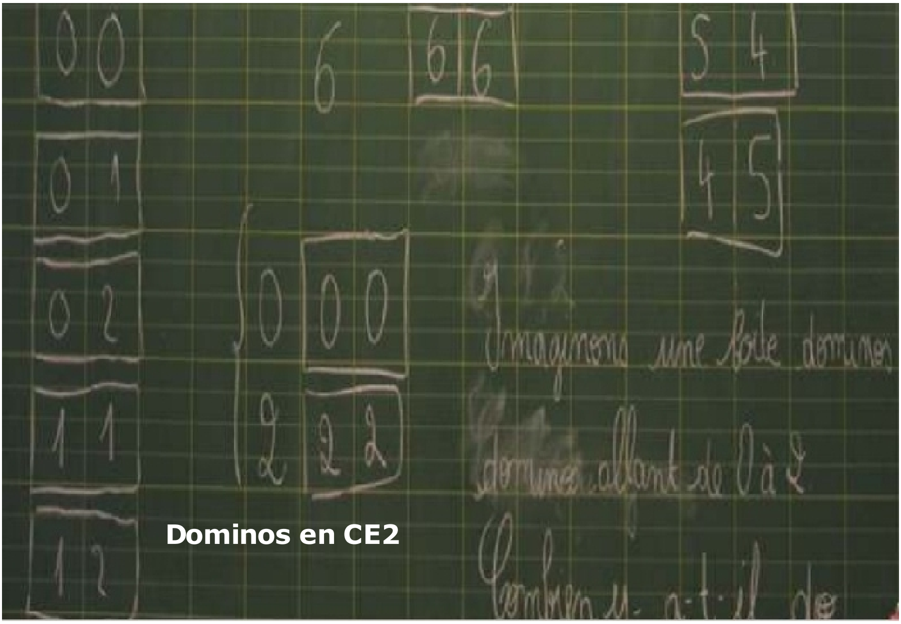
LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N° 108 | **DECEMBRE 2011**



Dominos en CE2

http://apmeplorraine.free.fr

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale Lorraine A.P.M.E.P.
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il paraît quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).
Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges entre les adhérents.
On y trouve un éditorial (généralement rédigé par un membre du Comité) et diverses annonces, les rubriques "problèmes", "dans la classe", "vu sur la toile", "maths et médias", "c'était il y a 25 ans", et parfois une "étude mathématique". Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à jacverdier@orange.fr .

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève BOUVART, François DROUIN, Françoise JEAN, Jacques VERDIER et Gilles WAEHREN.

La maquette et la mise en page sont réalisées par Christophe Walentin.

2012 ENIGME

A partir du nombre 2012, on construit une suite de nombres avec la règle suivante : chaque nombre est la somme des carrés des chiffres du nombre précédent.
Ainsi, le second de la suite est $2^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 9$.
Le troisième de la suite est $9^2 = 81$. Le suivant est 65.
Quel est le 2012^e terme de cette suite ?

D'après une idée prise sur le blog de Didier Goumont : **http://mathsdg.blogspot.com**

La rédaction du Petit Vert et le Comité de la Régionale vous souhaitent à tous une excellente fin d'année, de joyeuses fêtes et une heureuse année 2012.

retour sommaire

SOMMAIRE

édito

Ma toute première fois

Arrivée à Grenoble par une belle journée ensoleillée avec vue sur des cols déjà enneigés. Au début, tout était calme ; installation dans l'hôtel, appropriation progressive des lieux sur le campus. Quelle joie de se retrouver là, au début des vacances d'automne pour des journées mathématiques, parmi des vrais matheux ! Ma toute première fois aux journées nationales APMEP. J'avais bien assisté aux régionales depuis deux ans comme d'autres professeurs des écoles, mais là, je passais à la vitesse supérieure, avec tout de même quelques appréhensions.

L'ouverture des journées m'a marquée : cette première étape m'interrogeait sur mon engagement dans l'enseignement. Sont ensuite apparues des pistes concrètes lors d'autres conférences et ateliers auxquels j'ai assisté avec le plus grand intérêt. Intérêt ? Oui. Pour moi, pour ma classe. J'avais un peu l'impression d'être là comme une consommatrice intéressée. Tout cela grâce à des gens professionnels impliqués et dévoués pour les JN de Grenoble. Ils ont été l'occasion de faire de nouvelles connaissances ; on fait tous bel et bien le même métier, à tous les niveaux.

En même temps, je me suis vite aperçue que les membres du comité lorrain œuvraient sans relâche jour après jour pour la préparation des JN 2012 à Metz. Etre constamment présents au salon des exposants, proposer l'apéritif lorrain au restaurant universitaire, glaner de précieuses informations qui allaient peut-être permettre de gagner du temps et de l'efficacité pour l'année suivante, se réunir souvent pour échanger… Quoi faire pour les aider ? Prendre des notes par ci par là pour relayer quelques informations ? Ah, si ! J'ai eu l'occasion d'apporter ma modeste contribution dans le groupe de ceux qui ont fabriqué les puzzles du carré de Metz. Merci François.

En même temps aussi, après avoir chanté dans un tee-shirt géométrique culturel jaune mirabelle sur un air d'une célèbre chanteuse mosellane, on se sentait forcément lorrains autant que matheux à la fin de ces journées pour la transition entre Grenoble et Metz.

Que du bonheur ! Vivement les JN 2012.

Rachel

retour sommaire

VIE DE L'ASSOCIATION

Positions et revendications de l'APMEP

En ces temps de bouleversements permanents, l'APMEP fait le point sur l'enseignement des mathématiques en école, collège et lycées, sur l'évolution des statuts du métier d'enseignant et sur leur formation. Pour cela, elle consulte l'ensemble de ses adhérents en leur demandant de réagir sur ses « positions et revendications » qui, après modifications et validation par les instances nationales, figureront dans la plaquette « Visages 2012-2013 ».

Nous vous invitons à une réunion, ouverte à tous les adhérents de la Régionale, pour débattre de ces positions et revendications de l'APMEP :

samedi 4 février 2012 de 9 h à 12 h
à METZ (I.U.T. Ile du Saulcy)

Une synthèse de ces débats et propositions sera faite au cours de l'A.G. du mercredi 14 mars (lors de notre Journée régionale).

Les positions actuelles, à débattre et réactualiser, sont en ligne :
http://www.apmep.asso.fr/Positions-et-revendications-de-l#Pro

Nous comptons sur votre présence active. Pour ceux d'entre vous qui ne pourront pas se déplacer ce jour-là, faites-nous parvenir à l'avance vos remarques, propositions, objections, craintes, interrogations... par mail (Céline Coursimault). Nous en tiendrons compte dans le débat.

LE COMITÉ DE LA RÉGIONALE

✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓
✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓

La joie d'apprendre est aussi indispensable aux études que la respiration aux coureurs.

Maria Montessori

retour sommaire

C'ETAIT IL Y A 25 ANS…

Dans le Petit Vert n° 8 de décembre 1986, une revue de presse sur les Journées nationales de Metz (déjà !), 477 inscrits (seulement ?) dont 120 lorrains. Journées … mémorables, parce qu'elles ont failli ne pas avoir lieu ! Voici les paroles du chant de « conclusion » des ces Journées.

CHANT DE CONCLUSION DES JOURNÉES

Sur l'air de « *Les copains d'abord* », de Georges Brassens

1
Au rendez-vous de l'A.P.M.
Y'avait pas souvent de problèmes
Quand le congrès changea d'adresse
On était à METZ.
Et croyez moi ce n'était pas
De la tarte ni du nougat
De réfléchir dans le brouillard
Oui dans le brouillard.

2
Des réunions, des commissions
A propos de l'évaluation
Et de la communication
Enfin tous les « -tions ».
On était tous des profs de math
Qui « pédaguions » dans la choucroute
Se faisant beaucoup de soucis
Dans l'île du Saulcy.

3
Des tas d'idées furent échangées
Mais qu'allons-nous vraiment changer
Dans nos bahuts, dans nos lycées,
Aussitôt rentrés ?
Que ferons-nous des S.O.S.
De nos élèves, futurs O.S.,
Saurons-nous mieux les écouter,
Oui les écouter ?

4
Il faut songer à remercier
Tous ceux qui ont contribué
A réussir ces trois journées
En toute amitié.
Prenant congé de tous nos pairs,
Emmitouflés dans nos impers,
Soufflet nous invite à Quimper,
OUI, TOUS À QUIMPER !

retour sommaire

DANS NOS CLASSES

Découverte des dominos en CE2

Alice Backscheider
Etudiante en L2 Maths (UPV-Metz)

Dans le cadre d'un « Atelier scientifique en milieu scolaire » en L2 de maths, j'ai été accueillie dans une classe de CE2 à Laquenexy.
Après un premier atelier sur les différents états de l'eau, j'ai pu faire - avec la même classe - un atelier sur les mathématiques avec comme thème les dominos.

1. Contenu scientifique de l'atelier

Le but de mon atelier sur les dominos est d'utiliser ce jeu pour aborder les mathématiques de façon ludique. L'atelier est divisé en deux séances : une séance au cours de laquelle les élèves doivent résoudre un problème et une autre basée sur la fabrication d'un patron de parallélépipède rectangle. Lors de la première séance je demande aux élèves de chercher le nombre de dominos présents dans un jeu classique. Cet exercice va faire appel à leur capacité à ordonner les données d'un problème en vue de le résoudre. La deuxième séance concernera la géométrie. Nous allons aborder les notions de parallélépipède rectangle, de patron et, à l'occasion de cette activité, nous allons aussi réutiliser des notions vues précédemment.

Les parties en lien avec le programme sont :

	Cours élémentaire deuxième année
Nombres et calcul	- Connaître et utiliser des expressions telles que : double, moitié ou demi, triple, quart d'un nombre entier.
	Calcul sur des nombres entiers **Calculer mentalement** - Calculer mentalement des sommes, des différences, des produits.

Géométrie	**Dans le plan** - Reconnaître, décrire, nommer et reproduire, tracer des figures géométriques : carré, rectangle, losange, triangle rectangle. - Vérifier la nature d'une figure plane en utilisant la règle graduée et l'équerre. - Construire un cercle avec un compas. - Utiliser en situation le vocabulaire : côté, sommet, angle, milieu. **Dans l'espace**

retour sommaire

	- Reconnaître, décrire et nommer : un cube, un pavé droit. - Utiliser en situation le vocabulaire : face, arête, sommet. **Problèmes de reproduction, de construction** - Reproduire des figures (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un modèle. - Construire un carré ou un rectangle de dimensions données.
Grandeurs et mesure	- Connaître les unités de mesure suivantes et les relations qui les lient : longueur, mètre, kilomètre, centimètre, millimètre. - Utiliser des instruments pour mesurer des longueurs. - Vérifier qu'un angle est droit en utilisant l'équerre ou un gabarit.
Organisation et gestion de données	- Savoir organiser les données d'un problème en vue de sa résolution. - Utiliser un tableau ou un graphique en vue d'un traitement des données.

En surligné bleu les parties du programme en lien avec la 1ère séance.
En surligné orange les parties du programme en lien avec la 2ème séance.

2. Déroulement envisagé de l'atelier

1ère séance : **Dénombrement des dominos**

La question posée est la suivante : **Savez-vous combien de dominos contient une boîte de dominos ?** Pour cette 1ère séance, les élèves ont donc un problème de dénombrement à résoudre. Ils font un travail individuel.

Prérequis : aucun
Matériel nécessaire : un jeu de dominos ; pour les élèves : cahier de mathématiques, cahier de brouillon, crayon de papier, gomme.
Commencer par présenter à la classe un jeu de dominos et faire passer des dominos dans les rangs.

Pour faciliter le travail de recherche des élèves, procéder en plusieurs étapes.

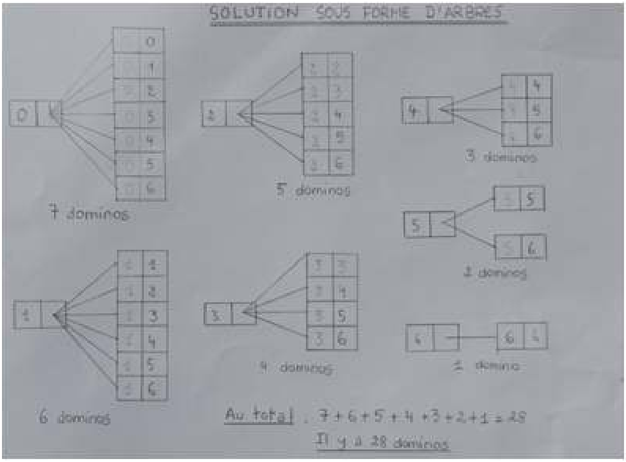
1ère étape :
Quel est le plus petit nombre de points présents sur un domino ? 0
Quel est le plus grand nombre de points présents sur un domino ? 6
Faire tirer un domino au hasard, par exemple 0|1 : le domino 0|1 est-il le même que le domino 1|0 ?

2ème étape : Dénombrement d'une petite boîte de dominos
Imaginons une boîte de dominos avec des dominos allant de 0 à 2. Combien il y a-t-il de dominos dans cette boîte ?

→ Il y en a 6 : 0|0 ; 1|1 ; 0|1 ; 1|2 ; 0|2 ; 2|2

retour sommaire

3ème étape : Dénombrement de notre grande boîte de dominos
Combien y a-t-il de dominos dans une boîte de dominos allant de 0 à 6 ?
→ Il y en a 28.
Pour amener les élèves vers la solution on peut faire un arbre tel que :



2ème séance : **Réalisation d'un patron de pavé**

Objectif : réaliser un jeu de dominos géant pour toute la classe. Les élèves vont apprendre à construire un pavé de domino.
Les «bébés-dominos» sont les petits pavés qui vont nous servir pendant la phase d'observation. Dans la 1ère activité, les élèves devront relever les caractéristiques d'un pavé. Dans la 2ème activité, ils devront construire un patron 3 fois plus grand que celui du «bébé-domino» pour fabriquer un grand domino.

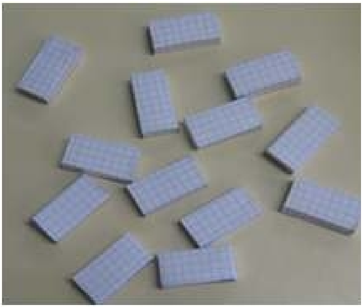
Prérequis : Connaître les unités de mesure de longueur ; utiliser une règle et une équerre ; reconnaître un quadrilatère.

retour sommaire

Matériel nécessaire :

1 bébé-domino pour 2 élèves

Pour les élèves :
ciseaux, crayon de papier, gomme,
règle graduée, équerre,
bristol quadrillé (28 feuilles),
crayons de couleur ou feutres.


les 13 bébés-dominos du pavé

1ère activité : Observation d'un pavé

Par groupes de 2, les élèves doivent répondre aux questions suivantes sur leur cahier de brouillon :

- Compter le nombre de faces. Il y a 6 faces.
- Quelles figures géométriques forment les faces d'un domino ?
  Ce sont des quadrilatères. On prend une équerre pour vérifier que les angles sont des angles droits. Il y a 4 angles droits. Les faces d'un domino forment des rectangles.
- Chercher le nombre de faces différentes. Il y a 3 faces différentes.

Faire ouvrir les bébés dominos. Expliquer que lorsque l'on ouvre un pavé, on obtient un patron.
Faire colorier de la même couleur les rectangles identiques.
Faire mesurer les longueurs des côtés de chaque rectangle. Reporter ces mesures sur le bébé-domino.

Faire remarquer que sur le patron d'un domino, on a :
4 = 2x2 ; 4 est le **double** de 2 (2 = 2x1 ; 2 est le **double** de 1)

Faire découvrir pourquoi.
Si ce n'était pas le double, il ne serait pas possible de placer un domino perpendiculairement à un autre.
Montrer un exemple de domino où les dimensions ne sont pas conformes.

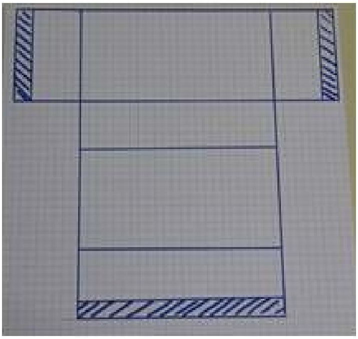
2ème activité : Construction d'un pavé
On doit construire un patron 3 fois plus grand que celui que nous venons d'observer. Ce patron nous permettra d'obtenir un grand domino pour notre jeu.

Dessiner le patron au tableau en notant les nouvelles dimensions.

retour sommaire

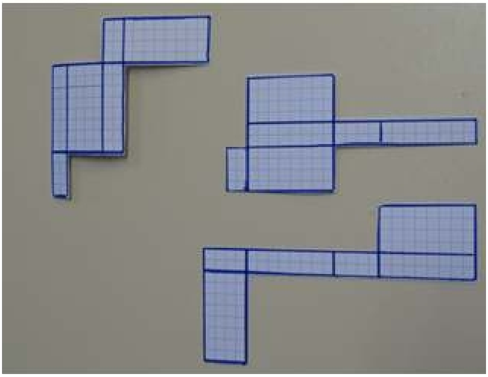
«Bébé domino» Anciennes dimensions	«Grand domino» Nouvelles dimensions
4 cm	12 cm
2 cm	6 cm
1 cm	3 cm

Chaque élève reproduit sur du papier quadrillé le patron fait au tableau. Avant de découper le patron, les élèves doivent avoir le feu vert des professeurs.



Pour cette activité j'ai préparé des modèles pour les élèves qui pourraient avoir des difficultés.

J'ai aussi préparé des patrons pour leur montrer qu'il existe différents patrons pour le pavé :

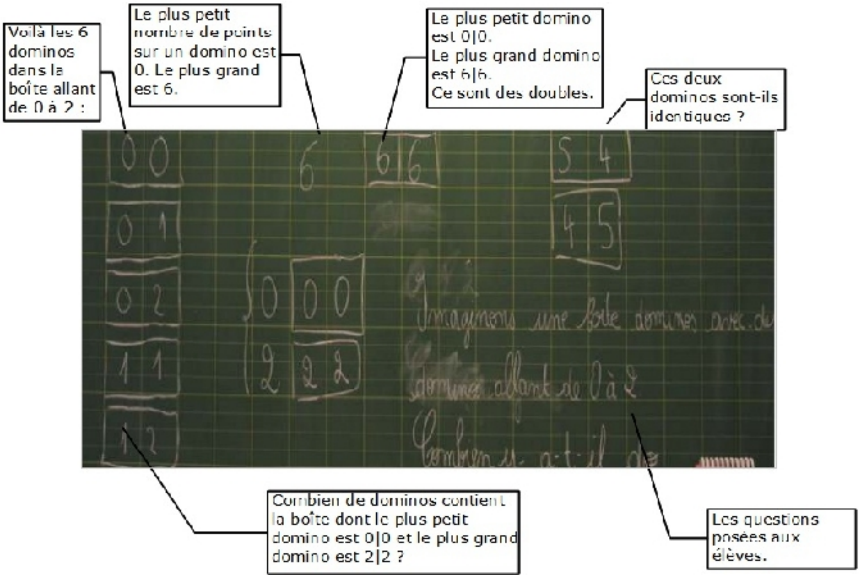


A la fin de la séance, distribution d'une fiche récapitulative sur le pavé.

retour sommaire

3. Déroulement des deux séances

1ère séance : Dénombrement des dominos



Voilà un premier travail d'élève :

← Les dominos allant de 0 à 2.

← La boîte de dominos.

Ici, l'élève a eu l'idée d'écrire les dominos par familles, sans oublier les doubles.

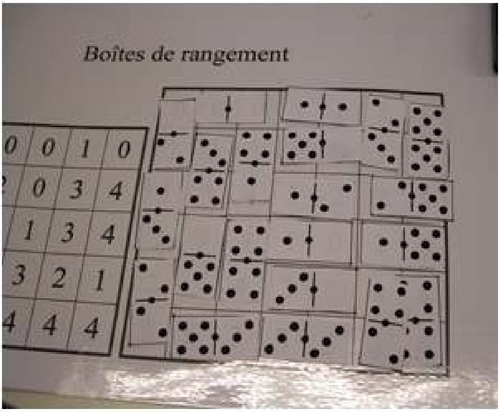
Voilà un second travail d'élève :

Au départ l'élève a commencé à écrire les dominos au hasard. Il s'est rendu compte que ce n'était pas une bonne méthode car on n’est pas sûr d'écrire tous les dominos.

Il a écrit ensuite chaque famille de dominos et a barré les dominos qui apparaissent deux fois.
Il obtient ainsi le bon nombre de dominos contenus dans la boîte.

Activité ludique complémentaire :

Distribution aux élèves ayant terminé le travail de recherche d’un set de dominos à découper.
Avec celui-ci, les élèves doivent remplir des grilles de rangement de dominos. Cette activité consiste à poser les dominos dans une grille comportant soit des points, soit des nombres.



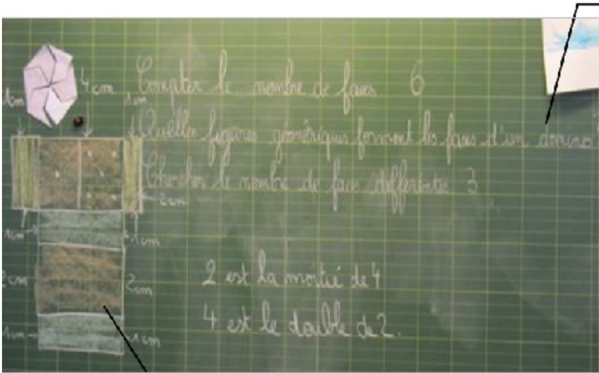
Elle ne se rapporte pas directement aux contenus du programme, mais permet de développer des compétences utiles dans plusieurs domaines : trouver une stratégie de rangement (position unique de certains dominos, pas de trous possibles,…), procéder par essai-erreur, aller jusqu’au bout d’une piste sont des aptitudes développées dans cette activité.

Bilan de la 1ère séance :
Les élèves s'en sont bien sortis dans l'ensemble. Ils ont su réinvestir ce qu'ils avaient appris précédemment pour résoudre le problème. Quelques élèves ont essayé d'écrire les dominos au hasard et ont pris du temps pour trouver une solution.
D'autres élèves ont été en grosse difficulté : nous leur avons donné les dominos pour qu'ils puissent visualiser ce qu'ils devaient produire et nous leur avons demandé de trouver une méthode de tri.

2ème séance : **Faire le patron d'un pavé**

1ère activité : Observation

Questions posées aux élèves avant de démonter le « bébé domino »

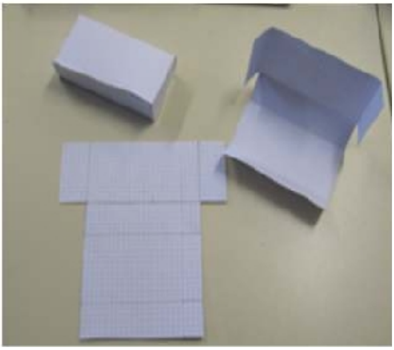


On a colorié les rectangles identiques de la même couleur. On a écrit les mesures de chaque côté. Il faut encore multiplier les mesures des côtés par 3 pour obtenir le patron du grand pavé.

Tous les élèves ont su facilement répondre aux questions. Ils ont réutilisé le vocabulaire qu'ils avaient déjà vu avec la maîtresse : angle, angle droit, côté, face, sommet, arête, double, moitié.
Ils ont vérifié les angles droits avec leur équerre et ils ont mesuré les côtés de chaque rectangle.
Comme l'activité avançait relativement bien, j'ai décidé de ne pas écrire directement les mesures du grand patron au tableau, mais plutôt d'interroger les élèves. Je leur ai demandé de multiplier les côtés de chaque rectangle par 3 pour avoir un patron 3 fois plus grand.

retour sommaire

2ème activité : Fabrication d'un pavé



Sur la feuille de papier quadrillé, les élèves doivent reproduire le patron dessiné au tableau. Après avoir vérifié que le patron est juste, on peut le découper, le plier et l'assembler !

A la fin de la séance, j'ai demandé aux élèves qui avaient terminé leur travail de chercher des patrons de parallélépipèdes rectangles différents de celui qu'on venait de voir.

Conclusion :

Cet atelier a été très enrichissant. Les conseils de l'enseignante lors de mon premier passage m'ont permis de progresser. J'ai su mieux rebondir sur les remarques des élèves. Le fait d'avoir fait mes deux projets (La Main à la Pâte et Atelier scientifique en milieu scolaire) dans la même classe m'a permis de construire un réel travail scientifique avec les élèves : répondre à des questions, émettre des hypothèses, essayer de les vérifier, chercher…

Être au contact des enfants et avoir pu leur apporter des connaissances a été un réel plaisir. Ces deux expériences me confortent dans mon choix de devenir professeur des écoles.

Note de la rédaction :
Les rangements de dominos (évoqués dans l'activité ludique supplémentaire) sont disponibles sur le site de la Régionale à l'adresse :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=coinjeux&choix=5&dir=11_boites_dominos
(lire d'abord « 11_Rangements_de_dominos.pdf »).

retour sommaire

MATH & MEDIA

Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.
Envois par la poste à Jacques VERDIER (18 rue du Pont de Pierre, 54130 SAINT-MAX) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr .
Les archives de cette rubrique sont disponibles sur notre site à l'adresse :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=math_et_media

1/3 de 58 = 24 ?

Extrait du « Nouvel Observateur » du 20 Novembre au 30 novembre 2011 :

> Ce ne sont pas les écologistes mais les experts du PS qui ont avancé le chiffre de 24 suppressions de réacteurs d'ici 2025. *« Puisque François Hollande nous avait annoncé la réduction d'un tiers de la puissance nucléaire, il n'est pas impossible qu'ils aient tout simplement appliqué une règle de trois sur le parc des 58 réacteurs »,* soupire un cadre dirigeant d'EDF qui n'avait pas vu le coup venir.

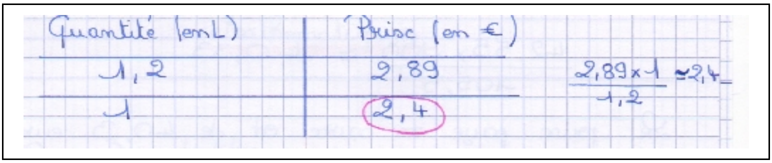
Une première lecture nous fait remarquer que le tiers de 58 n'est pas égal à 24, mais comme il est évoqué le tiers de la puissance nucléaire, il est possible que la puissance des 24 réacteurs dont il est question représente le tiers de la puissance nucléaire. Lors d'une seconde lecture, notre œil sera peut être arrêté par la référence à « une règle de trois ». Qu'avait en tête ce « cadre dirigeant d'EDF » ? S'inscrira-t-il à l'atelier consacré à ce contenu mathématique et proposé le 14 mars lors de notre journée régionale ?

Aurait-il utilisé un tel tableau ?

Puissance nucléaire réduite	1	Pr
Puissance nucléaire actuelle	3	Pa

Donc Pr = (1 × Pa) ÷ 3.

Nous retrouvons la méthode que certains nomment « produit en croix », qui est parfois assimilée à la « règle de trois » dans certains manuels de l'Ecole élémentaire. Le lecteur du Petit Vert va sans doute s'étonner de l'utilisation



Quantité (en L)	Prix (en €)	
1,2	2,89	$\frac{2,89 \times 1}{1,2} \simeq 2,4$
1	2,4	

éventuelle d'une telle méthode pour calculer un tiers d'une quantité. J'avoue n'être que moyennement étonné, ayant rencontré des choses semblables sur des copies d'étudiants préparant le Concours de Recrutement de Professeur des Ecoles (1,2 Litre de jus d'orange coûtait 2,89 €. Il fallait trouver le prix de 1 L) :

François

retour sommaire

VRAI-FAUX au concours CRPE

Repéré dans un "Vrai Faux" du récent concours CRPE (concours de recrutement des professeurs des écoles) :

> Dans *Le Monde* du 27 mars 2010, on pouvait lire : « Dans l'ensemble des aéroports du monde, en 2009, environ 25 millions de bagages ont été perdus, provisoirement ou définitivement. (...) L'étude note cependant une amélioration puisqu'en 2008, ce sont 32,8 millions de bagages qui avaient été égarés, <u>soit 23,8 % de plus qu'en 2009</u>. ».
>
> **Affirmation 4** : L'extrait souligné est exact.

A part l'erreur "classique" (voulue par les auteurs de la question) : il y a en 2009 23,8% de moins qu'en 2008 (et pas en 2008 23,8% de plus qu'en 2009, dans la mesure où ça a un sens, quand il s'agit de données chronologiques !!!), il y a autre chose de plus subtil que l'on ne regarde pas à première vue : la donnée de 2009 est approximative, et l'énoncé propose un résultat avec 3 chiffres significatifs... Si on fait l'hypothèse que le "25 millions environ" signifie entre 24,5 et 25,5, le pourcentage donné dans l'énoncé aurait été compris entre 22,3% et 25,3 %.

Il y a là effectivement de quoi faire discuter et travailler vos élèves...

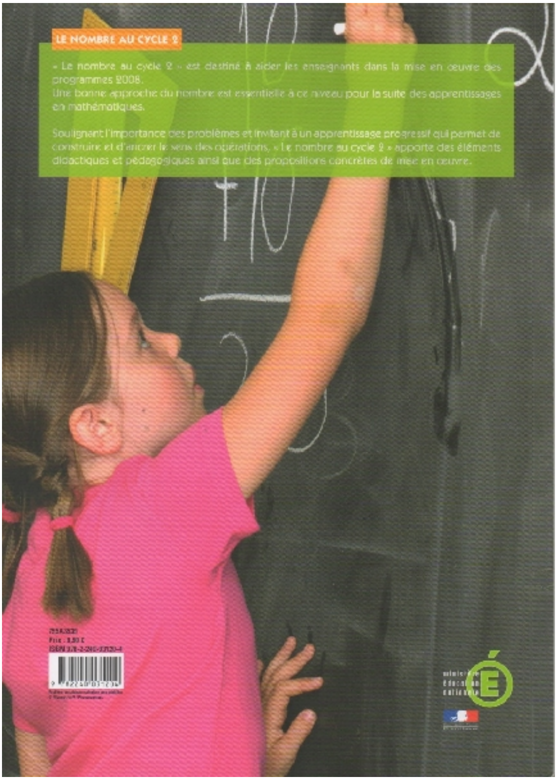
Sujet complet disponible sur :

http://www.ac-versailles.fr/ia78/perso/doc/pe/2012/Sujet-Mathematiques-et-Sciences-Experimentales-Technologie-2012.pdf

retour sommaire

« Le nombre au cycle 2 »

Le ministère de l'éducation nationale a édité une brochure sur ce sujet, téléchargeable gratuitement à l'adresse :
http://media.eduscol.education.fr/file/ecole/00/3/Le_nombre_au_cycle_2_153003.pdf



Ce petit billet n'est pas dû au prix de ces 98 pages, 9.90 € en version papier (nos brochures régionales sont vendues avec moins de bénéfice !), mais à la photo figurant en quatrième de couverture. On y voit une élève la craie à la main, travailler au tableau à côté d'une opération posée. Les programmes 2008 de l'école élémentaire insistent sur l'importance de la maîtrise de ces calculs posés, la photo vient donc en éclairage de ce point de vue.
Nous pouvons tout de même nous demander s'il est pertinent de poser l'opération "10 + 10". N'est-il pas plus pertinent que l'élève réfléchisse et calcule 1 dizaine + 1 dizaine = 2 dizaines, donc 20 ? A la page 15 du document, nous pouvons lire *« les algorithmes écrits, notamment, ne doivent pas écraser les autres procédures »*. Une autre photo aurait peut-être été plus convaincante.

François

ÉTUDES MATHÉMATIQUES

Histoire de logarithmes : comment s'est construite une notion difficile à enseigner.

(2ème partie)

Anne Gaydon, Lycée Saint Joseph (Épinal)
Gilles Waehren, Lycée Mangin (Sarrebourg)

Résumé :

Remonter dans l'histoire des logarithmes nous a paru une façon d'appréhender les difficultés des élèves à les assimiler, mais aussi de retourner aux fondements qui ont pu les rendre incontournables. Pour des élèves non scientifiques, notamment dans les sections tertiaires, cette notion vient s'ajouter à celle de racine carrée, souvent mal digérée en raison de ses propriétés pas toujours intuitives. Comme pour la racine carrée, le logarithme d'un nombre se construit (on se référera aux recherches entreprises dans les Petits Verts n° 102 et 103). Cette construction est un moyen de donner vie à ce concept, d'autant que les premiers calculs de logarithmes ont souvent reposé sur des notions simples. On assista, dans un premier temps, à l'éclosion d'une correspondance nécessaire entre suites géométriques et suites arithmétiques (première partie, publiée dans le Petit Vert n° 107), puis au développement de calculs élaborés, afin de déterminer le logarithme de tous les nombres (ci-après).

2. Construction de tables de logarithmes

2.1 Les logarithmes de Neper

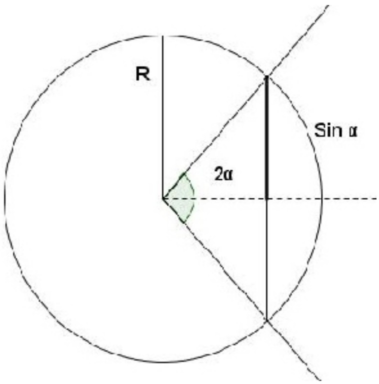
2.1.1. Des sinus longs à calculer

En 1614 John Neper (1550-1617) publie sa *Mirifici logarithmorumcanonis descriptio*, « Description de la merveilleuse table des logarithmes ».

L'objectif de Neper est de faciliter les calculs portant sur des grands nombres. Pour cela, il élabore de nouveaux nombres qu'il appelle logarithmes et remplace les multiplications, divisions et extractions de racines par des additions, soustractions et divisions par des entiers.

Son livre, écrit en latin, contient la définition d'un logarithme et ses propriétés, le mode d'emploi de la table de logarithmes, des exemples de calculs trigonométriques et 90 pages de tables.

Ces tables donnent les angles du premier quadrant, de minute en minute, leurs sinus et le logarithme des sinus.



On note Sin α la longueur de la demi-corde dans un cercle de rayon R.
Ainsi Sin α = R Sin α.
Le sinus de 90° est égal à R et est appelé *sinus total*.

Neper choisit un cercle de rayon R = 10 000 000 ce qui lui permet des sinus avec 7 chiffres significatifs.
Dans ses calculs Neper prendra comme unité 10^7.

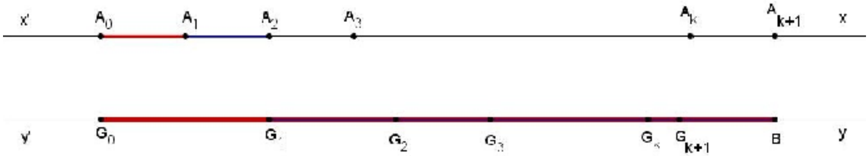
2.1.2. La cinématique au service des mathématiques

Neper établit une correspondance cinématique entre une suite géométrique et une suite arithmétique :

« Une ligne est dite croître uniformément quand un point la décrivant progresse par des intervalles égaux en des moments égaux. »

Un point A décrit le droite $(x'x)$; A se trouve en A_0 à l'instant $t = 0$ et se déplace avec une vitesse v constante :

$A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_kA_{k+1} = \lambda$ et $A_0A_k = k\lambda$



« Une ligne est dite décroître proportionnellement jusqu'à la plus courte, quand un point la parcourant en des moments égaux détache des segments continuellement de la même raison avec les lignes desquelles ils sont détachés. »

Le point mobile G se déplace sur la droite $(y'y)$, il est en G_0 à l'instant $t = 0$ avec la vitesse v. À chaque instant, la vitesse de G est proportionnelle à la distance GB restant à parcourir pour atteindre le point B.

$$G_0B = 1 \text{ et } G_1B = \frac{G_1B}{G_0B} = \frac{G_2B}{G_1B} = \ldots = \frac{G_{k+1}B}{G_kB} = q$$

donc : $\boxed{G_kB = q^k}$

« Les mouvements qui sont faits ensemble et dans le même temps sont synchrones. »
Au temps t_k, le point A se trouve en A_k et le point G se trouve en G_k.

En effet, si au temps t_k le point A se trouve en A_k , alors :

$$\frac{A_{0A_k}}{A_{0A_1}}=\frac{t_k}{t_1}=\frac{k\lambda}{\lambda}=k$$

donc : $\boxed{t_k=\lambda t_1}$.

2.1.3 Résolution d'une équation différentielle

La vitesse de G est proportionnelle à la distance GB donc est de la forme C.GB où C est une constante. À l'instant $t = 0$, la vitesse de G est $C.G_0B = C$; or, la vitesse de G à l'instant 0 est aussi v, donc : $C = v$; ainsi, la vitesse de G à l'instant t est : $\frac{v(GB)}{G_0B}=vGB$.

Soit y l'abscisse du point G sur la droite ($y'y$) munie du repère (G_0, B),

on a alors : $GB = 1 - y$, et la vitesse de G à l'instant t est : $\frac{dy}{dt}=v(1-y)$

donc y est solution de l'équation différentielle : $Y' = - vY + v$ dont la solution générale est : $Y = Ke^{-vt} + 1$.

Pour $t = 0$, on a : $Y = 0$, donc : $K = - 1$, donc : $y = 1 - e^{-vt}$, et donc : $\boxed{GB=e^{-vt}}$.

Quelle est alors la position de G à l'instant t_k ?

A l'instant t_k , $GB=e^{-vt_k}=e^{-vkt_1}=(e^{-vt_1})^k=(G_1B)^k=q^k=G_kB$

Conclusion : à l'instant t_k , le point G est en G_k.

Remarque : la solution de l'équation pourrait être donnée avec une fonction exponentielle de base différente de e ; dans ce cas, la constante serait différente. Dans cet exposé le choix de l'exponentielle de base e est simplement du au fait que cette fonction est introduite en terminale S comme solution de l'équation différentielle $y' = y$.

Remarque : le logarithme de Neper n'est pas vraiment népérien ; en fait, il fait intervenir un log de base $\frac{1}{e}$, mais qui n'est pas tout à fait de base $\frac{1}{e}$ ...

La définition du logarithme :

« donc le logarithme d'un sinus quelconque est un nombre définissant très près une certaine ligne qui croît également pendant que la ligne de tout le sinus décroît proportionnellement jusqu'à ce sinus, un mouvement synchrone existant de part et d'autre et d'égale vitesse au commencement »

En utilisant la notation Nog pour désigner le logarithme calculé par Neper on a :

$Nog(G_0B) = A_0A_0 = 0$, c'est-à-dire : $\mathbf{Nog(1) = 0}$.

(en fait Neper posera $G_0B = 10^7$ et donc $Nog\ 10^7 = 0$: le logarithme du sinus total est 0)

retour sommaire

$\text{Nog}(G_kB) = A_0A_k,$ donc : $\text{Nog}(q^k) = kA_0A_1$
or : $A_0A_1 = \text{Nog}(G_1B) = \text{Nog}(q)$

donc : $\mathbf{Nog}(\boldsymbol{q^k}) = \boldsymbol{k}\ \mathbf{Nog}(\boldsymbol{q})$

2.2 La construction de la table des logarithmes décimaux par Briggs

2.2.1. Une nouvelle table

Henry Briggs (1561-1630) est professeur de mathématiques à Londres.
Après la publication de la table de logarithme de Neper, Briggs lui rend visite en Écosse pendant l'été 1615, puis en 1616. Ils tombent d'accord sur la nécessité d'envisager une nouvelle table de logarithmes : les logarithmes calculés par Neper pouvaient être améliorés.

Les nouveaux logarithmes définis par Briggs et Neper vérifient log 1 = 0 et log 10 =1 (il s'agit de notre logarithme décimal).

Cela revient à mettre en correspondance une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q inconnue et une suite arithmétique dont le premier terme est 0. On fait correspondre à 10 (terme de la suite géométrique) le terme 1 de la suite arithmétique. (En fait on prendra 100 000 000 000 000 pour avoir des log avec une précision de 14 chiffres après la virgule).

suite géométrique	suite arithmétique (logarithme)
1	0
10	100 000 000 000 000

Vocabulaire : Briggs parle de suite de nombres continuellement proportionnaux pour désigner des nombres en progression géométrique.
Il désigne par indice d'un nombre dans la suite, la puissance d'un nombre donné ou son logarithme.

Briggs propose ainsi deux méthodes pour calculer les logarithmes des nombres entiers.

retour sommaire

2.2.2. Première méthode : très astucieuse

a) Considération préalable

Supposons que l'on mette en correspondance deux suites, l'une géométrique l'autre arithmétique, de telle façon qu'au terme 1 de la première suite corresponde 0 et au terme 32 corresponde 5. On veut déterminer le terme correspondant à 8.
Briggs propose la technique suivante :

suite géométrique	indice		suite géométrique	indice		suite géométrique	indice
1	0		1	0		1	0
2			8	1		32	1
4			64	2		1024	2
8	?		512	3		32768	3
16			4096	4			
32	5		32768	5			

Pour trouver l'indice correspondant à 8, on construit une suite de raison 8, le terme d'indice 5 de cette suite est 32768.

On construit alors la suite géométrique de raison 32, dans cette suite le terme 32768 a pour indice 3. On en déduit que 8 a pour indice 3 dans le premier tableau.
Briggs ne démontre pas le résultat utilisé mais il est facile de le justifier avec les notations actuelles. En effet :

notons q la raison, inconnue, de la suite géométrique,
alors : $32 = q^5$, et : $8 = q^n$
où n désigne l'indice de 8, inconnue que l'on cherche ;
par suite : $8^5 = (q^n)^5 = (q^5)^n = 32^n$;
donc trouver l'indice de 8 revient à trouver l'exposant n tel que : $8^5 = 32^n$.

La première méthode de Briggs est basée sur cette remarque.

b) Détermination du logarithme décimal de 2

On considère donc deux suites : une suite géométrique de premier terme 1 et de raison q (inconnue) et la suite arithmétique des indices.

suite géométrique	indice
1	0
….	
2	??
….	
10	100 000 000 000 000 = 10^{14}

retour sommaire

Briggs prend 10^{14} comme indice pour 10 de façon à avoir une précision de 14 décimales, ainsi : $2^{10^{14}}=(q^n)^{10^{14}}=(q^{10^{14}})^n=10^n$.

Trouver le log décimal de 2 revient donc à déterminer la puissance de 10 qui est égale à $2^{10^{14}}$. Évidemment, on ne trouvera pas d'entier n qui convienne puisqu'aucune puissance de 2 n'est égale à une puissance de 10, mais on va chercher à encadrer $2^{10^{14}}$ par deux puissances de 10 d'exposants entiers consécutifs : $10^{n-1}< 2^{10^{14}}< 10^n$.

Le problème est maintenant de déterminer n. Un nombre entier compris entre 10^{n-1} et 10^n comporte n chiffres : il suffit donc de déterminer le nombre de chiffres de $2^{10^{14}}$ pour déterminer log 2 : très astucieux ! On est maintenant confronté à un autre problème : comment compter le nombre de chiffres d'un grand nombre comme $2^{10^{14}}$?...

c) Table de calcul par quatraines

suite géométrique	indice	nombre de chiffres du terme de la suite	
1	0		
2	1		
4	2	1	1ère quatraine
16	4	2	
256	8	3	
1024	10	4	
$1024^2 = 1048576$	20	7	2ème quatraine
1024^4	40	13	
1024^8	80	25	
1024^{10}	100	31	

On prend comme premiers termes de la suite géométrique (de raison 2), 1 et 2 dont on cherche le log : 1 a pour indice 0 et 2 a pour indice 1.
On construit ensuite la première quatraine :

- le premier terme est obtenu en élevant 2 au carré ;
- le deuxième en élevant le premier au carré ;
- le troisième en élevant le deuxième au carré ;
- le quatrième multipliant le premier par le troisième.

Le quatrième terme de la quatraine a donc pour indice 10 et est égal à 2^{10}.
On recommence de même pour obtenir la deuxième quatraine dont le quatrième terme aura pour indice 100 et sera égal à 2^{100}.
Le quatrième terme de la quatorzième quatraine sera donc égal à $2^{10^{14}}$.
Il reste à compter le nombre de chiffres à chaque étape.
Lorsqu'on multiplie entre eux deux nombres ayant respectivement n et p chiffres le produit aura $n+p$ ou $n+p-1$ chiffres.

retour sommaire

d) Un problème de précision

Comment déterminer précisément le nombre de chiffres ? Pour avoir une précision de 14 décimales, combien de chiffres doit-on garder lors du calcul ?
Exemple du calcul de log 7 (avec 5 chiffres après la virgule) :

suite géométrique	indice	chiffres	
1	0		
7	1		
49	2	2	$1^{\text{ère}}$ quatraine
2401	4	4	
5 764 801	8	7	
282 475 249	10	9	
$282\,475\,249^2 = 7{,}979226630.10^{6}$	20	17	$2^{\text{ème}}$ quatraine
$282\,475\,249^4 = 6{,}366805761.10^{33}$	40	34	
$282\,475\,249^8 = 4{,}053621560.10^{67}$	80	68	
$282\,475\,249^{10} = 3{,}234476510.10^{84}$	100	85	
$(3{,}234476510.10^{84})^2 = 1{,}046183829.10^{169}$	200	170	$3^{\text{ème}}$ quatraine
$(3{,}234476510.10^{84})^4 = 1{,}094500605.10^{338}$	400	339	
$(3{,}234476510.10^{84})^8 = 1{,}197931574.10^{676}$	800	677	
$(3{,}234476510.10^{84})^{10} = 1{,}253256641.10^{845}$	1000	846	
$(1{,}253256641.10^{845})^2 = 1{,}570652208.10^{1690}$	2000	1691	$4^{\text{ème}}$ quatraine
$(1{,}253256641.10^{845})^4 = 2{,}466948358.10^{3380}$	4000	3381	
$(1{,}253256641.10^{845})^8 = 6{,}085834203.10^{6760}$	8000	6761	
$(1{,}253256641.10^{845})^{10} = 9{,}558728929.10^{8450}$	10000	8451	
$(9{,}558728929.10^{8450})^2 = 9{,}136929874.10^{16901}$	20000	16902	$5^{\text{ème}}$ quatraine
$(9{,}558728929.10^{8450})^4 = 8{,}348348752.10^{33803}$	40000	33804	
$(9{,}558728929.10^{8450})^8 = 6{,}969492688.10^{67607}$	80000	67608	
$(9{,}558728929.10^{8450})^{10} = 6{,}367976595.10^{84509}$	100000	84510	

On a donc obtenu que : $10^{84509} < 7^{10^5} < 10^{84510}$ et donc : $0{,}84509 < \log 7 < 0{,}84510$.

2.2.3. Deuxième méthode : extraction de racine carrée

Briggs et ses collègues dressent un tableau des racines carrées successives de 10 (travail quelque peu fastidieux !) jusqu'à la $54^{\text{ème}}$. Ce sont les nombres continuellement moyens : chaque terme est obtenu en calculant la moyenne géométrique du nombre précédent avec 1.

a) La règle des proportions

« Je cherche donc des nombres continuellement moyens entre Dix et Un dont le premier sera $\sqrt{10}$ à savoir $3\dfrac{16227766016837633199889354}{10000000000000000000000000}$ qui est le moyen proportionnel entre 10 et 1.

Et après, je cherche encore le côté du précédent [la racine carrée] $\sqrt{\sqrt{10}}$ qui est $1\dfrac{77827941003892280119730413}{100000000000000000000000000}$.

Puis, derechef, encore le côté du précédent $\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$: $1\dfrac{33352143216332402566538931}{100000000000000000000000000}$;

et ainsi vais-je toujours continuant le même ordre d'opérations, jusqu'à tant que j'en aie une colonne de cinquante cinq nombres, le Dix y enclos. Lesquels sont ici marqués par D et leurs sont adjoints à côté à chacun leurs Logarithmes rationnels marqués par E.

Le moindre des continuellement Moyens est : $1\dfrac{00000000000000012781914932003234 4165}{1000000000000000000000000000000000}$ dont le Logarithme se trouve en mi-partissant 0,00000,00000,00000,05551,11512,31257,82702,11815,83 car le Logarithme du côté est la moitié de celui du carré par ce que le carré est produit de la multiplication du côté en soi-même et partant chacun de ces Logarithmes sera double de son plus proche moindre. Et d'autant que les caractères significatifs, adjoints à l'Unité après quinze zéros sont la moitié de ceux qui vont immédiatement devant ; tant sont nombres continuellement moyens que sont les Logarithmes : il semble que les Logarithmes retiennent la même proportion en décroissant que les nombres auxquels ils sont adjoints. Et partant si quelques nombres sont diminués si avant, qu'après l'unité s'y ensuivent immédiatement quinze zéros, nous donnerons les vrais Logarithmes, ou approchant fort près, par la règle des proportions. »

b) Justification des approximations

Cette règle peut s'écrire : $\log(1 + x) = \mathrm{C}x$, pour $x < 10^{-15}$.
La constante C se calcule à l'aide de la relation :
$\dfrac{\log(1+x)}{\log(1+y)}=\dfrac{x}{y}$, ce qui équivaut à : $\dfrac{\log(1+x)}{x}=\dfrac{\log(1+y)}{y}=C$.

La dernière ligne du tableau permet d'écrire :
Log (1,0000 00000 00000 01278 19149 32003 235)
= 0,00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702 11815
On a donc :
$$\mathrm{C} = \frac{0{,}000000000000000055511151231257827021181 5}{0{,}0000000000000001278191493200323 44165} \approx 0{,}434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 804$$
soit : $\boxed{C\approx\dfrac{1}{\ln 10}}$.

retour sommaire

On peut montrer que : $|\ln(1+x) - x| < x^2 < 10^{-30}$, pour $x < 10^{-15}$.

Donc : $\left|\frac{\ln(1+x)}{\ln 10} - \frac{x}{\ln 10}\right| < \frac{x^2}{\ln 10} < \frac{10^{-30}}{\ln 10} < 10^{-30}$,

donc, en remplaçant, log(1 + x) par $\frac{x}{\ln 10}$ pour $x < 10^{-15}$, Briggs fait une erreur inférieure à 10^{-30}.

c) Conclusion

Pour calculer le logarithme d'un nombre n :

- on calcule les racines carrées successives de ce nombre jusqu'à que ce que l'on obtienne un nombre inférieur à $1 + 10^{-15}$;
- on calcule le logarithme du nombre trouvé à l'aide de la règle des proportions ;
- on remonte les calculs en multipliant par 2 jusqu'au logarithme du nombre n.

En pratique, Briggs utilise quelques astuces pour simplifier les calculs.

Par exemple pour calculer le logarithme de 2, il utilise le fait que : $2^{10} = 1024$, donc :

$$10 \log 2 = \log 1024 = \log(1000 \times 1{,}024) = 3 + \log 1{,}024.$$

Briggs calcule alors le logarithme de 1,024 (qui est quand même plus proche de 1 que 2 !) puis il en déduit le logarithme de 2.

Pour calculer le logarithme de 5, Briggs utilise :

$$\log 5 = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2.$$

Pour calculer le logarithme de 6, il remarque que : $6^9 = 10077696$, et il calcule donc le logarithme de 1,0077696.

Le logarithme de 3 se déduit de log 2 et log 6, etc.

Briggs propose enfin une méthode pour extraire les racines carrées, plus rapide que la méthode couramment utilisée : la méthode des différences.

3. Bibliographie

- Simone TROMPLER : *L'histoire des logarithmes* - Les cahiers du CeDoP
- IREM - *Histoire des mathématiques* : Histoires de logarithmes - ellipses
- Luca PACIOLI : *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita* - (Venise 1494)
- Jean TRENCHANT : *L'arithmétique départie en trois livres* - Paris 1558
- Nicole VOGEL : *La construction des logarithmes de Néper* - L'Ouvert n°55
- John NEPER : *Mirifici logarithmorumcanonis descriptio* - 1614
- John NEPER & Henry BRIGGS : *Logarithmica* - Londres 1624

VU SUR LA TOILE

Les mines des rois statisticiens

L'inflation du volume de chapitres de statistiques, dans les nouveaux programmes du Lycée et du Collège, nous a amené à exploiter des bases de données numériques toujours plus variées. Le pays d'Internet regorge de ces précieuses valeurs, mais il faut savoir trouver les bons portails. Le premier que j'ai essayé d'utiliser me semblait répondre parfaitement à toutes mes demandes ; je n'ai cependant pas su en profiter, mes requêtes n'aboutissant pas : http://dadi.univ-lyon1.fr/?page=home .

Le centre de documentation pédagogique de la Sorbonne comporte aussi quelques pépites : http://cesdoc.univ-paris1.fr/trouver/stats/ . On peut y découvrir une voie vers les inestimables statistiques européennes :
http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/statistics/search_database
ou vers des statistiques nationales.

Celles du temple de l'INSEE sont là :
http://www.bdm.insee.fr/bdm2/index.action , celles du palais des statistiques publiques, ici : http://www.statistique-publique.fr/ ; je pense qu'elles méritent d'être comparées.

Les plus aventureux iront fouiller dans les institutions internationales :

- l'OCDE : http://www.oecd-ilibrary.org/content/statistics%3bjsessionid=1ozz68op0sp17.delta ;
- la FAO : http://faostat.fao.org/default.aspx?lang=fr ;
- le FMI : http://www.imf.org/external/np/sta/index.htm, dont les tableaux sont accompagnés d'explications très riches sur les méthodes statistiques employées.

Pour les autres organismes, on pourra consulter :
http://urfist.enc.sorbonne.fr/anciensite/Ecoline/statistiques/indexmonde1.html .

Je n'ai malheureusement pas su résoudre l'énigme « Google » de la requête qui m'aurait permis de dénicher des bases de données consacrées aux sciences expérimentales. Je vous livre donc une maigre découverte concernant la climatologie : http://www.meteociel.com/climatologie/climato.php

Peut-être que les plus fortunés d'entre vous pourront me mener vers de nouvelles contrées aux ressources plus merveilleuses encore...

Indianajonesment vôtre,
gilles.waehren@wanadoo.fr

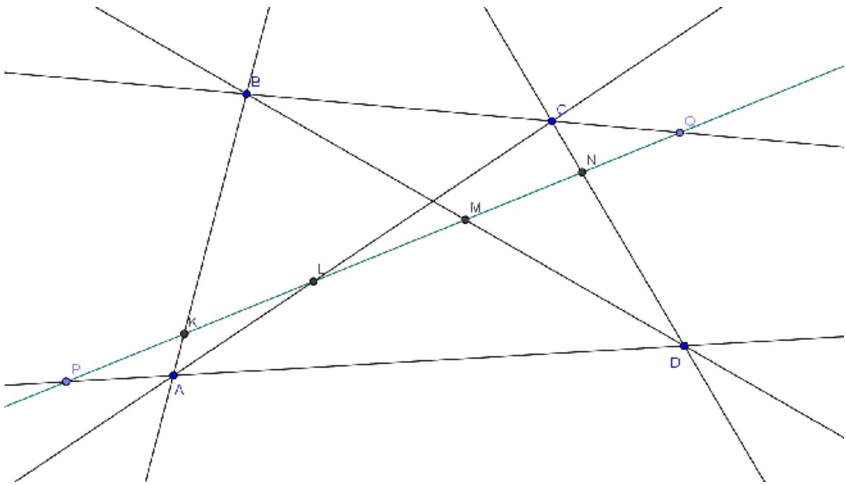
Retour sur le problème n° 106

Rappel du problème : Une droite coupait les côtés latéraux, les diagonales et les prolongements des bases d'un trapèze ABCD en six points, qui déterminaient cinq segments consécutifs PK, KL, LM, MN et NQ. Il s'agissait de démontrer que si les segments extrêmes (le premier et le cinquième) étaient égaux, alors le second et le quatrième l'étaient aussi.

Nous avons reçu un courrier de Jean-Marie DIDRY, nous faisant savoir que les solutions proposées dans le Petit Vert de septembre pour cette question cachaient la nature projective du problème. Il se place dans le cas plus général d'un quadrilatère complet quelconque et permet à la droite (J) de prendre toute position, auquel cas la formulation en terme de segments extrêmes est à revoir : quelques dessins permettent alors de se convaincre que c'est en terme d'égalités de mesures algébriques qu'il faut formuler la question, chacun des points étant clairement défini à partir de la droite (J) et des côtés et des diagonales du trapèze complet ABCD. Voici sa proposition de solution.

Conservons les notations de la figure, le quadrilatère ABCD étant quelconque. Il s'agit d'établir que si $\overline{PK}=\overline{NQ}$, alors $\overline{KL}=\overline{MN}$.

Il suffit d'observer que la projection de centre B sur la droite (AD) suivie de celle de centre L sur la droite (BC) puis de celle de centre D sur la droite (J) transforme la division PLKM en la division QMNL. Il en résulte l'égalité des birapports associés. Compte tenu de l'hypothèse, nous obtenons l'égalité des rapports $\frac{\overline{NM}}{\overline{KL}}$ et $\frac{\overline{MP}}{\overline{LQ}}$, qui valent aussi $\frac{\overline{NP}}{\overline{KQ}}$, c'est à dire -1 en se servant à nouveau de l'hypothèse. D'où le résultat.



Merci à Jean-Marie DIDRY pour cette généralisation.

retour sommaire

Solution du problème n° 107

Quel est le nombre de zéros de factorielle 10^n ?

Voici le nombre de zéros de $(10^n)!$ pour n de 1 à 18 :

n	Nb de zéros de $10^n!$
1	2
2	24
3	249
4	2499
5	24999
6	249998
7	2499999
8	24999999
9	249999998
10	2499999997
11	24999999997
12	249999999997
13	2499999999997
14	24999999999998
15	249999999999997
16	2499999999999996
17	24999999999999995
18	249999999999999995

Comme on pouvait s'en douter, il ne suffisait pas de continuer à ajouter des 9 à droite … sinon il n'y aurait pas eu matière à problème.
La solution se trouve dans un article de David Hart, James Marengo, Darren Narayan et David Ross, publié dans « THE COLLEGE MATHEMATICS JOURNAL » VOL. 39, n° 2, mars 2008 : « On the number of trailing zeros in n! ».

Merci à Jacques Choné de nous avoir fourni cette référence, et d'en avoir tiré la substantifique moelle :

Soit (a_n) la suite étudiée. Elle est référencée sous le code A173228 (voir https://oeis.org/A173228).
Comme nous l'avions montré dans le Petit Vert n° 55, a_n est le nombre de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 10^n :

$a_n = \sum_{k=1}^{b(n)} \lfloor \frac{10^n}{5^k} \rfloor$ où $\lfloor ... \rfloor$ désigne la partie entière et où $b(n)$ est l'exposant de la plus grande puissance de 5 inférieure ou égale à 10^n.

Puisque $5^k \leq 10^n \Leftrightarrow k \leq \frac{n \ln(10)}{\ln 5}$, on en déduit :

$$a_n = \sum_{k=1}^{b(n)} \lfloor \frac{10^n}{5^k} \rfloor \quad \text{avec} \quad b(n) = \lfloor \frac{n \ln(10)}{\ln 5} \rfloor \quad .$$

On obtient bien les résultats du tableau ci-dessus.

Jacques Choné nous fait remarquer au passage que la limite de $\frac{a_n}{10^n}$ vaut $\frac{1}{4}$.

On peut aussi généraliser à d'autres bases que 10 :
http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL14/Oller/oller3.pdf

<u>Note de dernière minute</u> : nous venons de recevoir une solution de Jean-Marie Didry. Faute de place, nous ne pouvons pas la publier dans ce numéro. Mais nous allons la mettre en ligne dès que possible : rendez vous à la rubrique « problèmes » du site (http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=probleme)

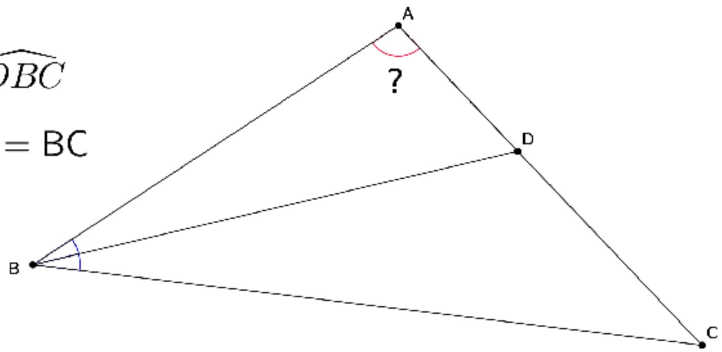
Problème du trimestre n°108

Dans le Monde du mardi existe une excellente chronique de « jeux mathématiques », destinée à un public assez large mais dont les énoncés peuvent mettre douloureusement à l'épreuve les méninges des professeurs de mathématiques eux-mêmes !

Dans un numéro récent, on trouvait le problème suivant :

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$$

$$\text{BD} + \text{AD} = \text{BC}$$



retour sommaire

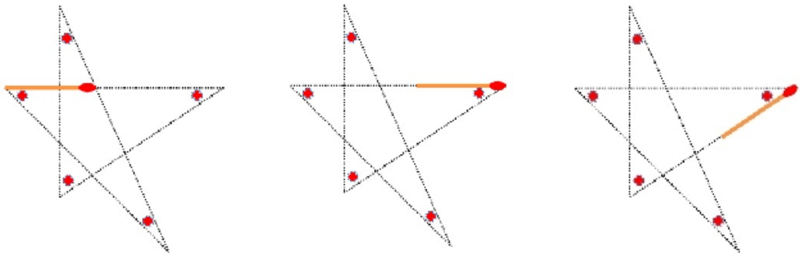
Il s'agissait donc de trouver la valeur de l'angle $\widehat{BAD}$

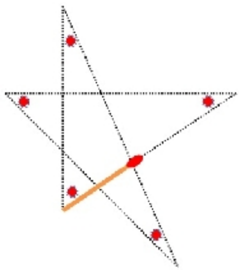
Ce problème en lui-même fait appel à des formules de géométrie classique (classique mais plus vraiment enseignée aujourd'hui !) mais les grecs auraient-ils posé un tel problème ? Autrement dit, cette figure est-elle constructible à la règle et au compas ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail : loic.terrier@free.fr

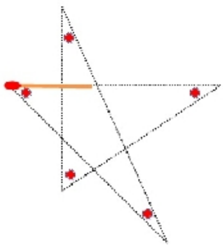
SOLUTION DÉFI COLLEGE n°107

Nous demandions quelle est la somme des angles de l'étoile à cinq branches.
François nous propose une « preuve sans mots » (*pour en savoir plus à ce sujet, rendez-vous à la conférence de Xavier VIENNOT lors des Journées nationales Apmep en octobre 2012 à Metz*) :
Je prends une allumette, je la fais glisser sur un des segments de l'étoile. Arrivé à l'extrémité du segment, je la fais pivoter pour la faire glisser sur un autre segment. Je continue ma promenade sur l'étoile et je reviens sur le segment de départ :





et ainsi de suite jusqu'à

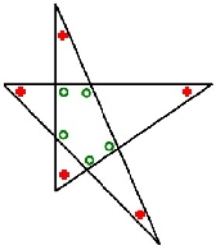


retour sommaire

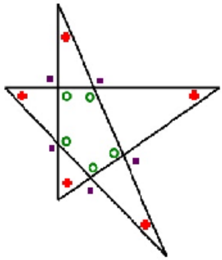
Finalement, l'allumette a pivoté d'un demi-tour. La somme des angles de l'étoile est donc égale à 180°.

…/…

Une autre solution de François, basée sur les angles :



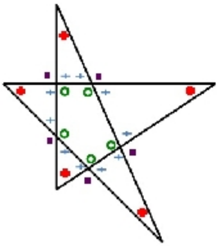
On cherche la somme des angles « croix rouges ». La somme des angles « ronds verts » est égale à 3 fois 180° (pour cela, décomposer le pentagone intérieur en 3 triangles).



La somme des angles « carrés violets » est aussi égale à 3 fois 180° (opposés par le sommet aux « ronds verts »).

La somme de tous les angles codés sur la figure suivante est égale à 5 fois 180° (la somme des angles des triangles formant les pointes) plus 6 fois 180° (la somme des angles du pentagone central et de leurs angles opposés par le sommet). La somme de tous les angles codés est donc égale à 11 fois 180°.

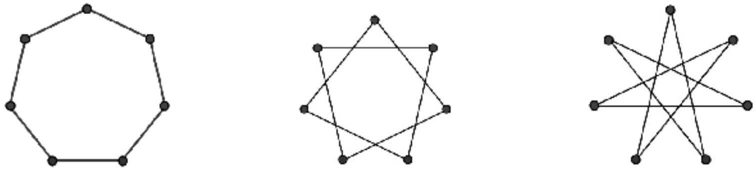
La somme des angles codés sur la figure est également égale à 5 fois 360° (la somme des angles autour des sommets qui ne sont pas des pointes de l'étoile) plus la somme des angles formant les pointes de l'étoile. La somme des angles codés est donc égale à 10 fois 180° plus la somme des angles formant les pointes de l'étoile.



En utilisant ce qui est écrit dans le paragraphe précédent, j'en déduis que la somme des angles formant les pointes de l'étoile est égale à 180°.

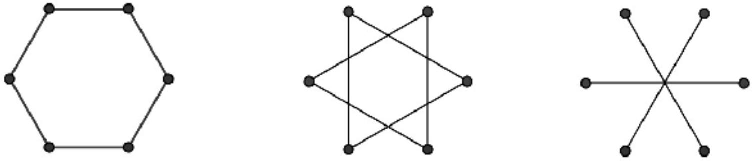
Pour aller plus loin…

Intéressons-nous de manière plus générale aux « polygones étoilés ». Et pour simplifier, restreignons-nous à ceux obtenus à partir d'un polygone régulier. Joignons les sommets d'un tel polygone de 1 en 1, puis de 2 en 2, de 3 en 3 etc. Exemple avec l'heptagone ; nous obtenons trois figures différentes :



Faisons la même chose avec un hexagone :

retour sommaire



Nous constatons que les « objets » ci-dessus ne peuvent pas toujours se tracer d'un seul trait de crayon.
Dans la littérature, les « polygones étoilés » se restreignent le plus souvent aux seuls qui peuvent se tracer d'un seul trait de crayon (un polygone est une figure géométrique plane formée d'une suite cyclique de segments consécutifs) ; dans ce cas les deux derniers tracés ci-dessus n'en seraient pas. On les appelle parfois « polygrammes ».

Mais comment appeler alors l'ensemble de ces figures ? Des « stellations » ? Voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Stellation
Et http://en.wikipedia.org/wiki/Star_polygon (en anglais).

Jean-Paul Delahaye, dans son livre « Merveilleux nombres premiers. Voyage au cœur de l'arithmétique » (éditions Belin), les nomme cependant tous « polygones étoilés » et les évoque à propos des nombres premiers :
Soit *n* le nombre de côtés d'un polygone, et joignons ses sommets de *m* en *m* ($m<n$). On constate que si (et seulement si) *n* est premier, tous les polygones tracés en joignant ses sommets de *m* en *m* sont d'un seul tenant.
D'où une définition « géométrique » possible des nombres premiers :
Un nombre *n* est premier si (et seulement si) tous les « polygones étoilés » à *n* sommets (obtenus en joignant les *n* points de *m* en *m*) peuvent être tracés sans lever le crayon.

Voir aussi http://www.apmep.asso.fr/Nantes-sujet-3

■

SOLUTION DÉFI LYCEE n°107

n est un nombre premier différent de 2 et de 3. Montrer que n²-1 est un multiple de 24.

Tout nombre n peut s'écrire sous la forme $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$. Dans le premier cas, ce ne peur être un nombre premier.
Si $n = 3k+1$, alors $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3k(k + 2)$: c'est un multiple de 3.
Si $n = 3k+2$, alors $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k = 3k(k + 4)$: c'est un multiple de 3.
Donc n est multiple de 3.
Par ailleurs, tout nombre n s'écrit $n = 4q$, $n= 4q+1$, $n = 4q+2$ ou $n = 4q+3$. Seule la seconde et la quatrième forme peuvent correspondre à un nombre premier. En développant de la même manière que précédemment, on montre que $n^2 - 1$ est multiple de 8.
n étant à la fois multiple de 3 et de 8 (premiers entre eux), il est multiple de 24.

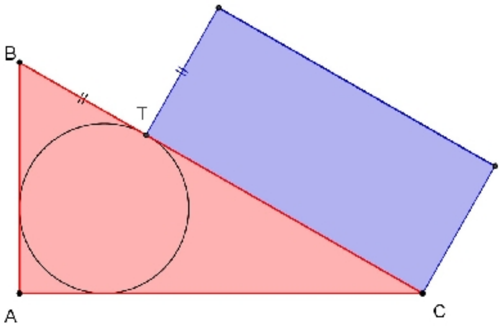
Une solution plus rapide pour les élèves qui ont vu les congruences :
Puisque *n* est premier supérieur ou égal à 5, *n* est congru à 1 ou 2 modulo 3 ; d'où n² - 1 est congru à 0 modulo 3 (on calcule n² - 1 mod 3 dans les deux cas).
Par ailleurs, comme *n* est un nombre premier, il ne peut pas être congru à 0, 2, 4 ou 6 modulo 8 (sinon il serait pair). Ainsi, *n* est congru à 1 ou 3 ou 5 ou 7 modulo 8 ; et dans tous ces cas on trouve n² - 1 congru à 0 modulo 8.

Défi collège n°108

Les représentations graphiques ci-dessus, utilisées par la revue Challenge du 17 au 23 novembre 2011, sont-elles mathématiquement correctes ?

Défi lycée n°108

Le cercle inscrit dans le triangle rectangle rouge ABC est tangent en T à l'hypoténuse. On construit sur [TC] un rectangle bleu dont l'autre côté est égal à BT.
Quelle est la plus grande des deux aires : la rouge ou la bleue ?



Chaque trimestre le Petit Vert vous propose un « DÉFI » destiné à vos élèves de collèges et/ou de lycée. Envoyez toute solution originale de vos élèves, ainsi que toute nouvelle proposition de défi, à Michel RUIBA, 31 rue Auguste Prost, 57000-METZ, michel.ruiba@ecopains.net.

ANNONCE

SAVEZ-VOUS COMPTER ?

Exposition au musée de l'histoire du Fer à Jarville (54)
du 10 octobre 2011 au 2 janvier 2012

Une exposition qui retrace avec quelques instruments et machines emblématiques l'histoire du calcul : des premiers outils pour compter les bêtes d'un troupeau à la calculette électronique en passant par la machine mécanique de bureau destinée à la comptabilité.
Comment l'homme a fait évoluer les techniques permettant de ne plus s'encombrer la mémoire, de pallier ses erreurs et omissions et laisser la machine prévoir à sa place.
Découvrir qu'un instrument ancien peut survivre à une machine perfectionnée ou coexister avec elle pendant plusieurs centaines d'années.
Ainsi, l'innovation n'est pas uniquement une affaire de technique mais résulte d'une conjonction de paramètres sociaux, culturels et historiques.

Venez apprendre ou réapprendre à compter avec un boulier, découvrir la multiplication avec les rouleaux de Neper ou bien encore vous dispenser de tout effort mental en manipulant les réglettes de Genaille.

http://www.culturemm.com/fr/EXPOSITION-SAVEZ-VOUS-COMPTER,737005765/

retour sommaire

Roger CARDOT

Roger nous a quittés le 26 octobre (au moment où nous rentrions des Journées de Grenoble), emporté par la maladie qui le rongeait depuis deux ans.
Adhérent APMEP depuis fort longtemps, il était entré au Comité régional en 1990, et peu après il prenait en charge la gestion et la vente des brochures, tâche qu'il a accomplie pendant près de deux décennies.
Ceux qui ont eu le plaisir d'avoir Roger comme collègue ont pu apprécier son charisme et sa volonté permanente d'échanger. Les travaux réalisés en commun ont toujours été très fructueux.
Disponible, toujours prêt à rendre service, sa bonne humeur était communicative. Nous le regretterons tous, et nous avons une pensée émue pour sa famille, et en particulier son épouse Michèle.

Roger au stand « brochures »
lors de la Journée régionale de 2007

Jean-Marie PROVIN

A l'heure où nous terminons ce numéro, nous apprenons également le décès de Jean-Marie, qui a fait partie du Comité régional de 1997 à 2003, où il était en charge du second cycle (lycées) ; il avait également pris une part active dans la préparation des Journées nationales de Gérardmer. Toutes nos condoléances à sa famille.

retour sommaire