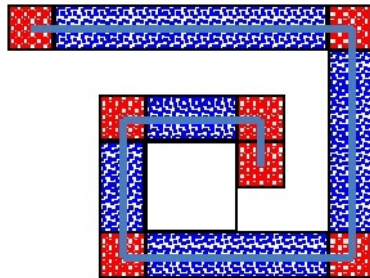


DANS NOS CLASSES

François Drouin, responsable de la préparation de la future brochure « Maths et Arts » que la régionale prévoit d'éditer, a créé une activité en rapport avec une spirale en mosaïque de l'abbaye Saint-Michel de Saint-Mihiel (la photo de cette spirale figure en couverture de ce numéro du Petit Vert). François avait sollicité Serge Ermisse d'une part pour dessiner (avec le module « Turtle » du logiciel Python) un schéma de cette spirale, et d'autre part pour qu'il donne son avis sur l'activité qu'il avait créée. Pour Serge, la meilleure façon de pouvoir répondre à cette demande était de tester cette activité dans sa classe de 1^{ère} S. Il nous livre ici le compte rendu de cette séance.



Le schéma initial proposé par François Drouin

La spirale de Saint-Mihiel en 1^{ère} S

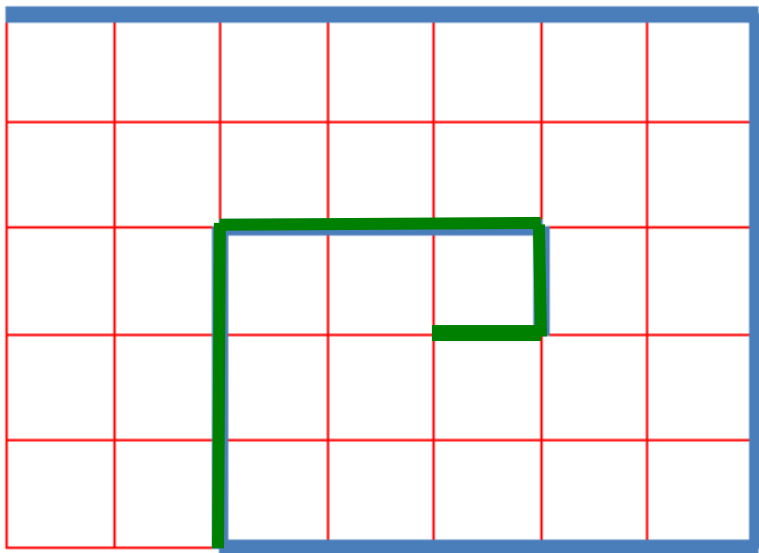
Par Serge Ermisse, Lycée Jean de Pange, Sarreguemines

Objectifs de la séance

- A : Développer l'esprit d'initiative, de recherche avec un problème ouvert.
- B : Travailler, sans le dire, la notion de relation de récurrence qui nous servira pour les suites.
- C : Réinvestir l'algorithmique au service de la résolution de problème.
- D : Réinvestir la méthode de Gauss, vue dans un précédent TD pour trouver la somme des premiers entiers consécutifs.

Travail préliminaire : C'est le troisième T.P. de recherche basé sur les suites, mais rien n'a encore été formalisé.

Remarque : J'ai modifié légèrement la situation initiale proposée par François (en ajoutant un premier segment), pensant faciliter le travail des élèves pour dégager la suite des entiers qui interviennent dans chaque spire.

Énoncé donné aux élèves

Une spire de la spirale est formée de 4 segments. La première spire est en vert.

1°) Dans le cahier d'exercice, reproduire puis poursuivre le dessin de la spirale pour obtenir les 4 premières spires (autrement dit un plan qui pourra aider le carreleur).

2°) Quelle serait la longueur d'une spirale de 4 spires ? De 100 spires ? (pour que le carreleur anticipe le nombre de carreaux nécessaires)

3°) Quel est le plus petit rectangle qui contiendra une spirale formée de 4 spires ? De 100 spires ? (pour que le carreleur prévienne la place occupée par la spirale).

4°) Preuve : notre problème revient à trouver une certaine somme d'entiers. Reproduire la démarche de Gauss pour calculer la longueur de la spirale de 100 spires.

5°) Généralisation : Par quelle formule trouve-t-on la longueur d'une spirale de n spires ?

Mise en situation : Les 13 élèves du premier groupe se sont installés devant un ordinateur (un par poste). En attendant la connexion au réseau, je leur ai présenté le sujet du T.P. en vidéo-projetant et en expliquant le début du document de François Drouin.

■ Déroulement de la séance et stratégies des élèves pour le premier groupe

La première question n’a posé aucun problème (à une étourderie près). Pour la deuxième question, les élèves ayant l’habitude de se mettre en recherche, tous ont très vite noté plein de calculs sur leur cahier d’exercices ou au brouillon sans que j’aie eu besoin de les relancer. J’ai relevé que 8 élèves recherchaient une formule générale et que les 5 autres voulaient trouver une relation de récurrence, quasiment tous à l’aide des longueurs des premières spires. En final :

- 4 élèves sur les 8 ont trouvé seuls la formule générale (2 sur papier, 2 sur Excel - mais peut-être parce qu’ils se sentaient obligés d’utiliser l’ordinateur devant eux). Une élève n’a pas pu m’expliquer comment elle avait trouvé cette formule. 2 élèves m’ont dit qu’ils avaient remarqué que la longueur des premières spires étaient des multiples de 8 et ont cherché ensuite à exprimer le coefficient multiplicateur en fonction du numéro de la spire. La 4^{ème} m’a dit que la référence était la longueur de la première spire et que les autres cas devaient s’exprimer en fonction de celle là.

1 spire	2 spires	3 spires	4 spires
8	32	72	128

Voyant que les 4 autres élèves n’aboutissaient pas, au bout de 30 minutes, je leur ai dit d’arrêter de chercher une formule mais plutôt de faire un programme avec un compteur pour trouver la longueur d’une spirale de 100 spires. C’est également ce que j’ai demandé aux 4 qui avaient trouvé la réponse. Au bout de 40 minutes, j’ai vidéo-projeté la structure du programme ci-contre en justifiant mes choix de variables (et l’affectation du -1) : un seul élève sur les 8 a terminé le programme.

```

VARIABLES
├── longueur EST_DU_TYPE NOMBRE
├── numéroSpire EST_DU_TYPE NOMBRE
├── entierImpair EST_DU_TYPE NOMBRE
└── DEBUT_ALGORITHME
    ├── longueur PRÉD_J A VAI FIR 0
    ├── entierImpair PRÉD_LA_VALEUR -1
    └── POUR numéroSpire ALLANT_DE 1 A 100
        ├── DEBUT_POUR
        │   ├── entierImpair PRÉD_LA_VA_EUR .....
        │   ├── longueur PRÉD_LA_VALEUR .....
        │   ├── entierImpair PRÉD_LA_VA_EUR .....
        │   └── longueur PRÉD_LA_VALEUR .....
        ├── FIN_POUR
        ├── AFFICHER "La longueur de la spirale est : "
        └── AFFICHER longueur
FIN_ALGORITHME
    
```

- 5 élèves ont trouvé seuls la longueur d'une spirale de 100 spires en exploitant des relations de récurrence (4 sur Excel et 1 sur Algobox).

1 spire	2 spires	3 spires	4 spires
8	32	72	128

Voici les trois démarches relevées.

Marine

Dans la colonne A, on retrouve le numéro de la spire.

Dans la colonne B, elle a cherché une relation de récurrence donnant la longueur que l'on ajoute à la longueur de la spire précédente. Je n'ai pas eu le temps de lui demander son raisonnement (peut-être un simple jeu numérique du type : trouver le nombre suivant à partir des précédents ?). Elle a ensuite fait la SOMME sur la colonne B.

B3		fx = 2*B2-B1	
A	B	C	
1	8		
2	24		
3	40		
4	56		
5	72		
6	88		

Guillaume

Il a deviné la relation sur l'augmentation constante des longueurs des spires. Lui aussi a fait la SOMME de la colonne B.

B2		fx = B1+16	
A	B	C	
1	8		
2	24		
3	40		
4	56		
5	72		
6	88		

Paul

Dans la colonne A, cela correspond cette fois-ci au nombre de spires de la spirale. Dans la colonne C, on retrouve la stratégie de Guillaume. Dans la colonne B, on a donc la longueur de la spirale.

B2		fx = B1+C2	
A	B	C	
1	8		
2	32	24	
3	72	40	
4	128	56	
5	200	72	
6	288	88	
7	392	104	
8	512	120	

J'ai demandé à ces 5 élèves de transférer leur méthode à l'établissement d'un programme sur Algobox, et 3 d'entre eux ont réussi. Les élèves n'ont pas eu le temps d'avancer plus dans l'activité.

Analyse rétrospective de la séance pour le premier groupe

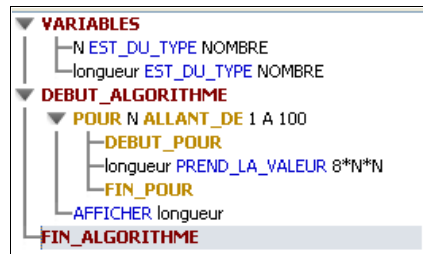
Objectif A : atteint pour tous.

Objectif B : pas atteint pour tous puisqu'en ajoutant le premier segment, la formule simple était simple à deviner et passer par une relation de récurrence n'était pas nécessaire. Mais je n'ai pas osé remodifier pour le deuxième groupe (*par équité entre les deux groupes*)

Objectif C : atteint pour peu d'élèves et au détriment de la preuve du résultat.

Je n'aurai pas dû imposer à ceux qui avaient trouvé la longueur de la spirale de 100 spires de faire un programme sur Algobox (quelle est la motivation ? Ce n'est pas plus une preuve que le travail fait sur Excel, c'est même le sentiment contraire pour beaucoup, tellement ils sont peu sûrs de leur algorithme en général, alors qu'ils maîtrisent plus facilement les fonctions de base du tableur).

Voilà deux exemples de programmes réalisés par des élèves qui avaient trouvé la formule générale :



Objectif D : pas atteint par manque de temps (et d'erreur de stratégie en se fixant à tort l'objectif C)

Réactions par rapport à cette analyse

J'ai décidé d'enlever l'objectif C pour le deuxième groupe et donc de ne pas imposer de faire un algorithme.

■ Déroulement de la séance et stratégies des élèves pour le deuxième groupe

Sur les deux premières questions, deux nouvelles stratégies sur Excel sont apparues.

Céline

Aucune relation de récurrence mais une décomposition de la somme voulue.

Dans la colonne A, on retrouve les nombres impairs. Par contre, elle a dû trouver le dernier nombre impair de la 100^{ème} spire qui était 399 pour savoir quand s'arrêter.

Elle a ensuite fait la SOMME de la colonne C

	C1		$f_x = A1*B1$
	A	B	C
1	1	2	2
2	3	2	6
3	5	2	10
4	7	2	14
5	9	2	18
6	11	2	22

Pauline

Elle voulait utiliser la stratégie de Céline mais ne savait pas jusqu'à quel nombre impair.

Elle a donc commencé par le chercher.

La colonne A représente le numéro de la spire. La colonne B représente le dernier entier impair de la spire.

	B2		$f_x = B1+4$
	A	B	C
1	1	3	
2	2	7	
3	3	11	
4	4	15	
5	5	19	

Mais n'ayant pas imposé de faire un algorithme, les élèves ont cherché la réponse du 3^{ème}.

Pour Pauline et Céline, c'était déjà fait.

Pour le seul binôme qui avait fait un programme sur Albox, les élèves ont complété leur programme pour obtenir le dernier entier impair.

```

▼ VARIABLES
  longueur EST_DU_TYPE NOMBRE
  numéroSpire EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  dernierEntier EST_DU_TYPE NOMBRE
▼ DEBUT_ALGORITHME
  longueur PREND_LA_VALEUR 8
  c PREND_LA_VALEUR 8
  dernierEntier PREND_LA_VALEUR 3
  POUR numéroSpire ALLANT_DE 2 A 100
  -DEBUT_POUR
  -c PREND_LA_VALEUR c+16
  -longueur PREND_LA_VALEUR longueur+c
  -dernierEntier PREND_LA_VALEUR dernierEntier+4
  -FIN_POUR
  AFFICHER "La longueur de la spirale est : "
  AFFICHER longueur
  AFFICHER "le dernier entier est : "
  AFFICHER dernierEntier
FIN_ALGORITHME

```

Pour aider les autres, j'ai inscrit au tableau le tableau suivant :

Numéro de la spire	1	2	3	4	...
Dernier impair	3	7	11	15	...

La plupart ont fini par trouver la formule générale : dernier impair = $4 \times$ le numéro de la spire -1, mais beaucoup sont passés par la relation de récurrence qui donne le dernier impair en fonction du dernier impair de la spire précédente.

En ce qui concerne la 4^{ème} et la 5^{ème} question, seule Céline a eu le temps de le faire.

Analyse rétrospective de la séance pour le deuxième groupe

Malgré le fait d'avoir supprimé l'objectif C, ce TP est encore trop long (il faudrait 1h30) pour pouvoir atteindre l'objectif D. Ceci dit, tous ont abordé la notion de récurrence. On peut donc considérer cette fois-ci que l'objectif B est atteint.

■ Réactions par rapport à ces analyses

On a repris la fin de ce TP en classe entière, ne serait-ce que pour rappeler la méthode de Gauss :

Il fallait remarquer que les entiers impairs de la $n^{\text{ème}}$ spire s'exprimaient par : $4n - 3$; $4n - 3$; $4n - 1$; $4n - 1$.

En fait pour 100 spires on cherche :

$$\begin{aligned} \text{longueur} &= 1 + 1 + 3 + 3 + \dots + 397 + 397 + 399 + 399 \\ \text{longueur} &= 399 + 399 + 397 + 397 + \dots + 3 + 3 + 1 + 1 \\ 2 \times \text{longueur} &= 400 + 400 + 400 + 400 + \dots + 400 + 400 + 400 + 400 \\ 2 \times \text{longueur} &= 400 \times 400 \\ \text{longueur} &= 200 \times 400 = 80\,000 \end{aligned}$$

Enfin, j'ai fait le lien entre longueur de la spirale et nombre de carreaux nécessaires pour réaliser la spirale (sachant qu'il fallait enlever 1 à la longueur trouvée) ; mais j'ai eu l'impression qu'ils avaient oublié le contexte de la situation « concrète » pour se focaliser sur l'arithmétique sous-jacente.