

Dans cet article, Marie-Claire Kontzler rend compte de l'atelier auquel elle a participé lors des Jounées nationales de Laon, en octobre dernier. Avec l'aimable autorisation de Marc Robert, animateur de cet atelier.

J'ai participé à l'atelier « **Promenade en altitude** » proposé par Marc ROBERT.
L'animateur a su nous faire partager sa passion, ce qui m'amène à proposer un résumé de l'atelier (qui se tenait sur les 2 plages horaires).
L'importance de mesurer de façon précise les altitudes est diverse : « politique », creuser un tunnel, un canal…
En France, <u>c'est l'IGN qui est responsable du cadastre et de l'altitude continentale</u>.
Pour le cadastre, les forêts, les routes…, l'IGN sait mesurer les distances au mm près ; elle engage sa responsabilité juridique au cm près.
Et pour les altitudes ? Pourquoi le Mt Blanc est-il passé de 4807 m à 4810 m ?



Réponses : **1-** Soit le massif se soulève ; **2-** Soit les mesures de distance sont faussées ; **3-** Soit le zéro des altitudes bouge.

Développons ces 3 points.

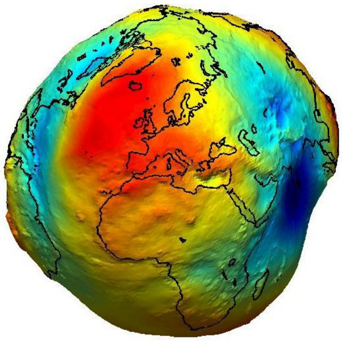
1- Voici les facteurs principaux des <u>déformations de la croute terrestre</u> :
◊ Le 1er « gros » facteur est **l'effet de la lune**. On connaît le phénomène des marées. Pour les continents c'est équivalent : la terre s'ovalise, se soulève de 20 à 30 cm du côté lune, et cette déformation se combine à la rotation terrestre.
◊ Le 2e facteur est **la tectonique des plaques**.
◊ Le 3e est **la météo** : un cyclone aspire l'air, fait remonter la colonne d'air, donc aussi l'eau qui est dessous (ce fut important lors de la tempête Xynthia) et aussi la terre de 1 à 2 cm.
◊ Le 4e facteur s'appelle **rebond de charge** : lors d'une glaciation la glace pèse sur le continent ; lorsque la glace fond, la terre se soulève, les fleuves se déplacent ; ainsi la Scandinavie s'élève encore actuellement d'environ 1 cm par an, alors que la dernière glaciation a eu lieu il y a 20 000 ans.

2- <u>Les distances</u> sont actuellement mesurées par la lumière (rayon laser), et la définition de la seconde est atomique. La vitesse de la lumière est connue de façon précise ($c = 2{,}997992458 \times 10^8$) *dans le vide*. Mais *<u>pour les altitudes nous sommes dans l'atmosphère</u>*… et les rayons lumineux se courbent au voisinage de la terre.

3- <u>Le zéro de l'altitude continentale</u> se trouve, législativement, pour l'IGN, au marégraphe de Marseille. Les mesures du zéro sont faites depuis 1884 aux périodes d'équinoxe, au moment des grandes marées ; il faut éliminer le clapotis. Une plaque est scellée à 1,661 m au-dessus du zéro.

<u>Altitudes satellitaires</u> :
Les mesures sont effectuées actuellement par des satellites. Le GPS qu'on a dans sa voiture donne une précision de 10 m.
Est-ce plus facile avec les satellites qu'avec la triangulation ? Pas vraiment ! Les corrections qu'il faut apporter ont amené à inventer (à Toulouse) un modèle qui est devenu la référence : la **<u>Géoïde</u>**, dont tous les points sont à la même altitude.

retour au sommaire



La mesure de 2013 pour l'altitude du Mont Blanc est 4810,02 m, le pic rocheux étant à 4792 m.
Pour les profondeurs, des satellites captent les ondes sismiques, phénomène acoustique, et non lié à la lumière.
Pour les cartes marines, le zéro est (pour la France) à Brest et il n'y a pas d'harmonisation selon les mers et les pays. C'est une autre histoire !
N.d.l.r. La définition du Géoïde est là : https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9o%C3%AFde

---

VIE DE LA RÉGIONALE

LE RALLYE MATHÉMATIQUE DE LORRAINE

Le rallye organisé par la Régionale Lorraine est destiné aux classes de troisième et de seconde de notre académie (et il n'y a pas de frais d'inscription !). Le sujet de l'épreuve est unique et identique pour les deux niveaux. Il comporte 10 questions, plus une question subsidiaire pour départager les éventuels ex-æquo. Pendant l'heure et demie du concours, les élèves se répartissent les exercices, sans oublier de prévoir un temps de mise en commun pour remplir l'unique fiche-réponse de la classe.

Ces 10 questions, pour lesquelles seule la réponse est demandée, sans justification aucune, sont posées de façon aléatoire sans tenir compte de leur difficulté et valent chacune 4 points. La question subsidiaire, quant à elle, consiste en un problème dont la solution devra être rédigée.

Les objectifs de ce rallye sont, à l'image de bien d'autres :
- Permettre à tous les élèves d'une classe de participer à une activité mathématique,
- Motiver les élèves par des jeux et des énigmes à résoudre,
- Favoriser la communication et la coopération au sein de la classe.

L'an dernier, plus de 8000 élèves (soit 287 classes) ont participé à ce rallye. Sept classes ont été primées, dont la 3^{e} D du collège Le Tertre de Remiremont et la 2nde 3 du lycée Fabert de Metz classées premières.

Le rallye 2016 aura lieu le **jeudi 1er avril** (ce n'est pas un poisson)
N'oubliez pas d'y inscrire vos classes !
Les inscriptions devraient être ouvertes mi-janvier : www.apmeplorraine.fr
(la date limite d'inscription est fixée au 15 mars, dernier délai)

TROUVER LE QUATRIÈME

Par François DROUIN

Suite à l'atelier « La règle de trois au Cycle 3 » de la journée régionale de mars 2012, j'avais déposé certains documents présentés sur l'ancien site de notre régionale. Celui-ci est de nouveau actif, les documents sont maintenant accessibles à l'adresse http://apmeplorraine.fr/old/modules/regionale/jr_2012/B01_Trouver_le_quatrieme.zip.

J'ai alors eu envie de repréciser et compléter ce qui avait été dit pendant l'atelier.

Dans les programmes 2008, au CM1 et au CM2

- Utiliser un tableau ou la "règle de trois" dans des situations très simples de proportionnalité.

- Résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité et notamment des problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes ou aux conversions d'unité, en utilisant des procédures variées (dont la "règle de trois").

Le but de l'atelier était d'une part de préciser ce qui se cachait derrière l'expression « règle de trois » et la présentation de « procédures variées » pouvant être mises en œuvre par les élèves. Il est à noter que les enseignants de Cycle 3 durent attendre 2012 et la parution du document « Le nombre au Cycle 3 » pour avoir des précisions officielles au sujet de ce qui était attendu à propos de l'enseignement de cette « règle de trois ».
Ce document est accessible en particulier sur le site national de l'APMEP à l'adresse http://www.apmep.fr/IMG/pdf/NombreCycle3_web_VD_227449.pdf.

Présentation des documents

Cinq séries de tableaux sont proposées. Ils pourront être découpés pour les élèves, agrandis pour être présentés face à la classe ou être projetés au tableau. Voici deux exemples extraits du premier ensemble.

3 roses	**2 €**
6 roses	**4 €**

4 roses	**7 €**
5 roses	**8,75 €**

Pour certains tableaux, les opérateurs mis en jeu peuvent être trouvés mentalement, pour d'autres, un calcul posé ou une calculatrice sera nécessaire. L'entourage des cases du bas est différent de celui des cases du haut : ceci sera utilisé lorsque les rectangles d'un tableau seront présentés dans un ordre quelconque.
La première série aborde des prix de roses, la deuxième des changements d'unités, la troisième est une rencontre avec « pour 100 », la quatrième est une approche de la notion de vitesse horaire et la cinquième fait travailler avec l'échelle d'un plan.

Remarque : dans la quatrième série, un mot « pour » a été oublié dans un rectangle du jeu « 1e » …

…/…

Utilisation des quatre cases d'un tableau

4 roses	7 €
5 roses	8,75 €

Un tableau est proposé aux élèves. Ceux-ci doivent rédiger des phrases correspondant aux grandeurs repérées dans les cases. Voici quelques exemples :

4 roses coutent 7 €.

Avec 7 €, je peux acheter 4 roses.

Il est à remarquer que ce tableau permet rapidement de trouver le prix d'une rose…

Les quatre rectangles peuvent être présentés dans un ordre quelconque et être ensuite replacés dans un tableau 2×2.

8,75 €	4 roses	5 roses	7 €

Les entourages des rectangles incitent au regroupement de « 8,75 € » et « 5 roses » et au regroupement de « 4 roses » et « 7 € ».

8,75 €	4 roses	5 roses	7 €

Si les rectangles n'étaient plus entourés différemment, les élèves pourraient tout de même convenir que lorsque 4 roses coutent 8,75 €, 5 roses semblables ne peuvent pas couter 7 €…

Utilisation de trois des quatre cases d'un tableau

3 roses	
6 roses	4 €

	7 €
5 roses	8,75 €

Dans le premier cas, repérer que « 3 roses » est la moitié de « six roses » ou compléter l'égalité « … roses × 2 = 6 roses » permet de retrouver la case manquante. Dans le second cas, conformément à ce qui est précisé dans le document « Le nombre en cycle 3 » et dans les programmes de sixième en vigueur en 2012, la recherche du « nombre de roses obtenu avec 1 € » sera l'étape intermédiaire pour retrouver le nombre de roses. Le résultat non entier perturbera sans doute les élèves, cependant l'usage d'une calculatrice scientifique donne un résultat entier à « 5:8,75 × 7 ». L'élève aura sans doute envie de calculer le « prix d'une rose », il trouvera « 1,75 € ». Dans ce cas, compléter l'égalité « … × 1,75 = 7 » permet de trouver le nombre de roses cherché. Les unités n'ont pas été écrites car l'égalité aurait alors dû s'écrire « … roses × 1,75 € /rose = 7 € », dépassant le niveau de compréhension des enfants.

Cet exemple peut expliquer pourquoi l'usage des unités dans les calculs est abandonné pendant les années de collège.

Les utilisateurs de ces séries de tableaux sauront choisir des ensembles de trois cases permettant un passage à l'unité plus aisé, les autres pourront être utilisés en classe de sixième.

En 2012, l'égalité des produits en croix n'était abordée qu'en classe de quatrième. Voici un rappel de deux méthodes mettant en œuvre le retour à l'unité présent à cette époque dans les programmes de sixième et dans le document « Le nombre en cycle 3 ».

4 roses

7 €

5 roses

Dans cet exemple, le passage à l'unité concernera le prix d'une rose. Il sera aisément perçu par les élèves.

La réécriture de l'énoncé sous forme de phrases pourra être demandée :

4 roses coutent 7 €. Quel est le prix de 5 roses ?

4 roses coutent 7 €.
1 rose coute (7 :4) €.
5 roses coutent (7 :4) × 5 €.

Voici une occasion de mettre en évidence le rôle des parenthèses.

Les programmes de CM1 suggéraient l'usage d'un tableau. Dans ce cas, le passage à l'unité pouvait aussi être mis en œuvre.

Nombre de roses	4	5	1
Prix des roses en €	7		

Il était cependant important que l'élève ait à sa disposition des méthodes variées et sache prendre la décision de choisir la plus pertinente.

Dans les nouveaux programmes présentés en 2015

http://www.education.gouv.fr/cid87938/projets-de-programmes-pour-l-ecole-elementaire-et-le-college.html

L'élève doit savoir « *Reconnaitre et résoudre des problèmes relevant de la proportionnalité en utilisant une procédure adaptée* », utiliser les « *propriétés additives et multiplicatives (linéarité)* », « le *passage par l'unité* », utiliser « *un tableau* », résoudre des « *Problèmes relevant de la proportionnalité dans le cadre de différentes grandeurs et de différents contextes* ». Les documents déposés en 2012 pourront donc continuer à être utilisés par les enseignants du nouveau Cycle 3.

retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

DES ANAMORPHOSES EN CLASSE DE SIXIÈME

Par Claire STAUB, professeur de mathématiques
Collège Paul Éluard, Brétigny-sur-Orge

La mise en œuvre de ce qui suit s'est faite dans le même cadre que celui de l'activité « LIRE UNE IMAGE » présentée dans Le Petit Vert n°124. Aude MAIREAU, professeur de français stagiaire dans l'établissement, s'est chargée de la partie « étymologie et définition ».

Des anamorphoses extraites d'un diaporama présenté lors d'un temps de formation continue ont été montrées aux élèves : des exemples dans des peintures et des gravures, dans des éléments de signalétique sur des routes ou dans des stades, parmi des œuvres relevant du Street Art et parmi des installations d'artistes contemporains.

Première séance

Dans son chapitre 9 « Éléments de géométrie », le manuel Phare 6e (Hachette-édition 2014) propose trois photos d'une œuvre de Felice Varini.



Pour cette œuvre nommée « Twenty Points for Ten Straight Crossing - 2008 », l'artiste a peint des segments de couleurs qui semblent être concourants en se plaçant à un endroit précis.

Suite à cette présentation, l'activité suivante est proposée (exercice 84).

1-Au centre d'une feuille blanche, tracer un segment AB de longueur 6cm et placer son milieu I.

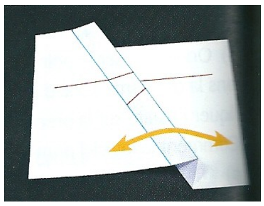
2-a) Tracer en bleu la droite perpendiculaire au segment qui passe par A.

b) Tracer en bleu la droite perpendiculaire au segment qui passe par B.

c) Tracer en bleu la droite perpendiculaire au segment qui passe par I.

3- Plier la feuille le long des trois lignes bleues de manière à obtenir une languette.

Comme ceci



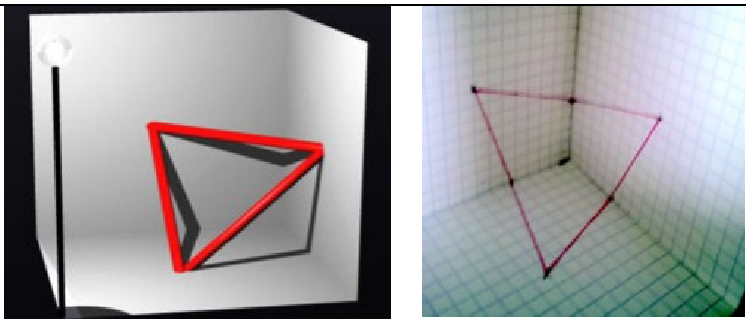
4- a) En rabattant cette languette à gauche, tracer en rouge une droite non perpendiculaire aux droites bleues.

b) En rabattant cette languette à droite, compléter le tracé de cette droite rouge.

5- Déplier la feuille. Que peut-on observer ?

Le pliage de la feuille a posé problème, nous avons dû aider les élèves. Par ailleurs à la question « que peut-on observer ? », les élèves ont répondu qu'il y avait en fait deux segments rouges et non une droite rouge et que de plus les segments rouges paraissaient parallèles. Le lien avec l'œuvre de Felice Varini présentée n'a pas été clair.

retour au sommaire



Ces deux images sont extraites d'un autre diaporama présenté pendant le même temps de formation continue. Elles suggèrent une autre possibilité de travail avec les élèves, très proche de ce que fait Felice Varini, projetant des ombres sur les monuments supports de son œuvre.

Une lampe est placée devant le triangle, les ombres sont dessinées sur les trois plans. Le triangle n'est alors visible qu'en un point précis.

Cette méthode pourra être reprise dans un autre travail envisagé pendant cette année scolaire.

Deuxième séance

Cette séance abordait les « anamorphoses catoptriques » (avec miroir cylindrique ou conique). Des exemples créés par Philippe Comar pour l'exposition Sténopé de la cité des Sciences ont été montrés aux élèves (d'autres se trouvent dans la Revue Hyper-cube n° 39-40, « La perspective, février-mars 2002 »).

Les miroirs cylindriques mis à disposition des élèves pour vérifier leurs productions ont été réalisés avec du carton miroir acheté dans un magasin de loisirs créatifs.

Une erreur d'orientation de la grille en secteur circulaire n'a pas été remarquée par les élèves et ils ont dû recommencer leur dessin. Cet exercice de décodage et codage a fourni de nombreuses productions d'élèves satisfaisantes.

En annexe (page suivante) : une des grilles utilisées pendant cette séance ainsi qu'une production d'élève.

Une anamorphose vue dans une rue de Namur

Éléments de sitographie proposés par le comité de rédaction du Petit Vert

http://www.sciencesalecole.org/documentsSAE/CGénial/Finale2015/Comptes-rendus/Dijon_dossier_c_genial.pdf : Un dossier utilisé dans le cadre d'un atelier scientifique au collège de Luzy (Nièvre)

http://images.math.cnrs.fr/La-peinture-et-son-double.html Une présentation et une étude du tableau « Les Ambassadeurs » (National Gallery, Londres) peint en 1533 par Hans Holbein.

http://irem.u-bourgogne.fr/images/stories/fichiers/groupe_math_et_art/anaconeslanaud.pdf À propos d'anamorphoses coniques en classe de quatrième

retour au sommaire

http://www.varini.org/ : le site de Felice Varini

http://www.varini.org/05vid/vid01.html Cette courte vidéo montre les ombres projetées puis peintes sur les monuments.

http://www.varini.org/02indc/32indcc09.html L'œuvre installée en 2009 à Metz

http://www.varini.org/02indc/33indcr10.html L'œuvre installée en 2010 au musée des Beaux Arts de Nancy

https://fr.wikipedia.org/wiki/École_nationale_supérieure_d%27architecture_de_Nancy Une œuvre de Felice Varini à l'école d'architecture de Nancy

http://www.anamorphosis.com/ un site présentant de nombreuses anamorphoses

http://www.anamorphosis.com/stenope.html : Une présentation de l'exposition Sténopé à la Cité des Sciences de la Villette

http://www.francois-abelanet.com/ : le site de François Abelanet, créateur d'anamorphoses

http://kurtwenner.com/ Le site de Kurt Wenner, artiste alliant Street Art et Anamorphoses

http://www.leonkeer.com/ Le site de Leon Kleer, artiste alliant Street Art et Anamorphoses

http://www.julianbeever.net/ Le site de Julian Beever, artiste alliant Street Art et Anamorphoses

http://www.artefake.com/L-ANAMORPHOSE.html L'anamorphose dans l'art contemporain

http://www.analysesdesequences.com/cours/point-de-vue/ Illusions d'optique et anamorphoses

---

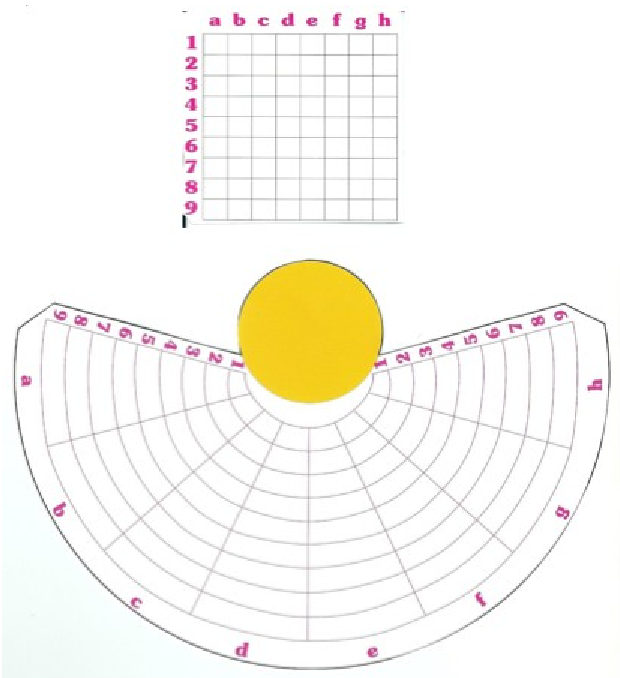
Annexe

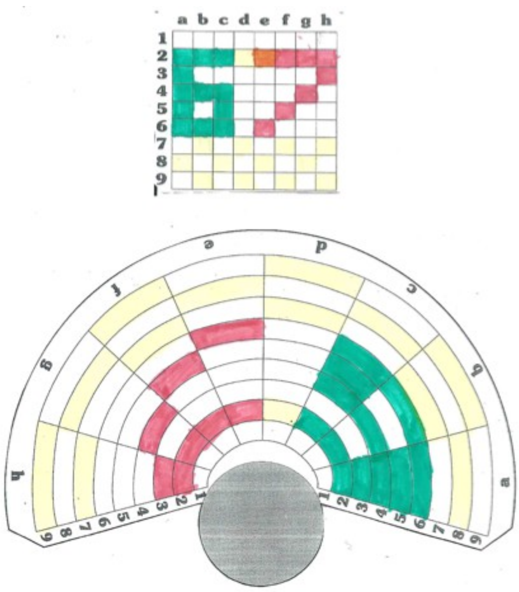
Consigne donnée pour l'activité

À vous de jouer.

Grâce aux grilles suivantes, essayez de réaliser vos propres anamorphoses. Une fois le dessin fini, le professeur te donnera une feuille miroir pour que tu observes le résultat.

Il faut d'abord faire le dessin dans la petite grille, puis le reporter dans la grille en forme d'« amphithéâtre ».





Les grilles ainsi que les patrons pour les miroirs sont extraits de la Revue Hyper-cube n° 39-40, « La perspective, février-mars 2002 ». Un exemplaire de miroir était fourni au lecteur.

■

DANS NOS CLASSES

SUITES NUMÉRIQUES EN TERMINALE S

par Alain Bougeard,
Professeur retraité
(Lycée Berthelot de Pantin puis lycée Paul Robert des Lilas)

Note de la rédaction : cet article a été publié dans « Chantiers mathématiques », bulletin de la régionale Apmep Ile-de-France, n°167 (décembre 2015). Nous les remercions de nous avoir autorisé à le reproduire.

Motivation

J'ai toujours considéré l'étude des suites comme particulièrement formatrice, permettant à peu de frais de s'attaquer à des exercices de recherche particulièrement enrichissants.
Ce n'est pas souvent l'avis des élèves qui se noient dans des difficultés conceptuelles, par exemple la liaison entre l'aspect suite (des nombres qui se suivent à la queue-leu-leu…) et l'aspect fonctionnel (à tout entier on fait correspondre un nombre réel), ou dans des difficultés pratiques (par exemple se débarrasserons-nous un jour de la notation indicielle et choisira-t-on définitivement que le premier terme d'une suite est u(0) ou u(1) ?).
Je choisissais cette activité en Terminale car, après le premier contact en première, les réponses le plus souvent obtenues à la question « Qu'est-ce qu'une suite ? » étaient « Euh, ben y'a les suites arithmétiques et les suites géométriques… ». Cette activité introductrice prenait alors aussi l'aspect d'une activité réparatrice…

Première séance (1 heure)

Distribution du test d'intelligence (tableau ci-dessous) en grand mystère et … « Vous avez 15 minutes pour compléter ces suites ! ».

TEST D'INTELLIGENCE	
Compléter logiquement les suites suivantes	
	Suite (U_n)
(A_n)	0 1 2 3 4 5 ...
(B_i)	1 3 5 7 9 ...
(C_k)	1 1 1 1 1 ...
(D_p)	1 2 4 8 16 ...
(E_j)	1 3 4 7 11 18 ...
(F_m)	1 2 5 14 41 ...
(G_h)	1 2 5 10 17 26 ...
(H_r)	0 1 4 11 26 57 ...
(I_a)	2 3 4 2 8 1 16 0 ...
(J_b)	2 3 5 7 11 13 17 19 ...

N.d.l.r. Nous encourageons le lecteur à faire ce test avant de poursuivre la lecture.

Au bout de ces 15 minutes, et avec parfois quelques difficultés à recentrer l'attention, on passait à la « correction ».
1ère ligne : « 0, 1, 2, 3, 4, 5, ….6, 7, 8, 9 - Oui ! Autre solution ? - ??? ».
En général silence étonné et lorsque je proposais « 0, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, … » ou « 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2, 3, 4, 5,… » je ne recevais en général qu'une attention incrédule et il me fallait plusieurs minutes de discussion serrée pour faire admettre qu'on ne pouvait rien

retour au sommaire

déduire « logiquement » de la donnée des premiers termes et que le titre « Test d'intelligence » et l'injonction « compléter logiquement les suites suivantes » méritaient largement la pose de guillemets autour de « intelligence » et de « logiquement ».
Surtout qu'ensuite il fallait leur faire reconnaitre que parmi les diverses suites que l'imagination pouvait proposer, on devait bien admettre que certaines étaient plus « naturelles », plus « simples », mais pas forcément plus logiques !

À la suite de quoi on entamait le remplissage des 2e et 3e colonnes (définition par récurrence et définition fonctionnelle) après une petite discussion pour poser $A_0 = 0$.
En général on avait le temps de terminer les cinq premières lignes (sauf bien sûr l'expression fonctionnelle de E qui ferait l'objet d'un devoir à la maison ultérieurement) et le travail pour la prochaine séance était de terminer les cinq lignes suivantes.

Seconde séance (1 heure)

Consacrée principalement à la correction des cinq dernières lignes dont un certain nombre d'élèves avaient « intuité » les résultats mais pas assez pour pouvoir écrire les définitions par récurrence ou fonctionnelle.
Les trois premières donnaient l'occasion de travailler sur les suites des différences (voire des différences des différences) et de remonter. L'avant dernière permettait d'évoquer la notion de suites extraites et pour la dernière, dont très peu avaient pensé qu'elle représentait la suite des nombres premiers, j'obtenais toujours un certain succès en annonçant que si l'un d'entre eux parvenait à trouver l'expression par récurrence ou fonctionnelle de cette suite, il avait gagné immédiatement sa place au Panthéon des mathématiciens !
Souvent il restait assez de temps pour commencer l'étude de la fiche des résultats à connaitre pour pouvoir s'attaquer aux exercices.

Si vous êtes intéressés par les résultats vous pouvez trouver ci-dessous la fiche complétée.

TEST « D'INTELLIGENCE »			
Compléter « logiquement » les suites suivantes			
	Suite (U_n)	Définition par récurrence	Définition fontionnelle
(A_n)	0 1 2 3 4 5 6 7 8	$A_n = A_{n-1}+1$; $A_0=0$	$A_n = n$
(B_i)	1 3 5 7 9 11 13 15	$B_i = B_{i-1}+2$; $B_0=1$	$B_i = 2\times i+1$
(C_k)	1 1 1 1 1 1 1 1 1	$C_k = C_{k-1}$; $C_0=1$	$C_k = 1$
(D_p)	1 2 4 8 16 32 64 128	$D_p = 2\times D_{p-1}$; $D_0=1$	$D_p = 2^p$
(E_j)	1 3 4 7 11 18 29 47 76	$\begin{cases} E_j = E_{j-1}+E_{j-2} \\ E_0=1 \; et \; E_1=3 \end{cases}$	$E_j = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{j+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{j}$
(F_m)	1 2 5 14 41 122 365 1094	$F_m = F_{m-1}+3^{m-1}$; $F_0=1$	$F_m = \frac{1+3^m}{2}$
(G_h)	1 2 5 10 17 26 37 50 65	$G_h = G_{h-1}+2h-1$; $G_0=1$	$G_h = 1+h^2$
(H_r)	0 1 4 11 26 57 120 247 502	$H_r = H_{r-1}+2^r-1$; $H_0=0$	$H_r = 2^{r+1}-(r+2)$
(I_a)	2 3 4 2 8 1 16 0 32 -1 64 -2	$\begin{cases} Si \; a \; pair : I_a = I_{a-2}\times 2 \; ; I_0=2 \\ Si \; a \; impair : I_a = I_{a-2}-1 \; ; I_1=3 \end{cases}$	$\begin{cases} Si \; a \; pair : I_a = 2^{a/2+1} \\ Si \; a \; impair : I_a = 3-\frac{a-1}{2} \end{cases}$
(J_b)	2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31	???	???

N.d.l.r. Cette activité est à rapprocher de l'activité « Suites logiques » qui figure dans la brochure « Dé-chiffrer par les maths » (chapite 6, pages 149-152). Cette brochure est en vente à l'IREM de Lorraine et sur le site de l'APMEP.

retour au sommaire

DÉMARCHE DE RECHERCHE SUR PROBLÈME OUVERT

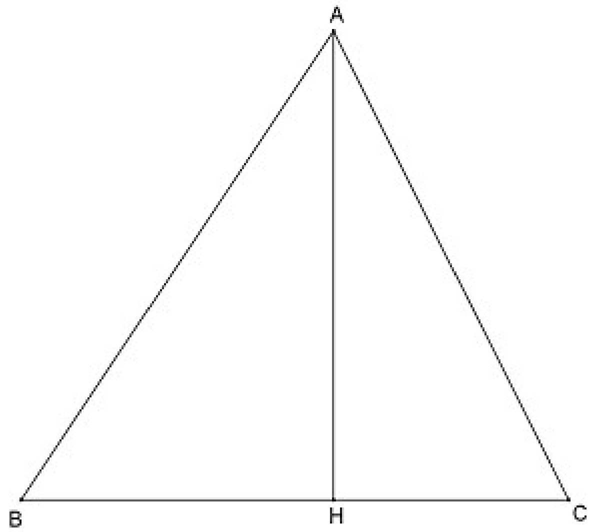
Une bévue source d'apprentissage

par Walter NURDIN, ÉSPÉ Lorraine, site de Nancy
Enseignant formateur pour le premier degré
(étudiants préparant le C.R.P.E.)

Pris par la recherche d'un problème dont les données sont inhabituelles et dont la résolution mélange géométrie et algèbre, j'ai oublié l'un des principes de tout questionnement mathématique : la solution existe-t-elle et est-elle unique … ou pas ?
En oubliant ce fondamental, comme l'assène Bernard Laporte[1], j'ai pu revisiter les avantages du travail de groupe avec mes collègues Renaud et Jacques, me réapproprier des techniques oubliées, découvrir un problème où l'usage des TUIC[2] est indispensable et partager cette démarche de recherche avec des professeurs d'école en formation.

Voici le problème déclencheur trouvé dans la revue tangente n°154.

Dans ce triangle, les mesures des côtés [AB] et [AC] et de la hauteur [AH] (H pied de la hauteur issue de A au côté [BC]) sont trois nombres entiers consécutifs. Les nombres mesurant BH et HC sont également entiers.Quelle est l'aire de ce triangle ?



Jacques m'a fait remarquer qu'il faudrait envisager deux cas suivant que H appartient au segment [BC] ou non. Les formules donnant BH et HC ne vont certes pas changer, cependant il faut bien envisager les deux cas. Ici, comme l'aspect du triangle est donné et que la question semble désigner le triangle ci-dessus, on peut envisager que l'on n'étudie que ce cas.

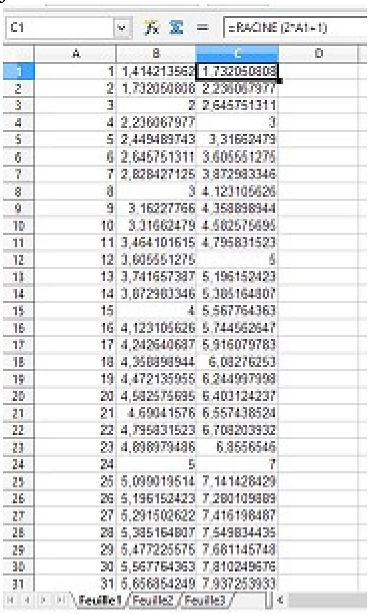
Le problème présente déjà l'intérêt de rappeler que l'hypoténuse d'un triangle rectangle est le plus grand des côtés. Le théorème de Pythagore est utilisé et si l'on veut trouver une solution il est préférable de développer et de simplifier les écritures. Enfin, pour finaliser l'exercice, le plus simple est d'utiliser une méthode par essais systématiques. Les programmes de l'école primaire demandent de présenter cette technique aux élèves. On a donc là un problème adapté aux étudiants, où on peut reprendre des démarches qu'ils auront à enseigner dans les classes.Voici un résumé de la démonstration, agrémenté de remarques.

[1] Ancien entraineur et sélectionneur du XV de France (rugby), actuel entraineur du R.C. Toulon.

[2] Techniques usuelles de l'information et de la communication (dans le socle commun des connaissances et des compétences pour les élèves).

retour au sommaire

Le fait de noter a, a+1, a+2 les trois nombres consécutifs n'a pas posé de problème. Un problème arithmétique précédent nous avait obligé à comprendre ces écritures. Il ne faut pas oublier que plus d'un tiers des étudiants préparant le CRPE ont un baccalauréat littéraire et n'ont donc pas en général exercé leurs compétences mathématiques depuis plus de cinq ans et ne sont pas toujours très habiles dans le maniement des formules. Le fait que a soit AH a été plus délicat, mais la petite ritournelle de « l'hypoténuse plus grand des trois côtés d'un triangle rectangle » a bien aidé. Les automatismes et apprentissages par cœur soutiennent parfois les démonstrations.
Pour a+1 et a+2, on a le choix entre AB et AC. Nous avons pris AB = a+2 et AC = a+1. On ne va pas, à cet instant, créer un obstacle en prenant le contrepied de la figure qui semble indiquer que AB est supérieur à AC.
Le théorème de Pythagore appliqué aux deux triangles rectangles AHB et AHC nous apprend que $BH=2\sqrt{a+1}$ et $HC=\sqrt{2a+1}$
Pour beaucoup, ces écritures ne sont pas aisées à obtenir. Chaque étape doit être explicitée comme on a pu le faire en troisième.
Il faut alors trouver un entier a qui permette d'obtenir BH et HC.
Les étudiants rechignent en général à tester systématiquement des valeurs. Ils pensent que cela n'est pas « mathématique ». Surtout lorsque l'on commence par $a = 0$, valeur qui donne certes des nombres entiers acceptables mais un triangle aplati. Ils ont alors concédé qu'une autre valeur doit être trouvée.
Les difficultés en calcul mental vont alors surgir. Multiplier par 2, ajouter 1, et chercher si c'est un carré, n'est pas une tâche aisée pour les M1. J'en profite pour justifier le quart d'heure réglementaire de calcul mental à l'école primaire, pour entre autre provoquer ultérieurement cette familiarisation avec les nombres. Puisque le calcul mental n'est pas aisé, on continue pas à pas dans un tableau. On retrouve ainsi une méthode de raisonnement qu'ils pourront mettre en place dans leur classe de primaire.
Heureux hasard, nous allons voir pourquoi, c'est la fin du cours. Je leur demande évidemment de continuer le tableau pour trouver éventuellement une valeur.
Il faut arriver jusqu'à a = 24 pour trouver BH = 10 et HC = 7. Une étudiante proche du résultat qui venait de tester 20 me demande s'il fallait encore aller plus loin. En lui disant oui et en ajoutant que parfois cela demande de longs calculs, je me rends brusquement compte que rien ne me dit qu'il n'existe qu'une seule solution, sinon le singulier dans l'énoncé de la question.
Oubli impardonnable !
Après le départ de l'étudiante, seul, je teste sur un tableur les 500 premiers nombres.



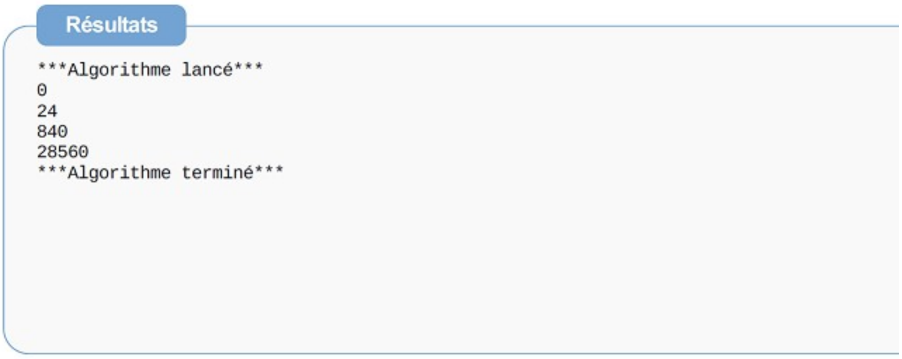
C1 =RACINE (2*A1+1)

	A	B	C	D
1	1	1,414213562	1,732050808	
2	2	1,732050808	2,236067977	
3	3	2	2,645751311	
4	4	2,236067977	3	
5	5	2,449489743	3,31662479	
6	6	2,645751311	3,605551275	
7	7	2,828427125	3,872983346	
8	8	3	4,123105626	
9	9	3,16227766	4,358898944	
10	10	3,31662479	4,582575695	
11	11	3,464101615	4,795831523	
12	12	3,605551275	5	
13	13	3,741657387	5,196152423	
14	14	3,872983346	5,385164807	
15	15	4	5,567764363	
16	16	4,123105626	5,744562647	
17	17	4,242640687	5,916079783	
18	18	4,358898944	6,08276253	
19	19	4,472135955	6,244997998	
20	20	4,582575695	6,403124237	
21	21	4,69041576	6,557438524	
22	22	4,795831523	6,708203932	
23	23	4,898979486	6,8556546	
24	24	5	7	
25	25	5,099019514	7,141428429	
26	26	5,196152423	7,280109889	
27	27	5,291502622	7,416198487	
28	28	5,385164807	7,549834435	
29	29	5,477225575	7,681145748	
30	30	5,567764363	7,810249676	
31	31	5,656854249	7,937253933	

Feuille1 / Feuille2 / Feuille3

retour au sommaire

Aucune solution visible. Je n'y crois pas, je persiste.
Jacques, de son côté, a prolongé son tableau jusqu'à 1000 et trouve une nouvelle valeur : a=840.
Ignorant à cet instant son travail, un programme sur AlgoBox me permet d'en trouver une autre : $a = 28560$.



Nous voici avec quatre valeurs ; trois si l'on ignore le zéro.
Le singulier vole alors en éclat, il y a plusieurs aires possibles. Une infinité est probable mais la démonstration ne m'était pas disponible à cet instant.
Jacques observe dans son tableau que les écarts entre les valeurs entières successives de BH et HC forment une suite arithmétique.
Le soir, je trouve que les nombres doivent vérifier : $BH^2 = 2HC^2 + 2$ et quelques propriétés de divisibilité. Mais j'en reste là.

Bien entendu, le lendemain, les étudiants ont eu le compte rendu de la recherche et l'historique de la démarche. J'ai mis alors en œuvre une des phases de l'*enseignement explicite*[3] en mettant « un haut parleur » sur mes pensées.
J'ai profité de cette résolution pour présenter une utilité des moyens informatiques et les savoirs à connaitre pour le concours.
Il me restait une dernière interrogation, toujours donnée aux étudiants, y-a-t-il une infinité de solutions ?
Le travail de groupe va m'aider à répondre à la question.

Une première recherche par Renaud Dehaye, collègue de l'ESPE à qui j'avais également proposé le problème, a permis d'orienter une recherche commune.
Il se souvenait de l'algorithme de Théon qui permet de résoudre l'équation $x_n^2 = 2y_n^2 +/- 1$ proche de l'équation attendue.
La résolution reprise, on s'engage tous les deux dans l'adaptation de la méthode.
Si on reprend les deux égalités de BH et HC on obtient :
$BH^2 = 4(a+1)$ et $HC^2 = 2a + 1$
Et donc on a bien: $BH^2 = 2HC^2 + 2$.
On peut déjà remarquer que BH et HC ne peuvent pas être nuls.
Réciproquement, si on a des entiers BH et HC qui vérifient l'égalité ci-dessus, cela signifie que BH^2 est divisible par 2, donc que BH est divisible par 2. Ainsi BH^2 est divisible par 4. Je retrouvais là une de des conclusions de ma première recherche et de celle de Jacques. On peut donc écrire qu'il existe un entier p tel que : $BH^2 = 4(p+1)$
L'égalité fait que $4(p+1) = 2HC^2 + 2$, donc $HC^2 = 2p + 1$.
Ainsi, si on trouve une suite d'entiers qui vérifie l'égalité précédente, on aura une infinité d'entiers qui répondent au problème.
On a alors imité la démarche de Théon pour trouver une suite x_n qui représente des BH possibles et y_n des HC également possibles vérifiant : $x_n^2 = 2y_n^2 + 2$
Il restait désormais à trouver une double suite de récurrence qui se présente ainsi :

$$x_{n+1} = ax_n + by_n$$
$$y_{n+1} = cx_n + dy_n$$

[3] www.3evoie.org/

Les valeurs trouvées avec Algobox, indispensable à ce moment de la démonstration pour l'accélérer, vont permettre de déterminer *a, b, c* et *d*.

$x_1 = 10$ et $y_1 = 7$, puis $x_2 = 58$ et $y_2 = 41$ enfin $x_3 = 338$ et $y_3 = 239$

Les égalités posées on trouve :

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$$
$$y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

La récurrence peut débuter.

Montrons que ces suites satisfont à l'égalité $x_{n+1}^2 = 2y_{n+1}^2 + 2$.

L'égalité est évidement vérifiée aux rangs 1 et 2 puisqu'on l'a construite ainsi.

L'hérédité peut débuter.

On suppose qu'au rang *n* l'égalité est vérifiée.

Étudions $x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 - 2$

$x_{n+1}^2 - 2y_{n+1}^2 - 2 = (3x_n+4y_n)^2 - 2(2x_n+3y_n)^2 - 2 = x_n^2 - y_n^2 - 2 = 0$.

Ainsi on a donc une double suite qui vérifie l'égalité précédente pour tout entier supérieur ou égal à 1.

Ces suites, non constantes, évidement strictement croissantes, prouvent qu'il existe une infinité de nombres vérifiant l'égalité et donc le problème.

J'ai simplement évoqué en cours que nous avions prouvé qu'il existait une infinité de solutions et insisté uniquement sur la coopération et le travail en commun, compétences attendues dans les « *compétences communes à tous les professeurs et personnel de l'éducation*[4] ».

Et dit qu'il restait désormais une dernière question mathématique que l'on pouvait se poser :

Les solutions sont-elles toutes atteintes par ces formules ?

A vous !

N.d.l.r. La brochure « Travail de groupe en séquences longues : démarche de recherche sur problèmes ouverts », publiée par la régionale en 1986 est désormais téléchargeable en ligne sur Ressources numérisées des IREM

En supplément, un problème trouvé sur le net...

Dans un triangle ABC (non isocèle), on définit A' et A" comme intersections des bissectrices intérieure et extérieure de l'angle A avec BC ; de même pour B', B", C', C".

On considère 12 segments : les 3 côtés, les 3 hauteurs, les 6 bissectrices AA', AA", BB', BB", CC', CC", et 5 rayons : ceux des cercles circonscrit au triangle, inscrit et exinscrits.

On demande de construire un triangle où les 17 longueurs de ces segments et de ces rayons sont mesurées par des nombres entiers.

■

4 http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=73066

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LA ROUE ET LA ROUTE

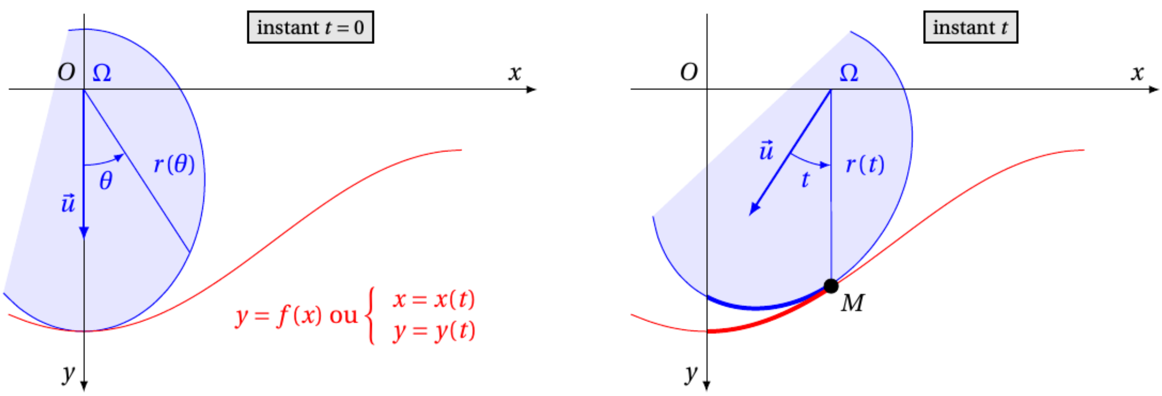
Par Alain SATABIN,
Professeur retraité du lycée de Lunéville

1. Ré-inventons la roue !

Pourquoi des roues circulaires ? N'est-il pas possible de concevoir une roue d'une forme différente ?
La contrainte étant que l'axe décrive une trajectoire rectiligne lorsque la roue tourne, il est clair que la roue circulaire avec axe au centre et une route plane fournissent la solution la plus simple. Qui plus est, cette solution triviale confère à l'axe une vitesse constante lorsque la roue tourne à vitesse constante.
Donc gardons nos habitudes pour nos moyens de transport !
Mais quand même . . . essayons d'envisager d'autres possibilités.

2. Mathématisons le problème

L'équation de la route (en rouge) est posée sous forme fonctionnelle $y=f(x)$ ou paramétrique $(x(t); y(t))$ dans un repère (Oxy) où l'axe des abscisses est orienté vers la droite et celui des ordonnées vers le bas[5].
La roue (en bleu) sera paramétrée en polaire avec origine à la position de son axe Ω et une direction de référence $(\mathrm{O}, \vec{u})$ correspondant à un des « rayons » de la roue.
À l'instant 0, l'axe Ω est en O et le rayon $(\mathrm{O}\,\vec{u})$ attaché à la roue coïncide avec (Oy) . De plus, lorsque la roue tourne et se déplace sans glisser sur la route, son axe Ω doit décrire l'axe (Ox) .
Il n'est pas restrictif de supposer que la vitesse angulaire de la roue est 1 radian par seconde, c'est à dire qu'à l'instant t la roue a tourné d'un angle t , et qu'elle se déplace de la gauche vers la droite. De plus, son axe est toujours situé à la verticale du point M de contact avec la route.



Ce point M a pour coordonnées $(x(t); y(t))$ avec $y(t)=r(t)$ et une abscisse égale à celle de Ω .
Le fait que la roue roule sans glisser sur la route se traduit pas le fait que les distances curvilignes en gras sur la figure de droite (rouge et bleue) sont égales. Cette condition s'écrit :

$$\int_0^t \sqrt{r^2\,dt^2 + dr^2} = \int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

Ce qui conduit à l'équation différentielle :

[5] Histoire que la roue soit au-dessus de la route.

retour au sommaire

Et compte tenu du fait que $\begin{cases} y(t)=r(t) \\ r(t)>0 \\ \dfrac{dx}{dt}>0 \end{cases}$, on obtient $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r(t) \\ x(0)=0 \end{cases}$

Les contraintes liant la roue et la route sont donc les suivantes :

$$\begin{cases} x(t)=\int_0^t r(v)\,\mathrm{d}v \\ y(t)=r(t) \end{cases}$$

Dans certains cas, l'élimination du paramètre entre x et y donnera une équation fonctionnelle de la route.

3. Petite remarque sur la vitesse

En supposant que la roue a une vitesse angulaire constante, son axe avance à une vitesse de :

$$x'(t)=r(t)$$

Le véhicule avance donc d'autant moins vite que l'axe est près de la route . . . ce qui, somme toute, est assez logique !

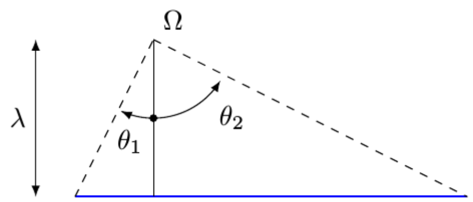
Pour une roue circulaire avec axe au centre, on retrouve une avance régulière puisque l'axe est toujours à la même distance de la route.

Dans les autres cas l'avance se fera de façon irrégulière pouvant occasionner quelques nausées [6] !

4. Une roue polygonale

Étudions le cas où une portion de roue est un segment de droite. Il suffira ensuite d'abouter les solutions trouvées pour la route afin de l'adapter à une roue polygonale.

La bande de roulement de la roue (en bleu) étant située à une distance λ de l'axe Ω et délimitée par les angles polaires θ_1 et θ_2, son équation polaire est :



$$\begin{cases} r(\theta)=\dfrac{\lambda}{\cos(\theta)} \\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Pour l'équation de la route nous aurons donc, avec $\theta_1\leq t\leq\theta_2$:

$$\begin{cases} x(t)=\int_0^t \dfrac{\lambda}{\cos(v)}\,\mathrm{d}v=\lambda\ln\left(\tan\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) \\ y(t)=r(t)=\dfrac{\lambda}{\cos(t)} \end{cases}$$

En posant $u=\tan(\dfrac{t}{2})$ on obtient :

$$x=\lambda\ln(\frac{1+u}{1-u})=2\lambda\,\mathrm{arg\,tanh}(u) \text{ et } y=\lambda\frac{1+u^2}{1-u^2}$$

Ce qui donne :

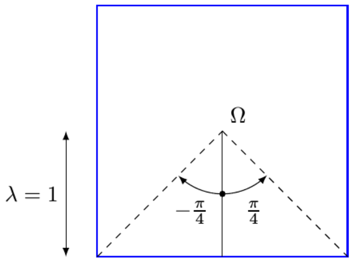
$$y=\lambda\frac{1+\tanh^2(\dfrac{x}{2\lambda})}{1-\tanh^2(\dfrac{x}{2\lambda})}=\lambda\cosh(\frac{x}{\lambda})$$

[6] Pensez à prendre votre "nautamine" !

retour au sommaire

La portion de route adaptée au segment de droite ci-dessus est donc la *chaînette* d'équation fonctionnelle :

$$\begin{cases} y=\cosh\left(\dfrac{x}{\lambda}\right) \\ \lambda \ln\left(\tan\left(\theta_1+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)<x<\lambda \ln\left(\tan\left(\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right) \end{cases}$$

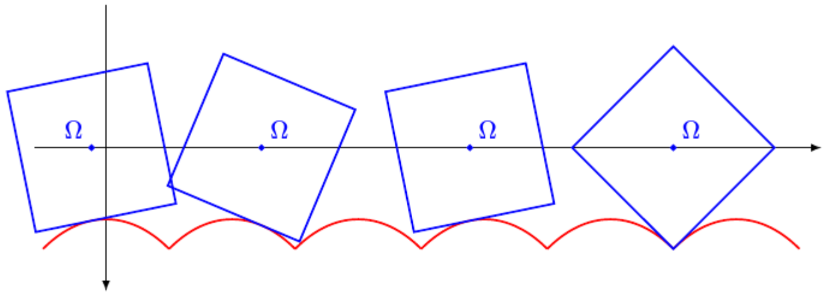


Prenons le cas d'une roue carrée de côté 2 avec l'axe au centre ($\lambda=1$). Le côté en contact avec la route à l'instant 0 est paramétré comme ci-dessus avec $\theta_1=-\dfrac{\pi}{4}$ et $\theta_2=\dfrac{\pi}{4}$.

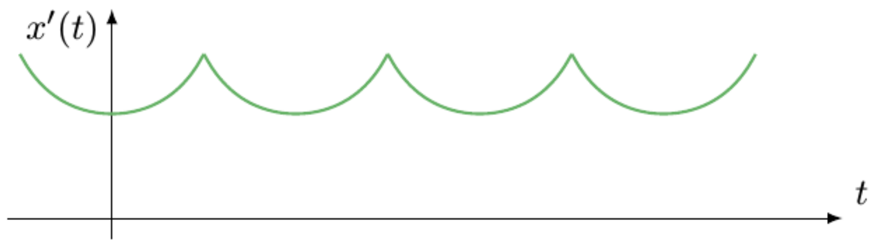
La portion de route adaptée au roulement de ce premier côté du carré a donc pour équation :

$$\begin{cases} y=\cosh(x) \\ -\ln(1+\sqrt{2})<x<\ln(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

Il suffit ensuite de produire cette portion périodiquement pour assurer le roulement des autres côtés du carré.



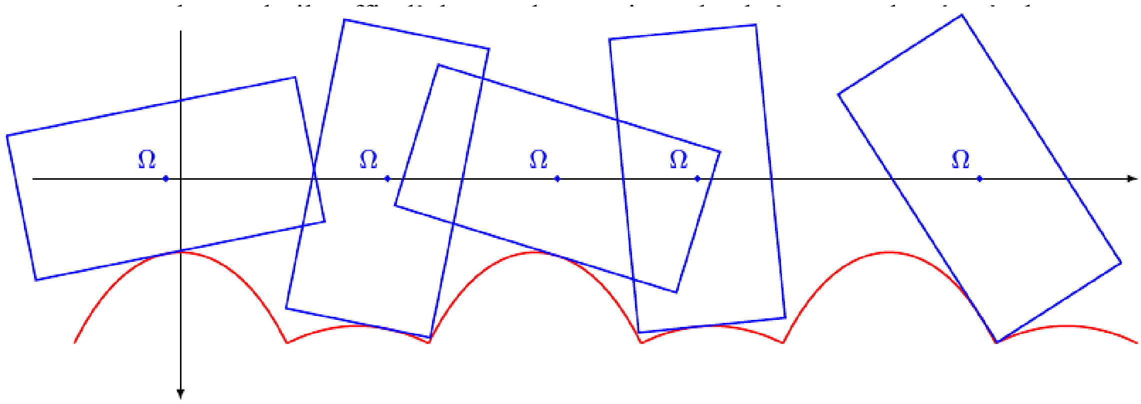
Et le diagramme de vitesse du véhicule est le suivant :



Si nous prenons un rectangle de côtés 2 et 4, avec axe au centre, je vous laisse le soin de vérifier que les chainettes de roulement sont des translatées de :

$$\begin{cases} y=\cosh(x) \\ -\ln(2+\sqrt{5})<x<\ln(2+\sqrt{5}) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y=2\cosh\left(\dfrac{x}{2}\right) \\ -2\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)<x<2\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

P… le la



retour au sommaire

5. Une roue elliptique

Considérons une roue *elliptique* avec son axe au foyer. En notant a son demi-grand-axe et e son excentricité, son équation polaire est :

$$r(\theta)=\frac{a(1-\mathrm{e}^2)}{1+\mathrm{e}\cos(\theta)}$$

Pour l'abscisse de l'axe et du point de contact à l'instant t, nous avons donc :

$$x(t)=a(1-\mathrm{e}^2)\int_0^t\frac{\mathrm{d}v}{1+\mathrm{e}\cos(v)}$$

Un changement de variable $u=\tan(\frac{v}{2})$ conduit à :

$$x(t)=a(1-\mathrm{e}^2)\int_0^{\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+\mathrm{e}+(1-\mathrm{e})u^2}=2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}}\tan\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

Cela permet d'obtenir : $\tan\left(\frac{t}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}}\tan\left(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}}\right)$

et donc :

$$\cos(t)=\frac{1-\tan^2(\frac{t}{2})}{1+\tan^2(\frac{t}{2})}=\frac{1-\frac{1+\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})}{1+\frac{1+\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}}\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})}=\frac{1-\mathrm{e}-(1+\mathrm{e})\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})}{1-\mathrm{e}+(1+\mathrm{e})\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})}$$

on en déduit :

$$1+\mathrm{e}\cos(t)=\frac{(1-\mathrm{e}^2)(1+\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}}))}{1-\mathrm{e}+(1+\mathrm{e})\tan^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})}=\frac{1-\mathrm{e}^2}{(1-\mathrm{e})\cos^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})+(1+\mathrm{e})\sin^2(\frac{x}{2a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})}$$

et finalement :

$$1+\mathrm{e}\cos(t)=\frac{1-\mathrm{e}^2}{1-\mathrm{e}\cos(\frac{x}{a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}})}$$

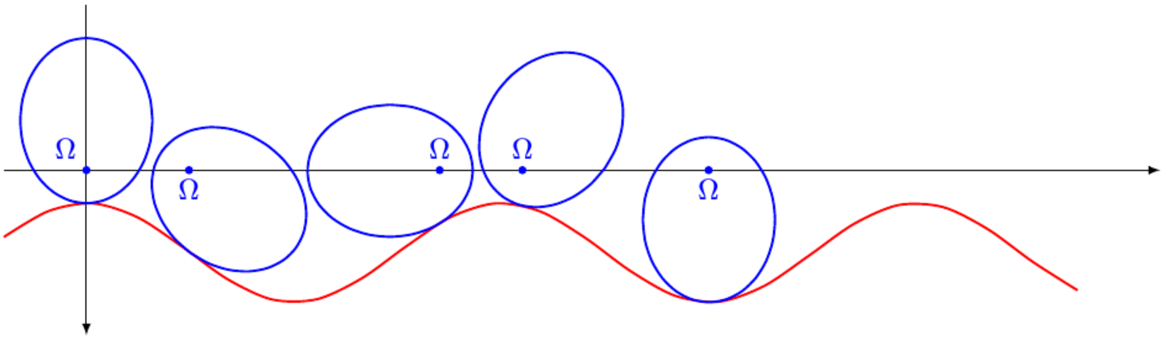
D'où, pour l'équation fonctionnelle de la route :

$$y=r(t)=\frac{a(1-\mathrm{e}^2)}{1+\mathrm{e}\cos(t)}=a\,(1-\mathrm{e}\cos(\frac{x}{a\sqrt{1-\mathrm{e}^2}}))=a-c\cos(\frac{x}{b})$$

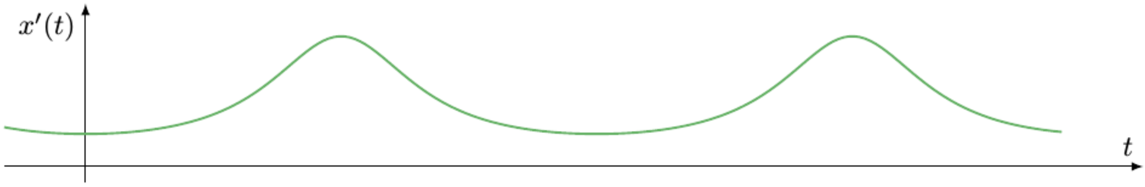
avec b et c les demi-petit-axe et demi-distance-focale de l'ellipse.

La route est une *sinusoïde*.

retour au sommaire



Et le diagramme de vitesse du véhicule est le suivant :



6. UNE ROUE EN CARDIOÏDE

Imaginons maintenant une roue en forme de *cardioïde* avec son axe au point de rebroussement. Son équation polaire est :

$$r(\theta)=1-\cos(\theta)$$

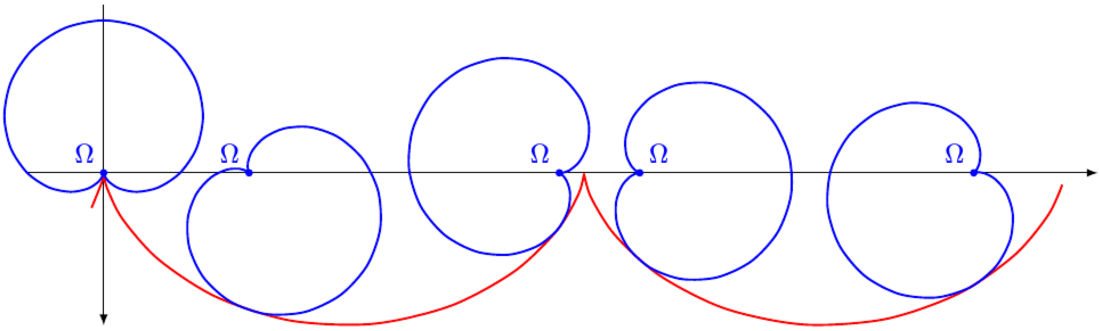
Le calcul de l'abscisse du point de contact ne pose pas de problème insurmontable :

$$x(t)=\int_0^t 1-\cos(v)\,\mathrm{d}v=t-\sin(t)$$

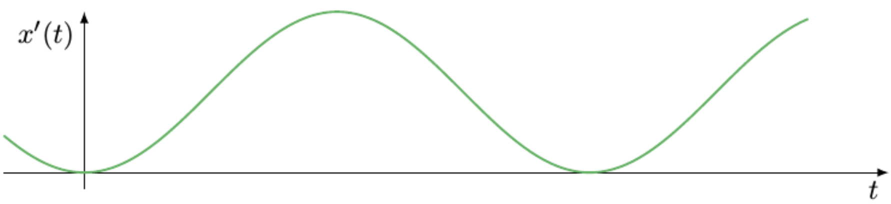
Et l'équation paramétrique de la route est donc :

$$\begin{cases} x(t) &= t-\sin(t) \\ y(t) &= 1-\cos(t) \end{cases}$$

C'est une *cycloïde*.



Et le diagramme de vitesse du véhicule a cette particularité que la vitesse s'annule lorsque le point de rebroussement de la roue (l'axe) passe au point de rebroussement de la route :



retour au sommaire

7. Une roue parabolique

Une *parabole* n'étant pas une courbe fermée, nous allons considérer la roue comme un assemblage de deux paraboles de mêmes paramètres, l'axe étant situé en leur foyer commun.

En accolant deux exemplaires d'une portion de parabole de paramètre 1 définie par l'équation polaire :

$$\begin{cases} r(t) = \dfrac{1}{1+\cos(\theta)} \\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

nous obtenons une roue qui a la forme ci-contre.

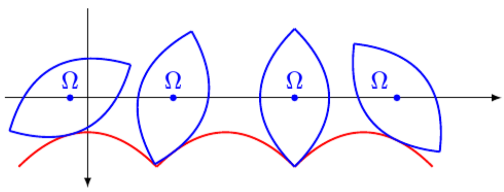
Pour $\dfrac{-\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$, c'est à dire un des morceaux paraboliques, nous avons :

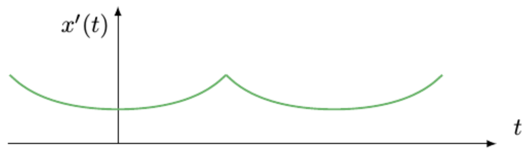
$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+\cos(v)}\,\mathrm{d}v = \int_0^t \frac{2}{\cos^2 \frac{v}{2}}\,\mathrm{d}v = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$$

De cela nous déduisons que l'équation fonctionnelle de la route est :

$$y = \frac{1}{1+\cos(t)} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)$$

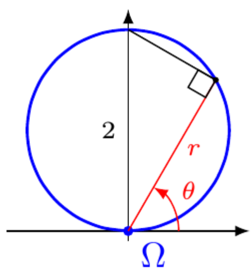
La route est ainsi constituée de portions de parabole de même paramètre que la roue :





8. Et pourquoi pas une roue circulaire ?

L'idée ne semble pas originale . . . sauf si on place l'axe à la circonférence !



L'équation polaire de la roue (de rayon 1) est alors :

$$\begin{cases} r(\theta) = 2\sin(\theta) \text{ pour } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ r(\theta) = 0 \text{ pour } \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi \end{cases}$$

Sur l'intervalle de temps $[0\,;\,\pi]$ nous avons :

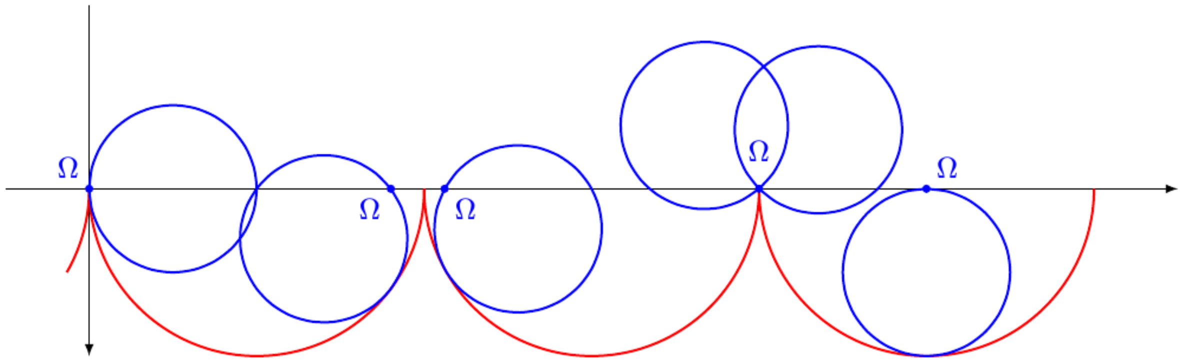
$$x(t) = \int_0^t 2\sin(v)\,\mathrm{d}v = 2(1-\cos(t))$$

et sur l'intervalle de temps $[\pi\,;\,2\pi]$ nous avons simplement $x(t) = x(\pi) = 4$. L'axe de la roue reste stationnaire sur le point $(4,0)$ pendant tout l'intervalle de temps $[\pi\,;\,2\pi]$.
L'équation de la route sur l'intervalle de temps $[0\,;\,2\pi]$ se résume donc à :

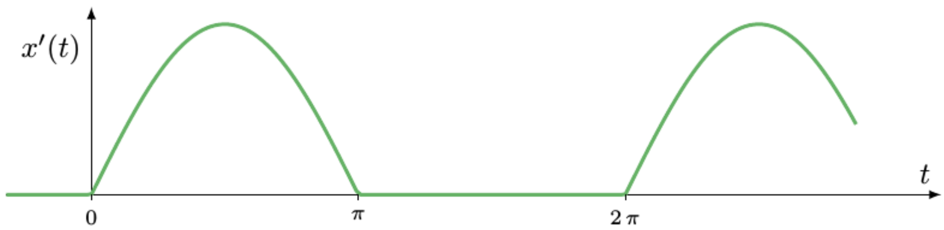
$$\begin{cases} x(t) = 2(1-\cos(t)) \\ y(t) = 2\sin(t) \\ t \in [0\,;\pi] \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 4 \\ y(t) = 0 \\ t \in [\pi\,;2\pi] \end{cases}$$

ce qui est un demi-cercle de centre $(2,0)$ et de rayon 2 :

retour au sommaire



La courbe de vitesse en fonction du temps est assez amusante :



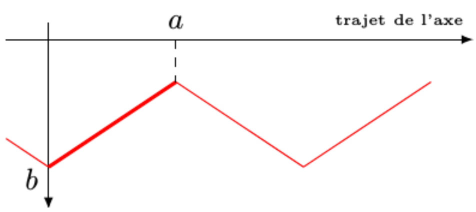
La moitié du temps, le véhicule est arrêté alors que la roue tourne !

9. Une route en dent de scie

Le problème peut se considérer dans l'autre sens en imposant une forme spéciale pour la route.
Si, par exemple, nous voulons adapter une roue a des escaliers dans lequel les marches et contre-marches ont la même dimension, nous devons étudier une route en *dents de scie*. Étudions le cas général. Il nous suffit d'étudier le premier tronçon puis de procéder ensuite par symétries et translations sur la route, et rotations pour la roue, pour propager la chose.

Posons : l'équation du premier morceau (en gras sur la figure).

$$\begin{cases} y=-px+b \\ 0\leqslant x\leqslant a \\ p>0 \\ -pa+b>0 \end{cases}$$

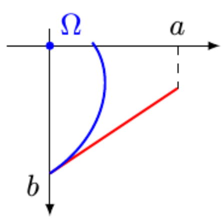


Les équations vues dans la section 2 nous donnent :

$$\begin{cases} r=y=-px+b \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r=b-px \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=-px+b \\ x(t)=\dfrac{b}{p}\left(1-\mathrm{e}^{-pt}\right) \end{cases}$$

Cela nous conduit, en remplaçant x et en se souvenant de la convention $\theta=t$, à l'équation polaire de la portion de roue adaptée :

$$\begin{cases} r(\theta)=b\,\mathrm{e}^{-p\theta} \\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{p}\ln\left(\dfrac{b}{b-pa}\right) \end{cases}$$



c'est un morceau de *spirale logarithmique*.
Revenons à notre escalier dans lequel les marches et contre-marches ont une taille commune L .

La pente de la dent de scie vaut donc $p=1$ et $a=\dfrac{L}{\sqrt{2}}$.

retour au sommaire

Il va falloir raccorder 8 morceaux de spirale logarithmique afin de compléter la roue et cela n'est possible que si la valeur limite de θ vaut $\frac{\pi}{4}$.

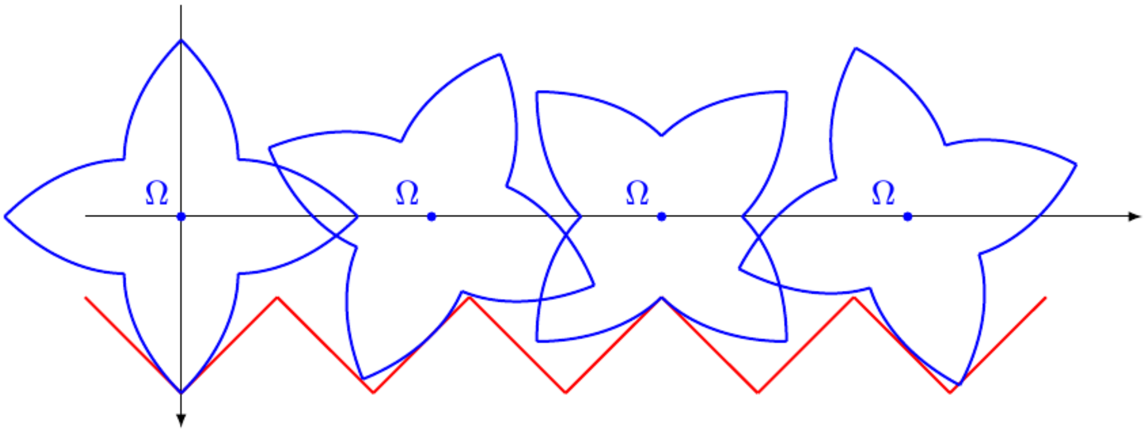
Tout cela conduit aux contraintes suivantes :

$$p=1 \qquad a=\frac{L}{\sqrt{2}} \qquad b=\frac{L}{\sqrt{2}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}})}$$

et l'équation polaire de la première portion de roue est :

$$r(\theta)=\frac{L\,\mathrm{e}^{-\theta}}{\sqrt{2}\,(1-e^{-\frac{\pi}{4}})} \quad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$$

Une symétrie puis une reproduction par quarts de tour nous donnent la roue complète :



Bon . . . il faut quand un type de roue par escalier !

10. Une route en chaînette

Certes, nous avons trouvé qu'une route en chainette convenait à une roue polygonale. Mais qu'advient-il si l'axe doit être à une distance différente du sommet de la chainette ? Le cas est intéressant à étudier.

Imposons à l'axe de suivre, comme d'habitude, la direction des abscisses, mais décalons la portion de chainette [7] en ordonnée en lui donnant comme équation :

$$y=\cosh(x)+\lambda \qquad \lambda>-1 \qquad -1\leq x\leq 1$$

Ce qui nous donne pour l'équation différentielle à variables séparables :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r=y=\cosh(x)+\lambda \Rightarrow \frac{2\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^{x}+\lambda)^{2}+1-\lambda^{2}}=\mathrm{d}t \text{ avec } x=0 \text{ pour } t=0$$

Les calculs sont plutôt velus, mêlant de la trigonométrie directe et réciproque, éventuellement hyperbolique, de la décomposition en éléments simples, du logarithme et autres joyeusetés du même métal.

Je vais me contenter de donner les résultats obtenus, agrémenter de commentaires, mais il nous faut distinguer plusieurs cas.

10.1. Le cas $|\lambda < 1$

L'intégration nous conduit déjà à la jolie formule :

$$\tanh\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\times\tan\left(\frac{\sqrt{1-\lambda^{2}}}{2}t\right)$$

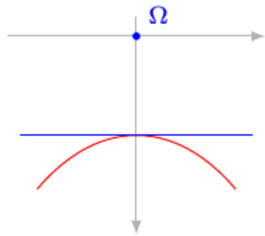
[7] les bornes en x sont arbitraires et peuvent se généraliser

retour au sommaire

avant de nous fournir l'équation polaire de la roue :

$$r(t)=\frac{1-\lambda^2}{\cos\left(\sqrt{(1-\lambda^2)}t\right)-\lambda} \quad \text{avec} \quad |t|\leqslant\frac{2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\arctan t\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\tanh\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

ce qui en jette un peu quand même !

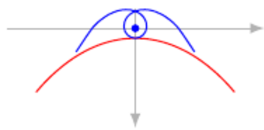


Dans le cas où $\lambda=0$ on retrouve le segment de droite de la section 4 :

$$r(t)=\frac{1}{\cos(t)} \text{ avec } |t|\leq 2\arctan(\tanh(\frac{1}{2}))$$

ce qui est plutôt réconfortant !

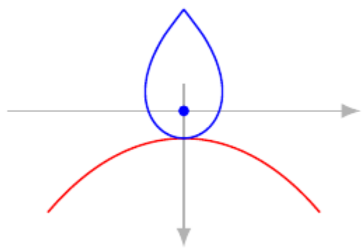
Pour le reste, l'équation peut faire penser à une conique, mais *que nenni* . . . elles ne sont pas répertoriées.



Lorsque λ côtoie la valeur -1 , il se produit un phénomène amusant.
Voilà ci-contre ce qu'on obtient pour $\lambda=-0,9$ . . .
C'est pas commun pour une roue !

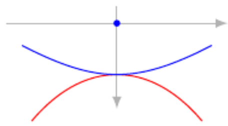
Il faut donc faire en sorte que t ne varie pas dans un intervalle de taille supérieure à 2π . Le paramètre λ doit donc rester supérieur à une valeur limite λ_0 qui vérifie :

$$\frac{2}{\sqrt{1-\lambda_0^2}}\arctan(\sqrt{\frac{1-\lambda_0}{1+\lambda_0}}\tanh(\frac{1}{2}))=\pi$$

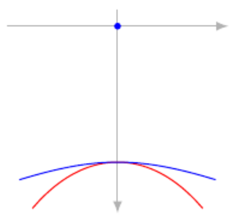


Cette valeur ne peut se déterminer que de façon approchée comme intersection de courbes.
Dans le cas présent, elle vaut $\lambda_0\approx-0,798994$ et fournit la roue ci-contre

Pour les autres cas, on notera que la courbure de la roue change avec le signe de λ .
Voici un cas où $\lambda_0<\lambda<0$, $\lambda=-0,4$ sur la figure ci-contre.



Et maintenant un cas où $0<\lambda<1$, $\lambda=0,6$ sur la figure ci-contre.



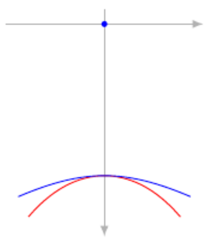
10.2. Le cas $\lambda=1$

L'équation à résoudre est maintenant :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r=y=\cosh(x)+1 \Rightarrow \frac{2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\mathrm{d}t \text{ avec } x=0 \text{ pour } t=0$$

Ce qui donne :

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}=\tanh(\frac{x}{2})=t \Rightarrow r(t)=\cosh(x)+1=\frac{1+t^2}{1-t^2}+1$$



D'où l'équation polaire de la roue :

$$r(t)=\frac{2}{1-t^2} \text{ avec } |t|\leq \tanh\left(\frac{1}{2}\right)$$

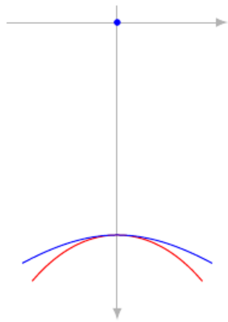
10.3. Le cas $\lambda > 1$

Cette fois les calculs nous mènent à l'expression :

$$\cosh(x)=\frac{\lambda\cosh(t)-1}{\lambda-\cosh(t)}$$

et nous donnent pour équation polaire de la roue :

$$r(t)=\frac{\lambda^2-1}{\lambda-\cosh\left(\sqrt{\lambda^2-1}\; t\right)} \text{ avec } |t|\leq\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}} \operatorname{argcosh}\left(\frac{\lambda\cosh(1)-1}{\lambda-\cosh(1)}\right)$$



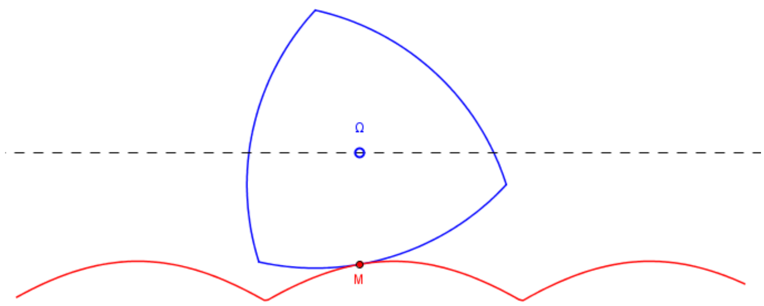
L'exemple ci-contre est réalisé avec la valeur $\lambda=1,5$.

11. En guise de conclusion

Ces quelques exemples ne sont évidemment pas exhaustifs et le jeu peut se poursuivre plus avant . . . pourvu que les intégrales soient calculables !

■

N.D.L.R. Nous vous présentons ci-dessous un extrait d'une animation GeoGebra réalisée par Alain Satabin, qui correspond à la trajectoire d'une roue en forme de triangle de Reuleaux.



Pour obtenir ce fichier GeoGebra, le demander à jacverdier@orange.fr

On vous le disait bien : les maths sont partout...

Vu par Walter à " La ferme des fruitiers" à la Croix du jard, Laitre-sous-Amance (54)

VU SUR LA TOILE

Maths et Jeux : des ressources APMEP, IREM, etc.

http://www.apmep.fr/-Nos-collegues-et-nos-eleves-jouent- Dans les rubriques « Maternelle et Premier degré », « collège » et « lycée » se trouvent des documents produits par des enseignants ou leurs élèves et inspirés par les brochures « Jeux » de l'APMEP.

http://www.apmep.fr/-Complements-aux-brochures- Le groupe « Jeux » de l'APMEP fournit des compléments ainsi que les versions corrigées des pages 27, 28 et 29 de la brochure « Jeux 10 ».

http://www.apmep.fr/Mathematiques-et-bridge,5842 Un dossier « Maths et Bridge ».

http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=coinjeux Le « coin Jeux » de l'ancien site de notre régionale est de nouveau accessible. La rubrique « Expo itinérante » permet l'accès à la description des stands, à des documents d'accompagnement et aux versions traduites en allemand, anglais, espagnol, turc et italien.

http://www.arpeme.fr/m2ep/mallettes_presentation_projet.html Deux mallettes mathématiques pour l'école primaire : la première évoque la construction du nombre en **M**oyenne **S**ection et **G**rande **S**ection de Maternelle, la seconde évoque l'utilisation d'instruments mathématiques dans des situations d'apprentissage : Pascaline en CP et CE1, boulier chinois en Grande Section de Maternelle et au cycle 2.

http://www.irem.ups-tlse.fr/spip/spip.php?article192 Les fichiers ont été créés par le groupe « Jeux » de l'IREM et de la Régionale APMEP de Toulouse. Sont à télécharger un dossier cycle 2 et trois dossiers cycle 3 (activités dans le plan, dans l'espace et numériques). On y trouve une description du matériel utilisé, des conseils de fabrication, les fiches des activités et les corrigés complétés par quelques conseils pédagogiques. On y retrouve la « Pyramide aztèque » évoquée par ailleurs dans ce Petit Vert.

http://www.apmep.tlse.free.fr/spip/spip.php?rubrique3 Sont à télécharger les documents présentés lors d'un stage « Jeux » qui s'est déroulé en juin 2007 dans l'académie de Toulouse. Sont évoqués le Jeu Babylon, le cube Soma, le Puzzle de Sam Lloyd et d'autres puzzles géométriques.

http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?rubrique99 Arnaud Gazagnes (IREM de Lyon et groupe « Jeux » de l'APMEP) a déposé de riches dossiers intitulés « Jeux Mathématiques en Maternelle », « Mathématiques ludiques au collège », « Jeux à stratégie gagnante », « 198 défis (mathématiques) à manipuler ».

http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?article719 Arnaud Gazagnes a déposé les documents présentés en mai 2014 dans l'académie de Lyon au cours d'un stage Paf intitulé « mathématiques ludiques au cycle 3 ».

http://www.math.unicaen.fr/irem/j2m/ Le site du groupe « Jeux 2 Maths » de l'IREM de Basse Normandie propose des fichiers à télécharger permettant la réalisation de 18 jeux, essentiellement pour le collège. Sont également fournies les règles du jeu ainsi que de quoi rentrer plus facilement dans le fonctionnement de ces jeux.

http://www.jeuxmath.be/fiches-des-jeux/ Descriptions et classifications de jeux établies par Joëlle Lamon (Haute Ecole Francisco Ferrer UER, UREM - IREM de Bruxelles).

http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1028 Pour en savoir un peu plus ce qu'on nomme « jeu mathématique ».

http://primaths.fr/ Le site personnel d'Yves Thomas, formateur à l'ÉSPÉ des Pays de la Loire, riche en explications didactiques pour les enseignants des cycles 1, 2, 3. À tout âge, vous apprécierez « Ricochet Robot »
http://primaths.fr/outils%20moyens-grands/ricochetrobots.html .

François Drouin

retour au sommaire

PASCAL

Par Didier Lambois,
Lycée Ernest Bichat, Lunéville

«Il y avait un homme qui, à douze ans, avec des barres et des ronds, avait créé les mathématiques ; qui, à seize ans, avait fait le plus savant traité des coniques qu'on eût vu depuis l'antiquité ; qui, à dix-neuf ans, réduisit en machine une science qui existe tout entière dans l'entendement ; qui, à vingt-trois ans, démontrera les phénomènes de la pesanteur de l'air, et détruisit une des grandes erreurs de l'ancienne physique ; qui, à cet âge où les autres hommes commencent à peine de naître, ayant achevé de parcourir le cercle des sciences humaines, s'aperçut de leur néant, et tourna ses pensées vers la religion ; qui, depuis ce moment jusqu'à sa mort, arrivée dans sa trente-neuvième année, toujours infirme et souffrant, fixa la langue que parlèrent Bossuet et Racine, donna le modèle de la plus parfaite plaisanterie comme du raisonnement le plus fort, enfin, qui, dans les courts intervalles de ses maux, résolut par abstraction un des plus hauts problèmes de géométrie et jeta sur le papier des pensées qui tiennent autant du dieu que de l'homme : cet effrayant génie se nommait Blaise Pascal.»
Chateaubriand, *Génie du christianisme*

Un effrayant génie : Pascal

L'éclosion du génie peut être favorisée par la chance, et ce fut le cas pour ce qui concerne Blaise Pascal (1623-1662). Né dans une famille ouverte au monde et aux sciences, Blaise Pascal échappe à l'éducation scolastique et fréquente dès son enfance les plus grands esprits de son temps. Son père, Etienne, fréquente régulièrement les réunions organisées par le père Mersenne[8] et il y emmène le petit Blaise qui se fait très vite remarquer. Il écrit à onze ans un petit traité d'acoustique et, à douze ans, retrouve seul la 32^e^ proposition d'Euclide[9]. C'est dans cette assemblée, qui préfigure la future Académie des Sciences, que Pascal s'initie aux théories les plus récentes de son temps, telle la géométrie projective de Gérard Desargues, dont il développe les principes dans son *Essai sur les coniques*, publié en 1640. Entre 1642 et 1645, il met au point la première machine à calculer mécanique, la *pascaline*, ce qui lui vaudra une grande renommée, quand bien même cette machine, trop chère, ne fut vendue qu'à une cinquantaine d'exemplaires. De 1646 à 1654, Pascal entreprend une série d'études théoriques et d'expériences sur la pression, sur le vide et sur les fluides, et il confirme ainsi les théories de Galilée et de Torricelli sur la pression atmosphérique. Il étudie notamment la variation de la pression atmosphérique en fonction de l'altitude, avec son beau-frère Florian Périer, au puy de Dôme et à Paris (1648). Ces travaux le conduiront à inventer la presse hydraulique, et à jeter les bases de l'hydrodynamique et de l'hydrostatique ; c'est ce qui explique que son nom demeure attaché à l'unité de pression et à la loi de l'équilibre hydrostatique : « *La pression exercée sur un liquide contenu dans un récipient fermé se transmet intégralement dans toutes les directions* ». Durant cette période, il publie *Expériences nouvelles touchant le vide* (1647), rédige plusieurs ouvrages qui seront publiés après sa mort : *Préface pour un traité du vide, Traité de l'équilibre des liqueurs, Traité de la pesanteur de la masse de l'air*. En 1654 est achevé son *Traité du triangle arithmétique* (édité en 1665), où il développe quelques principes d'analyse combinatoire, et, dans une correspondance avec Pierre de Fermat, il définit les

[8] Marin Mersenne (1588-1648) : savant français, très averti de la science de son temps, il était le principal correspondant de Descartes et a été en relation avec Roberval, Fermat, Torricelli etc. Disposant d'un cabinet de physique il fut le premier à utiliser le pendule pour déterminer l'intensité de la pesanteur. Il détermina les rapports des fréquences des notes de la gamme et mesura la vitesse du son en utilisant l'écho (1636).

[9] Pour mieux comprendre comment Pascal réinvente la géométrie d'Euclide, avec « des barres et des ronds », et pour mieux connaître la vie de Pascal, il faut lire : *La Vie de Monsieur Pascal écrite par Madame Périer sa sœur.*

retour au sommaire

principes du calcul des probabilités. Il faudrait encore ajouter les *Éléments de géométrie* (dont le texte a été perdu), où il proposait une démarche axiomatique s'écartant de la tradition euclidienne, mais aussi ses travaux importants sur les propriétés locales ou globales (courbure, rectification, centre de gravité, volume) des courbes (cycloïde, spirale, parabole, ellipse) et des solides (cylindre, sphère, onglet), travaux qui serviront de support aux développements ultérieurs du calcul infinitésimal. Etc.

Mais Pascal n'est pas un simple savant qui a eu de la chance, d'ailleurs il n'avait pas de chance. D'une santé très fragile, il est malade, probablement cancéreux, dès l'âge de dix-huit ans (sa sœur Gilberte rapporte qu'il n'aurait, depuis lors, jamais passé un seul jour sans souffrance). Est-ce cette souffrance qui l'incline à se tourner vers la religion, à écrire de nombreuses *Lettres de piété*, une superbe *Prière pour demander à Dieu le bon usage des maladies* ? Est-ce son père qui s'était converti au jansénisme[10] ? Sa sœur, Jacqueline, devenue religieuse à Port-Royal ? Ses nombreuses lectures (Évangiles, Saint Augustin etc.) ? Si Pascal n'est pas un simple savant c'est qu'il est aussi un passionné de Dieu et ses tourments aboutissent à une expérience mystique décisive (en 1654) après laquelle il renoncera presque totalement à son métier d'homme de science pour se consacrer à sa vocation religieuse. Par l'intermédiaire d'un ouvrage d'abord anonyme, *Les Provinciales*, Pascal s'engage et participe activement à la querelle qui oppose jansénistes et jésuites ; ces dix-huit lettres des *Provinciales* connaissent un retentissement considérable. Ces premiers « tracts », qui comptent en 1656 jusqu'à un million de lecteurs en Europe, touchent de plein fouet le pouvoir (Mazarin, Séguier). La répression s'abat sur les imprimeurs, les libraires, sur Arnauld[11], qui doit fuir à Port-Royal. Pascal, lui, renonce à la vie mondaine et vit dans une semi-clandestinité. Il entreprend alors la rédaction d'une véritable apologie de la religion chrétienne, seule capable à ses yeux de rendre l'homme compréhensible à lui-même. Ce dernier ouvrage, qui restera inachevé, deviendra un des chefs-d'œuvre de la littérature française : les *Pensées*.

Pascal : un génie effrayé

L'homme, tel que s'attache à le dépeindre Pascal, n'est rien, c'est un néant confronté au silence effrayant des espaces infinis. Compris entre deux infinis, l'infiniment grand et l'infiniment petit, il ne sait ni d'où il vient, ni où il va, il est perdu sans Dieu. Les *Pensées* ne sont que des variations sur ce thème. Loin d'être un ange par son esprit, presque bête par sa bassesse, l'homme ne sait qui il est. Quand bien même il parvient à oublier sa condition misérable dans le divertissement, il chasse, il travaille, il sort ; quand bien même il parvient, grâce à sa raison, à se construire des certitudes pour vivre tranquille, l'homme ne peut trouver de sens et d'ancrage qu'en Dieu. Mais sur ce plan la science ne peut nous être d'aucun secours et notre raison reste impuissante.

De même la raison est impuissante à prouver l'existence de Dieu. L'approche pascalienne de la religion n'a rien de commun avec la froide assurance, strictement théorique, de Descartes qui multiplie à loisir les prétendues preuves de l'existence de Dieu. Pour Pascal c'est le spectacle affligeant de notre condition qui conduit à Dieu, les preuves sont ridicules et vaines : « *c'est le cœur qui sent Dieu, non la raison. Dieu sensible au cœur, non à la raison, voilà ce qu'est la foi* » dira-t-il.

Le terme de « cœur » qui désigne dans la langue ordinaire le siège de l'affectivité, désigne dans la langue biblique le plus intérieur de l'homme, mais Pascal l'utilise pour désigner tout ce

[10] Mouvement rigoriste qui s'oppose surtout à la morale mondaine des jésuites.

[11] Antoine Arnauld (dit le Grand Arnauld) 1612-1694 : théologien, chef du parti janséniste et frère d'Angélique Arnault, abbesse de Port-Royal. Il est l'auteur de *La Grammaire Générale et Raisonnée* (1660), rédigée avec Lancelot, et de *La Logique de Port-Royal* (1662) rédigée avec Nicole.

retour au sommaire

qui ne se ramène pas à la démonstration par raisons. Bien sûr nous interprétons spontanément cette différence en donnant au savoir rationnel une supériorité sur la foi qui semble n'être que croyance et naïveté ; mais Pascal affirme au contraire qu'il y a une supériorité de la foi sur la raison, tout comme il y a pour lui une supériorité de la connaissance immédiate (l'esprit de finesse) sur la connaissance indirecte (l'esprit de géométrie)[12]. C'est sur les connaissances du cœur (axiomatique) que se fondent toutes nos autres connaissances. Cœur et raison sont deux modes de « connaissance » qui s'excluent.

« Car les connaissances des premiers principes : espace, temps, mouvement, nombres, sont aussi fermes qu'aucune de celles que tous nos raisonnements nous donnent et c'est sur ces connaissances du cœur et de l'instinct qu'il faut que la raison s'appuie et qu'elle y fonde tout son discours. (Le cœur sent qu'il y a trois dimensions dans l'espace et que les nombres sont infinis ; et la raison démontre ensuite qu'il n'y a point deux nombres carrés dont l'un soit double de l'autre. Les principes se sentent, les propositions se concluent ; et le tout avec certitude, quoique par différentes voies.) Et il est aussi inutile et aussi ridicule que la raison demande au cœur des preuves de ses premiers principes, pour vouloir y consentir, qu'il serait ridicule que le cœur demandât à la raison un sentiment de toutes les propositions qu'elle démontre, pour vouloir les recevoir. / . Cette impuissance ne doit donc servir qu'à humilier la raison, qui voudrait juger de tout, mais non pas à combattre notre certitude, comme s'il n'y avait que la raison capable de nous instruire. Plût à Dieu que nous n'en eussions, au contraire, jamais besoin, et que nous connussions toutes choses par instinct et par sentiment ! »

Pensées 282, p.128.

Ces quelques remarques ne donnent qu'un tout petit aperçu de l'œuvre immense de ce génie mort à trente neuf ans ; il eut encore fallu parler des cycloïdes, du fameux triangle de Pascal, du non moins célèbre pari, mais aussi de la brouette, des transports en commun, de l'assèchement des marais etc. Nous y reviendrons. Contentons nous pour le moment de mieux comprendre cette citation trop souvent galvaudée : « ***le cœur a ses raisons que la raison ignore*** », citation qui nous le voyons n'a rien à voir avec l'amour. Il faut dire qu'en ce domaine la vie de notre génie semble avoir été plutôt pauvre…

Note de la rédaction : A propos de probabilités (la « géométrie du hasard », telle qu'on l'appelait du temps de Pascal), on pourra consulter un article paru dans la revue Repères-IREM (n° 32, juillet 1998), qui reprend un problème publié dans le Petit Vert n°42 et ses solutions (PV n°43, 44 et 45). Cet article est co-signé Gilberte Pascal, la sœur de Blaise.
http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/32_article_216.pdf

[12] Dans *L'Art de persuader* (1658) Pascal entreprend un travail théorique pour analyser les voies différentes qui sont celles de la vérité : intuition ou « ***esprit de finesse »***, qui consiste à « *voir la chose d'un seul regard, et non par progrès de raisonnement* », se substituent dans ce domaine à la stricte logique de « l'***esprit de géométrie »***. C'est là un point important de la pensée pascalienne : à chaque problème précis correspond une méthode précise.

MATHS ET ARTS

par François DROUIN

Au fort de Troyon

Les commémorations du centenaire de la première guerre mondiale nous fournissent de nombreuses occasions de porter un regard mathématique lors de visites de sites.
Le fort de Troyon, situé entre Saint-Mihiel et Verdun fait partie du système Séré de Rivières. Non bétonné, il a résisté victorieusement à de très violentes attaques début septembre 1914.
Une association de passionnés l'a dégagé et en organise des visites. A l'aide d'un document fourni avec le billet d'entrée, celles-ci se déroulent à notre rythme, nous permettant de nous arrêter plus longtemps sur ce que notre regard mathématique a repéré. http://www.fort-de-troyon.com/

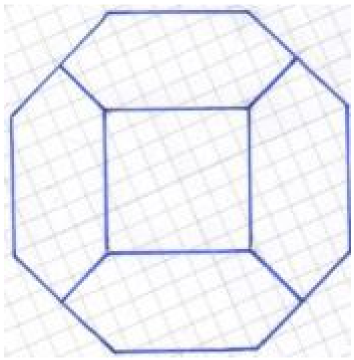
Une spirale

À l'entrée du fort est présenté un contrepoids du système d'ouverture de la porte blindée. Cette spirale semble être formée de demi-cercles assemblés. Il est tentant d'imaginer un programme de construction permettant de la retracer puis de la compléter.

Il serait intéressant de savoir ce qui a motivé l'utilisation d'une telle spirale.

Un carré dans un octogone

Les couloirs du fort étaient éclairés par des lampes à pétrole. Les occupants s'y repéraient en utilisant les clés de voûtes de formes géométriques variées. Celle visible vers la fin du circuit de visite présente un carré à l'intérieur d'un octogone régulier. Aux imprécisions dues à la taille des pierres, le coté du carré paraît être égal au côté de l'octogone régulier, les quatre pierres hexagonales paraissent être identiques et posséder deux axes de symétrie.



.../...

retour au sommaire

Nous pouvons donc retrouver le tracé de ces hexagones, nous assurer que l'espace qu'ils entourent est bien un carré et nous mettre ainsi un moment à la place du tailleur de pierre travaillant à la règle et au compas.

En 2015, des logiciels de géométrie nous permettent d'établir des plans utilisables eux aussi par les ouvriers.

Une formule mathématique

Sur un accès à une plateforme de tir, au dessus d'un secteur circulaire gradué, est visible la formule mathématique $\mathbf{V_0}.\boldsymbol{cos}\ \alpha = \boldsymbol{a}$.

Un de nos lecteurs a peut-être dans son entourage un artilleur ou un ancien artilleur pouvant nous aider à décoder cette formule servant au réglage des canons.

Ces trois photos et leur début d'analyse vous donneront peut-être envie de visiter ce fort, mais aussi d'utiliser en classe des clichés pris dans d'autres lieux à diverses occasions.

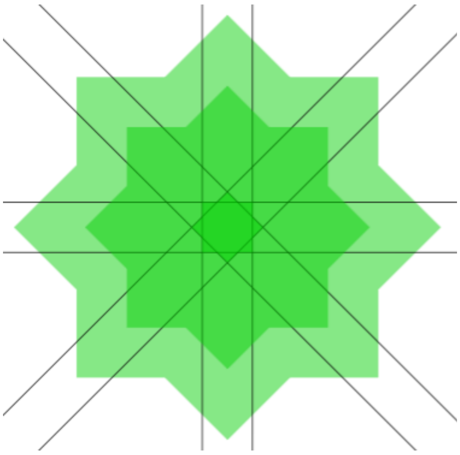
N'hésitez pas à envoyer vos découvertes à l'adresse contact@apmeplorraine.fr.

N'auriez-vous pas envie de travailler sur les spirales présentes en de nombreux endroits ?

ZELLIGE et GEOGEBRA

Voici un lien vers une animation GeoGebra de Fathi DRISSI détaillant la construction du zellige présenté dans la brochure "Des Mathématiques dans de bien belles choses".

Elle a été adaptée aux nouveaux programmes en remplaçant agrandissement par homothétie.
https://www.geogebra.org/apps/?id=2647473



⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

Aucun mathématicien n'est un bon mathématicien s'il n'est aussi un peu poète.

Weierstrass

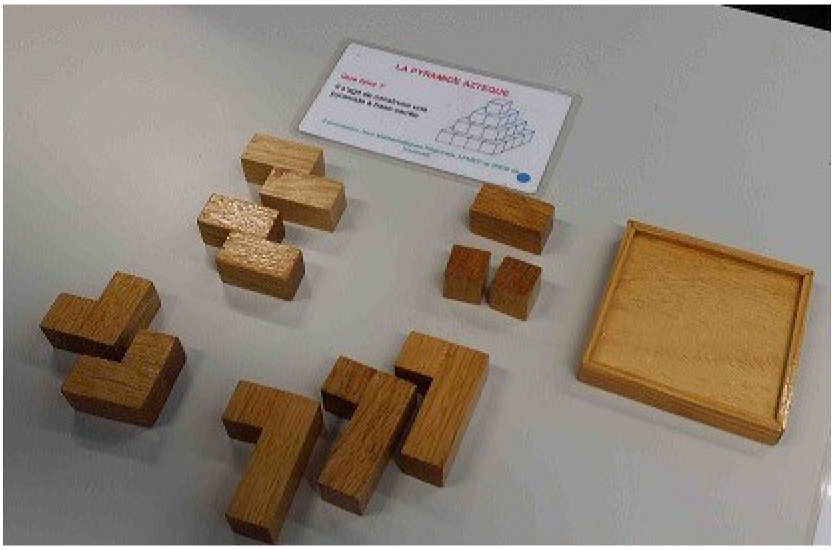
⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂ ⁂

retour au sommaire

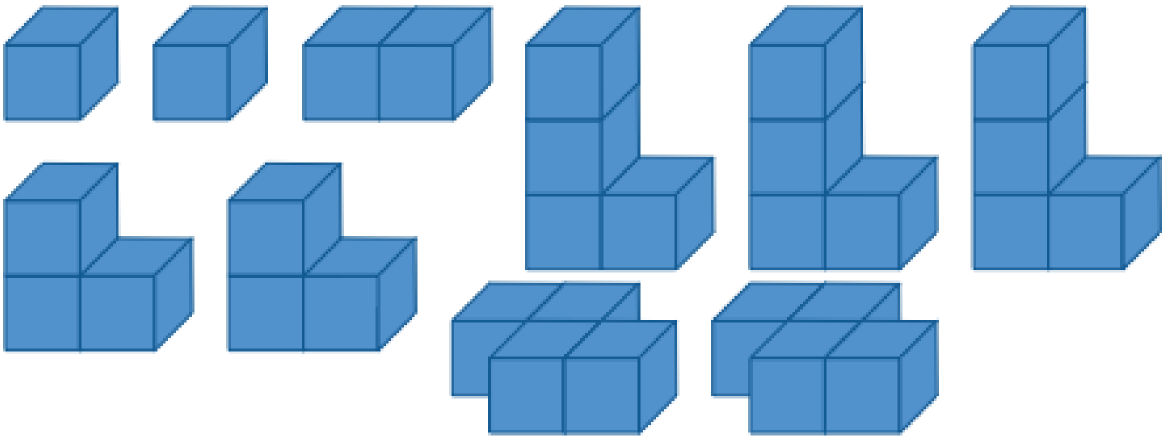
MATHS ET JEUX

par François DROUIN

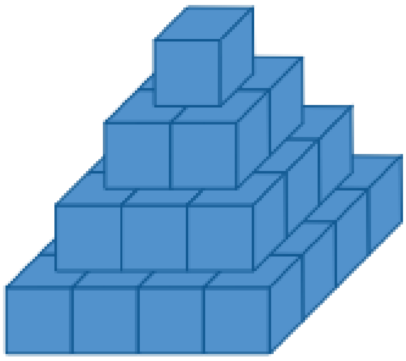
UNE « PYRAMIDE AZTÈQUE » ÉTONNANTE



En 2014, des lorrains participant aux Journées nationales ont remarqué cet assemblage de pièces présenté par la commission « Jeux Mathématiques » de l'IREM et de la Régionale A.P.M.E.P. de Toulouse.

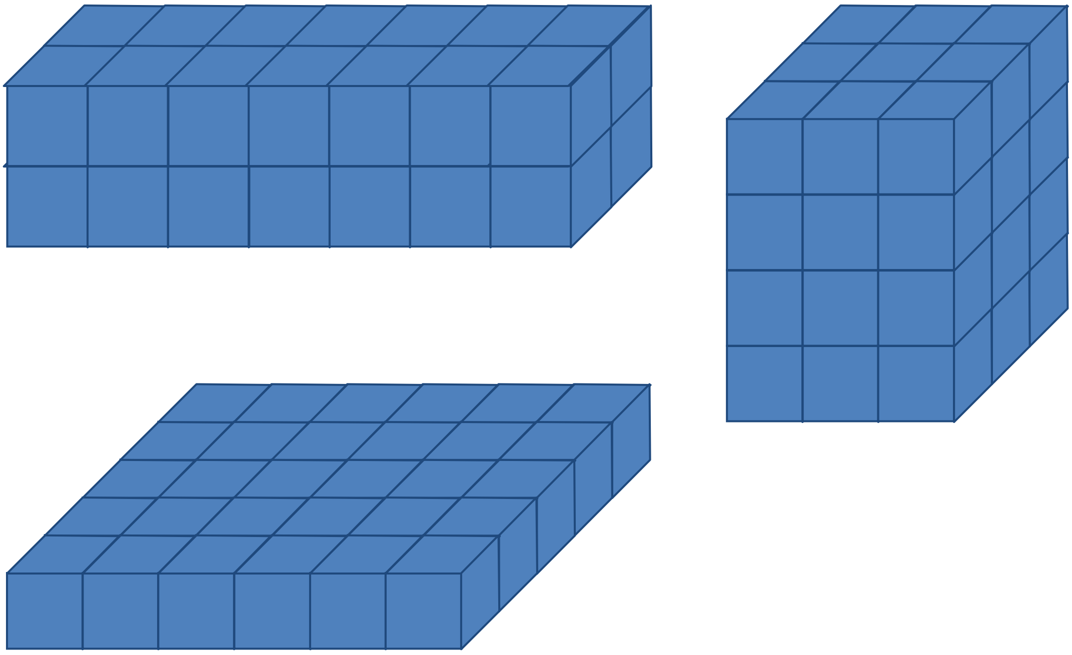


La « pyramide aztèque » à réaliser est un empilement semblable à ceux évoqués par Clara RAGOT et Émilie MARTIN-DUPAYS dans le Petit Vert n°122.
La construction est abordable par de jeunes élèves.



Par ailleurs,les dix pièces formant la pyramide aztèque permettent la réalisation des trois solides dessinés ci-après. Bonne recherche... Et ne regardez pas trop vite la solution de ce mystère...

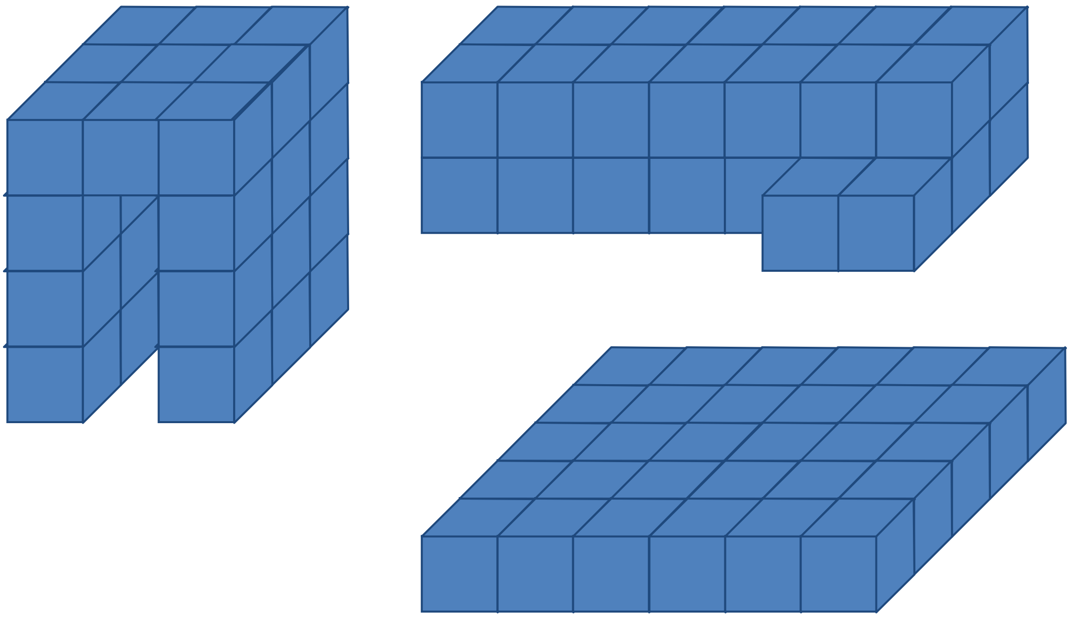
retour au sommaire



Les dessins proposés semblent représenter des assemblages de 28, 30 et 36 cubes. Les dix pièces formant la pyramide aztèque fournissent un total de 30 cubes unitaires, deux des dessins posent donc problème.

La consigne évoquant des dessins de solides à réaliser pouvait mettre la puce à l'oreille : il n'était pas affirmé qu'il s'agissait de pavés droits.

Voici des dessins de ce qui pourrait être vu en passant derrière les trois assemblages.



Le mystère est éclairci.
Les cubes unitaires formant le pavé $1\times5\times6$ sont tous visibles en partie, confirmant sa réalisation possible avec les 10 pièces.
Pour les deux autres dessins, il n'y a de certitude que pour les cubes formant la tranche supérieure.

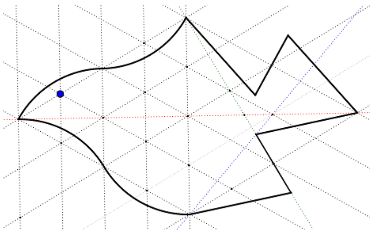
MATHS ET GASTRONOMIE

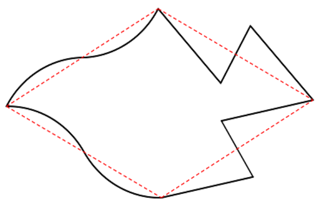
DES DÉCOUPAGES NETTEMENT GÉOMÉTRIQUES

Cet « ASTRE DU PÂTISSIER » était vendu surgelé pendant les fêtes de Noël.

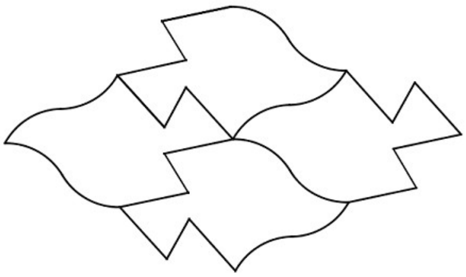
L'acheteur a très certainement remarqué les lignes brisées séparant les six parts et les lignes courbes formant l'extérieur de l'étoile.
Ces parts ont été découpées dans trois « plaques » différentes puis assemblées pour former l'étoile proposée à la vente. Il serait intéressant de voir la machine réalisant tout cela, mais cela touche sans doute à des secrets de fabrication.

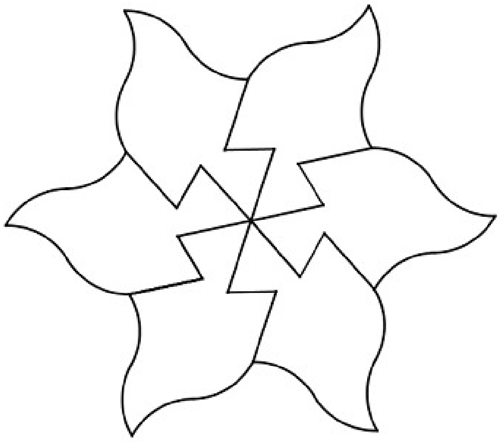
Le concepteur de ce dessert est certainement un grand amateur de géométrie.
Et en ajoutant un œil, ne voyez-vous pas un oiseau ?





Les bases de chaque part sont des motifs[13] qui pavent le plan. Dans la figure ci-dessous à gauche, le pavage consiste en lignes horizontales répétant ce motif : une ligne où le « bec de l'oiseau » est à gauche, surmontée d'une autre où il est à droite, ad libitum.
Dans la figure ci-dessous à droite, on a repris la disposition « en étoile » du gâteau, qui permet également un pavage du plan suivant trois directions.



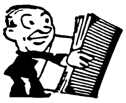


Chez le même fournisseur, nous avons également trouvé cette autre pâtisserie surgelée. Nous n'en avons pas encore étudié les propriétés géométriques, mais nous espérons apprécier ses propriétés gastronomiques lors de notre prochaine réunion du comité de rédaction !

[13] Les proportions n'ont pas été rigoureusement respectées ici, ce qui n'a aucune incidence quant au fond.

retour au sommaire

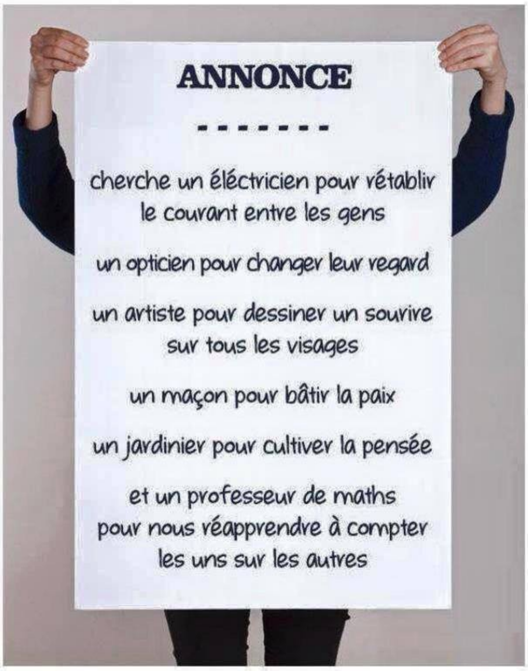
MATH & MEDIA



Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi - et surtout - les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.

Envois par la poste à Jacques VERDIER (7 rue des Bouvreuils, 54710 FLEVILLE) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr .

Les archives de cette rubrique seront bientôt disponibles sur notre nouveau site à l'adresse : www.apmeplorraine.fr



Daniel nous a envoyé, le 13 décembre dernier, cette annonce que sa fille venait de trouver sur la toile :
« *Je cherche un électricien pour rétablir le courant entre les gens qui ne se parlent plus, un opticien pour changer le regard des gens vis-à-vis des autres, un artiste pour dessiner un sourire sur tous les visages, un maçon pour bâtir la paix et enfin un professeur de maths pour réapprendre à compter les uns sur les autres !* ».
Après quelques recherches, nous avons constaté que cette annonce apparaissait sur un grand nombre de sites, de blogs, etc.

Il semblerait que la première apparition de ce texte date de mai 2010 (blog de Clauabdel) :
http://clauabdel.skyrock.com/2916487671-Cherche-un-electricien-pour-retablir-le-courant-entre-les-gens-qui-ne.html
Mais rien n'est moins sûr...

CHANTEZ ET CALCULEZ !

Un chœur d'enfants a été créé au conservatoire municipal de Saint-Mihiel. Dans le document de présentation, le cout mensuel est écrit dans une forme peu habituelle. De plus, nous pouvons constater que dans certains cas, utiliser une calculatrice peut être préférable à la mise en œuvre de procédures de calcul mental !

Le fait du jour

Bilangues, diversité, mobilité et petits retournements...

Comment expliquer la multiplication des bilangues sans donner à penser qu'on fait un revirement à 360 degrés ? C'était la partie difficile de l'exposé de la ministre de l'éducation nationale le 22 janvier. La ministre a annoncé des mesures plus globales pour le développement des langues comme un encouragement à la mobilité des élèves du secondaire, des ressources , le recadrage des ELCO et une Semaine des langues au mois de mai.(...)

REVIREMENT À 360°

Lu dans « L'Expresso » du Café Pédagogique du 22 janvier (merci Sébastien)

Un revirement à 360° est-il plus important qu'un revirement à 0° ?
Et si on coupait la poire en deux, et qu'on se contentait d'un virage à 180° ?

retour au sommaire

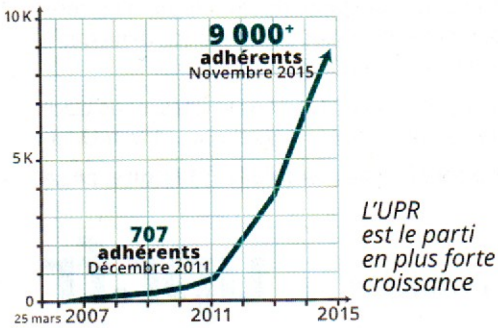
MATHS ET MÉDIAS

L'U.P.R. : NULLE EN PROBA

Dans les « professions de foi » qui avaient été distribuées à l'occasion des élections régionales de décembre dernier, Isabelle a repéré ceci :

> **« Changer d'Europe » ? C'est mathématiquement impossible**
>
> Pour changer les traités européens, **il faut l'accord unanime des 28 États membres** (art.48 TUE). Changer profondément l'Union européenne impliquerait que les 28 gouvernements de l'UE soient tous d'accord en même temps pour un tel bouleversement, malgré leurs 28 intérêts nationaux contradictoires. **La probabilité mathématique que cela arrive est nulle**. Les 23 ans écoulés depuis le traité de Maastricht de 1992 l'ont d'ailleurs démontré.

Effectivement, à part le fait qu'il n'y a pas eu de modification profonde de cette union depuis longtemps (traité de Lisbonne en 2009, et non traité de Maastricht en 1992 comme écrit dans ce tract), de là à dire que « la probabilité mathématique que cela arrive est nulle », c'est une affirmation qui ne nous semble reposer sur aucune base mathématique.



Par ailleurs, dans ce même document, on apprend, graphique à l'appui, que l'U.P.R. est « le parti en plus forte croissance » (mais plus forte croissance que qui ? et croissance en valeur relative ou en valeur absolue ?). La flèche de ce graphique nous laisse d'ailleurs supposer que le taux de croissance va continuer à augmenter : *« Nous partîmes à zéro, mais par un prompt renfort, Nous nous vîmes neuf mille en arrivant au port »* pour parodier Corneille.

Nous remarquons cependant que nous avons échappé au terme de « croissance exponentielle », qui est tant galvaudé dans les médias.

LE BON SENS NE VA PAS DE SOI

Cette image a été trouvée par Luc (qui l'a envoyée sur la liste maths_profs en novembre dernier) sur le site du MEDEF http://www.monmedef.com/home/ (il est possible que, suite aux réactions de nombreux internautes, elle ait depuis été enlevée). Dans son message, Luc précisait : « *On demande au collège à nos élèves des compétences que les adultes de haut niveau n'ont pas* ».

Le MEDEF avait-il l'intention de bouleverser l'enseignement de la technologie ?

Ou de montrer que, quoi qu'il en dise, il a toujours l'intention de se diriger vers la droite et non vers le centre ?

(image tirée de « Les temps modernes », 1936)

MATHS ET MÉDIAS

MATHS : LES MAUVAIS RÉSULTATS DES ÉCOLIERS FRANÇAIS

Dans le Café Pédagogique daté du 13 novembre 2015, François Jaraud reprend des conclusions de Jean François Chesné et Jean-Paul Fischer se basant sur les évaluations de CE2 et 6ème et sur des évaluation du programme Pacem (**P**rojet pour l'**A**cquisition ses **C**ompétences par les **E**lèves en **M**athématiques).
http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2015/11/13112015Article635829972561027103.aspx
http://www.education.gouv.fr/cid61598/l-experimentation-pacem-resultats-en-cm1.html

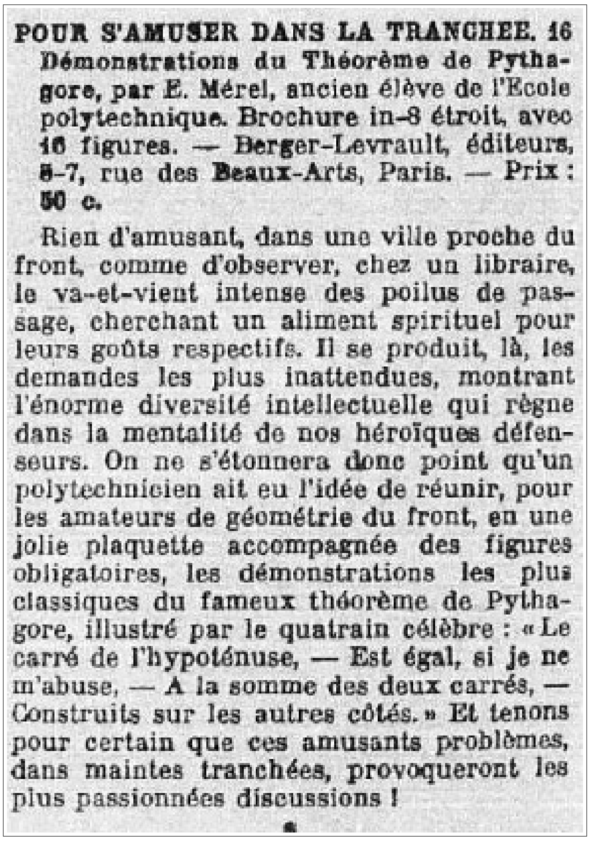
En vert ci-dessous, des extraits de ce numéro du Café pédagogique.
En noir, nos commentaires.
Les grands nombres sont acquis : 90% des élèves savent écrire un grand nombre jusqu'à 1000 en CE2. En 6ème même taux de réussite jusqu'à 10 000. Mais au delà de 10 000 un élève sur 4 n'arrive pas à écrire le nombre.
Qu'appelle-t-on des « nombres acquis » ? Savoir écrire un nombre dicté est-il suffisant ? Ne serait-il pas aussi important de savoir que dans 3 587 il y 35 centaines, que ce nombre est compris entre 3 00 et 4 000, etc.
Pour le calcul posé on observe une baisse des performances. Par exemple en 1987 84% des élèves savent faire 247 × 36. En 2007 seulement 68% y arrivent. 4700 – 2789,7 pose problème à la moitié des élèves (contre un tiers en 1987).

L'élève a-t-il rencontré des problèmes mettant en œuvre ces opérations ? Combien de fois rencontrera-t-il ensuite ce savoir ?

En calcul mental les taux de réussite sont peu élevés. Par exemple seulement 17% des élèves de 6ème savent faire de tête 62 × 0,5.
Est-ce vraiment surprenant que peu d'élèves de sixième peinent à reconnaître 62 : 2 dans 62 × 0,5 ?
On assiste à une forte baisse de la maitrise de la multiplication et de la division. Elle s'explique par une conceptualisation insuffisante des nombres.
Ne serait-ce pas aussi parce qu'elles sont peu utilisées en dehors des temps de mise en œuvre de techniques opératoires ? Et par l'emploi trop rapide ou trop fréquent des calculatrices ?

S'AMUSER DANS LES TRANCHÉES EN 1916

Repéré dans « Le bulletin meusien » d'Avril 1916.
Ce monsieur E. Merel pensait qu'on s'amusait dans les tranchées et que les démonstrations du théorème étaient distrayantes. Cent ans plus tard, nous ne considérons plus les tranchées comme des lieux d'amusement, mais nous pouvons espérer que les « amusants problèmes » continuent à « provoquer les plus passionnées discussions ».


POUR S'AMUSER DANS LA TRANCHEE. 16 Démonstrations du Théorème de Pythagore, par E. Mérel, ancien élève de l'Ecole polytechnique. Brochure in-8 étroit, avec 16 figures. — **Berger-Levrault**, éditeurs, 5-7, rue des **Beaux-Arts**, Paris. — **Prix : 50 c.**

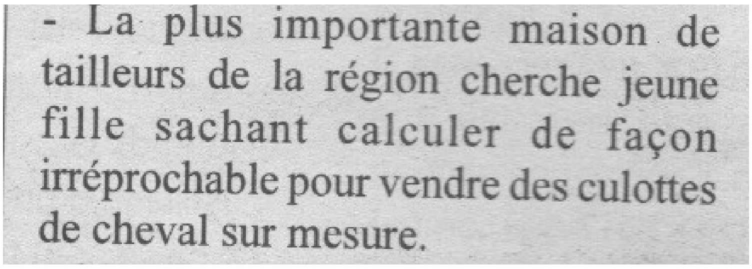
Rien d'amusant, dans une ville proche du front, comme d'observer, chez un libraire, le va-et-vient intense des poilus de passage, cherchant un aliment spirituel pour leurs goûts respectifs. Il se produit, là, les demandes les plus inattendues, montrant l'énorme diversité intellectuelle qui règne dans la mentalité de nos héroïques défenseurs. On ne s'étonnera donc point qu'un polytechnicien ait eu l'idée de réunir, pour les amateurs de géométrie du front, en une jolie plaquette accompagnée des figures obligatoires, les démonstrations les plus classiques du fameux théorème de Pythagore, illustré par le quatrain célèbre : « Le carré de l'hypoténuse, — Est égal, si je ne m'abuse, — A la somme des deux carrés, — Construits sur les autres côtés. » Et tenons pour certain que ces amusants problèmes, dans maintes tranchées, provoqueront les plus passionnées discussions !

Source : Archives départementales de la Meuse. Image 35/109. L'article est page de droite, dernière colonne vers le milieu.
http://archives.meuse.fr/search/result#viewer_watch:a011418741122wRe8RR/63fb9aa781

retour au sommaire

OFFRE D'EMPLOI

Le 29 novembre 2015, dans sa rubrique « IL Y A 100 DANS l'EST », le supplément « Le MAG » commun à l'Est Républicain, Vosges Matin et le Républicain Lorrain présentait un extrait de journal daté 29 novembre 1915.


- La plus importante maison de tailleurs de la région cherche jeune fille sachant calculer de façon irréprochable pour vendre des culottes de cheval sur mesure.

En 1915, les jeunes hommes étaient occupés à d'autres tâches et rencontraient peu les porteurs des culottes de cheval évoquées.

Un siècle plus tard, le **C**onseil **N**ational d'**E**valuation du **S**ystème **SCO**laire, l'**I**nstitut **F**rançais de l'**É**ducation et l'**É**cole **N**ormale **S**upérieure de Lyon ont organisé une « Conférence de consensus » intitulée « Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire ». Un rapport fournit trente-trois recommandations à destination des enseignants, des groupes de recherche et du grand public.

En voici trois qui auraient pu déjà être faites il y a un siècle et intéresser « la plus grande maison de tailleurs de la région ».

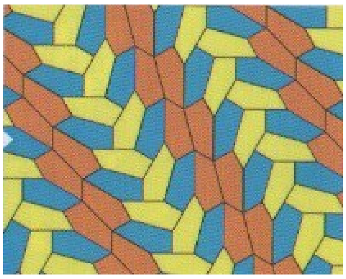
> *R1 - Les mathématiques doivent être présentées aux élèves comme des outils pour penser, résoudre des problèmes et faire face à des situations de la vie quotidienne.*
>
> *R13 - Le système d'écriture des nombres décimaux est un prolongement de celui des nombres entiers. L'identification de cette continuité doit être présentée de manière explicite auprès des élèves, tout en attirant l'attention des élèves sur certaines adaptations nécessaires.*
>
> *R17 - Le calcul mental et le calcul en ligne doivent être privilégiés par rapport au calcul posé.*

Fin novembre 2015, les médias se sont fait l'écho de certaines propositions avancées pendant cette conférence. Les lecteurs du Petit Vert liront avec beaucoup d'intérêt l'ensemble des trente-trois recommandations, en particulier celles numérotées R22, R23, R24 et R25 se rapportant à la formation initiale et continue des enseignants.

http://www.cnesco.fr/wp-content/uploads/2015/11/Recommandations-du-jury.pdf

retour au sommaire

DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°125-a



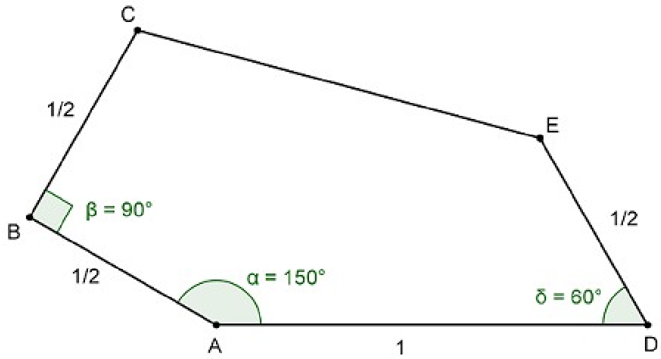
La quinzième « tuile » des pavages pentagonaux

Un pentagone (découvert très récemment, en 2015), permet de « paver le plan » à l'infini (voir image de gauche).

Voici comment le construire.

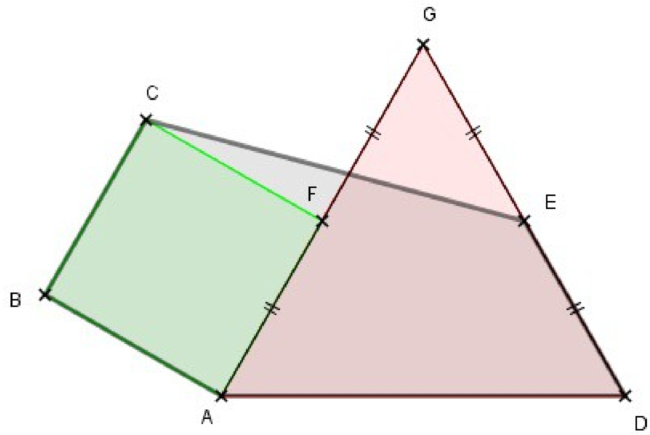
Première construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit successivement l'angle DAB de 150° ; le côté AB de longueur ½ ; l'angle ABC droit ; le côté BC de longueur ½ ;
l'angle ADE de 60° ; le côté DE de longueur ½ ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.



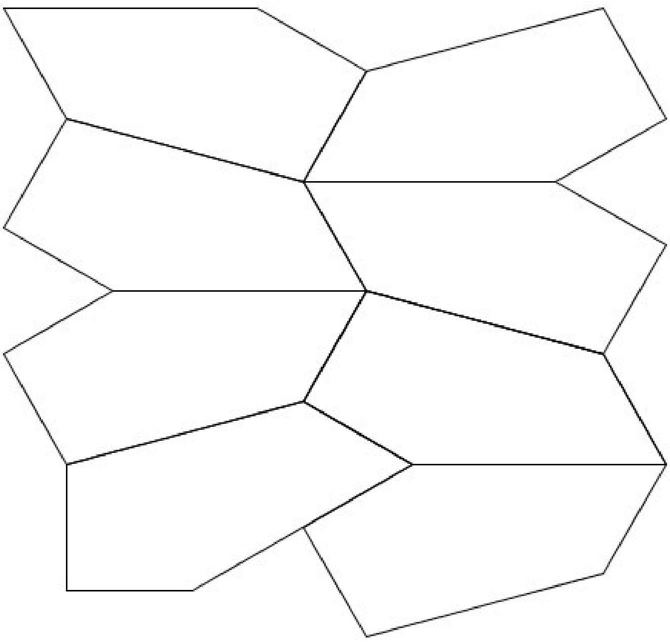
Seconde construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit le triangle équilatéral ADG ;
on construit les points F et E milieux de [AG] et [DG] ;
on construit le carré ABCF ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.



Le défi :

- Pouvez-vous démontrer que ces deux constructions conduisent bien au même polygone ?
- Pouvez-vous calculer la longueur exacte du cinquième côté (CE) ?



En reproduisant les pentagones ci-contre et en les découpant dans du papier de couleur, vous pouvez essayer de faire de jolies figures... Envoyez-nous les plus belles que vous aurez réalisées.

retour au sommaire

DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°125-b

Dans le tableau « Hardy's Taxi » d'Eugen Jost (voir Petit Vert n°124) on trouve ces deux nombres : **1031223314** et **10213223**.

Ces deux nombres ont la particularité suivante : Dans le premier il y a : un 'zéro', trois 'un', deux '2', trois 'trois', un 'quatre', ce que l'on peut énoncer « 1 0, 3 1, 2 2, 3 3, 1 4 ». Le décompte des chiffres doit se faire dans l'ordre : d'abord les '0', puis les '1', les '2' etc. On retrouve bien le nombre 1031223314.

Il en est de même pour le second nombre, 10213223.

Par exemple, si l'on prend comme nombre initial 1, on obtient successivement : 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, 41122314, 31221324, 21322314, 21322314, 21322314... On constate que la suite « stagne » à partir d'un certain moment. Les deux nombres évoqués ci-dessus « stagnent » également.

Le défi

- Tous les nombres initiaux donnent-ils une suite qui finit par « stagner » ?
- Trouver le nombre initial qui permettait d'obtenir 1031223314 et 1031223314.
- Si vous êtes en lycée : écrire un algorithme qui permette, à partir d'un nombre n quelconque, d'écrire la liste des nombres obtenus.

SOLUTION DU DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°124-a

Les bruits qui courent

On dit que... les Glaner gagnent 525 € de plus que les Ferren.
On dit que... M. Glaner gagne 20 % de plus que M. Ferren.
On dit que... Mme. Glaner gagne 30 % de plus que Mme. Ferren.
On dit que... les Ferren gagnent 2250 €.
On dit que... M. Ferren gagne 25 % de plus que son épouse.
Qu'en pensez-vous ? Peut on déterminer le salaire de chacun ?

Eléments de réponse

Il s'avère que les cinq « bruits » sont incompatibles (ils ne peuvent être vrais simultanément).
Notons A le revenu de Mme. Glaner, B celui de M. Glaner, C celui de Mme. Ferren et D celui de M. Ferren.
On a C+D=2250, d'où C+1,25C=2250, d'où C=1000 ; par conséquent D=1250.
D'où A=1,3C = 1300 et B=1,2D=1500, et par conséquent A+B=2800.
Or la première assertion revient à A+B=C+D+525, soit 2800=2250+725=2775.
Il y a contradiction, donc incompatibilité entre ces 5 affirmations.

On peut étudier successivement les cinq cas où l'une (et une seule) de ces affirmations est fausse (donc en se ramenant à chaque fois à un système de 4 équations à 4 inconnues).

- En « éliminant » la première affirmation, on trouve A=1300, B=1500, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la deuxième affirmation, on trouve A=1300, B=1475, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la troisième affirmation, on trouve A=1275, B=1500, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la quatrième affirmation, cela ne « tombe pas juste » ; il y a une solution « arrondie » au centime : A≈1240,91, B≈1431,82, C≈954,55 et D≈1193,18.
- En « éliminant » la cinquième affirmation, on trouve A=975, B=1800, C=750 et D=1500.

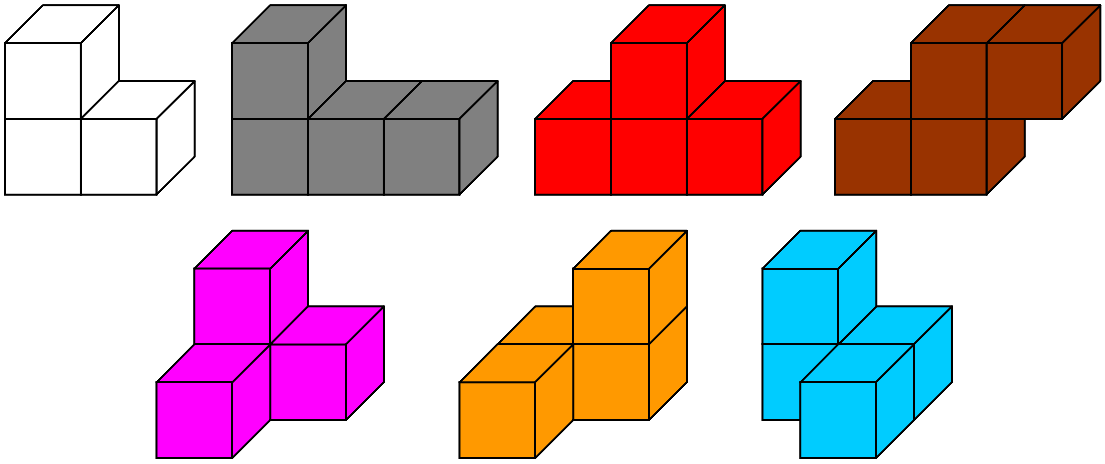
retour au sommaire

SOLUTION DU DÉFI POUR VOS ÉLÈVES n°124-b

Rappel du défi « Des prismes avec les sept pièces du cube Soma »

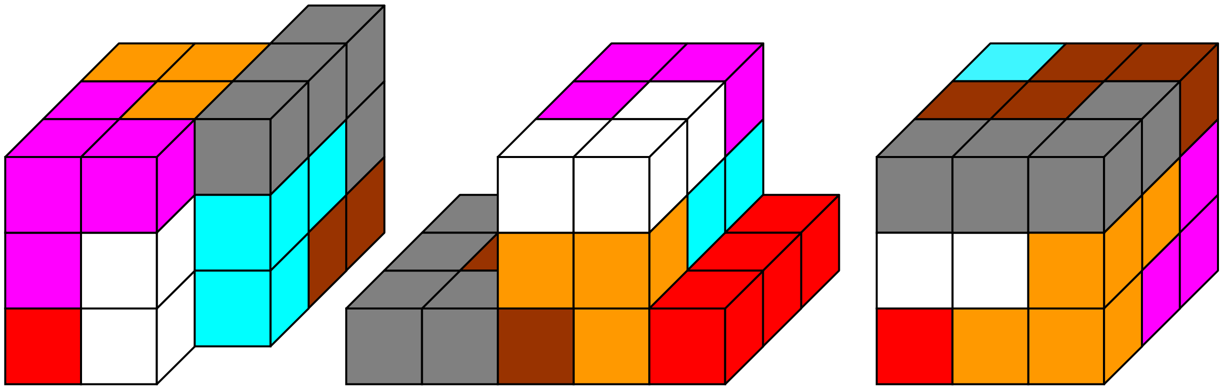
Selon Martin Gardner, pendant un cours de mécanique quantique, le danois Piet Hein aurait inventé ce casse tête en 1936 pendant un cours de mécanique quantique, ne gardant parmi les assemblages de trois ou quatre cubes identiques que ceux qui ne sont pas des pavés droits. Il semblerait que Piet Hein ait déjà déposé un brevet en 1933 : la « légende » racontée par Gardner reste sympathique, le cube Soma a donc au moins 80 ans. http://fr.wikipedia.org/wiki/Cube_Soma

Voici des dessins des sept pièces trouvées.



Piet Hein ayant remarqué qu'elles formaient un assemblage de 27 cubes a réfléchi à la formation d'un cube $3\times3\times3$.

On peut réaliser des prismes en utilisant toutes les pièces, en voici trois exemples.



Le défi proposé

Parmi les prismes droits réalisables avec les sept pièces, comment caractériser ceux dont la longueur totale des arêtes est maximale ?

Comment caractériser ceux dont l'aire totale des faces est maximale ?

La solution

Des éléments de solution, des compléments et de nouvelles idées de recherche, proposés par François Drouin, figurent dans les pages suivantes.

retour au sommaire

Des prismes avec les sept pièces du cube Soma

Dans ce qui suit, l'unité de volume sera le volume d'un cube unitaire, l'unité d'aire sera l'aire d'une face d'un cube unitaire, l'unité de longueur sera la longueur d'une arête d'un cube unitaire.

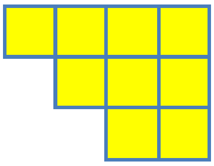
L'utilisation des sept pièces amène à la réalisation de solides de volume 27. Il est facile de se persuader que seuls ces deux cas sont possibles.

Aire de la base	9	3
Hauteur	3	9

Si p est le périmètre d'une face, B l'aire d'une face et h la hauteur, l'aire totale des faces d'un prisme est égale à $2B + p\times h$.

Des prismes d'aire de base égale à 9 et de hauteur égale à 3

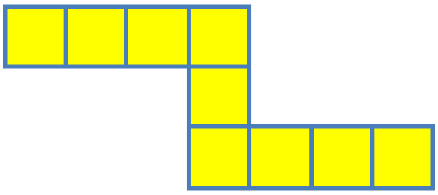
La hauteur étant égale à 3, une base est formée de 9 carrés unitaires accolés. Il s'agit donc de caractériser les assemblages de 9 carrés ayant un périmètre maximal.



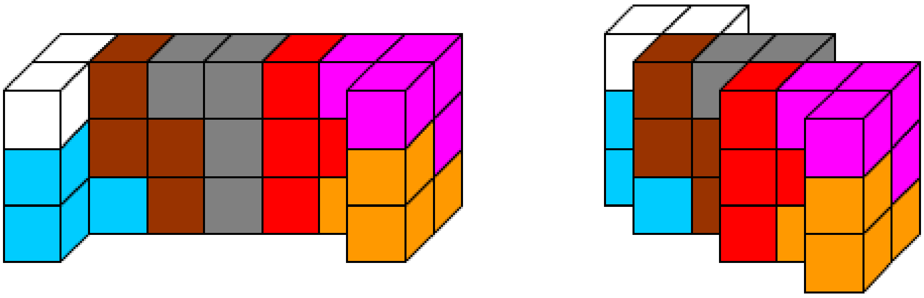
Le périmètre d'un tel assemblage est égal à la somme des périmètres des 9 carrés moins la longueur totale des côté ayant servi aux jonctions.

Pour cet exemple, $p = 9\times4 - 2\times11 = 14$ (11 est le nombre de jonctions entre les carrés). Pour que p soit maximal, il faut donc que le nombre de jonction soit minimal, c'est à dire 8.

Voici un assemblage de 9 carrés comportant 8 jonctions entre les carrés.



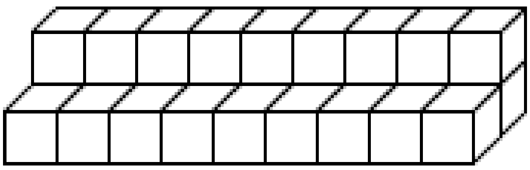
P = 9×4 – 2×8 = 20 ; 20 est donc la valeur maximale de p.



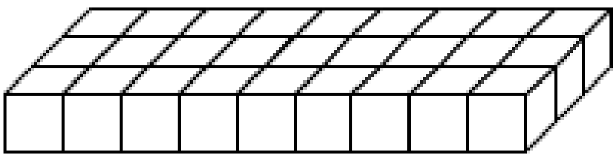
Les sept pièces du cube Soma permettent la réalisation de prismes dont la base correspond au critère évoqué précédemment.

Pour les prismes de hauteur 3, le maximum pour l'aire totale des faces est donc 78.

Des prismes d'aire de base égale à 3 et de hauteur égale à 9



prisme 1



prisme 2

Ces deux prismes sont les seuls pouvant être construits avec les 27 cubes assemblés. L'aire totale de leurs faces est égale à 78. Ils répondent à la variante du défi.

Les utilisateurs des pièces du cube Soma se persuaderont facilement que le prisme 2 n'est pas constructible avec les sept pièces.

Concernant le prisme 1, voici sous forme d'un tableau une preuve de sa non-constructibilité rédigée suite à des échanges avec deux lecteurs du Petit Vert.

Il y a 9 tranches verticales de 3 cubes dans le prisme. La pièce rose remplit une tranche entière. Plaçons le 4ème cube rose à gauche de la tranche entière. Sur ce 4ème cube quelle pièce peut-on placer ?

retour au sommaire

Au dessus du cube rose	Couleur du cube devant le rose (donc pièce)	Suite du raisonnement		Conclusion
« Bleu »				Impossible car emplacement vide d'un seul cube devant.
« orange »				Impossible car emplacement vide d'un seul cube devant.
« marron »	Impossible car une ligne de 3 cubes devant			
« rouge »	« gris » obligé	Scindage en 2 prismes	Impossible avec « orange « bleu » « marron » « blanc »	Si « orange » n'est pas une base de ce prisme, ce prisme est scindable en deux prismes plus petits…Impossible. « orange » ne peut donc qu'être une base.
« gris	« rouge »	Scindage en 2 prismes	Impossible avec « orange » « bleu » « marron » « blanc »	Si orange n'est pas une base de ce prisme, ce prisme est scindable en deux prismes plus petits…impossible. « orange » ne peut donc qu'être une base.
	Blanc*	Devant « gris », « marron »	On ne peut combler les 2 cubes au-dessus de « marron »	
		Devant « gris » « orange »	Impose prisme avec « orange » « rouge » « marron »	Impossible.
		Devant « gris » « rouge »	Impose « marron » devant « rouge »	« bleu » et « orange » devant le cube « marron » crée un cube vide au-dessus
« blanc »	« Noir » devant	Au dessus de « gris », « marron »	On ne peut combler les 2 cubes devant « marron »	
		Au dessus de « gris » « bleu »	Impose un prisme avec « orange » « rouge » « marron »	Impossible
		Au dessus de « noir » « rouge »	Impose « marron » devant « rouge »	« bleu » et « orange » sur le cube « marron » crée un cube vide devant comme première ligne

…/…

Pour des prismes de longueur totale des arêtes maximale

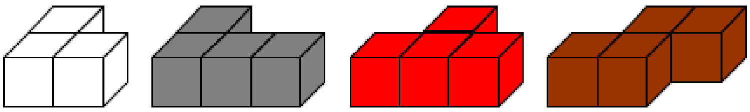
Cette recherche aurait pu également faire l'objet d'un défi proposé aux lecteurs utilisateurs des sept pièces du cube Soma ou des 27 cubes.

Une première difficulté est apparue pour les prismes de hauteur égale à 3 et donc de base formée de 9 carrés accolés. Sachant qu'un polygone a autant de sommets que de côtés, si n est le nombre de côtés de la base, si p est le périmètre d'une base, la longueur des arêtes du prisme est égale à $3n + 2p$. La recherche de l'aire maximale des faces nous a montré que 20 est la valeur maximale de p.

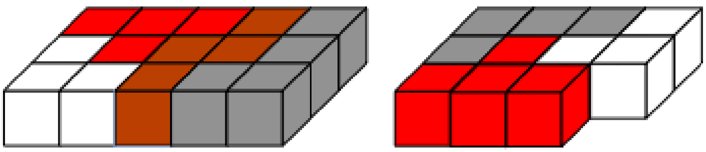
Le nombre n de sommets est à optimiser dans la formule $3n + 2p$ et nous amène à la question « Quel est le nombre maximum de sommets d'un polymino formé de 9 carrés accolés par des côtés entiers ? ». Il existe 1285 « ennéaminos ». Faute d'avoir dénombré les sommets de chacun, ce problème reste ouvert.

Des prismes en n'utilisant que certaines pièces formant le cube Soma

Des prismes de hauteur égale à 1



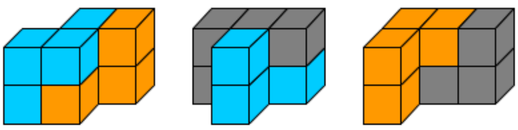
Seules ces quatre pièces sont des prismes droits. Leur hauteur est égale à 1.



Des assemblages « plats » de certaines de ces quatre pièces forment des prismes de hauteur 1 tels que ceux dessinés ci-contre. Il y en a d'autres, bien sûr.

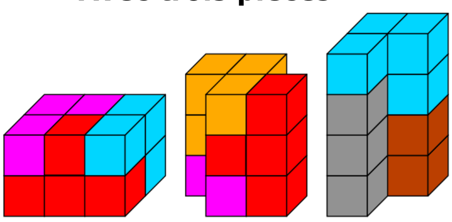
Le premier dessiné est celui qui utilise les quatre pièces proposées et est le seul parallélépipède réalisable. Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux prismes de hauteur au moins égale à 2.

Avec deux pièces



Réussirez-vous à prouver qu'il n'existe pas d'autres prismes droits de hauteur égale à 2 et formés de deux pièces du cube Soma ?

Avec trois pièces



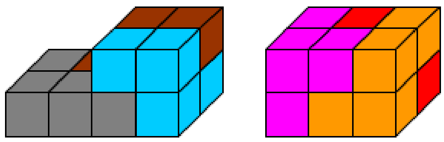
Il existe d'autres prismes droits formés de trois pièces du cube Soma.

Les deux premiers prismes peuvent être construits en remplaçant la pièce orange par la pièce bleue. Chaque fois qu'on a une solution utilisant la pièce bleue ou la pièce orange, on a aussi la construction symétrique en échangeant ces deux couleurs.

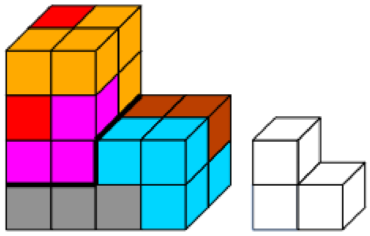
Trouverez-vous d'autres prismes droits formés de trois pièces du cube Soma ?

retour au sommaire

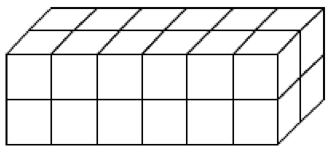
Avec six pièces



L'assemblage de ces deux prismes construits chacun avec 3 pièces permet la réalisation de nombreux prismes construits avec les six pièces.



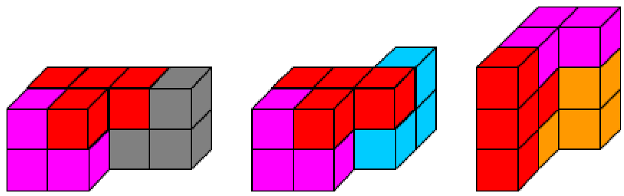
Remarque: Cet exemple est la construction « échelle 2 » de la pièce non utilisée.



Ce prisme formé de 24 cubes est-il réalisable avec 6 des pièces du cube Soma ?

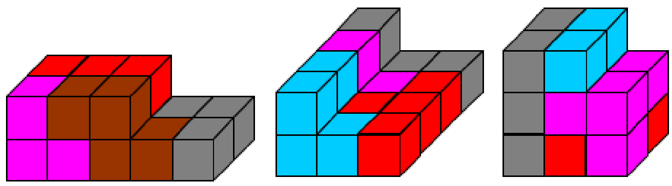
Quelques prismes supplémentaires

Avec trois pièces

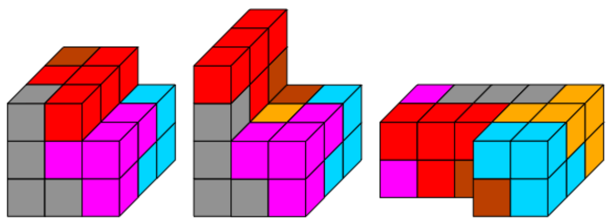


Des prismes repérés dans la brochure « Jeux 5 »

Avec 4 pièces



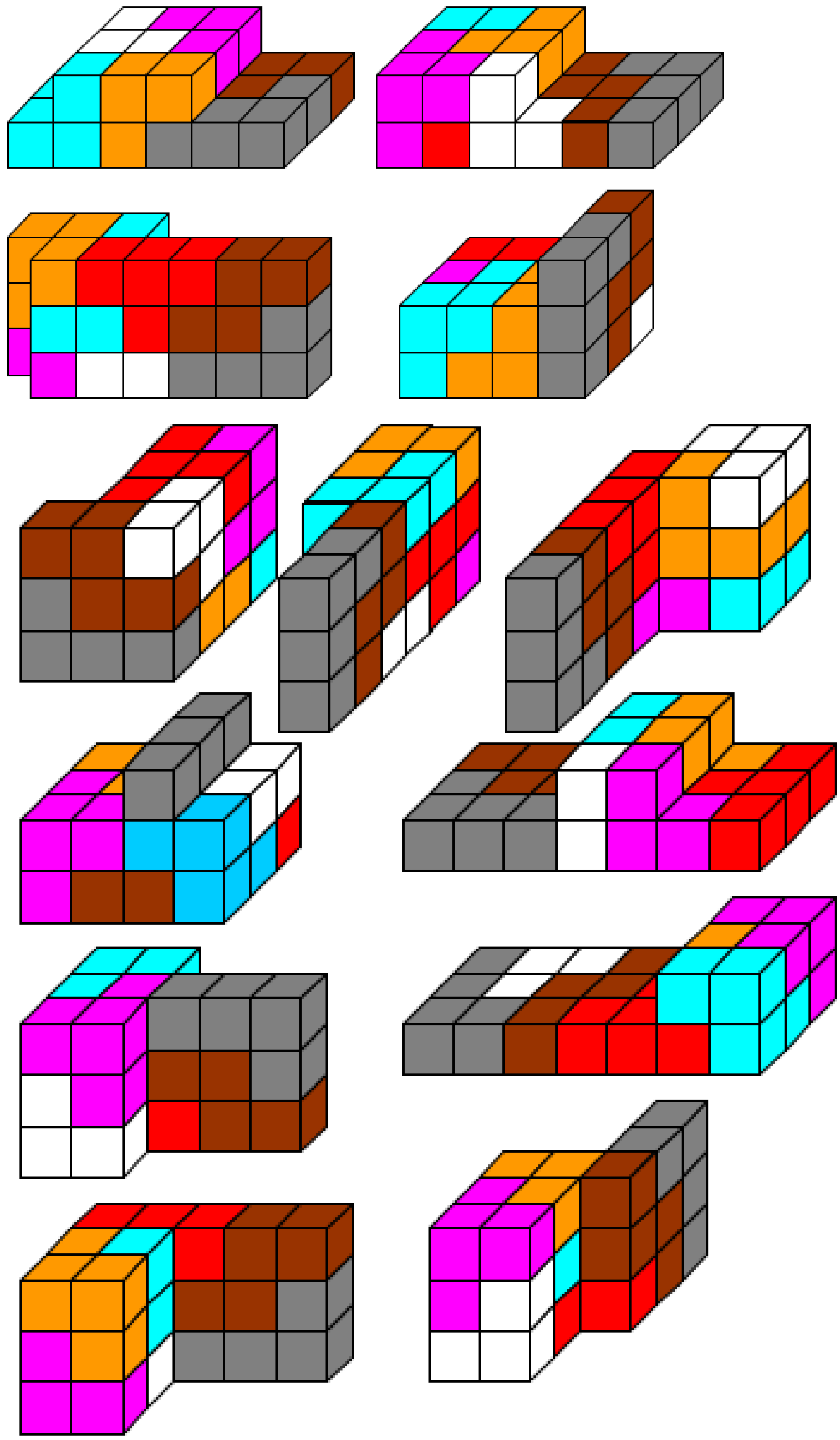
Avec 6 pièces



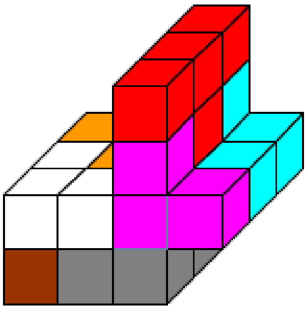
…/…

Avec 7 pièces

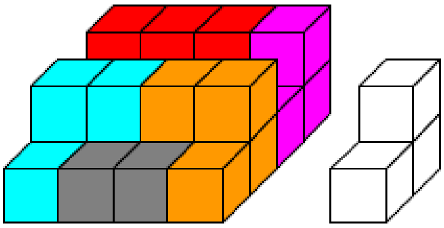
Voici d'autres exemples extraits d'une des brochures d'accompagnement de l'exposition « Objets mathématiques » réalisée par la régionale A.P.M.E.P. Lorraine. Ils font partie d'une recherche à propos de parallélépipèdes accolés réalisés avec les sept pièces formant le cube Soma.



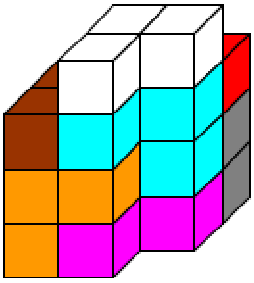
Trois réalisations d'élèves du collège de Saint-Mihiel complètent les propositions précédentes.



Le bidule de Karim



Neuf petits sièges



Une colonne

Le « bidule de Karim » est un prisme. Les « neuf petits sièges » sont formés de deux prismes. La « colonne » peut donner envie de lancer une recherche à propos de solides formés de deux prismes accolés.

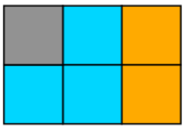
D'autres propositions

Sauriez-vous reconstruire ces prismes en utilisant les indications fournies par un lecteur du Petit Vert ?

Avec trois pièces

Un pavé est construit. D'autres prismes sont obtenus en faisant pivoter la pièce grise.

Une face du pavé



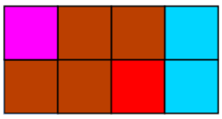
La hauteur du prisme est 4.

Une des faces du prisme

Avec quatre pièces

Un premier prisme est obtenu en accolant la pièce blanche au prisme de hauteur 4 construit avec les trois pièces.

Un pavé est construit.
Une face du pavé



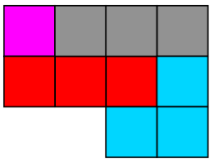
La hauteur du prisme est 5.
Une des faces du prisme

Remarque : le pavé peut être aussi construit en remplaçant la pièce bleue par la pièce orange.

Avec cinq pièces

Les pièces rose, grise, rouge, marron et bleue sont utilisées.

Une base du prisme



Remarque : un prisme peut être aussi construit en remplaçant la pièce bleue par la pièce orange.

…/…

Le comité de rédaction du Petit Vert est preneur de réponses (complètes ou incomplètes) aux nouvelles idées de recherche évoquées dans cet article ainsi de dessins ou de photos d'autres prismes obtenus.

Sitographie

http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM Le site incontournable !

Ressources APMEP

http://apmeplorraine.fr/old/ L'ancien site de notre régionale est de nouveau accessible.

http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=coinjeux&choix=2

Des documents à propos du cube Soma.

http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=coinjeux&choix=5

Les documents complémentaires au stand n°16 de notre exposition itinérante.

http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=petitvert&page=archive_pv

Pour télécharger les Petits Verts 48 et 85 et y retrouver les articles écrits pour les 60ème et 70ème anniversaire du cube Soma.

http://www.apmep.tlse.free.fr/spip/spip.php?article36

Sur le site de la régionale de Toulouse, des documents fournis à la suite d'un stage « Jeux ».

http://www.apmep.fr/IMG/pdf/PAGANO_Cube_SOMA_1.pdf

Pour rechercher des prismes droits parmi les solides proposés.

Le jeu de « Dominos » présenté dans l'article « 2006 : Les 70 ans du cube SOMA » (Bulletin de l'APMEP n°461, pages 725 à 729) peut être demandé en écrivant à l'adresse contact de la régionale contact@apmeplorraine.fr.

MATHS ET JEUX

Solution du sudoku paru dans le PV124

R	**T**	O	L	U	E	K	**D**	**G**
D	**K**	G	**T**	R	O	U	L	E
L	U	E	K	D	**G**	R	T	**O**
G	E	R	U	O	**L**	T	K	**D**
T	**O**	L	D	**K**	R	G	**E**	**U**
K	D	U	**E**	G	T	O	R	L
E	G	T	**R**	L	U	D	O	**K**
U	L	K	O	T	**D**	E	**G**	R
O	**R**	D	G	E	K	L	**U**	T

Le mathématicien à trouver était Kurt Gödel.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Kurt_G%C3%B6del

http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/article-godel-dechire-22400.php

SOLUTION DU PROBLÈME N°124

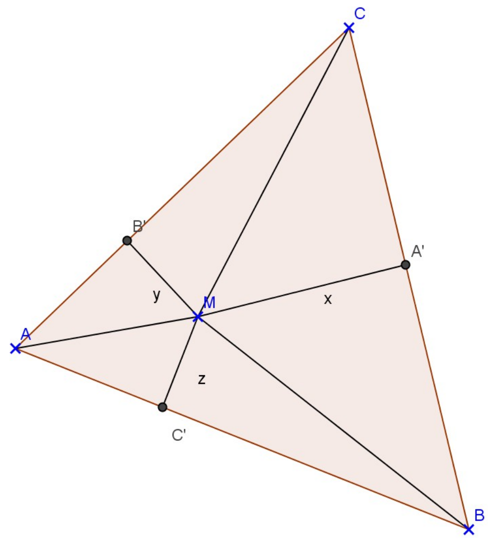
Rappel de l'énoncé (proposé par Jacques Choné) : Soit ABC un triangle. Déteminer le point M du plan de ce triangle tel que la somme des aires des triangles BCM, CAM et ABM soit minimum et préciser cette valeur minimum.

Une réponse a été transmise ; la solution proposée par l'auteur du problème ne sera donc pas exposée. Pour information, Jacques Choné considère les coordonnées barycentriques de M.

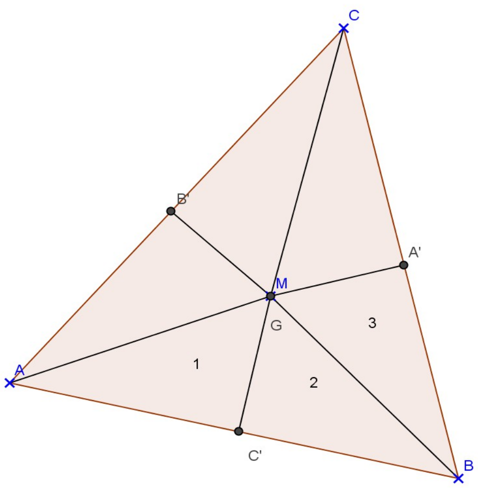
Solution proposée par Renaud Dehaye

On s'appuiera sur la figure ci-contre :
En notant *x, y, z* les hauteurs des triangles BCM, ACM et ABM, et *a, b, c* les longueurs BC, AC et AB, on cherche à minimiser la quantité :

$$S(x,y,z)=\left(\frac{ax}{2}\right)^2+\left(\frac{by}{2}\right)^2+\left(\frac{cz}{2}\right)^2$$



Or, lorsque M=G, centre de gravité du triangle ABC, on a trois triangles de même aire c'est-à-dire *ax=by=cz*.



En effet, les triangles 1 et 2 ont même aire car C' est le milieu de [AB].
Le triangle AMB (1 et 2 réunis) a une aire double de celle du triangle 3 car M est au deux tiers de la médiane [AA']. Ainsi les triangles 1, 2 et 3 ont la même aire. Etc...

Reste à trouver la bonne forme « canonique » pour S(*x,y,z*) !

La voici :

$$S(x,y,z)=\frac{1}{12}\times(ax+by+cz)^2+\frac{1}{12}(ax-by)^2+\frac{1}{12}(by-cz)^2+\frac{1}{12}(ax-cz)^2$$

soit

$$S(x,y,z)=\frac{1}{3}\times(aire\ ABC)^2+\frac{1}{12}(ax-by)^2+\frac{1}{12}(by-cz)^2+\frac{1}{12}(ax-cz)^2$$

Cette expression permet de conclure provisoirement : le minimum est $\frac{1}{3}\times(aire\ ABC)^2$; il est atteint lorsque *ax=by=cz*.

G est-il le seul point à vérifier *ax=by=cz* ?

retour au sommaire

On peut montrer que, lorsque *ax=by*, le point M est nécessairement sur la médiane issue de C. De même, lorsque *by=cz*, le point M est nécessairement sur la médiane issue de A. Donc, lorsque *ax=by=cz*, on a bien M=G.

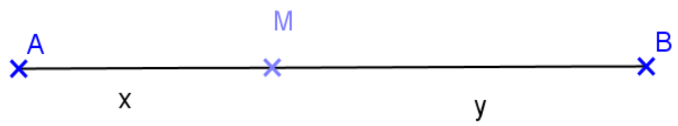
REMARQUE : *Ce dernier paragraphe restant obscur (position de M sur la médiane ?) pour le responsable de la rubrique (qui a toujours des problèmes en géométrie, comme déjà signalé), voici un argument différent permettant de conclure :*

Lorsque ax=by=cz, on a alors $S(x,y,z)=3\left(\frac{ax}{2}\right)^2=\frac{1}{3}(aire\ ABC)^2$ *, soit* $x=\frac{2}{3}\frac{aire\ ABC}{a}$.

Le point M est alors à une distance x de la droite (BC) et du même côté de (BC) que A, En raisonnant de la même manière pour y et z, M est point d'intersection de trois droites parallèles aux trois côtés, entièrement déterminées, (forcément) concourantes, ce qui permet de conclure en l'unicité du point M réalisant le minimum de S.

Quelques variations autour du problème n°124, proposées par Renaud Dehaye.

Problème 1. Soit un segment [AB]. Déterminer le point M du segment tel que la somme des carrés des longueurs AM et MB soit minimum.



En considérant que AB=1, on pose alors AM=*x* et MB=*y*. Ainsi *x+y*=1.

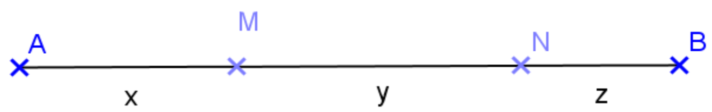
Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y)=x^2+y^2$. On peut conjecturer (intuition? essais?) que ce minimum est atteint lorsque $x=y=\frac{1}{2}$. On peut alors chercher une forme « canonique » de S(*x,y*) qui rende compte de cette conjecture.

Or $S(x,y)=x^2+y^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ compte tenu de l'égalité *x+y*=1.

Cette expression est minorée par $\frac{1}{2}$, valeur qui est atteinte lorsque $x=y=\frac{1}{2}$.

Conclusion : le point M est le milieu de [AB].

Problème 2. Soit un segment [AB]. Déterminer les points M et N du segment [AB] tel que la somme des carrés des longueurs AM, MN et NB soit minimum. (N est situé entre M et B)



Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

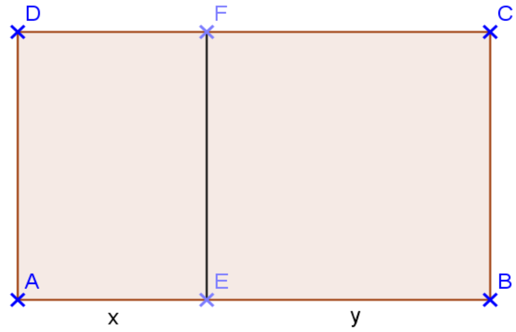
Or $S(x,y)=x^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$ compte tenu de l'égalité *x+y+z*=1.

Cette expression est minorée par $\frac{1}{3}$, valeur qui atteinte lorsque $x=y=z=\frac{1}{3}$

Conclusion : les points M et N partagent le segment [AB] en trois segments de même longueur.

retour au sommaire

Problème 3. Soit un rectangle ABCD. Comment le partager en deux rectangles tels que la somme des carrés de leurs aires soit minimum ?



Ce problème est modélisé par la figure ci-dessus en considérant que AB est l'unité de longueur.

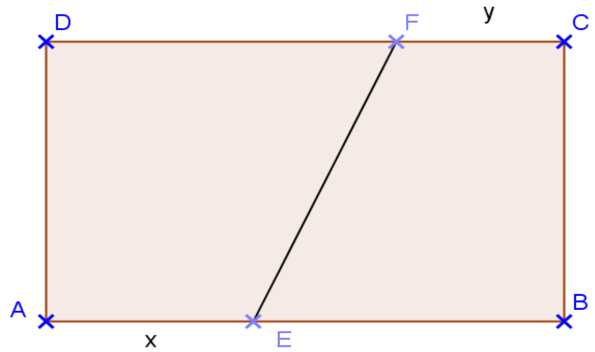
Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y)=(AD\times x)^2+(AD\times y)^2=AD^2\times(x^2+y^2)$.

On retrouve le problème 1 car AD ne varie pas.

Conclusion : le partage se fait à l'aide de la médiane du rectangle ABCD.

Idem si l'on doit partager la longueur AB en 3 en écho au problème 2.

Problème 4. Soit un rectangle ABCD. Comment le partager en deux trapèzes tels que la somme des carrés de leurs aires soit minimum ?



En modélisant le problème à l'aide de la figure ci-dessus et en choisissant AB pour unité de longueur, on pose AE=*x* et FC=*y*.

Il s'agit de minimiser la quantité $S(x,y)=\left(\frac{AD}{2}\times(x+1-y)\right)^2+\left(\frac{AD}{2}\times(y+1-x)\right)^2$.

qui s'écrit aussi $S(x,y)=\left(\frac{AD}{2}\right)^2\times[2(x-y)^2+2]$. On voit ici clairement que le minimum est atteint lorsque *x*=*y* c'est-à-dire lorsque les trapèzes sont superposables.

Le problème du trimestre (n°125)

Démontrer qu'il existe une unique suite (f(n)) croissante, de premier terme f(1)=1, et telle que, pour tout entier naturel non nul n , on a f(n)= card*{m, f(m)=n}.*
La condition de monotonie est-elle nécessaire ?

André STEF est responsable de la rubrique "Problèmes". Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr .

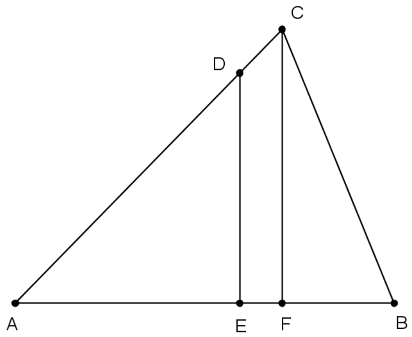
NB (du responsable de la rubrique) : Les problèmes de géométrie posent de sérieux soucis au responsable de la rubrique, il ne faut donc pas compter sur lui pour en proposer. Il est donc fait particulièrement appel aux lecteurs pour suggérer de tels problèmes.

retour au sommaire

LE SOPHISME DU TRIMESTRE

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit.
Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Théorème : **La somme des racines carrées de deux nombres est égale à la racine carrée du double de leur somme :** $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2(a+b)}$ **.**



Soit un triangle ABC, et la hauteur CF issue de C. On pose p = AF, q = FB, h = CF.
On considère le segment DE parallèle à CF qui partage le triangle ABC en deux parties d'aires égales.
On pose x = AE, y = EB et h' = DE (voir figure ci-contre).
L'aire de AED est égale à l'aire de EBCD ; l'aire de ABC est donc le double de l'aire de AED (1).

Ce qui peut s'écrire $\frac{1}{2}(p+q)\,h = 2\times\frac{1}{2}\,x\,h' = x\,h'$ (2)

Par ailleurs, le triangle AED est semblable au triangle AFC, d'où $\frac{h'}{h}=\frac{x}{p}$, d'où $h' = h\,\frac{x}{p}$ (3).

En reportant dans (2), il vient $\frac{1}{2}(p+q)\,h = \frac{x^2.h}{p}$ (4), d'où l'on tire $x = \sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}$ (5).

De la même manière, puisque x et q d'une part et y et p d'autre part jouent des rôles symétriques,
on a $y = \sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$ (6).

En additionnant (5) et (6) il vient : $x+y = \sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$,

et – puisque $x + y = p + q$, $p+q = \sqrt{\frac{p(p+q)}{2}}+\sqrt{\frac{q(p+q)}{2}}$ (8).

En divisant les deux membres de cette égalité par $\sqrt{p+q}$, on obtient $\sqrt{p+q} = \sqrt{\frac{p}{2}}+\sqrt{\frac{q}{2}}$ (9).

En posant $a=\frac{p}{2}$ et $b=\frac{q}{2}$, cette dernière égalité devient $\sqrt{2a + 2b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$.
Le théorème énoncé ci-dessus est donc démontré.

Solution du Sophisme précédent (Petit Vert n°124)

3 = 2, la preuve...

Rappel de l'énoncé : On sait que la dérivée de x^3 est $3x^2$. Mais x^3, c'est aussi x fois x^2, ce qui s'écrit aussi, si on prend x entier : $x^2 + x^2 + \ldots + x^2$, où on a écrit x fois x^2. On dérive alors cela comme une somme (la dérivée de x^2 est $2x$) : la dérivée de x^3 est $2x + 2x + \ldots + 2x$ où on a écrit x fois $2x$. Cette dérivée est donc $x.2x = 2x^2$; on a donc obtenu, pour les valeurs entières de x : $3x^2 = 2x^2$. On en conclut que 3 = 2.

Il y a en fait deux erreurs de raisonnement. Dire que x^3 vaut $x^2 + x^2 + \ldots + x^2$ avec x termes n'est pas une de ces deux erreurs, c'est tout-à-fait correct : on a bien précisé que x était un entier.
La première erreur dans le raisonnement est la suivante : x est entier et on ne peut pas dériver une fonction définie uniquement sur les entiers (pour dériver une fonction en un point a, il est nécessaire que la fonction soit définie dans un **voisinage de *a***, et pas seulement en a).
La seconde raison pour laquelle cette dérivation est fausse est que le nombre de termes de la somme dépend de x (puisque c'est x lui-même), et donc on ne peut pas dériver par rapport à cet x ! On peut dériver ***n*** termes dépendants de x, mais pas dériver x termes dépendants de x...

D'après http://maths.amatheurs.fr

2016, la suite

Dans notre dernier Petit Vert, nous vous proposions un petit problème : en utilisant les dix nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 (chacun pris une seule fois), les opérations «+», «-», «x» et autant de parenthèses que vous voulez, essayez de trouver 2016.

Nous remercions Franck Irjud, Isabelle Manautines, Rachel François, Arnaud Gazagnes, François Martini, Michel Ruiba et Richard Petrosian pour leurs propositions ; ils les retrouveront dans les lignes ci-dessous.

Nous avons reçu deux réponses respectant scrupuleusement l'énoncé de ce petit problème (nous vous les donnons ici avec le moins de parenthèses possible).

La première d'Isabelle Manutines, de Coutances : **7x5x6x9 + (8+4)x10 + 3 + 2 + 1**.
Variante : remplacer 3+2+1 par 3x2x1.

La seconde de Franck Irjud, de Péronne : **7x6x5x10 – [(9-1)x8 + (3+2)x5]**

Une réponse avec les dix nombres, mais incluant une division, de Richard Petrosian (lycée français de Los Angeles) : (9x8x7x4 + 10 - 2x5)x(6/3 - 1)

Deux réponses n'incluaient pas le nombre 10, la seconde utilisant en plus une division :
9x8x7x(6-5)x4+3-2–1 et ((1+2)/3)x4x(6-5)x7x8x9.

Quelques réponses n'utilisaient qu'une partie des nombres, mais introduisaient des factorielles et des puissances : 1x2x(3+4)!/5 ; 1x(2^3)!/(4x5) ; ((1+2)!)! +$(3!)^4$; (1+2)x3!! - (4!+5!)

Une réponse « originale », n'utilisant que les quatre chiffres du nombre 2016 :
2^{6-1+0} x (2^6-1+0)

Par ailleurs, un certain nombre de réponses reçues correspondaient à un défi publié dans le Petit Vert n°109 mais pour un problème un peu différent de celui que nous avions proposé pour cette année 2016. Voici le rappel de cet « ancien énoncé » :

En utilisant les dix nombres 10, 9, 8 … 2, 1 dans cet ordre et les opérations addition, soustraction et multiplication, essayer d'obtenir 2012, comme par exemple : 109-8x7+654x3-2-1 (les parenthèses ne sont pas autorisées, mais la « concaténation » des chiffres l'est). Nous attendons de vous un petit programme informatique pour résoudre ce problème. Et tant qu'à faire, qu'il puisse aussi être utilisé pour les prochaines années : 2013, 2014…

Un algorithme-solution avait été proposée par Ahmed Louali : il est publié dans le Petit Vert n°110 de juin 2012, page 26.

Ces solutions, correspondant à l'utilisation de cet algorithme récursif, sont les suivantes :

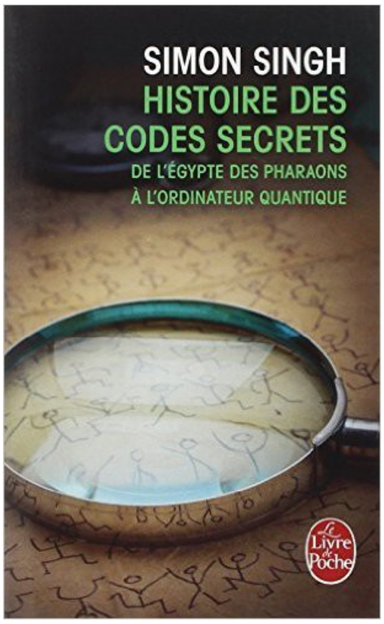
10 + 9 + 8 x 7+ 654 x 3 – 21
10 + 9 + 8 x 7 x 6 x 5 – 4 + 321
10 + 9 x 8 – 7 + 654 x 3 – 21
10 – 9 + 8 x 7 + 654 x 3 – 2 – 1
10 x 9 – 8 – 7 + 654 x 3 – 21
10 x 9 x 8 + 7 + 6 x 5 x 43 – 2 + 1
109 – 8 x 7 + 654 x 3 + 2 – 1

Par aiileurs, on nous a fait remarquer qu'on pouvait obtenir 2016 avec des polygones à 3, 6 mais aussi 24, 136 et 673 côtés, et par ailleurs que 2016 était une année « diabolique », car 2016 = 666 + 666 + 666 + 6 + 6 + 6 !

retour au sommaire

LU POUR VOUS

Histoire des codes secrets



Après la publication dans le Petit Vert (nos 121 et 123) de deux articles sur les codes tournants de Jules Verne, François m'a prêté l'ouvrage de Simon Singh relatant l'histoire des codes secrets, depuis le très simple « code de César » (où on se contente de décaler les lettres de l'alphabet : ABCD... devenant par exemple FGHI...) jusqu'à la découverte du chiffre RSA, en passant en revue bon nombre de codes : le code de Marie Stuart, celui dit « de la Bible », le carré de Vigenère, le chiffre de Pigpen, le chiffre Playfair, le code Navajo, etc., jusqu'à celui de la machine ENIGMA utilisée par les allemands lors de la seconde guerre mondiale (à laquelle l'auteur consacre pas moins de 56 pages).

Le fil d'Ariane de ce roman concerne la clé de ces codes : comment la transmettre pour que l'ennemi ne puisse s'en emparer ? A l'heure actuelle, c'est le code RSA qui a permis de résoudre cet épineux problème : c'est le principe du chiffrage par clé publique, avec les célèbres Alice, Bob et l'espionne Eve. L'auteur y consacre pas moins de cent pages d'explications détaillées, avant de nous proposer un saut vers le futur : la cryptographie quantique.

L'auteur ne se contente pas de nous dévoiler les arcanes mathématiques de la cryprograhie ; il nous donne également énormément d'indications sur la vie des divers protagonistes de cette saga, les replaçant dans leur contexte historique.

Simon Singh, Histoire des codes secrets. Première publication en anglais en 1999.
Disponible en Livre de poche (n°15097).
Du même auteur : Le dernier théorème de Fermat.

Vous trouverez ci-dessous un exemple de code (peu connu) présenté dans ce passionnant ouvrage : le chiffre "ADFGVX", qui comprend deux étapes : une substitution et une transposition.

	A	D	F	G	V	X
A	8	p	3	d	1	n
D	l	t	4	o	a	h
F	7	k	b	c	5	z
G	j	u	6	w	g	m
V	x	s	v	i	r	2
X	9	e	y	0	f	q

Soit par exemple le message à transmettre « *Attaque à 10h15* ». La clé de codage (ci-contre à gauche) doit avoir été au préalable transmise au destinataire pour qu'il puisse le déchiffrer. Chaque lettre du message doit être remplacée par un couple de deux lettres déterminé par cette grille : 8 devient AA, p devient AD, z devient FX etc. Le message ci-dessus devient alors « DVDDDDVXXGDXDDVAVXGDXFV ».

Mais une analyse des fréquences pourrait en venir rapidement à bout : on sait qu'en Français, le **e** est la lettre la plus courante (16% environ), puis viennent le **a** (9,5%), le **s** (8%) etc.

M	A	R	C
D	V	D	D
D	D	D	V
X	X	G	D
X	D	D	V
A	V	X	G
D	X	F	V

La seconde étape du cryptage est une transposition, qui dépend d'un mot clé (lui aussi doit être connu du destinataire) ; prenons par exemple le mot MARC.

Le texte que l'on vient de coder est écrit sous le mot clé (voir tableau de droite en haut). Puis on replace les colonnes de ce premier tableau en les mettant dans l'ordre alphabétique du mot-clé (qui devient ACMR). On obtient le tableau de droite en bas. On lit ce tableau de haut en bas, d'abord la première colonne, puis la seconde, etc.

A	C	M	R
V	D	D	D
D	V	D	D
X	D	X	G
D	V	X	D
V	G	A	X
X	V	D	F

Voici le résultat final de ce codage : « VDXDVXDVDVGVDDXXADDDGDXF ».

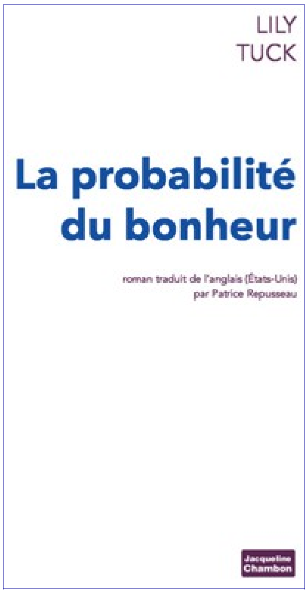
Pour le décoder, on prend les fonctions inverses de celles que l'on a utilisées pour le coder.

retour au sommaire

LU POUR VOUS

LA PROBABILITÉ DU BONHEUR

Isabelle D. a eu envie de nous faire partager une rencontre « Mathématiques - Littérature » repérée dans une de ses lectures récentes.



Sur les rayons de la médiathèque, le titre du livre m'a immédiatement interpellé : « La probabilité du bonheur », de Lily Tuck. Il s'agit d'un roman traduit de l'anglais, dont le titre original est « I married you for happiness », sans doute moins accrocheur pour notre sensibilité de mathématicien.

La narratrice, Nina, est confrontée à la mort subite de son mari Philip tandis qu'il se reposait sur son lit après sa journée de travail. Le temps d'une nuit, l'esprit de Nina vagabonde entre veille et sommeil, entre réalité et souvenirs, entre perte de repères, sentiments et anecdotes de 42 ans de vie commune. Une écriture toute en subtilité, délicatesse et sensualité, au sein d'un récit déstructuré et aléatoire permettant de reconstituer, à la manière d'un puzzle, l'histoire de ce couple.

Nina est artiste peintre tandis que Philip est mathématicien, enseignant-chercheur américain, spécialiste des probabilités. C'est ainsi que les mathématiques, essentiellement la théorie des probabilités, mais aussi les sciences physiques (astrophysique, physique quantique), interviennent naturellement et fréquemment dans le roman par l'intermédiaire du personnage de Philip. La romancière, qui n'avait pas de connaissances très poussées en mathématiques et en sciences avant d'écrire son livre, a fait de nombreuses recherches ses sources sont référencées en fin d'ouvrage - lui permettant de restituer de façon vulgarisée de nombreux concepts mathématiques. Ces différents passages sont en général très justement rendus et s'imbriquent harmonieusement avec le récit. On pourra par exemple apprécier le passage mêlant lapins, suite de Fibonacci et conception d'un enfant, ou celui relatant la tenue d'un carnet de résultats au jeu de pile ou face pendant plusieurs années par la fille du couple.

Isabelle D.

Voici quelques extraits tirés du roman :

« La seule chance, dit Philip à ses étudiants, résout rarement un problème mathématique, contrairement à la concentration et l'imagination. », p.86

« Tu ne comprends pas, dit Philip en fronçant les sourcils […]. Les physiciens n'ont pas la liberté des mathématiciens. Les physiciens s'occupent du monde tangible, tandis que les mathématiciens choisissent leurs mondes.», p.105

« Nina débarrasse et fait la vaisselle avant de retourner au salon. Plongés dans leur conversation, ni Philippe ni Farid ne lèvent les yeux.
Puisque d'après le concept de Kolmogorov, la complexité de tout objet calculable est la longueur du plus court programme qui calcule – est en train de dire Philip.
Je voulais juste vous souhaiter bonne nuit, l'interrompt Nina.
Elle aurait pu aussi bien porter une burqa. », p. 177-178

« Isabelle qui ? demande Nina, sans élever le ton. Une secrétaire ? Une étudiante ?
Isabelle ?
Philip feint-il l'ignorance ?
Oh - il se met à rire. Tu veux faire sa connaissance ?

retour au sommaire

Tiens. Philip fait signe à Nina d'approcher en montrant du doigt l'écran de son ordinateur.
Isabelle est un logiciel. Un démonstrateur générique de théorèmes. Il permet d'exprimer les formules mathématiques et informatiques en langage explicite. [...] - je continue ?
Nina fait non de la tête.», p.186-187

« Les probabilités peuvent être très trompeuses. Il faut essayer de prévoir l'imprévu. L'événement que nul n'a prédit - une épidémie, un tsunami -, l'événement qui va bouleverser les choses. […] Cela pose la question de savoir comment on peut prédire l'avenir à partir de notre connaissance du passé. », p.229-230

Lily Tuck, La probabilité du bonheur. Éditions Acte Sud, Juin 2014, 240 pages
Traduit de l'anglais (États-Unis) par Patrice REPUSSEAU
ISBN 978-2-330-03298-2. Prix indicatif : 21,80 €
http://www.actes-sud.fr/catalogue/litterature/la-probabilite-du-bonheur

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale A.P.M.E.P. Lorraine.
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges "mathématiques" entre les adhérents.
Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à jacverdier@orange.fr .

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, François Drouin, Louisette Hiriart, Françoise Jean, Walter Nurdin, Jacques Verdier et Gilles Waehren.
La maquette et la mise en page sont réalisées par Christophe Walentin.