DANS NOS CLASSES

UN PROBLEME OUVERT EN TROISIEME : AUTOUR DES TRIANGLES PYTHAGORICIENS

Par Valentin Buat-Ménard,
Collège de Douvaine (Haute-Savoie)

Note de la rédaction : Valentin Buat-Ménart, ancien stagiaire PLC2 sur Metz en 2002, a repris fin 2013 une activité mise en œuvre et analysée par Isabelle Jacques lorsqu'elle enseignait au collège Roger Nicklès (Dommartemeint, 54) dans le cadre d'un travail téléchargeable à l'adresse :
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/m2002/actimath/classe/Activites_et_outils/college/PASI_activites_de_recherche.pdf *(lire en particulier la page 45 du document)*

J'ai posé ce problème à mes troisièmes qui ont un bon niveau avec quelques élèves brillants et très moteurs :

Existe-t-il d'autres triangles rectangles que le fameux : « 3-4-5 », dont les mesures des côtés sont des entiers successifs ?

Je partais pour suivre le « protocole » de la fiche, c'est-à-dire, qu'après une recherche individuelle, nous montrerions l'impossibilité de tester toutes les possibilités, que nous choisirions ensuite une approche littérale, avec trois possibilités pour le choix de l'inconnue.

Première séance

Les élèves ont entrepris une recherche individuelle. Assez vite, après échanges avec certains élèves, il a été rappelé qu'il fallait vérifier l'égalité de Pythagore pour savoir si le triangle pouvait être rectangle. Les élèves ont testé et se sont vite rendu compte qu'il y avait du travail en perspective.

Un élève, Clément, qui a de bonnes idées mais une assez mauvaise capacité à les exprimer, avait écrit quelque chose comme : « Plus les nombres sont grand plus l'écart de la somme des côtés va être trop grande », en moins compréhensible, mais je crois que c'était son idée. Je lui ai dit que son explication ne me paraissait pas très compréhensible et qu'en plus, il ne semblait pas avoir pris en compte le fait que le test se faisait sur le carré des côtés.

J'ai ensuite repris la main pour une phase en commun. J'allais les orienter sur « le protocole », quand je me suis dit que ce serait dommage de ne pas explorer la piste de Clément qui m'avait tout de même intrigué. Je lui ai fait exprimer son idée. Certains élèves semblaient comprendre où il voulait en venir, plus que moi visiblement.

En approfondissant, il est parti dans une explication beaucoup plus intéressante, à savoir que pour des nombres inférieurs au 3-4-5, la somme des carrés était inférieure au carré du plus grand côté, et que ça s'inversait après 3-4-5 :
$2^2+3^2<4^2$ et $3^2+4^2=5^2$ puis $4^2+5^2>6^2$ et $5^2+6^2>7^2$ etc…

A ce stade-là, on était à peu près tous convaincus de son argument, restait à le prouver.
Une élève a proposé de systématiser les tests au tableur. Par chance, j'ai deux ordinateurs en fond de salle. Deux élèves sont allés faire un programme au tableur, et nous avons entrepris d'algébriser la conjecture de Clément avec les autres.
Nous sommes arrivés à la <u>Conjecture de Clément :</u>

« Si $x > 3$ alors $x^2+(x+1)^2>(x+2)^2$ » ce qui revient à
« Si $x > 3$ alors $2x^2+2x+1>x^2+4x+4$ »

retour au sommaire

Fin de la première séance (je n'avais à peine qu'une demi-heure, le reste ayant été pris en début d'heure par d'autres activités).

Deuxième séance

Nous avons d'abord regardé au tableur le programme des deux élèves, et nous avons essayé de l'améliorer pour voir apparaître l'inversion de Clément. Nous avons donc opté pour un calcul de la différence $(x+2)^2-((x+1)^2+x^2)$ afin que le signe – montre l'inversion dans la dernière colonne.

Le tableau est très clair (voir Annexe).

Mais il fallait démontrer. La démonstration de la conjecture de Clément est très compliquée pour des élèves de troisième. Je les ai tout de même laissé chercher comment se dépatouiller avec « Si $x > 3$ alors $2x^2+2x+1>x^2+4x+4$ ».

Quelques élèves l'ont transformé en équation. Les autres ont fait des tests (remarque : nous n'avions pas encore abordé les inéquations, mais ça ne leur a posé aucun problème). Enfin quelques-uns ont essayé de manipuler l'inéquation.

J'ai envoyé un élève écrire sa résolution d'équation et il est arrivé à $2x+3=x^2$
Je les ai interrogés sur ce que nous donnerait cette équation. Une élève a dit que les solutions seraient les valeurs du petit côté pour lesquelles le triangle est rectangle. Je leur ai demandé à quelles valeurs on devait s'attendre et une autre élève m'a dit « une valeur négative puisque ça ne doit pas marcher » (là, je dis bravo !). Je leur ai demandé quelle valeur devrait aussi vérifier l'équation, et x = 3 a été proposé. Je leur ai ensuite montré vite comment résoudre une telle équation avec des identités remarquables :

$$x^2-2x-3=0$$
$$x^2-2x+1-4=0$$
$$(x-1)^2-4=0$$
$$(x-1-2)(x-1+2)=0$$
$$(x-3)(x+1)=0$$

Cette phase a été rapide car mon objectif était de leur montrer où ils pouvaient retrouver les calculs littéraux travaillés jusqu'à présent, mais un tel niveau n'est pas attendu en troisième.

Nous avons ensuite exploré l'autre possibilité, « résoudre » l'inéquation :une élève est arrivée à la réduire à : $x^2>2x+3$. Les élèves ne voyaient pas comment aller plus loin. Je leur ai montré qu'on pouvait s'en sortir par un raisonnement « intuitif » :
Si j'impose $x > 3$ alors $3x > 2x+3$ or pour $x > 3$ on a logiquement $x^2>3x$ CQFD

Très honnêtement les élèves n'en pouvaient plus : beaucoup d'informations pas faciles à suivre. Encore une fois, la fin de cette activité était plus culturelle qu'autre chose, ou comment mettre en perspective les outils que nous commençons à mettre en place en troisième. Tous les élèves n'en ont clairement pas pleinement profité mais la classe a été impliquée jusqu'au bout, l'événement « Théorème de Clément » ayant aiguisé les attentions. Le tableur a pour une fois été brillamment proposé par un élève et non imposé par le prof. Il s'est révélé très utile pour appuyer une conjecture. Les élèves ont choisi une voie qui me semblait périlleuse, mais que j'ai osé suivre et c'était un très bon moment.

Merci pour l'activité !

Page suivante : annexe

retour au sommaire

ANNEXE : Feuille de Calcul pour la conjecture de Clément.

A1	B1	C1	A2*A2	B2*B2	C2*C2-(D2+E2)
1	2	3	1	4	4
2	3	4	4	9	3
3	4	5	9	16	0
4	5	6	16	25	-5
5	6	7	25	36	-12
6	7	8	36	49	-21
7	8	9	49	64	-32
8	9	10	64	81	-45
9	10	11	81	100	-60
10	11	12	100	121	-77
11	12	13	121	144	-96
12	13	14	144	169	-117
13	14	15	169	196	-140
14	15	16	196	225	-165
15	16	17	225	256	-192
16	17	18	256	289	-221
17	18	19	289	324	-252
18	19	20	324	361	-285
19	20	21	361	400	-320
20	21	22	400	441	-357
21	22	23	441	484	-396
22	23	24	484	529	-437
23	24	25	529	576	-480
24	25	26	576	625	-525
25	26	27	625	676	-572
26	27	28	676	729	-621
27	28	29	729	784	-672
28	29	30	784	841	-725
29	30	31	841	900	-780
30	31	32	900	961	-837
31	32	33	961	1024	-896

retour au sommaire