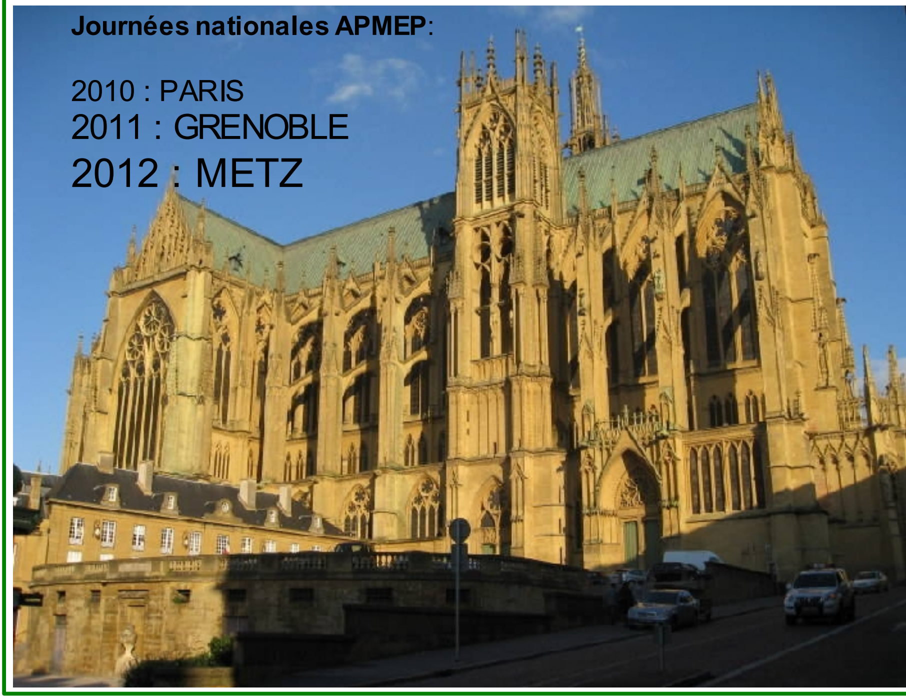
LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N° 103	SEPTEMBRE 2010



http://apmeplorraine.free.fr

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale Lorraine A.P.M.E.P..

Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il paraît quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).

Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges entre les adhérents.

On y trouve un éditorial (généralement rédigé par un membre du Comité) et diverses annonces, les rubriques "problèmes", "dans la classe", "maths et médias", "vu sur la toile", et parfois une "étude mathématique". Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à

jacverdier@orange.fr et Christophe.Walentin@wanadoo.fr

On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres : mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.

Henri Poincaré

SOMMAIRE

édito

TOUT VA TRÈS TRÈS BIEN !!!

Tout va très bien, madame la Marquise
Tout va très bien, tout va très bien
Pourtant il faut, il faut que l'on vous dise
On déplore un tout petit rien…

Le Recteur et le ministre nous l'ont assuré, nous vous le confirmons : la rentrée 2010 s'est déroulée dans les meilleures conditions, tout le monde est satisfait.

On ne parlera pas du mouvement du 7 septembre dernier : il ne faut pas confondre rentrée sociale et rentrée scolaire. On ne parlera pas non plus des nouveautés de la merveilleuse réforme des lycées : tout le monde en est content (« Vous faites quoi, dans votre lycée, pour l'accompagnement personnalisé ? »).

La réforme de la formation des enseignants a aussi comblé toutes nos attentes : les enseignants de terrain ont été, très logiquement, écartés de la formation qui était prévue dans le nouveau master. Malgré nos indiscutables facultés de dénombrement, il nous semble déjà impossible de faire la liste des cadeaux que l'institution nous fait, trois mois avant Noël.

En Lorraine, seuls quelques postes de stagiaires sont restés inoccupés : comme ils assurent désormais un temps plein, cela ne peut plus passer inaperçu. On a donc une pensée émue pour tous ceux qui ont accepté leurs nouvelles conditions d'entrée dans le métier : nous leur souhaitons de ne pas céder à la panique. Combien seront encore là en septembre 2011 ? En attendant, leur formation, réduite à une peau de chagrin (10 journées consacrées à l'enseignement des maths sur toute l'année !), mobilise, au mois de septembre, les TZR chargés de prendre leurs classes : les remplacements ordinaires ne sont plus garantis. Qui confierait la construction de sa maison à un apprenti maçon en se contentant de lui livrer les briques, le mortier et un plan difficile à déchiffrer ?

Justement, la crise du BTP est terminée : des BEP maçons trouvent de la place... mais en Bac Pro Peinture ! Ils expérimentent déjà la bivalence ! Ils sont souvent excédentaires dans des classes où se côtoient ancien et nouveau systèmes, et pour lesquelles le CCF (contrôle en cours de formation) a plus à voir avec un Rubik's cube trafiqué qu'avec un vrai protocole d'évaluation.

Dans l'enseignement général et technologique, on ne parvient déjà plus à compter les élèves qui passent d'un Lycée à l'autre à la recherche d'une place en Seconde ou même en Première, souvent loin de leur

retour sommaire

secteur parce que leurs choix d'options ont été refusés. Les effectifs de cette rentrée ont été très largement sous-estimés ; le surplus d'élèves n'a pas d'autre alternative que de s'inscrire dans le privé.

Pourront aussi attendre nos collègues du primaire, qui ne voient toujours pas venir les accompagnements du programme longuement promis. Quant au socle commun, le collège unique aura mis moins de temps à se faire ! Les écoliers et collégiens sauront-ils apprécier à leur juste valeur les idées géniales de nos penseurs incompris ?

Cette réforme du système éducatif souffre de moyens qui ne sont pas à la hauteur de ses ambitions. On ne peut que compatir à la difficulté qu'ont nos supérieurs directs à appliquer et à faire passer, au jour le jour, des directives absconses, voire absurdes. Comme disait l'autre : "Sire, on en a gros !"

Le Comité de la régionale
Réuni le 18 septembre 2010

LE MOT DE LA PRÉSIDENTE

Oyez, oyez, bonnes gens ! Ceci est un message du comité de la Régionale Lorraine à ses adhérents et à leurs connaissances !

A défaut des J.O. de Paris 2012, il faudra compter sur les J.N. de Metz 2012, ce qui, pour le professeur de mathématiques, amateur de sport cérébral, fait partie des rendez-vous autrement plus incontournables. Alors réservez d'ores et déjà vos journées du 27 au 30 octobre 2012 car cela n'a lieu dans notre belle région que tous les treize ans.

La régionale, organisatrice de ce grand événement, fait appel à toutes les bonnes volontés pour l'ouverture de ce grand chantier. Rappelons que toutes les personnes qui mettent en place les activités de l'APMEP sont bénévoles. Alors mobilisez-vous ! N'hésitez plus, contactez nous ! Chacun peut donner un coup de main à son niveau. Et nous en aurons un grand besoin.

Céline COURSIMAULT

Présidente de la régionale

retour sommaire

Journées nationales 2012 à Metz

CONCOURS D'AFFICHE

La régionale Lorraine organisera les Journées nationales de l'APMEP en 2012 à Metz. En octobre 2011, lors des prochaines Journées à Grenoble, nous distribuerons aux participants «l'affiche de « nos » journées, affiche que l'on retrouvera également jointe au BGV de présentation de mai 2012.

A cette occasion, l'APMEP a envoyé un courrier destiné aux professeurs de mathématiques, d'arts plastiques et aux professeurs d'école, leur proposant de faire réaliser cette affiche par leurs élèves (comme nous l'avions fait pour les précédentes Journées de Gérardmer en 1999).

Compte tenu des difficultés de diffusion de tels courriers dans les établissements, nous le reproduisons ci-après, et nous comptons sur vous pour assurer sa diffusion auprès de vos collègues de maths et d'arts plastiques. Merci beaucoup pour votre aide.

Aux professeurs de mathématiques et d'arts plastiques
s/c des chefs d'établissement

Chers collègues,

Les journées nationales de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public se déroulent, chaque année, dans une région différente. La Lorraine accueillera les journées de 2012 dans la ville de Metz.

A cette occasion, nous lançons un concours auprès des classes des écoles, collèges et lycées. Il s'agit de produire une affiche qui, si elle est retenue par le comité régional de l'association, servira de support à la communication pour annoncer cette manifestation.

Vous trouverez ci-joint le cahier des charges relatif à l'affiche à réaliser.

Si ce projet vous tente, n'hésitez pas à y travailler avec l'une de vos classes au cours de l'année scolaire 2010 – 2011. Les productions sont attendues pour le 1er mai 2011.
Nous vous remercions pour votre éventuelle implication et vous adressons nos cordiales salutations.

Pour le comité régional de l'APMEP, Coursimault

retour sommaire

CONCOURS APMEP 2010 – 2011

PRODUCTION D'UNE AFFICHE

Cahier des charges

Mentions devant obligatoirement figurer sur l'affiche :

L'indication du congrès : **Journées nationales de l'A.P.M.E.P.**

Le thème des journées : **Partageons les mathématiques**

La date des journées : **du samedi 27 octobre au mardi 30 octobre 2012**

Le lieu : **Metz**

Format de l'affiche imprimée : A3

Support attendu : fichier numérique ou papier (A3 ou A4 pour agrandissement)

Retour des productions : 1er mai 2011
à l'adresse suivante :

APMEP Concours d'affiche
chez Ghislaine BURKI
41 rue du 16ème B.C.P.
54800 LABRY
burkighis@aliceadsl.fr

en précisant la classe, l'établissement et ses coordonnées.

Critères de choix :
- originalité
- adaptation au thème, à la région
- lisibilité

Proclamation des résultats : début juin 2011

Prix offert à la classe gagnante : un lot de livres et l'affiche plastifiée grand format.

La Journée régionale des mathématiques de 2011 aura lieu le mercredi 30 mars, à l'INRIA (sur le campus scientifique de Vandœuvre) le matin et au lycée Jacques Callot l'après midi.

APPEL À ATELIERS

Un des gages de réussite de cette journée est la présentation d'ATELIERS **variés et nombreux** ; il serait bon qu'il y en ait au moins quinze, et nous avons déjà quelques pistes. Nous lançons donc un appel auprès de tous les collègues qui voudraient en présenter un. Ces ateliers se dérouleront l'après-midi, durant 1 h 30, et pourront rassembler de 20 à 30 participants.

Envoyez vos propositions le plus rapidement possible à la présidente de la régionale : Céline Coursimault (jbcc@pt.lu), avec copie à jacverdier@orange.fr.

ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ ɸ

Ré adhésion 2011

Fin septembre ou début octobre, vous allez recevoir le BGV n°154, auquel sera joint votre bulletin de réadhésion à l'A.P.M.E.P. et votre reçu fiscal. **N'attendez pas** pour réadhérer : n'oubliez pas que si vous retournez votre chèque avant le 31 décembre, 66 % du montant de l'adhésion vous seront déduits de votre impôt sur les revenus de l'année. Une réadhésion à 48 € (indice inférieur ou égal à 415) ne vous coûtera en réalité que 20 € ; une réadhésion à 75 € (indice supérieur à 415) vous coûtera 39 € ; sommes minimes eu égard aux services rendus. Mais vous pouvez même faire beaucoup mieux : opter pour une cotisation « de soutien » (un soutien au tarif de 120 €, par exemple, ne vous coûtera que 54 €, mais rapportera 120 € à l'Association).

Faites également adhérer vos collègues et amis (la première adhésion est au tarif de 45 €, qui n'en coûtent que 15 compte tenu de la réduction fiscale). Plus nous aurons d'adhérents, plus la Régionale sera dynamique, et meilleur ce sera pour les finances de l'Association, dont l'équilibre financier est de plus en plus difficile à atteindre.

RACINE CARRÉE DE 2 À TRAVERS LES ÂGES : DES BABYLONIENS À EULER (2e partie)

Anne Gaydon, Lycée Saint-Joseph, Épinal
Gilles Waehren, Lycée Mangin, Sarrebourg

Suite de l'article paru dans le Petit Vert n°102 de juin

Le texte d'Euler donnant le calcul approchée d'une racine carrée

Pré requis...

« Le premier moyen dont nous parlerons, suppose qu'on ait déjà déterminé assez exactement la valeur d'une racine(*) ; qu'on sache, par exemple, qu'une telle valeur surpasse 4, et qu'elle est plus petite que 5.
Dans ce cas, si l'on suppose cette valeur = 4 + p, on est sûr que p exprime une fraction. Or si p est une fraction, et par conséquent moindre que l'unité, le carré de p, son cube, et en général toutes les puissances plus hautes de p, seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, et cela fait que, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. »

Description de l'itération

« Quand on aura déterminé à peu près la fraction p, on connaîtra déjà plus exactement la racine 4 + p ;
on partira de là pour déterminer une valeur encore plus exacte,
et on continuera de la même manière, jusqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le souhaitait. »

Exemple pour la recherche de la racine carrée de 20.

« Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $x^2=20$
On voit ici que x est plus grand que 4 et plus petit que 5 ; en conséquence de cela, on fera $x=4+p$ et on aura : $x^2=16+8\ p+p^2=20$
mais comme p^2 est très petit, on négligera ce terme pour avoir finalement l'équation : $16+8\ p=20$
ce qui donne : $p=\frac{1}{2}$ et : $x=4+\frac{1}{2}$
ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. »
(Remarque qui précise l'état d'esprit de l'auteur)

Et on recommence...

retour sommaire

« Si donc on suppose à présent $x=\frac{9}{2}+p$, on est sûr que p signifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, et qu'on pourra négliger p^2 à bien plus forte raison ... [...]

d'où : $x=4+\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche si fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle. »

(Avis pour le moins assez tranché, mais n'est pas Euler qui veut).

En quatre étapes, Euler approche $\sqrt{20}\approx 4{,}472135955$ par $x=4+\frac{5473}{11592}$ (après correctif) soit environ $4{,}472135956$, en négligeant p^2 à chaque étape...

En appliquant la méthode d'Euler à $\sqrt{2}$, on obtient :

étape	équation	p	x	valeur approchée
1			$1+p$	1
2	$1+2p\approx 2$	$\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}+p$	1,5
3	$2+\frac{1}{4}+3p=2$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{3}{2}-\frac{1}{12}+p$	1,417
4	$\frac{289}{144}+\frac{17}{6}p=2$	$-\frac{1}{408}$	$\frac{17}{12}-\frac{1}{408}=\frac{577}{408}$	1,414216

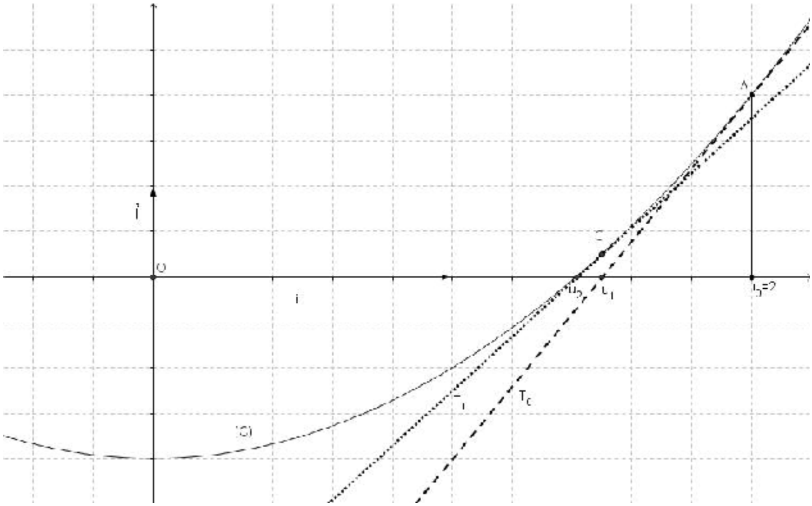
Pour éléments de comparaison, on donnera : $\sqrt{2}\approx 1{,}414214$ et, sur la tablette YBC 7289, $\frac{30547}{21600}\approx 1{,}414213$. La méthode d'Euler nous offre, elle aussi une convergence quadratique.

Les tangentes de Newton

Cette méthode consiste à approcher les zéros d'une fonction en utilisant des tangentes successives et leurs points d'intersection avec l'axe des abscisses. La racine carrée de 2 est racine de la fonction d'expression : $f(x)=x^2-2$. Pour déterminer ce nombre, on trace la courbe représentative de f :

Les calculs

Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est :
$y=2a(x-a)+a^2-2$ soit : $y=2ax-a^2-2$.



La droite coupe l'axe des abscisses en $\frac{a^2+2}{2a}=\frac{a}{2}+\frac{1}{a}$ (pour $a\neq 0$) qui est l'abscisse du point de tangence suivant. On construit donc la suite (u_n) telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2}+\frac{1}{u_n} \end{cases}$$

On définit ainsi une suite qui converge vers la racine carrée de 2.

n	u_n
1	2.000000000000
2	1.500000000000
3	1.416666666700
4	1.414215686275
5	1.414213562375
6	1.414213562373
7	1.414213562373
8	1.414213562373

Une fois encore, la convergence est rapide.

Comparaison des méthodes

Les quatre méthodes présentées précédemment proposent un calcul approché de $\sqrt{2}$ d'un point de vue à chaque fois différent : géométrique, algébrique, algébrique-analytique et analytique. Le lecteur aura observer, malgré tout, certaines similitudes, notamment dans les calculs intermédiaires ; nous allons les mettre en évidence.

Pour les rectangles successifs :

Si l'on considère la suite (L_n) des longueurs et (l_n) celle des largeurs, on obtient les récurrences : $\begin{cases} L_1 &= 2 \\ l_1 &= 1 \\ L_{n+1} &= \dfrac{L_n + l_n}{2} \\ l_{n+1} &= \dfrac{2}{L_{n+1}} \end{cases}$ soit : $\begin{cases} L_1 &= 1 \\ L_{n+1} &= \dfrac{1}{2\left(L_n + \dfrac{2}{L_n}\right)} \end{cases}$

plus connues sous le nom d'algorithme de Héron.

La méthode des fractions continuées donne une suite (u_n) de réduites qui vérifie :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

Les termes consécutifs sont alternativement supérieurs et inférieurs à $\sqrt{2}$ d'où la convergence assez lente de cette suite. Les termes de la sous-suite (u_{2n+1}) sont égaux à ceux de la suite (L_n).

Comme nous l'avons déjà constaté, la méthode de Newton suit, elle aussi, la même récurrence que l'algorithme de Héron.

De façon plus inattendue, c'est également le cas de l'algorithme d'Euler. En effet :

- à chaque étape, on résout : $(x_n + p)^2 = 2$
- en négligeant p^2, on trouve : $p = \dfrac{(2 - x_n)^2}{2\,x_n}$
- d'où : $x_{n+1} = x_n + p \iff x_{n+1} = \dfrac{x_n{}^2 + 2}{2\,x_n}$
- soit : $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}\right)$ qui a un petit air de « déjà-vu »...

Tant et si bien que sur les quatre méthodes explorées, trois sont associées à la même récurrence. On se gardera cependant de les confondre, tant leur approche est différente. Chacune d'entre elles permet toutefois d'approcher toutes les racines carrées d'entiers voulues de manière assez simple et efficace.

Exploitation en classe

La méthode des Babyloniens a été expérimentée dans une classe de Seconde relativement faible au cours de deux séances de modules. Une première pour rappeler le rôle de $\sqrt{2}$ dans le carré, présenter la tablette YBC 7289, construire les rectangles et commencer les calculs ; la deuxième a permis de traiter la quatrième étape, de chercher les formules sur tableur et de discuter des résultats obtenus.
La méthode des fractions continuées a fait l'objet d'une activité au sein d'un club de maths, en utilisant la calculatrice et le tableur.
La méthode de Newton reste un sujet toujours très riche pour un devoir maison de Terminale S.

La construction d'un nombre particulier

Les apports d'un tel travail sont variés, selon que l'on puisse traiter une ou plusieurs méthodes. La diversité permet la comparaison, mais chacune est, à elle toute seule, l'occasion d'une exploration à plusieurs niveaux (géométrique, algébrique, informatique ...). Elles permettent d'apprivoiser un nombre qui sort en général de la "boîte noire" de la calculatrice, en le construisant progressivement. Bien sûr, le pouvoir de chaque méthode est de permettre de calculer d'autres racines carrées sans difficulté supplémentaire autre que l'ordre de grandeur du nombre cherché. Le développement informatique donne l'occasion de s'interroger sur la nature des nombres obtenus et les limites du tableur ainsi que ses avantages. Enfin, on ne rappellera jamais assez que de marcher dans les pas des mathématiciens reste un moyen privilégié pour l'élève de construire son chemin dans les mathématiques.

De par sa banalité apparente, racine carrée de 2 n'a pas toujours les faveurs des collègues qui lui préfèrent souvent la moitié de racine carrée de 5 augmentée de 1 (le nombre d'or pour ne pas le nommer) pour son côté mythique et la variété des calculs qu'il occasionne. On ne pourra que renvoyer le lecteur au « Fabuleux destin de √2 » pour corriger cette négligence.

Bibliographie

- APMEP brochure n°27 : "Pour une mathématique vivante en seconde" 1984
- B. Rittaud : Racine de 2 : conférence La Villette octobre 2006 ; Gazette SMF 107 Janvier 2006 ; "Le fabuleux destin de √2" (Le Pommier)
- L. Euler : "Introduction à l'Analyse des infiniment petits " 1748
- R. Caratini : "Les mathématiciens de Babylone" Presses de la Renaissance

DANS NOS CLASSES

Une première expérience de l'enseignement de l'algorithmique en seconde

Par Geneviève BOUVART et Isabelle JACQUES

L'algorithmique, comme la logique ne constitue pas un chapitre des programmes de lycée. L'enjeu est donc de lui créer une place dans les progressions et de donner du sens à son utilisation dans l'ensemble des programmes de mathématiques du lycée. Dans cet article, nous présenterons des algorithmes permettant d'introduire une nouvelle notion (coordonnées de vecteurs), de réactiver des connaissances antérieures (programmes de calculs), de synthétiser des savoirs (parallélogrammes), d'aborder différemment certaines parties de programmes (probabilités), de présenter un outil performant pour résoudre certains problèmes tout en proposant une progression des apprentissages en matière d'algorithmique.
En ce qui concerne les outils de programmation, il nous semble important de commencer par la notion d'algorithme naturel en s'appuyant sur les algorithmes étudiés au collège : programmes de calcul, division euclidienne par exemple. Puis d'utiliser le langage de la calculatrice et enfin les ressources d'un logiciel en proposant un algorithme à tester et à modifier avant de laisser les élèves écrire un programme complet.

I Notion d'algorithme en langage naturel

Une manière de commencer est de proposer, en début d'année, un « Devoir Maison » (*voir en annexe*) sur des programmes de calcul qui permettent de faire apparaître la structure de l'algorithme : Entrées – Traitement – Sortie et de traiter de l'affectation de valeurs. C'est aussi l'occasion de repérer les erreurs liées au calcul algébrique et à la résolution d'équations.

Programme de calcul	**Langage naturel**	**Avec ALGOBOX**
Choisir un nombre Soustraire 2 Elever cette différence au carré Soustraire 9 au résultat obtenu Annoncer le résultat.	Soit x un nombre x prend la valeur x – 2 x prend la valeur $(x – 2)^2$ x prend la valeur x – 9 Le résultat est $(x – 2)^2 – 9$	VARIABLES x EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE x x PREND_LA_VALEUR x-2 x PREND_LA_VALEUR pow(x,2) x PREND_LA_VALEUR x-9 AFFICHER "Le nombre obtenu est " AFFICHER x FIN_ALGORITHME

Le calcul repéré peut dégager la notion d'algorithme au travers des formules donnant les coordonnées du milieu d'un segment ou de la distance entre deux points. La structure de l'algorithme et sa programmation sur calculatrice sont simples et directement exploitables.

retour sommaire

Avec une calculatrice TEXAS : INPUT A INPUT B INPUT C INPUT D $\sqrt{\ }$ ((A-B)^2+(C-D)^2) $\rightarrow$E	**Avec ALGOBOX :** VARIABLES A EST_DU_TYPE LISTE B EST_DU_TYPE LISTE D EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME AFFICHER "Entrer l'abscisse de A." LIRE A[1] AFFICHER "Entrer l'ordonnée de A." LIRE A[2] AFFICHER "Entrer l'abscisse de B." LIRE B[1] AFFICHER "Entrer l'ordonnée de B." LIRE B[2] D PREND_LA_VALEUR sqrt(pow(B[1]-A[1],2) + pow(B[2]-A[2],2)) AFFICHER "D=" AFFICHER D FIN_ALGORITHME

Cette étape permet de montrer les avantages et les inconvénients de la calculatrice : outil facilement disponible mais limité en termes de notations et de visualisation du traitement.

Ces deux exemples contribuent au traitement de plusieurs parties du programme : calcul littéral et géométrie repérée.

II Tester, valider et modifier un algorithme et introduire une instruction conditionnelle

Une proposition d'activité permettant d'introduire les coordonnées d'un vecteur : Il s'agit de tester l'algorithme ci-dessous et d'en étudier la validité :

Langage naturel : **Variables** x_A, y_A, x_B, y_B , x_C, y_C, x_D, y_D **Entrées** Saisir x_A, y_A, x_B, y_B , x_C, y_C, x_D, y_D **Traitement** Affecter à x_u la valeur (x_B - x_A) Affecter à y_u la valeur (y_B - y_A) Affecter à x_v la valeur (x_C - x_D) Affecter à y_v la valeur (y_C - y_D) **Sortie** Si x_U = x_V et y_U = y_V Alors afficher « ABCD est un parallélogramme » Sinon afficher « ABCD n'est pas un parallélogramme »	**Avec ALGOBOX :** VARIABLES xA EST_DU_TYPE NOMBRE yA EST_DU_TYPE NOMBRE xB EST_DU_TYPE NOMBRE yB EST_DU_TYPE NOMBRE xC EST_DU_TYPE NOMBRE yC EST_DU_TYPE NOMBRE xD EST_DU_TYPE NOMBRE yD EST_DU_TYPE NOMBRE xU EST_DU_TYPE NOMBRE yU EST_DU_TYPE NOMBRE xV EST_DU_TYPE NOMBRE yV EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME LIRE xA LIRE yA LIRE xB LIRE yB LIRE xC LIRE yC

retour sommaire

Cet algorithme peut ensuite être modifié pour obtenir un parallélogramme particulier. C'est l'occasion de revoir les propriétés caractéristiques des quadrilatères et de réinvestir les éléments de géométrie repérée vus précédemment.
Dans un deuxième temps, on peut programmer l'algorithme avec ALGOBOX et représenter le parallélogramme.

```
LIRE xD
LIRE yD
xU PREND_LA_VALEUR xB-xA
yU PREND_LA_VALEUR yB-yA
xV PREND_LA_VALEUR xC-xD
yV PREND_LA_VALEUR yC-yD
SI (xU==xV ET yU==yV) ALORS
DEBUT_SI
AFFICHER "ABCD est un parallélogramme"
FIN_SI
SINON
DEBUT_SINON
AFFICHER "ABCD n'est pas un parallélogramme"
FIN_SINON
TRACER_SEGMENT (xA,yA)->(xB,yB)
TRACER_SEGMENT (xB,yB)->(xC,yC)
TRACER_SEGMENT (xC,yC)->(xD,yD)
TRACER_SEGMENT (xD,yD)->(xA,yA)
FIN_ALGORITHME
```

III Construire un algorithme et introduire une instruction itérative

Après avoir étudié le lancer d'un dé sur tableur, les élèves sont capables d'élaborer un algorithme donnant la fréquence de sortie d'une issue particulière. Cette activité permet de comparer deux outils : le tableur donnant l'ensemble des lancers mais limité en nombre de lancers, l'algorithme, ayant un effet « boîte noire » mais permettant facilement d'augmenter le nombre de lancers et le nombre de dés.

Avec le tableur :

Cellules A1 à A10 000 :
=ENT(6*ALEA()+1)
Fréquence du « 5 » :
=NB.SI($A:$A;5)/NBVAL($A:$A)

Avec ALGOBOX :

```
VARIABLES
  I EST_DU_TYPE NOMBRE
  F EST_DU_TYPE NOMBRE
  D EST_DU_TYPE NOMBRE
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  POUR I ALLANT_DE 1 A 10000
    DEBUT_POUR
    D PREND_LA_VALEUR floor(6*random()+1)
    SI (D==5) ALORS
      DEBUT_SI
      N PREND_LA_VALEUR N+1
      FIN_SI
    FIN_POUR
  F PREND_LA_VALEUR N/10000
  AFFICHER "La fréquence du 5 est : "
  AFFICHER F
FIN_ALGORITHME
```

La recherche du maximum d'une fonction, pas à pas, peut être un objectif de fin d'année pour de bons élèves.

retour sommaire

Enfin, un exemple de problème ouvert difficilement résoluble autrement que par un algorithme permet d'en montrer la puissance :

> Déterminer tous les nombres entiers naturels égaux à la somme des cubes de leurs chiffres.
> Exemple : 153
> $1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$

En ce qui concerne l'évaluation, l'algorithmique peut-être l'occasion de travailler par compétences :

> Savoir analyser le fonctionnement ou le but d'un algorithme existant.
> Savoir modifier un algorithme existant pour obtenir un résultat précis.
> Savoir créer un algorithme en réponse à un problème donné.
> Mais aussi savoir modéliser, s'engager dans une recherche, communiquer, vérifier…

Comme d'autres domaines telles les probabilités ou la recherche de problèmes à prise d'initiative l'algorithmique permet de révéler des capacités chez certains élèves moins scolaires, les lacunes mathématiques étant moins pénalisantes. Elle permet aussi un travail de différenciation : des démarrages simples et des prolongations sont souvent possibles. De plus, des algorithmes différents permettent d'obtenir des résultats identiques, une recherche de l'algorithme les moins « coûteux » est un travail intéressant.
Si le démarrage par l'algorithme « naturel » nous semble incontournable, l'utilisation d'un logiciel pendant la période de construction de l'algorithme est une aide légitime et permet de valider au fur et à mesure les étapes par un processus de succès / erreurs ce qui fait souvent défaut dans la recherche sur papier des solutions d'un problème.

Voir ci-dessous, en annexe, le DM évoqué en début d'article.

Annexe : Devoir maison n°1. Programmes de calcul

Exercice 1 :

On considère les quatre programmes de calcul suivants :

Programme P_1	Programme P_2
Choisir un nombre. Multiplier ce nombre par 3. Soustraire 3 au résultat obtenu. Soustraire 8 fois le nombre choisi à la différence obtenue. Annoncer le résultat obtenu.	Choisir un nombre Multiplier son opposé par 5 Ajouter 1 au produit obtenu. Annoncer le résultat obtenu.

Programme P_3	Programme P_4
Choisir un nombre Soustraire 2 Elever cette différence au carré Soustraire 9 au résultat obtenu. Annoncer le résultat obtenu.	Choisir un nombre Elever ce nombre au carré Soustraire 5 au résultat obtenu Soustraire 4 fois le nombre choisi à la différence obtenue. Annoncer le résultat obtenu.

1.

a) Appliquez chacun des programmes précédents aux nombres 1 et – 2.
Reportez les résultats dans le tableau ci-dessous :

	avec le programme P_1	avec le programme P_2	avec le programme P_3	avec le programme P_4
Pour le nombre 1				
Pour le nombre -2				

b) Au vu des résultats, quelles conjectures pouvez-vous émettre ?

2.

a) Faites le même travail pour le nombre 2.
b) Ces résultats modifient-ils vos conjectures ?

3.

a) Donnez les résultats des quatre programmes pour le nombre 3.
b) Ces résultats modifient-ils vos conjectures ?

4. Validez ou invalidez vos conjectures.

Exercice 2 :

Voici un programme de calcul :
1) Appliquez le programme P_5 au nombre 0, à quatre nombres positifs, puis à quatre nombres négatifs.
2) Écrivez un programme de calcul qui produit, plus rapidement, le "même effet" que le programme P_5.

Programme P_5
Choisir un nombre.
Prendre son double.
Ajouter 1.
Retrancher au quadruple du nombre de départ la somme obtenue.
Annoncer le résultat obtenu.

François Morellet expose à Epinal

« François Morellet, mes images », jusqu'au 11 octobre 2010, au Musée départemental d'art ancien et contemporain, 1 place Lagarde, Épinal.
(http://www.vosges.fr/cg88/Morellet/accueil.html)
Sa biographie et ses œuvres sont sur Wikipedia.

Voir une activité en classe (cycle 2, école Olivier Paulat, Champs-sur-Marne) à partir d'une de ses œuvres sur :

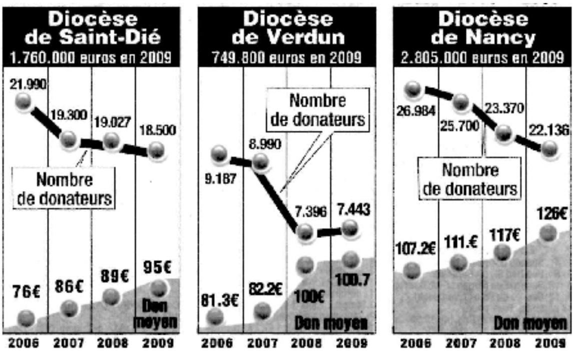
http://ww3.ac-creteil.fr/Ecoles/77/opaulatchamps/cpbangotartsplastiques.html

MATH & MEDIA

Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.
Envois par la poste à Jacques VERDIER (18 rue du Pont de Pierre, 54130 SAINT-MAX) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr .
Les archives de cette rubrique sont disponibles su notre site à l'adresse :
http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=math_et_media

Denier du culte

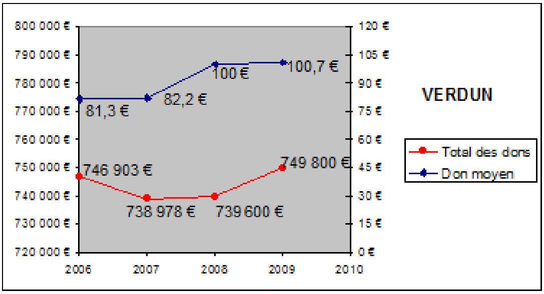
L'image ci-dessous est extraite d'un article de l'Est Républicain du 28 mars dernier, repéré par François. L'illustration comportait en tout six graphiques (les trois que nous avons supprimés ici concernaient des diocèses de Franche-Comté).



François faisait plusieurs remarques sur ces graphiques : il est très difficile de comparer les diocèses, les unités utilisées n'étant pas les mêmes d'un graphique à l'autre, ni pour le nombre de donateurs, ni pour le montant des dons (par exemple 107,2 à Nancy en 2006 est « plus bas » que 100,7 à Verdun en 2009). Par ailleurs, on note une disparité dans les écritures des nombres : arrondis à l'euro ou au décime, avec un point décimal ou une virgule (c'était le cas à Saint-Claude), avec ou sans le symbole monétaire…
On pourrait aussi discuter sur le choix des données représentées : il est flagrant ici qu'on a voulu montrer que le nombre de donateurs diminuait avec le temps, bien que le don moyen augmentât. Mais qu'en est-il du montant total des dons ? Est-il en hausse ou en baisse ?

A partir des données ci-dessus, nous avons fait les calculs pour Verdun ; voici le résultat :

retour sommaire



Conclusion : pas d'inquiétude pour l'Eglise, les dons repartent à la hausse !

IMMATRICULATIONS

Souvenez-vous : c'était dans le Petit Vert n° 52 de décembre 1997 ; le premier article de la nouvelle rubrique « Math & Media » : un commentaire, de Bernard Parzysz, d'un article du Républicain Lorrain : « ***La Moselle passe au triple A : trois lettres pour 13,8 millions de véhicules*** ».

Depuis, de l'eau a passé sous les ponts (de la Moselle et d'ailleurs). Nous avons de « nouvelles » immatriculations. Et l'on vient de terminer la « première série », celle des « A » : on est passé récemment de AZ-999-ZZ à BA-001-AA.

Et voici un petit exercice de dénombrement (facile) pour nos élèves : combien de voitures immatriculées entre AA-001-AA et AZ-999-ZZ (inclus) ? On rappelle que seules 23 lettres sont utilisées dans l'alphabet : le O et le I sont exclus, pour ne pas les confondre avec les chiffres 0 et 1, et le U pour ne pas le confondre avec le V (vestige du temps où, avec les imprimantes à aiguilles, ils se ressemblaient fort sur les cartes grises) ; par ailleurs, le couple de lettres « SS » n'est pas attribué. On a trouvé 12 131 856. Et vous ?

Tous les médias ayant montré la plaque AA-001-AA attribuée à la nouvelle Mazda 6, nous illustrons cet article par la seconde plaque, sur une Yamaha ! Et le premier lecteur qui voit la plaque AB-345-CD ci-dessus gagne 345 ans d'abonnement gratuit au Petit Vert !

retour sommaire

Paul le poulpe, 1 chance sur 256 ?

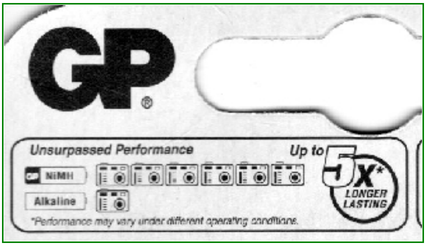
Souvenez-vous, c'était au début de l'été… On a beaucoup parlé des pronostics de Paul le poulpe (pensionnaire au grand aquarium d'Oberhausen), qui avait prévu de façon correcte les gagnants de huit matchs lors de la coupe du monde : les 3 matchs de la phase de groupe où l'Allemagne était impliquée, puis les huitième, quart et demi-finales, la « petite finale » (où l'Allemagne était aussi impliquée) et enfin la finale opposant l'Espagne aux Pays-Bas.
Si l'on admet que le poulpe choisissait au hasard la « boîte » où figurait le drapeau du vainqueur, il n'avait qu'**une chance sur 256** de réussir cet exploit ($p \approx 0{,}039$).
Ce même poulpe avait déjà été utilisé lors de l'Euro 2008, où il avait donné 4 bons résultats sur 6 : en utilisant la loi binomiale, la probabilité de donner au moins quatre bons résultats sur six à pile ou face est d'environ 0,31. En deux ans, Paul avait fait de nets progrès !

Mais une question se pose : l'expérience n'était-elle pas biaisée ? Pascal Coutant, biologiste et directeur de l'Aquarium de La Rochelle affirme pourtant : « *C'est le hasard complet qui guide ses choix* ». Cependant, dans le Figaro du 12 juillet, on peut lire : « *Les boîtes sont recouvertes de drapeaux différents, qui pourraient, sait-on jamais, attirer plus ou moins le poulpe. (…) On serait beaucoup plus vigilant si on menait l'expérience dans un cadre scientifique* ».
En effet, sur les 6 matchs testés en 2008, le poulpe a toujours choisi le drapeau allemand (commettant ainsi deux erreurs : Croatie-Allemagne et Espagne-Allemagne). Cette année, pour la coupe du monde, il a choisi le drapeau allemand 5 fois sur 7. Et sur l'ensemble des 14 matchs testés, il a toujours choisi un drapeau à trois bandes horizontales (11 fois l'allemand, 2 fois l'espagnol et 1 fois le serbe). On sait, d'après l'encyclopédie, que le poulpe n'a pas la vision des couleurs. Mais il peut reconnaître les formes… peut-être aurait-t-il un faible pour les drapeaux à trois bandes horizontales (c'est ce qu'affirmerait Vyacheslav Bisikov, un biologiste russe) ?
On ne pourra malheureusement pas confirmer ou infirmer les « dons de voyance » de Paul, l'espérance de vie d'un poulpe étant de l'ordre de trois ans (Est Républicain du 10/07/10) !!!

Sources : http://www.arines.org/2010/07/paul-octopus.html
http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Paul_(Krake)&oldid=
http://www.larousse.fr/encyclopedie/vie-sauvage/pieuvre_ou_poulpe/184019

retour sommaire

5 × 1 = 6 !



Découvert sur un emballage de piles rechargeables.
Ceci pour visualiser le fait que les piles rechargeables de marque GP durent au moins 5 fois plus longtemps que des piles alcalines. Mais sur le schéma, cela donne six appareils photo au lieu de un… 5 fois plus ou 5 de plus ?

Rubik's cube : un record…

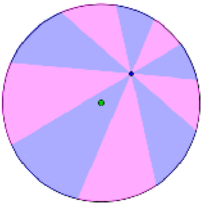
Lu dans Libération du 23/08/10

Il aura fallu trente ans, une équipe de chercheurs internationaux et des milliards de combinaisons testées. Pourquoi ? Trouver un vaccin universel ? Guérir la faim dans le monde ? Non. Pour résoudre enfin un casse-tête géométrique qui hante des millions de foyers : celui du Rubik's Cube.
(…)
Pour les scientifiques, l'énigme ne reposait pas dans la reconstitution en elle-même, mais dans le nombre minimal de rotations à effectuer pour reconstituer le cube, quelle que soit sa position de départ. Les combinaisons possibles se montant très précisément à 43 252 003 274 489 856 000 (plus de 43 milliards de milliards), le défi était de taille.
Mais il a été relevé par une équipe internationale de chercheurs, dont Morley Davidson, de l'Université Kent (Ohio). Les mathématiciens, ingénieurs et programmeurs mobilisés ont délivré la réponse à cette question cruciale : **en 20 mouvements maximum tout Rubik's Cube peut être résolu**.
Par le passé, plusieurs chercheurs s'étaient déjà arraché les tifs sur le « nombre de dieu », petit surnom donné à la clé du mystère. En 1981, un mathématicien américain avait démontré que 52 tours de poignets sont suffisants. Patatras : onze ans plus tard, un confrère néerlandais améliorait ce score en le faisant baisser à 42 mouvements. Un résultat incontesté jusqu'en 2008, quand deux Américains affirmaient que seules 22 rotations sont nécessaires.
Comment la nouvelle équipe a pu résoudre ce casse-tête ? Calculer toutes les combinaisons étant impossible, les chercheurs les ont réduites en regroupant toutes celles qui étaient similaires. Ils les ont ensuite organisées en 56 millions de groupes de 20 milliards de combinaisons. Des ordinateurs surpuissants ont fait le tri final. Simple, non ?

retour sommaire

Connaissez-vous le théorème de la pizza ?

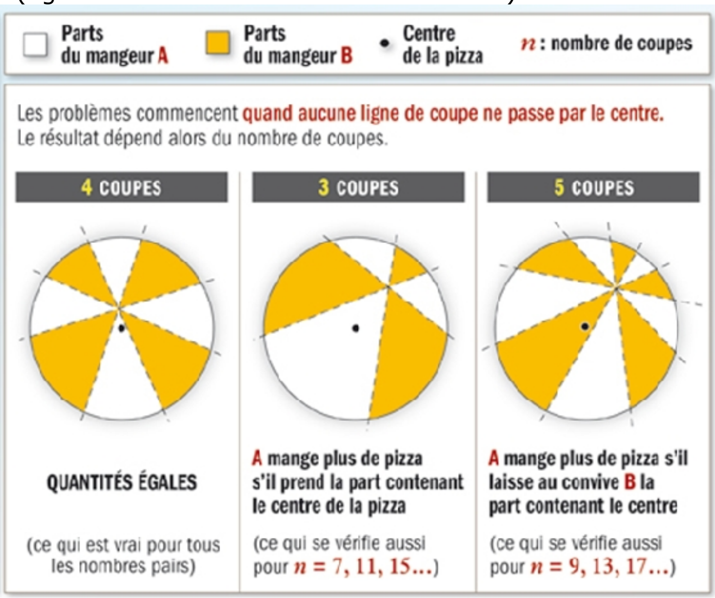
Source de l'info : Courrier International, n°1002, 14 janvier 2010.
http://www.courrierinternational.com/article/2010/01/14/connaissez-vous-le-theoreme-de-la-pizza



L'énoncé du théorème est le suivant : deux convives découpent une pizza de manière excentrée en $2n$ parts de même angle (avec n lignes de coupe) ; on effectue le partage en alternant les parts pour chacun (ici, bleu et rose).

Question : lequel des deux aura le plus de pizza à manger ?

Mathematics magazine (1994, vol. 67, p. 304) avait lancé ce « défi ». Le problème est relativement facile lorsque n est pair, mais ardu si n est impair. Ce n'est qu'au bout de onze ans de recherches que Mabry et Deirmann ont réussi à démontrer le théorème illustré ci-dessous (figure extraite du Courrier International).



En savoir plus :
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2010/02/07/16827166.html
La preuve donnée (en anglais) par Mabry et Deiermann :
http://www.lsus.edu/sc/math/rmabry/pizza/Pizza_Conjecture.pdf

retour sommaire

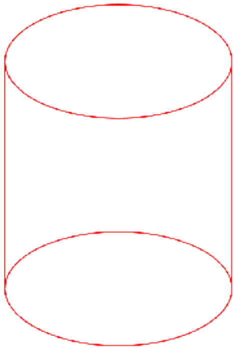
DANS NOS CLASSES

Cubes et cylindres en perspective

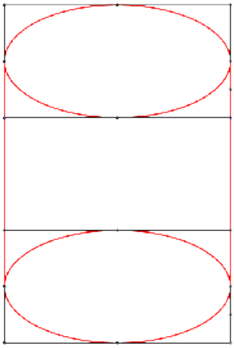
par Jacques Verdier

Cet article est une suite à l'article « ***S'il vous plait, dessine-moi un (beau) cube !*** » paru dans le Petit Vert n°101 de juin.

Voici un magnifique cylindre, comme on les représente habituellement ➔

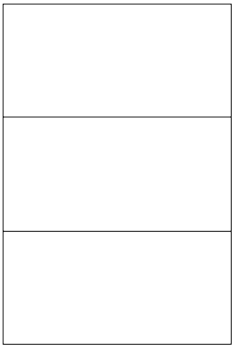


Il est vu en perspective « cavalière », ses faces supérieures et inférieures sont représentées par des ellipses, dont les axes sont manifestement parallèles aux bords de la feuille de dessin.



🡠 On peut donc imaginer que ce cylindre est « inscrit » dans un pavé droit, que l'on peut dessiner ainsi

Si on mesure, on constate que ce pavé est un cube. Voici ce cube seul, sans le cylindre qu'il contient ➔

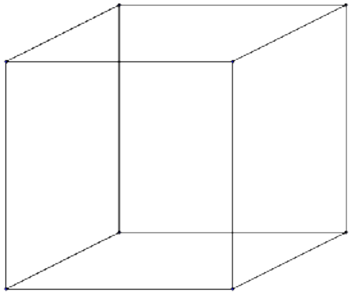


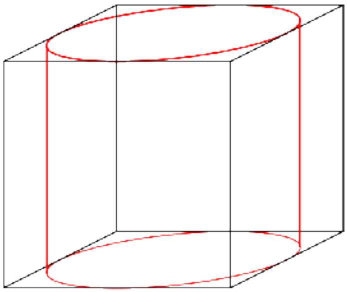
Bizarre… bizarre… jamais on n'a représenté ainsi un cube en perspective…

« *Ceci n'est pas un cube* », dirait Magritte !

retour sommaire

Un cube en perspective, on le verrait plutôt comme ça ➔

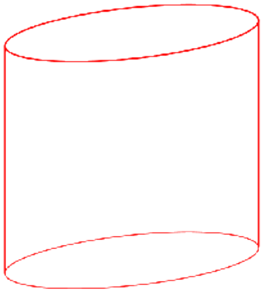




🡐 Alors, « plongeons-y » notre cylindre.

On « voit » que l'ellipse est toujours tangente aux milieux des côtés de la face supérieure.

Effaçons maintenant le cube pour ne garder que le cylindre ➔



On constate que ça ne correspond pas du tout au premier dessin : le grand et le petit axe de l'ellipse ne sont plus parallèles aux bords de la feuille comme ils l'étaient sur la figure 1.

Conclusion :
Lorsque l'on veut dessiner à la fois un cylindre et un cube avec le même « angle de vue », il est difficile de dessiner le cylindre.

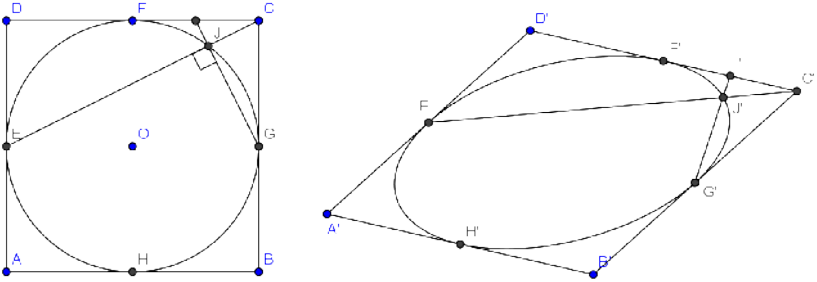
Ces figures ont été réalisées avec GeoGebra.
GeoGebra permet de dessiner une ellipse quand on en connait deux foyers et un point courant. Cela ne peut nous être d'aucune utilité ici.

Pour les ellipses que l'on veut tracer, on en connaît quatre points (les milieux des côtés du parallélogramme représentant le carré en perspective), et on sait que l'ellipse doit être tangente en ces points aux côtés.

Mais ça, GeoGebra ne sait pas faire.

Par contre GeoGebra sait dessiner une ellipse quand on connaît 5 de ses points (toute conique est définie par la donnée de 5 de ses points). Comment trouver un cinquième point ?

On utilise la petite « astuce » suivante (une figure vaut mieux qu'un long discours) :

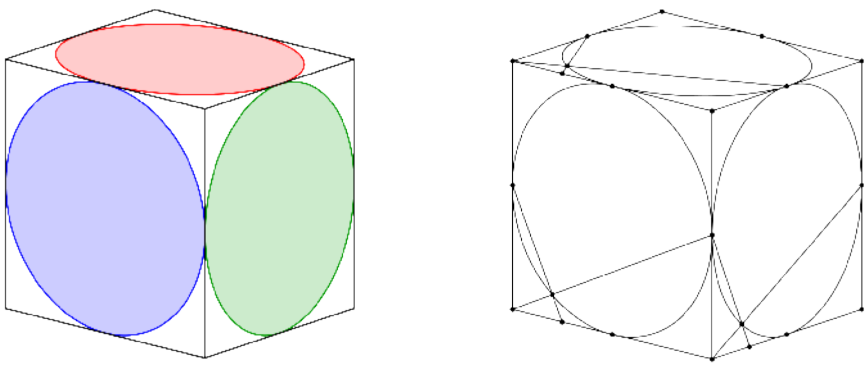


Dans le carré de gauche, E, F, G et H sont les milieux des côtés, I est le milieu de FC. On démontre aisément que IG est perpendiculaire à EC, donc leur intersection J est sur le cercle.
Vu en perspective, les milieux restent les milieux, le cercle est devenu une ellipse, et J appartient à cette ellipse : c'est notre cinquième point.
Il suffit ensuite de « gommer » les segments EC et IG qui ont servi à la construction…

N.B. 1 : La « perpendicularité » n'est évidemment pas conservée.

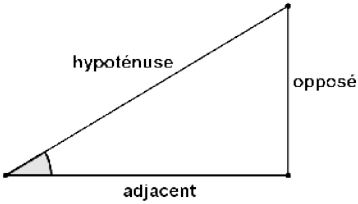
N.B. 2 : Si on veut tracer l'ellipse à main levée, ce procédé nous donne 8 points en plus des quatre milieux des côtés : cela permet un tracé d'excellente qualité.

Et voici, vu en perspective, un cube avec 3 cercles inscrits dans ses 3 faces (avec les détails de la construction) :



SOHCAHTOA ???

SOHCAHTOA, késako ? Juste un moyen mnémotechnique pour se souvenir des définitions du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle (dans le triangle rectangle), se basant sur cette figure :



On sait que $\sin(\alpha) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{hypoténuse}}$, $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{adjacent}}{\text{hypoténuse}}$, $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$

Avec les seules initiales : $S = \dfrac{O}{H}, C = \dfrac{A}{H}, T = \dfrac{O}{A}$, que l'on peut résumer par la mot « magique » SOHCAHTOA. Je n'avais jamais entendu parler - dans toute ma longue carrière - de cette formule magique, qui m'a été révélée il y a peu par la copine de mon fils, qui elle-même le tenait d'un copain de classe en troisième !

Mais cela figure dans le site Hatier de préparation au concours CRPE (recrutement des Professeurs d'École) 2010 :

$\cos \hat{C} = \dfrac{AC}{AB}$; $\sin \hat{C} = \dfrac{AB}{BC}$; $\tan \hat{C} = \dfrac{AB}{AC}$

REMARQUES :

(1) La formule SOHCAHTOA permet de retenir les formules ci – dessus (S : sinus ; O : opposé ; H = hypoténuse, . . .)

Sur le net, on trouve aussi **CAHSOHTOA**, qui se prononce « **casse-toi** » (avé l'assent de Marseille ou celui du célèbre visiteur du salon 2008 de l'agriculture…) !!!

Et en anglais : "**T**he **O**ld **A**rmy **C**olonel **A**nd **H**is **S**on **O**ften **H**iccup" (qui donne dans l'ordre – mais de façon hoquetante - la tangente, le cosinus et le sinus).
Ou encore **S**ome **O**ld **H**orses **C**hew **A**pples **H**appily **T**hroughout **O**ld **A**ge ; **S**ailors **O**ften **H**ave **C**urly **A**uburn **H**air **T**ill **O**ld **A**ge.
Sans parler de "**S**tudying **O**ur **H**omework **C**an **A**lways **H**elp **T**o **O**btain **A**chievement". Mais ça, c'est une phrase de prof, pas d'élève !

SOHCAHTOA est également le nom d'un groupe de pop aux influences folk, à écouter sur : http://www.myspace.com/sokatoa .

Jacques

VU SUR LA TOILE

C	A	R
R	É	S
	M	A
G	I	Q
U	E	S

À l'allure parfois austères, les carrés magiques laissent pourtant une grande place à l'imagination de celui qui les compose et de l'élève qui cherche à les compléter. Les élans de cette imagination peuvent mener dans des voies inattendues, comme nous allons le constater.

La théorie des carrés magiques donne l'occasion d'exercices assez variés et la découverte de propriétés qui s'avèrent parfois difficiles. Pour un panorama de ces aspects théoriques, on se rendra à l'adresse suivante : http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/CarreMag/CMIntro.htm
Le site renvoie, dans ses liens, à d'autres références qui seront évoquées ci-après, dont celle-ci où l'on peut trouver un tableur de construction de carrés : http://rene.albert6.pagesperso-orange.fr/Bridge/carre.htm.

Jean-Luc Romet (alias Rometus) propose de compléter, en toute interactivité, des séries de carrés magiques à la difficulté croissante : http://www.maths-rometus.org/mathematiques/maths-et-jeux/carres-magiques.asp. Ce sera l'occasion de visiter un site assez riche en références et qui se veut ouvert à tous.

Ouvert sur le monde des arts et également très illustré, le site de « Kandaki » vaut le détour sinon le voyage : http://www.kandaki.com/CM-Index.htm. Il propose une bonne synthèse (symbiose ?) entre les domaines mathématique et artistique sur une thématique autour du carré (magique en particulier). Je ne manquerai bien sûr pas de signaler la bonne table que recommande Fathi (merci à lui !) et qui m'a donné le sujet de ce billet : http://www.artpens.perso.tn/textes/parent.htm.

Pour terminer ce petit circuit, on s'arrêtera chez Bibmath (http://www.bibmath.net) qui donne une approche des carrés magiques à la limite de l'ésotérisme (le mot « magique » fut-il bien choisi ?).

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

Le semeur (le laboureur)

à la charrue

retient

par son travail (son oeuvre)

les roues

gilles.waehren@wanadoo.fr

Solution du problème n° 102

proposé par Jacques CHONÉ

- Montrer que l'application *f* de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(a,b) = \dfrac{(a+b)(a+b+1)}{2} + a$ est bijective. Exprimer, pour $x \in \mathbb{N}$, $f^{-1}(x)$ (et en particulier $f^{-1}(2010)$).
- Donner de même une application bijective f_3 de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ en précisant $f_3^{-1}(x)$ (et en particulier $f_3^{-1}(2010)$).
- Généraliser encore.

Solution de l'auteur.

1. Numérotons les éléments de $\mathbb{N}^2$ suivant leur rang sur le « diagonales nord-est vers sud-ouest » (↙) successives comme dans le tableau ci-contre.

a\b	0	1	2	3	4	5
0	0	1	3	6	10	15
1	2	4	7	11	16	
2	5	8	12	17		
3	9	13	18			
4	14	19				
5	20					

Soit *g*(*a*,*b*) le numéro de (*a*,*b*) : on a par exemple *g*(3,1) = 13. On a, pour tout $b \in \mathbb{N}^2$: $g(0,b) = 1 + 2 + ... + b = \dfrac{b(b+1)}{2} = \dbinom{b+1}{2} = t_b$ (*b*-ième nombre triangulaire).

Or, pour $a \in [\![1,b]\!]$, *g*(*a*,*b*) = *g*(*a*-1,*b*+1)+1 d'où, par récurrence finie, *g*(*a*,*b*) = *g*(0,*b*+*a*) + *a* = *f*(*a*,*b*). Conclusion : *g* = *f* et *f* est donc bijective.

Notons que *a*+*b* est le numéro (à partir de 0) de la diagonale contenant (*a*,*b*).

Soit $x \in \mathbb{N}$ et $(a,b) = f^{-1}(x)$ c'est-à-dire la position de *x* dans le tableau. La valeur *n* = *a* + *b* est le plus grand nombre entier tel que $\dfrac{n(n+1)}{2} \leq x$, c'est-à-dire la partie entière de la solution de l'équation d'inconnue *X* : $X^2 + X - 2x = 0$; donc $n = a + b = \langle x \rangle$ en notant $\langle x \rangle = \left\lfloor \dfrac{-1+\sqrt{1+8x}}{2} \right\rfloor$.

On en déduit $a = x - \dbinom{\langle x \rangle + 1}{2}$ et $b = \langle x \rangle - a = \langle x \rangle + \dbinom{\langle x \rangle + 1}{2} - x = \dfrac{\langle x \rangle(\langle x \rangle + 3)}{2} - x$;

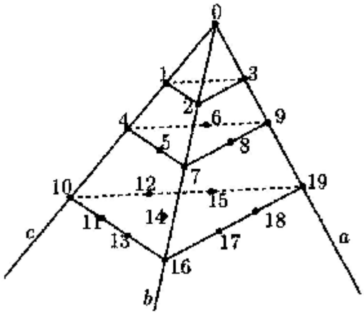
d'où $\boxed{f^{-1}(x) = \left(x - \dbinom{\langle x \rangle + 1}{2}, \dfrac{\langle x \rangle(\langle x \rangle + 3)}{2} - x \right)}$.

retour sommaire

Par exemple $\langle 2010\rangle = \left\lfloor \dfrac{1+\sqrt{16081}}{2} \right\rfloor = 62$; $\dbinom{63}{2} = 1953$; $\dfrac{63\times 65}{2} = 2015$:

$f^{-1}(2010 == (1010-1953, 2015-2010)$; Vérification : $f(37,5) = \dbinom{63}{2} + 57 = 2010$.

2. On notera dorénavant f_2 l'application étudiée au 1. On numérote maintenant les éléments (a, b, c) de $\mathbb{N}^3$ suivant leur rang dans les plans successifs $a + b + c = n$, $n \in \mathbb{N}$, puis dans chacun de ces plans de la même façon qu'au **§1** : voir figure ci-contre.
Soit $f_3(a,b,c)$ le rang de (a,b,c). le nombre d'éléments de (a,b,c) tels que $a + b + c < n$ est $f_3(0,0,n) = \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} \dbinom{k+1}{2} = \dbinom{n+2}{3}$, n-ième nombre tétraédrique.
On en déduit que $f_3(a,b,c) = f_2(0,0,a+b+c) + f_2(a,b)$ est une application bijective de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$ et peut être définie par :



$$\boxed{f_3(a,b,c) = \binom{a+b+c+2}{3} + \binom{a+b+1}{2} + \binom{a}{1}}.$$

Soit $x \in \mathbb{N}$. Pour déterminer $f_3^{-1}(x) = (a,b,c)$, comme au **§1**, on détermine d'abord $n = a + b + c$ comme la partie entière de la solution réelle de l'équation en X : $(X+2)(X+1)X = 6x$; on obtient avec la formule classique $a + b + c = n$ avec

$$n = \left\lfloor \frac{1}{3}\sqrt[3]{91x + 3\sqrt{-3+729x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{91x+3\sqrt{-3+729x^2}}} - 1 \right\rfloor .$$

On détermine ensuite $m = a+b$ comme la partie entière de la solution positive de l'équation en X : $X(X+1) = 2\left(x - \dbinom{n+2}{2}\right)$, etc.

Exemple : déterminons $f_3^{-1}(2010) = (a,b,c)$. La solution réelle de $(X+2)(X+1)X = 6\times 2010$ est 21,94… donc $a + b + c = 21$; la solution réelle positive de l'équation $X(X+1) = 2\left(2010 - \dbinom{23}{3}\right)$ est 21,36… ; donc $a + b = 21$; et on a $a = 2010 - \dbinom{23}{3} - \dbinom{22}{2} = 8$. On en déduite que $b = 21 – 8 = 13$ et $c = 21 – 13 – 8 = 0$;

donc $\boxed{f_3^{-1}(2010) = (8, 13, 0)}$.

retour sommaire

On vérifie que $f_3(8,13,0) = \binom{13}{3} + \binom{22}{2} + \binom{8}{1} = 2010$.

3. On généralise en notant que pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$ définie par :

$$f_n(a_1,\ldots,a_n) = \binom{a_1 + \ldots + a_n + n - 1}{n} + \binom{a_1 + \ldots + a_{n-1} + n - 2}{n-1} + \ldots + \binom{a_1}{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{k - 1 + \sum_{i=1}^{k} a_i}{k}$$

est bijective

Par la même méthode que ci-dessus, on trouve à l'aide d'un logiciel de calcul (voir ci-dessous en Maple), par exemple que $f_4^{-1}(2010) = (4,2,3,4)$.

```
>floor(evalf(solve(x*(x+1)*(x+2)*(x+3)=24*2010))[2]);
                                  13
> floor(evalf(solve(x*(x+1)*(x+2)=6*(2010-binomial(16,4))))
[1]);
                                  9
>floor(evalf(solve(x*(x+1)=2*(2010-binomial(16,4)-
binomial(11,3))))[1]);
                                  6
> 2010-binomial(16,4)-binomial(11,3)-binomial(7,2);
                                  4
> solve({a+b+c+d=13,a+b+c=9,a+b=6,a=4});
                    {a = 4, d = 4, c - 3, b = 2}
>f(4):=(a,b,c,d)->binomial(a+b+c+d+3,4)+binomial(a+b+c+2,3)
+binomial(a+b+1,2)+binomial(a,1);
>f(4)(4,2,3,4);
                                 2010
```

Problème du trimestre n°103

(proposé par Loïc Terrier)

Il y a quelque temps, j'ai reçu un diaporama par mail, qui contenait toutes sortes de questions plus ou moins mathématiques, dont celle-ci :

Deux enfants et un âne font une promenade. Le soir tombe, ils décident de rentrer chez eux. C'est à 6 km. La fille marche à 6 km/h, le garçon à 8 km/h et l'âne à 12 km/h. L'âne peut porter un enfant. Quel est le temps minimum nécessaire pour qu'ils rentrent chez eux ?

- La réponse donnée en solution dans le diaporama était 45 minutes... Pouvez-vous proposer mieux, en prêtant à l'âne une certaine intelligence ?
- La variante suivante peut être très difficile, ou pas, selon la méthode utilisée !
  Cette fois, il y a Albert, Bettie et Celestin, toujours avec leur âne.
  Albert va à 5 km/h seul, 9 km/h sur l'âne. Bettie va à 6 km/h seule, 11 km/h sur l'âne. Celestin va à 7 km/h seul, 10 km/h sur l'âne.
  L'âne seul va à 12 km/h. Ils ont 7 km à parcourir...

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail.

CARNET

Nous avons la joie de vous annoncer la naissance de LOLA, le 25 août dernier, fille de Céline Coursimault, notre présidente Régionale, et de son mari Jérôme Barletta. Nos meilleurs vœux aux heureux parents.

Par ailleurs, Isabelle Jacques, qui faisait partie de notre Comité régional, est désormais IPR en poste dans l'Académie de Versailles. Elle est également, depuis peu, l'heureuse grand-mère d'un petit Ilyas.

retour sommaire

Médailles 2010


Mathématiques L'équivalent du prix Nobel a été décerné à des chercheurs de Lyon et Paris de moins de 40 ans

Deux Français reçoivent la médaille Field

Toute la presse en a parlé, comme en témoigne - par exemple – ce titre de l'Est Républicain du 20/08 (avec cependant l'oubli du **s** final de Fields, John-Charles, 1863-1932), alors pourquoi pas le Petit Vert ?

Quatre mathématiciens ont reçu cette médaille Fields en 2010 : Cédric Villani, professeur à l'École normale supérieure de Lyon et directeur de l'Institut Henri Poincaré à Paris (CNRS / UPMC) ; Ngo Bao Chau, qui enseignait à Paris-Sud, maintenant à l'université de Chicago ; Elon Lindenstrauss, professeur à l'Université Hébraïque de Jérusalem ; et Stanislav Smirnov, de l'Université de Genève.

Vous trouverez sur le net, grâce à votre moteur de recherche préféré, pratiquement tout ce que vous voulez savoir sur ces quatre lauréats et leurs travaux. Nous n'en dirons pas plus ici.
Signalons cependant que Cédric Villani était venu à Nancy en avril de cette année, invité par El-Haj Laamri, pour une très intéressante conférence : « Peut-on prédire mathématiquement l'avenir du système solaire ? ». Voici l'adresse de sa page perso : http://www.umpa.ens-lyon.fr/~cvillani/ .

Par ailleurs, un troisième français, Yves Meyer, 71 ans, a été récompensé, par le prix Gauss, « pour ses contributions fondamentales à la théorie des nombres » et « son rôle de pivot dans le développement de la théorie des ondelettes », révolutionnant le traitement du signal et la statistique. Voir, par exemple, sur le site du CNRS :
http://images.math.cnrs.fr/Yves-Meyer-laureat-2010-du-prix.html

retour sommaire

DES NOUVELLES DU RALLYE

Lu dans Vosges Matin du 28/06/2010

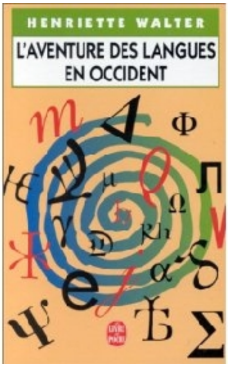
Les élèves de 3e 3 sur le podium lorrain.

Derrière une classe de Nancy et une autre de Metz, les élèves darnéens se sont imposés sur la troisième marche du podium pour le rallye mathématique.

Principale du collège, Mme Chopat vient d'avoir l'agréable surprise de recevoir dans l'établissement M. Drouin, l'un des responsables lorrains de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public, porteur d'une très bonne nouvelle. Les trois classes de troisième ont en effet participé au « rallye mathématiques » organisé sur le plan national pour les classes de 3e et de seconde. Et la classe darnéenne de 3e 3 a été classée troisième sur !e plan lorrain, derrière une classe de Metz et une de Nancy. *« C'est une très bonne nouvelle qu'une classe rurale soit arrivée à une telle performance, à savoir passer au classement final devant des classes de localités beaucoup plus importantes que Darney ! », a* déclaré le visiteur, en plus, bien sûr, de ses félicitations chaleureuses à la quinzaine d'élèves concernés qui ne cachaient pas leurs sourires... Les deux professeurs de maths de cette classe, Cédric Dizien et Eve Didier, avaient eux aussi de quoi être fiers du travail vraiment sérieux effectué par tous. Pour réaliser les dix exercices imposés de cette épreuve, la classe s'est divisée en petits groupes qui se retrouvaient ensuite pour comparer leurs résultats. Et puis, il a fallu résoudre aussi ce fameux puzzle. « *On l'a découvert au bout de deux heures, c'était limite...* » déclarent les filles, très heureuses d'avoir pu obtenir finalement le nombre 2010 recherché. Enfin, il a fallu résoudre la question subsidiaire finale tout aussi ardue et destinée à départager les ex-æquo éventuels. *« Vous pourrez retenter ce rallye l'an prochain en classe de seconde : elles participent également à l'épreuve* », a conclu M. Drouin. Mais se retrouveront-ils ensemble ? C'est moins sûr car les objectifs des uns et des autres apparaissent déjà dans le sondage qu'a effectué M. Drouin : 8 sur 15 par exemple veulent passer un Bac C. Après la remise de livres et de diplômes, tous les participants ont trinqué à ce succès qui fait bien sûr honneur au collège tout entier.

retour sommaire

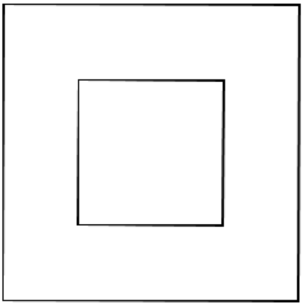
LU POUR VOUS :



Les vacances d'été sont propices aux lectures. Je viens de me régaler avec la lecture de « L'aventure des langues en Occident » d'Henriette Walter (Le Livre de Poche). L'auteur nous donne des pistes pour nous faire comprendre comment les langues que nous parlons, que nous apprenons à l'école ou que nous entendons lors de nos pérégrinations se sont construites et ont voyagé. Le lecteur y trouvera des compléments au récent article de Jacques (Petit Vert 101) à propos des noms des nombres en gallois et en danois...

François

DÉFI COLLÈGE



Chaque trimestre le Petit Vert vous proposera un « DÉFI » destiné à vos élèves de collèges et/ou de lycée. Envoyez toute solution originale de vos élèves, ainsi que toute nouvelle proposition de défi, à Michel RUIBA, 31 rue Auguste Prost, 57000-METZ, michel.ruiba@ecopains.net.

Premier défi:

Voici la vue de face, qui est aussi la vue du dessus, d'un solide.
Dessine une vue de côté de ce solide ou encore mieux, une perspective cavalière.