

LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 12 DÉCEMBRE 1987

Abonnement
4 n^{os} par an : 30 F

SOMMAIRE

Editorial	2
Le Comité régional	2
Jeu de dominos (P. Fabri)	3
Evaluation du programme de 6 ^e	5
Tore partagé (J.-M. Didry)	6
Situation-problème (J. Verdier)	14
Rubrique problème : énoncé n°12	12
Rubrique problème : solutions	19
Annonces	23
Calendrier	24

ÉDITORIAL

Très brièvement, car la place me manque ...

★ L'A.G. du 28/11/87 a renouvelé sa confiance à l'équipe "sortante" et a élu le Comité 1988 (voir ci-dessous)

★ Au cours des "cérémonies" du 20^e anniversaire, M. PAIR et M. le Recteur ont évoqué le devenir de l'enseignement scientifique, la crise de recrutement des profs, leur formation (ou leur manque de formation)... Il faut que la Régionale prenne position par rapport à ces propos et par rapport aux propositions ministérielles d'augmenter le niveau scientifique de la nation et qu'elle détermine quelles sont ses finalités en tant qu'association des Professeurs de Mathématiques. Nous vous convions pour ce faire, à un Assemblée Générale le mercredi 27 janvier à 14 h. (Fac des Sciences, 1^{er} cycle, Vandœuvre les Nancy).

Jacques Verdier

LE COMITÉ DE LA RÉGIONALE LORRAINE

Président

Jacques VERDIER, Lycée polyvalent de TOMBLAINE (tél. pers. 83.21.48.96)

Vice-présidente, responsable de la Commission "Elémentaire / E.N."

Jacqueline EURIAT, Ecole Normale d'ÉPINAL (tél. pers. 29.35.71.77)

Trésorier

Daniel VAGOST, Lycée polyvalent de ROMBAS (tél. pers. 87.73.09.31)

Secrétaire

Gabriel BORGER, Lycée Louis Vincent de METZ (tél. pers. 87.63.64.10)

Responsables de la Commission "Second Cycle"

Michel BARDY, Lycée Louis Lopicque d'ÉPINAL (tél. pers. 29.34.02.10)

et Michèle FABREGAS, Lycée Robert Schumann de METZ (tél. pers. 87.50.65.16)

Responsable de la Commission "Premier Cycle"

André FRIRY, Collège de RAMBERVILLERS (tél. pers. 29.65.11.87)

Autres membres du Comité :

Nicole ADAM, Collège du Haut de Penoy, VANDŒUVRE (tél. pers. 83.96.69.85;

Odile BACKSCHEIDER, Lycée Professionnel de MONTIGNY (tél. pers. 87.65.79.81)

Marie-José BALIVIERA, Lycée Professionnel de RAON L'ÉTAPE (tél. p. 29.41.16.07)

Claudine BANA, Collège Emile Galle d'ESSEY LES NANCY (tél. pers. 83.29.21.42)

Michel BONN, U.E.R. Sciences Exactes de METZ (tél. pers. 83.55.57.20)

Pierre DORIDANT, Lycée Prof. J.C.- Pellerin d'ÉPINAL (tél. pers. 29.82.41.04)

François DROUIN, Collège Les Avrils de SAINT MIHIEL (tél. pers. 29.89.06.81)

Marie-José HEVER, Lycée Georges de la Tour de METZ (tél. pers. 87.63.54.37)

Jeannine LEFORT, Formatrice informatique (tél. pers. 83.48.61.01)

Geneviève LEMERCIER, Lycée Polyvalent de TOMBLAINE (tél. pers. 83.96.15.93)

Responsable de la Commission "Informatique et Calculatrices Programmables" :

Michel FERAY, Lycée Georges de la Tour, METZ (tél. pers- 87.66.51.84)

LE JEU DE DOMINOS

EN SECTION DE GRANDS DE MATERNELLE (GROUPE DE 10 ENFANTS)

Par Paul FABBRI

École Maternelle du Plateau, 57310 BOUSSE

OBJECTIFS

- organiser une démarche de l'enfant
- notion de propriétés d'un objet (analyse)
- notion de la relation entre deux images, et énoncé de cette relation
- énoncer la règle d'un jeu
- concevoir d'autres dominos (l'enfant doit avoir compris qu'un domino est fait de 2 images avec des propriétés différentes, et qu'on ne représente qu'une seule fois la même propriété sur 2 dominos)

MATÉRIEL

- un jeu de dominos offert par les correspondants
- différents dominos
- du matériel pour réaliser un domino (ciseaux, carton, feutres, ...)

SITUATION : COMMENT JOUER AVEC LE JEU DES CORRESPONDANTS ?

Première séquence :

- manipulation libre des enfants
- observer leur comportement, les remarques, les échanges
- leur demander d'expliquer ce qu'ils font

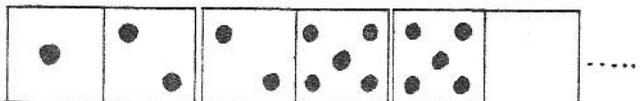
C'est assez confus : disputes, refus de partager les dominos ou rejet des propositions de jeu.

Exemple de proposition : “ *Celui qui a le plus de points gagne* ” ; mais désaccords car les enfants n'ont pas pris chacun le même nombre de dominos.

Deuxième séquence :

“ Comment pourrait-on placer les dominos pour faire un jeu ? ”

Les suggestions fusent : “ *On les met à l'envers, on les retourne, et celui qui a le plus a gagné* ”, “ *On fait une ligne et puis on tourne* ”, “ *Il faut mettre les deux pareils l'un à côté de l'autre* ”...



On a trouvé que tous les dominos sont différents (apport du mot ‘DIFFÉRENT’), mais qu’il y a un côté “pareil” pour deux dominos.

Troisième séquence :

On reprend toutes les façons de placer les dominos proposées par les enfants.

On arrive à la question : “ Que faut-il faire pour jouer au VRAI jeu de dominos ? ”

- avoir deux dessins pareils
- faire se toucher ces 2 dessins par le petit côté des dominos
- utiliser tous les dominos

Quatrième séquence :

La règle du jeu était incomplète. On va amener les enfants à observer et décrire les dominos doubles.

Il faut les placer au milieu du grand côté (c'est la maîtresse qui donnera la solution).

On connaît maintenant la règle du jeu :

- on a plusieurs sortes de dominos
- on va jouer par groupes, chaque groupe avec un jeu de dominos différent : observation des dominos, description ==> émettre une hypothèse qui sera la règle du jeu (couleur pour dominos de couleur, points, ...)

Cinquième séance :

“ Qui pourrait fabriquer un jeu de dominos ? ”

- se servir des notions acquises pour inventer un nouveau jeu (réinvesti dans une autre situation les comportements observés ==> donc contrôler effectivement si les objectifs recherchés sont atteints ou non)

ÉVALUATION

Tous les enfants ont participé activement ; intérêt du jeu, plaisir.

L'énoncé de la règle se fait aisément et elle semble être comprise par tous.

Assemblée Générale Extraordinaire

Mercredi 27 janvier 1988 à 14 h 30

Faculté des Sciences, Vandœuvre

ÉVALUATION DU PROGRAMME DE 6^e

De mars à juin 1977, les Commissions Nationales "1^{er} cycle" et "évaluation" de l'A.P.M.E.P. ont organisé une évaluation du nouveau programme de sixième. De nombreux collègues, tous volontaires, ont été associés à ce travail, et plus de 21 000 élèves ont passé les épreuves.

Dans cette évaluation, l'exhaustivité et la rapidité ont été privilégiées :

Exhaustivité : il y a eu suffisamment de questions pour recouvrir l'intégralité du nouveau programme, et même pour aller au-delà ; cette exhaustivité est cependant limitée par le type d'épreuves qui ont été utilisées (par la force des choses, certaines compétences et certains comportements n'ont pas pu être observés).

Rapidité : l'A.P.M.E.P. a voulu que les résultats de cette évaluation soient très rapidement entre les mains des enseignants pour qu'ils puissent eux-mêmes en tirer des conclusions. C'est chose faite, puisque la brochure "ÉVALUATION DU PROGRAMME DE SIXIEME" vient d'être publiée (voir bon de commande page 23). Cette brochure de 152 pages (format 21×29,7) comporte 4 chapitres : l'organisation de l'opération, le savoir des élèves (dont 38 pages d'analyse des résultats), l'analyse des réponses au questionnaire "professeur", des études particulières (comparaisons avec des évaluations antérieures, corrélations, etc..), et de nombreuses annexes (dont la totalité des modalités d'épreuves destinées aux élèves).

L'A.P.M.E.P. a décidé de renouveler l'évaluation du programme de cette année, pour la classe de CINQUIEME (pour les adhérents, voir B.G.V. de décembre). La Régionale s'associe à ce travail, et a créé une Commission Régionale 1^{er} Cycle, sous la responsabilité d'André FRIRY (Collège de RAMBERVILLERS). La Régionale Lorraine a invité Marie-José HOUSSIN, secrétaire nationale 1^{er} cycle, à venir présenter à la fois les résultats de l'évaluation de sixième (juin 1987) et ce qui se fera pour la cinquième en juin 1988.

M.-J. HOUSSIN sera à ÉPINAL (au C.D.D.P.) le mercredi 3 février à 9 heures, et à METZ (au Collège Schumann) le mercredi 5 février à 14 h 30. Nous vous invitons à retenir dès maintenant cette date, et à en informer tous vos collègues.

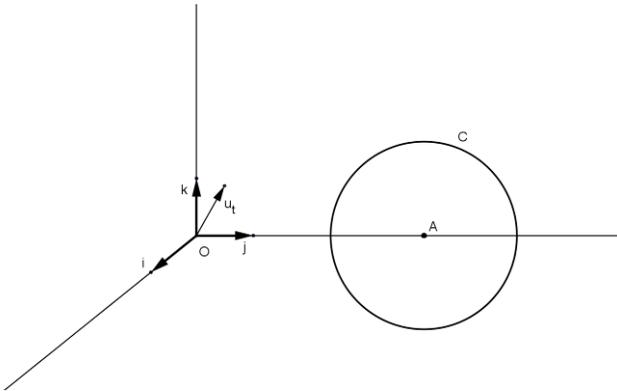
TORE PARTAGÉ

Par Jean-Marie DIDRY
professeur au lycée Frédéric Chopin, Nancy

Il est toujours surprenant d'apprendre qu'outre ses méridiens et ses parallèles, le tore contient une troisième famille de cercles, mise en évidence par Antoine Yvon VILLARCEAU en 1848 : les sections de cette surface par les plans qui lui sont bitangents.

Pour bien "voir" ces cercles, il suffit de faire pivoter un plan autour d'un axe de symétrie du tore (distinct de l'axe de révolution) et d'observer les sections correspondantes : les deux cercles de VILLARCEAU obtenus lorsque le plan est bitangent au tore apparaissent alors comme réunion de deux croissants, limites d'une suite de courbes que l'on se propose d'étudier.

Le problème sera abordé de façon analytique en choisissant un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace tel que (O, \vec{k}) soit l'axe de révolution du tore T , et (O, \vec{i}) l'axe de symétrie regardé, autour duquel pivotent tous les plans Π_θ du type $(O, \vec{i}, \vec{u}_\theta)$ avec $\vec{u}_\theta = \cos \theta \cdot \vec{j} + \sin \theta \cdot \vec{k}$.



T est engendré par la rotation autour de (O, \vec{k}) d'un cercle C du plan (O, \vec{j}, \vec{k}) de centre $A(0, a, 0)$ et de rayon r (avec $0 < r < a$) :

$M(x, y, z)$ est sur T si et seulement si $m(0, \sqrt{x^2 + y^2}, z)$ est sur C , d'où l'équation de T dans

le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2$, soit $x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2 = 2a\sqrt{x^2 + y^2}$, ou encore, les deux membres de l'égalité étant positifs (car $a > r$) : $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$.

Pour déterminer l'intersection $T \cap \Pi_\theta$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{u}_\theta)$, il faut connaître celle de T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{u}_\theta, \vec{i} \wedge \vec{u}_\theta)$.

On a $\vec{i} \wedge \vec{u}_0 = \cos \theta \vec{k} - \sin \theta \vec{j}$; la formule de changement de repère est donc :

$$\begin{cases} x = X \\ y = Y \cos \theta - Z \sin \theta \\ z = Y \sin \theta + Z \cos \theta \end{cases}$$

D'où l'équation de T dans le nouveau repère :

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 = 4a^2 (X^2 + (Y \cos \theta - Z \sin \theta)^2)$$

Et celle de $T \cap \Pi_\theta$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{u}_0) :

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2 (X^2 + Y^2 \cos^2 \theta) = 0.$$

Décidons de représenter dans un même repère orthonormé du plan $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ toutes les courbes Γ_θ d'équation $(X^2 + Y^2 + Z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2 (X^2 + Y^2 \cos^2 \theta) = 0$.

Puisque $\Gamma_{-\theta} = \Gamma_\theta$, il suffit de prendre θ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Γ_0 et $\Gamma_{\pi/2}$ se déterminent sans calcul :

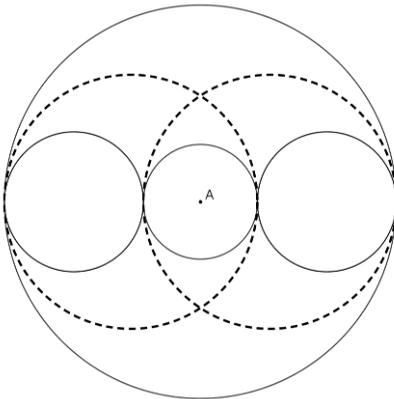
Γ_0 est la réunion des deux cercles de centre O et de rayons respectifs $a - r$ et $a + r$;

$\Gamma_{\pi/2}$ est la réunion des deux cercles de rayon r et de centres respectifs $I(-a, 0)$ et $I'(a, 0)$.

Lorsque la demi-droite (O, \vec{u}_θ) est tangente à C, c'est-à-dire pour

$\theta = \theta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{a} \right)$, Π_{θ_0} est bitangent à T, Γ_{θ_0} est encore la réunion de deux cercles.

En effet, Γ_{θ_0} a pour équation $(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2 \left(x^2 + y^2 \frac{a^2 - r^2}{a^2} \right) = 0$, qui peut se mettre sous la forme $((x - r)^2 + y^2 - a^2)((x + r)^2 + y^2 - a^2) = 0$.



Il s'agit des cercles de VILLAR-CEAU, de rayon a , centrés respectivement en $J(r, 0)$ et $J'(r, 0)$.

La figure suivant rassemble Γ_0 , Γ_{θ_0} et $\Gamma_{\pi/2}$ (respectivement en rouge, pointillés noirs, bleu) :

Pour θ quelconque, il est clair que Γ_θ est symétrique par rapport à (O, \vec{e}_1) et par rapport à (O, \vec{e}_2) ; il

suffit de connaître la partie γ_θ de Γ_θ située dans le premier quadrant.

Pour obtenir un paramétrage de γ_θ pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on peut mener par O une demi-droite définie par $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) = \theta$; elle coupe le cercle de centre O et de rayon ρ en un point au plus.

$$\text{En effet, le système } \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = \rho^2 \\ (x^2 + y^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 \cos^2 \theta) = 0 \end{cases}$$

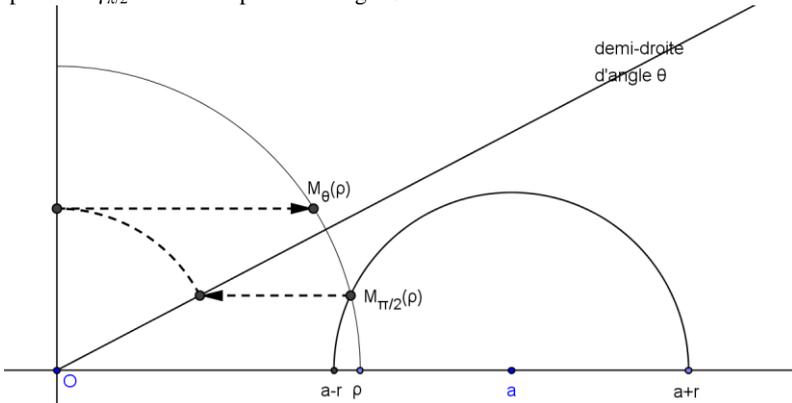
$$\text{équivalent à } \begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ x^2 = \rho^2 - y^2 \\ y^2 = \frac{1}{4a^2 \sin^2 \theta} (\rho^2 - (a-r)^2)((a+r)^2 - \rho^2) \end{cases}$$

qui définit une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^2 :

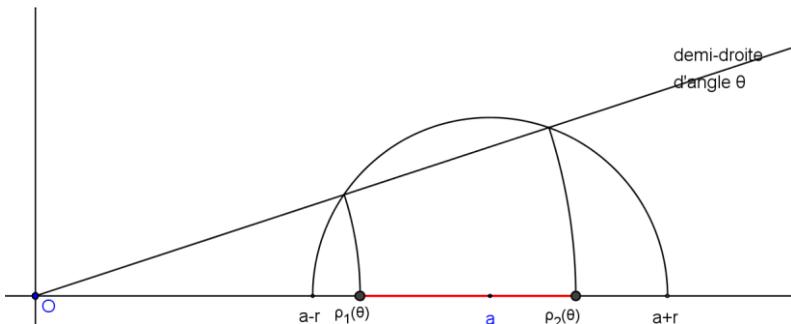
$$\rho \rightarrow \begin{cases} x_\theta(\rho) = \frac{1}{2a \sin \theta} \sqrt{(\rho^2 + a^2 - r^2)^2 - (2a\rho \cos \theta)^2} \\ y_\theta(\rho) = \frac{1}{2a \sin \theta} \sqrt{(\rho^2 - (a-r)^2)((a+r)^2 - \rho^2)} \end{cases}$$

dont le domaine de définition $D_\rho(\theta)$ est inclus dans l'intervalle $[a-r; a+r]$.

En remarquant que $y_\theta(\rho) = \frac{1}{\sin \theta} \times y_{\frac{\pi}{2}}(\rho)$, on obtient une construction point par point de γ_θ à partir de $\gamma_{\pi/2}$ et de l'axe polaire d'angle θ :



Cette construction a de plus l'avantage de permettre la visualisation de D_θ : il est clair que $\Gamma_\theta(\rho)$ existe pour tout point de $[a-r; a+r]$ si $\theta \geq \theta_0$; tandis que si $\theta < \theta_0$, $y_\theta(\rho)$ est supérieur à ρ si et seulement si ρ est dans l'intervalle $]\rho_1(\theta); \rho_2(\theta)[$:



Ces résultats peuvent, bien sûr, se retrouver par le calcul, la discussion portant sur le signe du trinôme $\rho^2 - 2a \cos \theta \rho + (a^2 - r^2)$ suivant les différentes valeurs de θ .

Étudions maintenant les variations de x_θ et de y_θ : ce sont les mêmes, sur D_θ , que celles de leurs carrés :

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(x_\theta^2) = \frac{\rho}{a^2 \sin^2 \theta} (\rho^2 - (a^2 + r^2 - 2a^2 \sin^2 \theta))$$

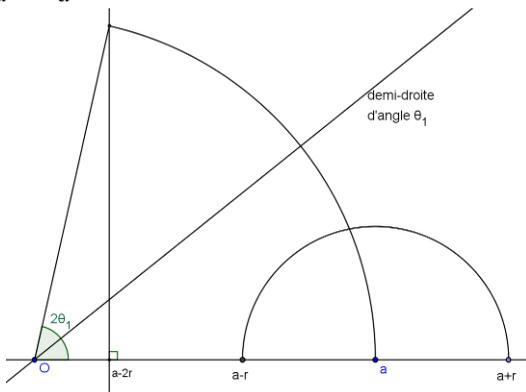
$$\frac{\partial}{\partial \rho}(y_\theta^2) = \frac{\rho}{a^2 \sin^2 \theta} (a^2 + r^2 - \rho^2)$$

- $\frac{\partial}{\partial \rho}(x_\theta^2)$ s'annule sur $[a-r; a+r]$ à condition que l'on ait $(a-r)^2 \leq a^2 + r^2 - 2a^2 \sin^2 \theta \leq (a+r)^2$,

soit $\sin^2 \theta \leq \frac{r}{a}$, ce qui introduit le réel θ_1 de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\sin^2 \theta_1 = \frac{r}{a}$.

Puisque $\left(\frac{r}{a}\right)^2 < \frac{r}{a}$, on aura $\theta_0 < \theta_1$.

La construction géométrique de θ_1 se fait à partir de la relation $\cos(2\theta_1) = 1 - 2\frac{r}{a} = \frac{a-2r}{a}$:



Pour θ inférieur à θ_0 , $D_\theta = [a - r, \rho_1(\theta)] \cup [\rho_2(\theta), a + r]$.

Montrons qu'alors $\frac{\partial}{\partial \rho}(x_\theta^2)$ est négatif sur $[a - r, \rho_1(\theta)]$ et positif sur $[\rho_2(\theta), a + r]$:

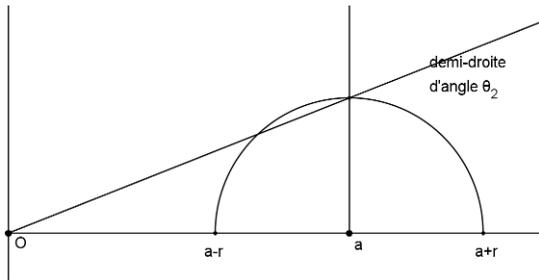
ρ_1 est la plus petite racine de l'équation $\rho^2 - 2a \cos \theta \rho + a^2 - r^2 = 0$,

donc $\rho_1 \leq a \cos \theta$, et aussi $\rho_1^2 = 2a \cos \theta \rho_1 - a^2 + r^2$. On en déduit que $\rho \leq \rho_1$.

$\rho^2 - (a^2 + r^2) + 2a^2 \sin^2 \theta \leq 2a^2 \cos^2 \theta - 2a^2 + 2a^2 \sin^2 \theta$, d'où la première partie de l'affirmation.

On démontrerait la seconde partie de la même façon.

- $\frac{\partial}{\partial \rho}(y_\theta^2)$ s'annule en $\rho = \sqrt{a^2 + r^2}$, qui appartient à D_θ pour $\theta \geq \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{r}{a}\right)$:

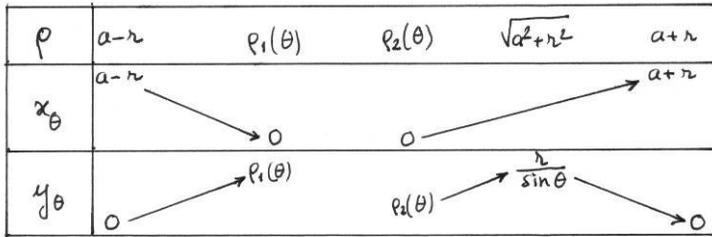


Les tableaux suivants récapitulent les variations conjointes de x_θ et y_θ suivant les différentes valeurs de θ :

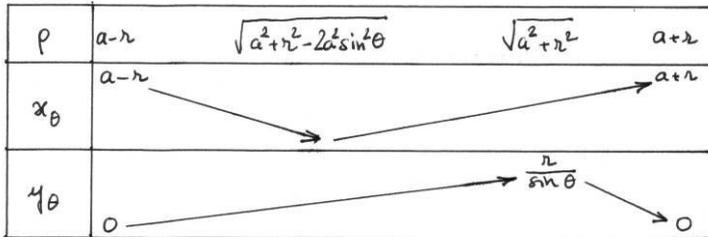
$\theta \in]0; \theta_2]$:

ρ	$a-r$	$\rho_1(\theta)$	$\rho_2(\theta)$	$a+r$
x_θ	$a-r$	\circ	\circ	$a+r$
y_θ	\circ	$\rho_1(\theta)$	$\rho_2(\theta)$	\circ

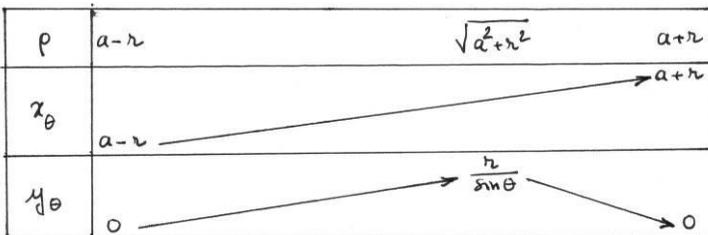
$\theta \in]\theta_2 ; \theta_0[:$



$\theta \in [\theta_0 ; \theta_1[:$



$\theta \in \left[\theta_1 ; \frac{\pi}{2} \right] :$



Enfin, c'est à partir de l'équation cartésienne $g(x,y)$ de Γ_θ où

$g(x,y) = (x^2 + y^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 \cos^2 \theta)$ que l'on obtient plus facilement les renseignements sur les pentes des tangentes aux points remarquables.

g admet des dérivées partielles continues en tout point de \square^2 et on a :

$\frac{\partial}{\partial x} g(x,y) = 4x(a^2 + y^2 - a^2 - r^2)$ et $\frac{\partial}{\partial y} g(x,y) = 4y(a^2 + y^2 - a^2 - r^2 + 2a^2 \sin^2 \theta)$, ce

qui légitime les affirmations suivantes :

- Tangente parallèle à (O, \vec{e}_2) :
 - en $M_\theta(a-r)$ et $M_\theta(a+r)$ pour tout θ de $]0, \frac{\pi}{2}[$;
 - en $M_\theta\left(\sqrt{a^2 + r^2 - 2a^2 \sin^2 \theta}\right)$ pour tout θ de $]\theta_0, \theta_1[$.
- Tangente parallèle à (O, \vec{e}_1) :
 - en $M\theta(\rho_1(\theta))$ et en $M\theta(\rho_2(\theta))$ pour tout θ de $]0, \theta_0[$;
 - en $M_\theta\left(\sqrt{a^2 + r^2}\right)$ pour tout θ de $]\theta_2, \frac{\pi}{2}[$.

La figure de la page suivante représente :

$\Gamma_0, \Gamma_{\theta_2}, \Gamma_{\theta'}$ (pour une valeur de θ' dans $]\theta_2, \theta_0[$), $\Gamma_{\theta_0}, \Gamma_{\theta''}$ (pour une valeur de θ'' dans $]\theta_0, \theta_1[$), Γ_{θ_1} et $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$.

Les courbes ont été obtenues point par point en utilisant la construction géométrique mentionnée ci-dessus.

.../...

Problème n°12 proposé par André VIRICEL

Dans un cadre de 18 cm sur 24 cm on place les points A (10 ; 14), B (8,5 ; 13) et C (10,5 ; 13).

N.B. Les dimensions proposées permettent l'obtention d'une figure correcte sur une page de format A4, en prenant comme unité le *cm* et l'origine dans le coin en bas à gauche.

On pose $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$.

On construit sur chacun des côtés du triangle ABC, vers l'extérieur, un carré. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_1 .

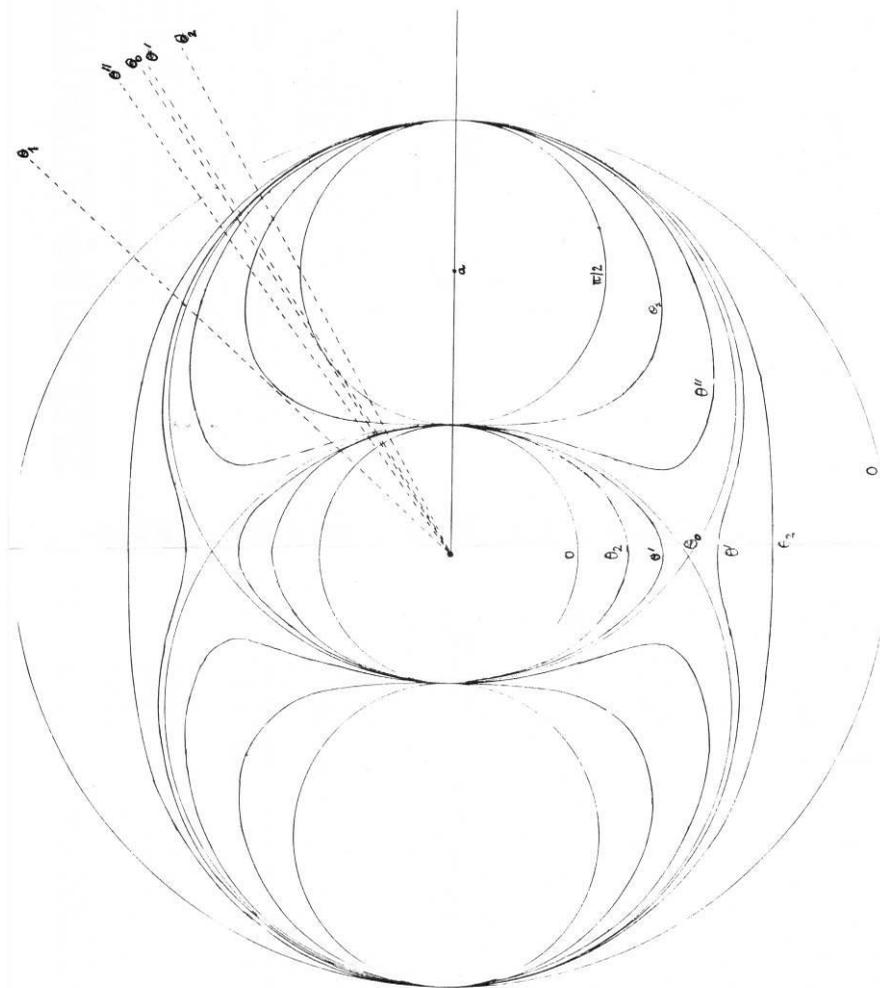
Sur les côtés de H_1 qui n'appartiennent pas aux carrés précédents on construit des carrés vers l'extérieur. Les sommets nouveaux sont les sommets d'un hexagone H_2 .

Et ainsi de suite...

Exprimer le périmètre de H_k en fonction du périmètre p du triangle ABC et de la somme m des longueurs de ses médianes.

Exprimer l'aire de H_k en fonction de l'aire s du triangle ABC et de la somme t des carrés de ses côtés.

Figure (voir page précédente)



SITUATION-PROBLÈME : INTERSECTION D'UN CUBE ET D'UN PLAN

Par Jacques VERDIER
Lycée Arthur Varoquaux, Tomblaine

Voici un exemple de « SITUATION-PROBLÈME » proposée à des élèves de 1^{ère} F début octobre.

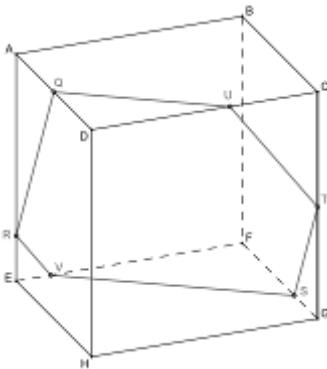
Puisque aucun de ces élèves n'avait, en seconde, abordé la géométrie dans l'espace, nous avons commencé l'année sur ce chapitre, travaillant avec les fiches de l'I.R.E.M. de LORRAINE ⁽¹⁾.

Fin septembre, tous les élèves avaient déjà réalisé au moins les fiches 1 à 13 et 15 à 17, plus quelques exercices (calculs d'aires ou de volumes par exemple) les complétant.

Nous avons, pour une séance prévue sur 3 heures (2 h. classe entière + 1 h. dédoublée), repris la fiche 8 pour chercher à résoudre le problème suivant ⁽²⁾ :

Connaissant le côté du cube (10 cm) et les mesures respectives de ER, QD et SG, soit 2, 5 et 3 cm, déterminer les dimensions de l'intersection (RQUTSV) et la tracer en vraie grandeur. Si le temps le permet, construire une maquette du cube coupé.

La figure en perspective cavalière est la suivante :



¹ Dessiner l'espace, 60 fiches pour les élèves de seconde, 1983.

² Je me permets de faire remarquer qu'une telle activité devrait avoir sa place en seconde : elle permettrait aux élèves de réinvestir toutes les connaissances qu'ils y auraient acquises (ou révisées), donc de renforcer ces acquis. Voir ci-dessous l'extrait du B.O. du 5/2/87 concernant le programme de géométrie de seconde :

L'objectif de cette partie d'une grande importance pour la formation de l'ensemble des élèves. Il s'agit d'analyser ou de réaliser des objets de l'espace physique, de les représenter par des figures planes, de reconnaître ou d'exploiter les configurations élémentaires intervenant dans ces problèmes et de calculer des distances, des aires, des volumes, ce qui permet à la fois d'investir la pratique de la géométrie plane dans des situations spatiales et de dégager quelques propriétés fondamentales de l'incidence, de l'orthogonalité et du repérage, qui sont spécifiques à l'espace. Dans une telle perspective, la géométrie dans l'espace utilisée durant toute l'année comme un terrain pour mobiliser des acquis en algèbre, en analyse et en géométrie plane.

Les élèves travaillaient en petits groupes de quatre. Dans chacun des groupes, un élève était plus particulièrement chargé de prendre en note la « démarche » (voir un exemple en annexe), afin qu'il en reste une trace écrite.

Ce que je voudrais montrer ici, c'est la très grande diversité des stratégies utilisées par les élèves pour résoudre le problème, et leur grande capacité à réutiliser des acquis antérieurs (qu'ils avaient bien mémorisés ou qu'ils retrouvaient grâce à leurs camarades ou à leur manuel) ou à trouver de nouveaux outils.

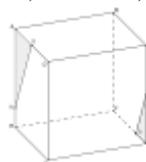
Seule une situation de travail autonome en petits groupes peut permettre au professeur d'observer ses élèves au travail : dans une situation « traditionnelle » (situation magistrale dite impositive, où l'information « descend » du professeur vers la classe, il est impossible – sauf si l'on a don d'ubiquité - d'observer le comportement de ceux-ci. Il faut aussi « oser » les laisser faire et ne pas induire leur démarche en leur donnant trop de pistes au départ, ni trop les presser par des contraintes de temps.

CALCUL DES COTÉS

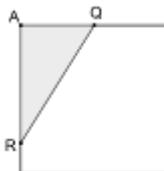
Spontanément, tous les élèves ont cherché à déterminer CU et CT, GT et GS, FS et FV etc. pour trouver UT, TS, SV etc. par Pythagore.

Les triangles semblables ont été facilement repérés :

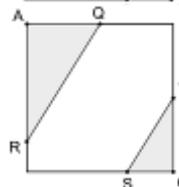
- soit directement sur la figure en perspective, par exemple :



- soit en dessinant les faces parallèles côte à côte, en plan, par ex. :



- soit en "superposant" les faces parallèles (ce qui, en dessin technique, correspond à une vue de coté, une vue de face ou une vue de dessus), par ex. :



Noter que, au vu de ces figures, les élèves disent appliquer « le théorème de Thalès » ⁽³⁾ ; d'autres parlent de triangles homothétiques.

Les côtés ont alors été, trouvés :

- soit en écrivant des rapports de côtés correspondants dans ces triangles, par ex. :

$$\frac{AQ}{AR} = \frac{GS}{GT}$$

- soit en utilisant comme intermédiaires les rapports trigonométriques dans ces triangles rectangles (voir aussi en annexe la reproduction du début du travail d'un des groupes), par exemple :

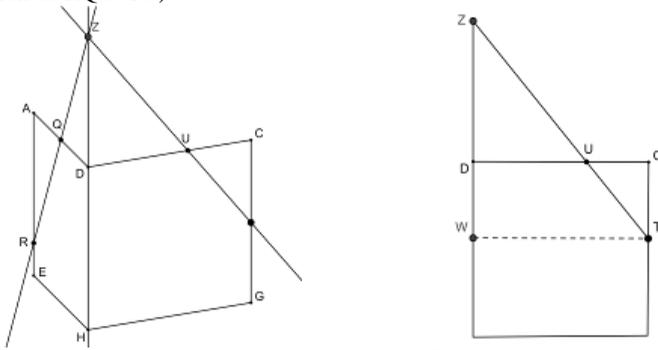
³ « Thalès » n'est pas une conséquence des calculs sur les vecteurs. C'est une « synthèse » - que le plus souvent l'élève se construit lui-même – des « bricolages » qu'il a pratiqué sur des figures (telles que celles rencontrées ici).

$$\tan \alpha = \frac{AQ}{AR} = \frac{5}{8}, \text{ d'où } \alpha \approx 32,005, \text{ puis } \tan \alpha = \frac{GS}{GT}, \text{ d'où } GT = \frac{GS}{\tan \alpha} = \dots \text{ etc.}$$

La difficulté rencontrée :

Elle a été de calculer CU et UD.

Il a fallu donner à beaucoup un « coup de pouce », en demandant aux élèves de retrouver comment ils avaient construit le point U (par prolongement de l'arête DH pour y porter Z, intersection de RQ et TU) :



Le calcul de DU et CU se fait alors à l'aide de la figure ci-dessus (où CT = 5,2 et DZ = 8). Là encore, les élèves appliquent ce qu'ils appellent « Thalès ».

A remarquer qu'aucun ne connaît la propriété suivante des proportions :

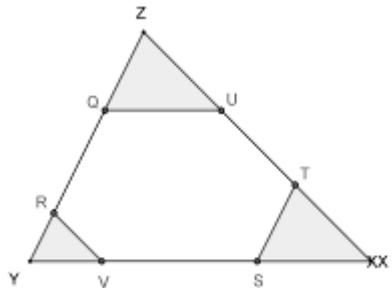
$$\frac{DU}{DZ} = \frac{CU}{CT} = \frac{DU + CU}{DZ + CT}.$$

CONSTRUCTION DE L'HEXAGONE

Arrive à ce stade du compte-rendu, je voudrais inviter le lecteur - s'il ne l'a déjà fait - à essayer de résoudre ce problème et à construire effectivement, sur du bristol, l'hexagone matérialisant l'intersection du cube et du plan, et à essayer d'imaginer quelles pourraient être (a priori) les stratégies développées par des élèves de première pour ce faire, et seulement après à poursuivre sa lecture.

..... PAUSE

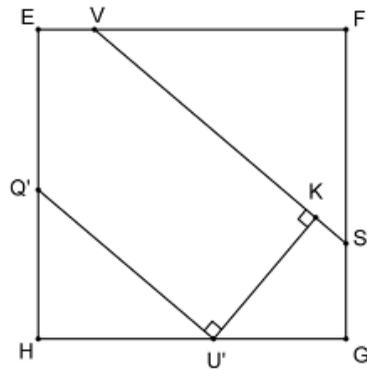
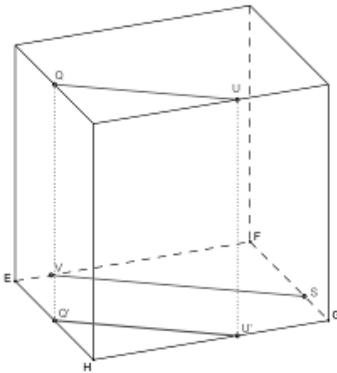
- Deux groupes sur huit ont prolongé les segments UT, VS et RQ en dehors de la figure, construisant les points X (intersection de UT, VS et HG) et Y (intersection de QR, VS et EH) de la même façon qu'ils avaient obtenu Z. Par un calcul analogue à ceux faits dans la première partie (toujours "leur" Thalès, et Pythagore), ils ont déterminé ZQ, ZU, XT, XS, YR et YV (ce qui était relativement simple) et ont construit l'hexagone par « amputation des coins » du triangle ZYX.



- Six groupes sur huit (à l'instar de leur professeur !) n'ont pas du tout eu l'idée de sortir du cube, et ont cherché comment construire un hexagone en connaissant les longueurs de ses 6 côtés (et sachant en outre que ces côtés étaient parallèles deux à deux).

- Dans un de ces groupes, les élèves étaient persuadés que la « hauteur » de cet hexagone (distance des droites QU et VS) était égale à celle du cube, soit 10 cm. Un des élèves n'a d'ailleurs jamais voulu en démordre, même après avoir eu entre les mains la maquette du cube (que j'avais préalablement construite) et y avoir mesuré une hauteur de 11,2 cm.

- La plupart des groupes ont cherché par tous les moyens (!) à déterminer cette hauteur en se basant sur l'idée suivante : soit $Q'U'$ la projection de QU sur le plan horizontal ; il suffit de déterminer la distance des deux droites VS et $Q'U'$ dans le carré de base EFGH (voir figures ci-dessous). A ce niveau, un peu toutes les méthodes ont été utilisées, des plus simples aux plus « tarabiscotées ».



- Un autre groupe a cherché à déterminer les longueurs de toutes les diagonales de l'hexagone, pour tracer ensuite celui-ci au compas.

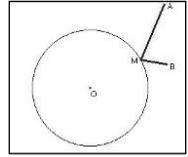
Pour les calculer, ils avaient fixé un repère dans l'espace, porté par $(\overline{EH}, \overline{EF}, \overline{EA})$, et y ont déterminé les coordonnées des points Q, U, T etc.

Ce qui, avec $d(M,N) = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}$ vu en classe la semaine précédente, leur a permis de tout trouver.

- Un dernier groupe, enfin, cherchant désespérément une méthode, repérant dans le manuel le chapitre « Relations métriques dans le plan : A. Le triangle ; B. Les polygones », y a trouvé le théorème : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ et l'a utilisé pour chercher, les angles des divers triangles (RQV, VQS, SQT et TQU), construisant ainsi l'hexagone, en commençant par son angle Q.
- J'ai pu remarquer, dans cette partie du travail, que les stratégies n'étaient pas très "fixées" : certains élèves essayaient de passer de l'une à l'autre dès qu'il y avait un point qui « leur résistait ».

Solution du problème n°11.1 (septembre 1987)

Rappel de l'énoncé : Etant donné un cercle (C) et deux points A et B extérieurs à ce cercle, déterminer M sur (C) tel que MA + MB soit minimum.



Remarque préalable. On aurait pu choisir les deux points à l'intérieur du cercle : c'est le célèbre problème du « billard circulaire » d'Al Hazan (où la balle doit-elle se réfléchir pour aller de A à B ?).

Première partie de la solution :

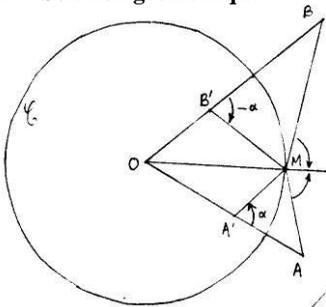
Le point M doit être tel que OM soit la bissectrice de l'angle (MA,MB). En effet : soit $f(M) = MA + MB$. Les lignes de niveau correspondantes sont les ellipses (E) de foyers A et B (dont l'ellipse réduite au seul segment [AB]). Le minimum de MA + MB est atteint lorsque l'ellipse est tangente au cercle (C) (le maximum est atteint dans des conditions analogues).

Un des propriétés de l'ellipse est que la tangente en M est bissectrice (extérieure) des deux rayons MA et MB.

Le problème se ramène donc à ceci : quel est le point M du cercle tel que OM soit bissectrice de (MA,MB) ?

Seconde partie de la solution :

1. Solution géométrique



Soit l'inversion $\mathfrak{I}(0; r^2)$, laissant (C) invariant, A' le transformé de A et B' le transformé de B.

Les triangles OMA et OA'M sont semblables ; de même OMB et OB'M. D'où

$$(OA', A'M) = (OM, OA) \pmod{\pi} \text{ et}$$

$$(OB', B'M) = (OM, OB) \pmod{\pi}. \text{ On reconnaît là un mode de génération d'une hyperbole équilatère.}$$

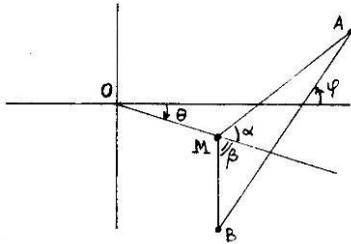
Éléments géométriques de cette hyperbole :

- Si $\alpha = 0$, M est en O
- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, M est en S, diamétralement opposé à O dans le cercle OA'B'.
- Si $\alpha = (OA', A'B')$, M est en B'.
- Si $\alpha = (OA', OB')$, M est le quatrième sommet m du parallélogramme B'OA'm ; il en résulte que le centre ω de l'hyperbole est le milieu de [A'B'].
- Si $\alpha = \frac{(OA', OB')}{2} \pmod{\frac{\pi}{2}}$, M est à l'infini.

Les asymptotes sont donc les parallèles menées par ω aux bissectrices de (OA,OB).

Le point M recherché est une des intersections de cette hyperbole et du cercle (C) (celle qui est à l'intérieur de l'angle saillant AOB).

2. Solution trigonométrique



On cherche θ tels que les angles α et β soient égaux (voir figure ci-dessus). On a :

$$\overline{OM} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \overline{MA} \begin{pmatrix} x - \cos \theta \\ y - \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\overline{ME} \begin{pmatrix} x' - \cos \theta \\ y' - \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Appelons L la distance AB , et φ l'angle (Ox, BA) :

$$L^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \frac{y - y'}{x - x'}.$$

$$\tan \alpha = \frac{\overline{OM} \cdot \overline{MA}}{\det(\overline{OM}, \overline{MA})} = \frac{(x - \cos \theta) \cos \theta + (y - \sin \theta) \sin \theta}{(x - \cos \theta) \sin \theta - (y - \sin \theta) \cos \theta} = \frac{x \cos \theta + y \sin \theta - 1}{x \sin \theta - y \cos \theta}$$

$$\text{De même} \quad \tan \beta = \frac{x' \cos \theta + y' \sin \theta - 1}{x' \sin \theta - y' \cos \theta}.$$

Il faut que $\alpha = \beta$, d'où :

$$(x \cos \theta + y \sin \theta - 1)(x' \sin \theta - y' \cos \theta) = (x' \cos \theta + y' \sin \theta - 1)(x \sin \theta - y \cos \theta),$$

ce qui équivaut à : $(x - x') \sin \theta + (y - y') \cos \theta + (x' y - x y') = 0$.

Par conséquent, en divisant par L^2 et en utilisant φ , il vient $\cos(\theta - \varphi) = \frac{x' y - x y'}{L^2}$,

dont la solution est $\theta = \varphi + \text{Arccos} \frac{x' y - x y'}{L^2}$.

3. Solution par les nombres complexes

Prenons comme origine le centre O de (C) , et comme unité le rayon.

Les affixes sont pour M : $e^{i\theta}$, pour A : $z = a \cdot e^{i\alpha}$ et pour B : $z' = b \cdot e^{i\beta}$. Le vecteur \overline{AM} correspond à $e^{i\theta} - a e^{i\alpha}$ et \overline{BM} à $e^{i\theta} - b e^{i\beta}$.

Exprimons le fait que \overline{AM} et \overline{BM} font des angles opposés avec \overline{OM} :

$$\frac{e^{i\theta} - a e^{i\alpha}}{e^{i\theta}} \times \frac{1}{AM} \quad \text{et} \quad \frac{e^{i\theta} - b e^{i\beta}}{e^{i\theta}} \times \frac{1}{BM} \quad \text{sont inverses,}$$

$$\text{soit} \quad (e^{i\theta} - a e^{i\alpha})(e^{i\theta} - b e^{i\beta}) = e^{2i\theta} AM \cdot BM.$$

Appliquons le même calcul aux vecteurs symétriques par rapport à \overline{Ox} :

$$(e^{-i\theta} - a e^{-i\alpha})(e^{-i\theta} - b e^{-i\beta}) = e^{-2i\theta} AM \cdot BM$$

Divisons membre à membre les deux égalités précédentes :

$$\frac{e^{2i\theta} - e^{i\theta}(a e^{i\alpha} + b e^{i\beta}) + a b e^{i(\alpha+\beta)}}{e^{-2i\theta} - e^{-i\theta}(a e^{-i\alpha} + b e^{-i\beta}) + a b e^{-i(\alpha+\beta)}} = 4e^{i\theta}.$$

$$\text{Soit} \quad e^{4i\theta} a b e^{-i(\alpha+\beta)} - e^{3i\theta} (a e^{-i\alpha} + b e^{-i\beta}) + e^{2i\theta} = e^{2i\theta} - e^{i\theta} (a e^{i\alpha} + b e^{i\beta}) + a b e^{i(\alpha+\beta)},$$

$$\text{ou encore} \quad e^{4i\theta} \overline{z z'} - e^{3i\theta} (\overline{z} + \overline{z'}) + e^{i\theta} (z + z') - z z' = 0.$$

En divisant par $e^{2i\theta}$, on obtient

$$ab(e^{i(2\theta-\alpha-\beta)} - e^{-i(2\theta-\alpha-\beta)}) - a(e^{i(\theta-\alpha)} - e^{-i(\theta-\alpha)}) - b(e^{i(\theta-\beta)} - e^{-i(\theta-\beta)}) = 0.$$

En divisant par $2i$, il vient :

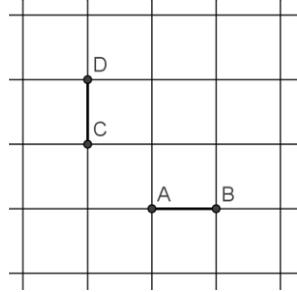
$$a \sin(2\theta - \alpha - \beta) - a \sin(\theta - \alpha) - b \sin(\theta - \beta) = 0,$$

soit l'équation $\sin(2\theta - \alpha - \beta) = \frac{1}{a} \sin(\theta - \alpha) + \frac{1}{b} \sin(\theta - \beta)$, que l'on peut résoudre graphiquement dès que l'on connaît a , α , b et β .

Solution du problème n°11.2 (septembre 1987)

Dans un quadrillage à mailles carrées, on met en évidence les deux segments AB et CD (en gras sur la figure).

Quel est l'ensemble des points dont le rapport des distances aux deux segments AB et CD est égal à 2 ?

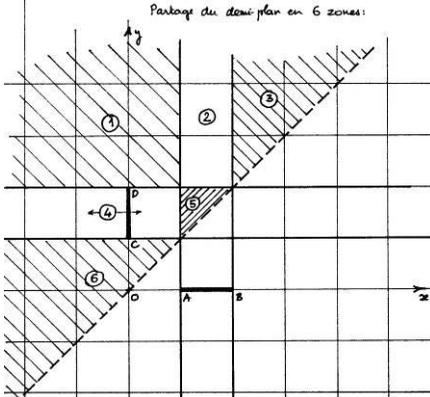


Solution de l'auteur, A. VIRICEL.

Choisissons des axes \overline{Ox} et \overline{Oy} qui contiennent respectivement les segments [AB] et [CD], l'unité étant celle du quadrillage. Il est évident qu'il n'y a aucun point solution dans le demi-plan $y < x$.

La distance d'un point $M(x,y)$ à un segment est la plus courte des distances de M à l'ensemble des points du segment. On est donc amené à partager le demi-plan $y > x$ en six zones ; si on note K la projection de M sur (CD) et H sa projection sur (AB), la solution du problème correspond à ceci :

On notera K la projection de M sur (CD) et H la projection de M sur (AB).



$$\text{zone 1: } \frac{MA}{MD} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} = 2$$

$$\text{zone 2: } \frac{MH}{MD} = 2 \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} = 2$$

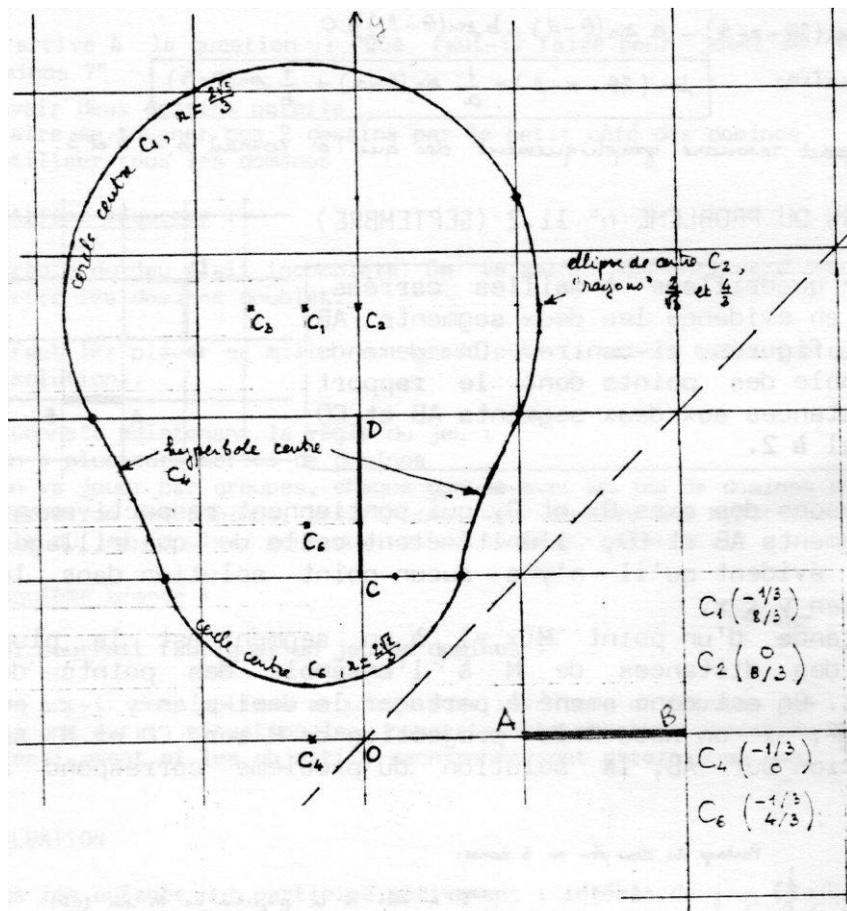
$$\text{zone 3: } \frac{MB}{MD} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-2)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-2)^2}} = 2$$

$$\text{zone 4: } \frac{MA}{MK} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{|x|} = 2$$

$$\text{zone 5: } \frac{MH}{MK} = 2 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = 2$$

$$\text{zone 6: } \frac{MA}{MC} = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} = 2$$

La solution du problème est donc la courbe ci-après, dont les 5 arcs se raccordent « correctement » (c'est à dire avec tangente commune) :



SUIVI SCIENTIFIQUE 1989-1987

COMPTE RENDU DE L'EXPÉRIMENTATION
DES NOUVEAUX PROGRAMMES DE SIXIÈME

A commander à l'I.R.E.M.
(sans passer par l'intermédiaire de la Régionale)
31 F port compris

AFFICHES

La Régionale a réalisé et publié des "affiches" (format A3) permettant de comparer les divers modèles de calculatrices programmables.

Ces affiches sont destinées plus particulièrement aux enseignants qui, sachant se servir de l'un des modèles étudiés, aimeraient pouvoir expliquer facilement à tel ou tel élève le fonctionnement de sa propre calculatrice.

Ces affiches sont donc des tableaux synoptiques, permettant de comparer les modes d'utilisation des calculatrices suivantes : TEXAS TI 57 et 55-11, CASIO fx 180 P, ALTIC LC-604, CANON F-73 P, SHARP EL 512, TEXAS TI 62 et 66, CASIO fx 4000 P, fx 6000 G et fx 6500 G.

La comparaison porte sur :

- la partition mémoire
- l'affectation des mémoires et le calcul direct en mémoire
- les divers effacements
- les séries statistiques (simples ou doubles)
- l'enregistrement d'un programme
- l'entrée d'une donnée au cours d'un programme
- les sauts inconditionnels
- les sauts conditionnels

Attention : ces fiches ne concernent pas la "pédagogie" de l'utilisation des calculatrices programmables en classe.



A découper ou à recopier, et à envoyer à Jacques VERDIER / A.P.M.E.P.

22 rue Victor Hugo, 54130 SAINT-MAX :

Je désire recevoir une photocopie des 6 affiches réalisées par la Régionale Lorraine sur le fonctionnement des calculatrices programmables.

Je joins 11 F en timbres-poste pour les frais de copie et d'envoi.

NOM :

Adresse :



BON DE COMMANDE

BROCHURE EVALUATION du PROGRAMME - fin de sixième - 1987

(voir page 5)

A adresser à
A.P.M.E.P.
26 rue Duméril
75013 PARIS

Nom, prénom :

Adresse d'expédition :

Code postal :

Nombre d'exemplaires commandés × 55 F = F

CALENDRIER

Samedi 16 janvier 1988 à l'I.R.E.M.

Réunion du Comité de la Régionale (9 h.)

Mercredi 27 janvier à 14 h. 30, Fac. des Sciences.

ASSEMBLÉE GÉNÉRALE EXTRAORDINAIRE

La position de la Régionale par rapport aux propositions du 28/11/87 de M. le Recteur, par rapport à la formation (continue et initiale) des maîtres, au rôle social du professeur de mathématiques et à la crise de recrutement.

Mercredi 3 février

à 9 h. au C.D.D.P. d'ÉPINAL

à 14 h. 30 au Collège Schumann de METZ

Présentation, par M.-J. HOUSSIN, des résultats de l'évaluation du programme de 6^e, des propositions APMEP pour l'évaluation du programme de 5^e (voir p. 5).

Mercredi 2 mars à 14 h. à l'I.R.E.M.

Comité de la Régionale

LE PETIT VERT n° 12 (BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt légal : 1987

Imprimé au siège de l'Association :

IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à 500 exemplaires

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F

L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :

ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)