DANS NOS CLASSES

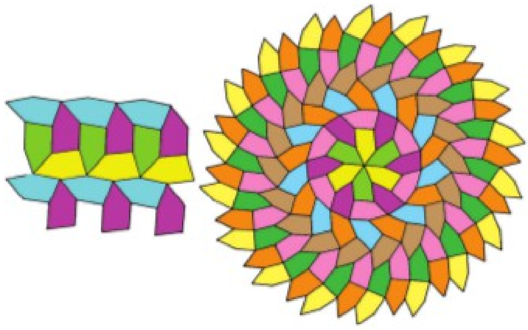
Pavages en Terminale A.A.

Par Loïc Terrier, Lycée Henri Loritz, Nancy

C'est la première année que j'ai des terminales « Arts Appliqués », et leur programme est assez différent de ce que j'ai pu enseigner jusqu'ici. Pas trop de fonctions, ni probas ni stats, mais par contre de la perspective centrale, des coniques et… des pavages !

Le programme, concernant les pavages, est très modeste. Il ne s'agit pas de donner la classification des groupes de paveurs, ni d'entrer dans de grandes considérations théoriques ! Néanmoins, une fois que l'on a montré que tout triangle et tout quadrilatère pave le plan, on est tenté d'aller chercher un peu d'originalité… Ce que font d'ailleurs les quelques sujets du bac disponibles.
En fouinant un peu sur la toile, je suis tombé sur un article très intéressant de Jean-Paul Delahaye concernant les pavages pentagonaux (Pour la science n°432, octobre 2013). Il y raconte comment des mathématiciens se sont successivement trompés quant au nombre de classes de pentagones convexes paveurs ([1]) : on a longtemps pensé qu'il n'y en avait que cinq, puis huit, et aujourd'hui on en connait quatorze, sans être sûr que la liste soit close !

Un pavage en particulier m'a intrigué (voir ci-contre). Le pavé utilisé a tous ses côtés de même longueur, et permet de réaliser des pavages périodiques (ie tels qu'il existe deux translations indépendantes les laissant invariants) ou non périodiques.

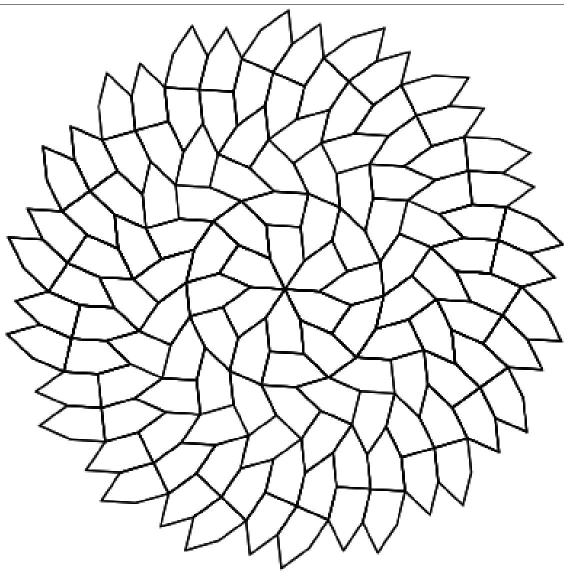


2. L'UNIQUE PENTAGONE dont les angles vérifient les relations $A+2B=C+2E=A+C+2D=360°$ permet de construire plusieurs pavages différents, périodiques *(comme ci-dessus à gauche)* ou non *(comme ci-dessus à droite)*.

J'ai essayé de construire ce pentagone sur GeoGebra, à l'aide des relations d'angles indiquées, mais je n'y suis pas parvenu, la figure que j'obtenais ne permettait aucun des deux pavages représentés. J'ai donc changé d'approche, et j'ai essayé de retrouver sur les pavages les relations entre les angles. Là, miracle, tout s'arrange, les angles sont simples, les pavés s'emboitent parfaitement ! (une erreur s'était glissée dans l'article)
J'avais l'impression de tenir les ingrédients d'une belle activité, permettant de laisser aux élèves le soin de chercher eux-mêmes les relations angulaires et d'avoir le plaisir de construire leur pavage. J'ai produit l'énoncé suivant :

Le pavage ci-contre a été réalisé à l'aide de pentagones identiques. Chacun de ces pentagones a ses 5 côtés de même longueur.

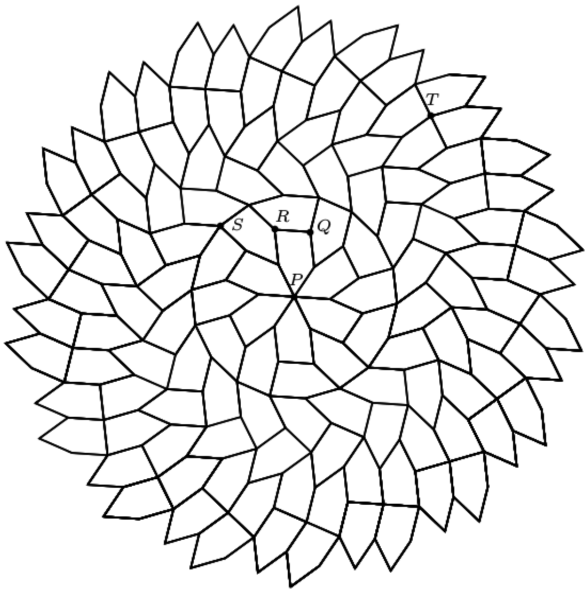
1. Réaliser une figure approximative d'un pentagone. Les sommets seront notés A, B, C, D et E, en prenant pour A le sommet où l'angle est le plus petit, et B le sommet où l'angle est le plus grand.
2. A partir d'observations sur le pavage, déterminer la valeur de $\hat{A}$, puis d'autres relations entre les autres angles.
3. Calculer la valeur de chacun des angles.
4. Montrer que le pentagone $ABCDE$ peut s'obtenir en accolant un triangle equilatéral et un losange.
5. Construire $ABCDE$ sur **GeoGebra**.
6. A l'aide de ce pentagone et de transformations bien choisies, réaliser un pavage **périodique**.
7. Réaliser un second pavage périodique, différent du premier !



retour au sommaire

Et voilà, bien content de moi, j'ai proposé cette activité aux élèves…
Bon, ça ne s'est pas du tout passé comme je pensais ! Sur un groupe de 15 élèves, une seule a très vite trouvé la valeur de tous les angles, elle a construit sans trop de peine le pentagone et a passé le temps restant à essayer des pavages (son côté artistique prenant le dessus, elle a néanmoins refusé de chercher un pavage simple!).
En fait, si la valeur de l'angle en A n'a pas posé de problème, c'est la surabondance de relations entre les angles qui a noyé les élèves. Au bout de quelques temps, voyant que ça n'avançait pas et que certains commençaient à se décourager, j'ai proposé de recueillir les différentes égalités d'angles au tableau. Malheureusement, en l'absence de points sur la figure, il était compliqué de savoir d'où ces égalités venaient ! Les choses ne se sont pas arrangées ensuite, puisqu'en essayant de tirer les angles des diverses relations j'ai obtenu un résultat visiblement faux (un angle égal à 90°). A ce stade, la plupart des élèves ont décroché… J'ai encore un peu cherché, puis me suis décidé à donner les angles pour passer à la construction.
Le travail sur ordinateur aurait pu porter ses fruits car les élèves sont maintenant habitués à travailler sur GeoGebra, mais ils ont seulement eu le temps de construire la figure, pas de chercher le pavage.
Mon activité était, je pense, trop ambitieuse pour le temps imparti et, sous sa forme originale, destinée à des élèves aimant chercher… Ce qui n'est malheureusement pas le cas de tous nos élèves, il faut bien l'admettre. Bien décidé à sauver mon activité, j'ai réfléchi à un autre énoncé : pour aider les élèves à calculer les angles, sans pour autant tout leur donner directement, j'ai nommé les points « stratégiques » et écrit les différentes égalités à trouver.

Le pavage ci-dessous a été réalisé à l'aide de pentagones identiques. Chacun de ces pentagones a ses 5 côtés de même longueur.



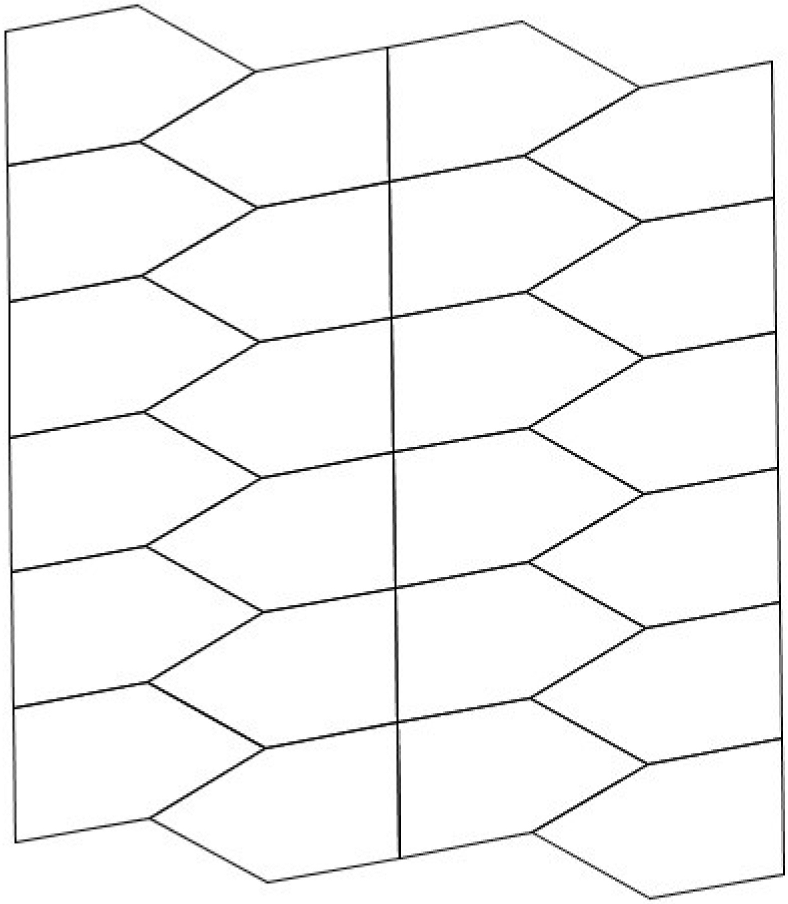
1. Réaliser une figure approximative de ce pentagone. Les sommets seront notés A, B, C, D et E, en prenant pour A le sommet où l'angle est le plus petit, et B le sommet où l'angle est le plus grand.
2. A l'aide du point P, déterminer la valeur de $\widehat{A}$.
3. Associer à chaque point la relation entre les angles correspondante :
   - Q ① $2\widehat{C}+2\widehat{D}=360°$
   - R ② $2\widehat{E}+\widehat{C}=360°$
   - S ③ $2\widehat{D}+\widehat{B}=360°$
   - T ④ $\widehat{A}+2\widehat{C}+\widehat{E}=360°$
4. A l'aide des relations ② et ④, calculer la mesure des angles $\widehat{C}$ et $\widehat{E}$.
5. En déduire la valeur des autres angles.
6. Montrer que le pentagone $ABCDE$ peut s'obtenir en accolant un triangle equilatéral et un losange.
7. Construire $ABCDE$ sur **GeoGebra**.
8. A l'aide de ce pentagone et de transformations bien choisies, réaliser un pavage **périodique**.
9. Réaliser un second pavage périodique, différent du premier !

Reste que l'obtention d'un pavage périodique n'est pas complètement évidente, et le format d'une heure pour cette séance reste très optimiste.
Une autre piste : réaliser les pentagones et les faire manipuler par les élèves avant de passer à la construction théorique utilisant les transformations ! (Les pièces ci-contre ont été réalisées dans un « fab-lab » à l'aide d'une découpe au laser...).
Il semble qu'il existe de nombreux pavages réguliers possibles !

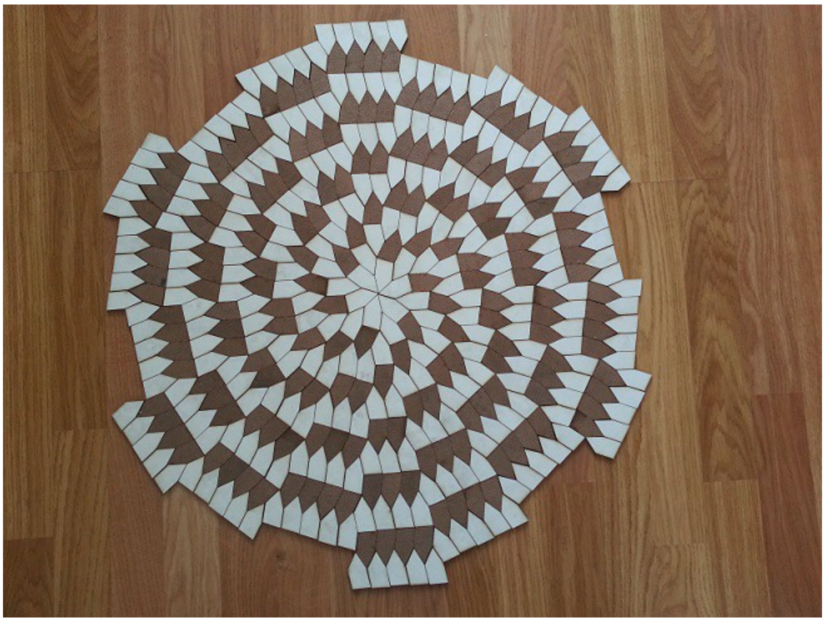
[1] Voir : http://images.math.cnrs.fr/L-enigme-des-pentagones.html

retour au sommaire

Et voici, pour ceux qui voudraient faire réaliser par leurs élèves des pavages à l'aide de ces pentagones, une planche à reproduire en *x* exemplaireset à découper.



Ci-joint également une photo d'un autre pavage apériodique (œuvre collective)



retour au sommaire