Questions préalables

Quels carrés de côté un entier multiple de 3 sont recouvrables par des « Petits L » ?

Les carrés de côté un entier non multiple de 3 semblent laisser une case inoccupée lors du recouvrement par des « Petits L ». Est-ce toujours vrai ?

Des éléments de réponse à ces questions sont fournies en fin de document.

Repéré sur la Toile

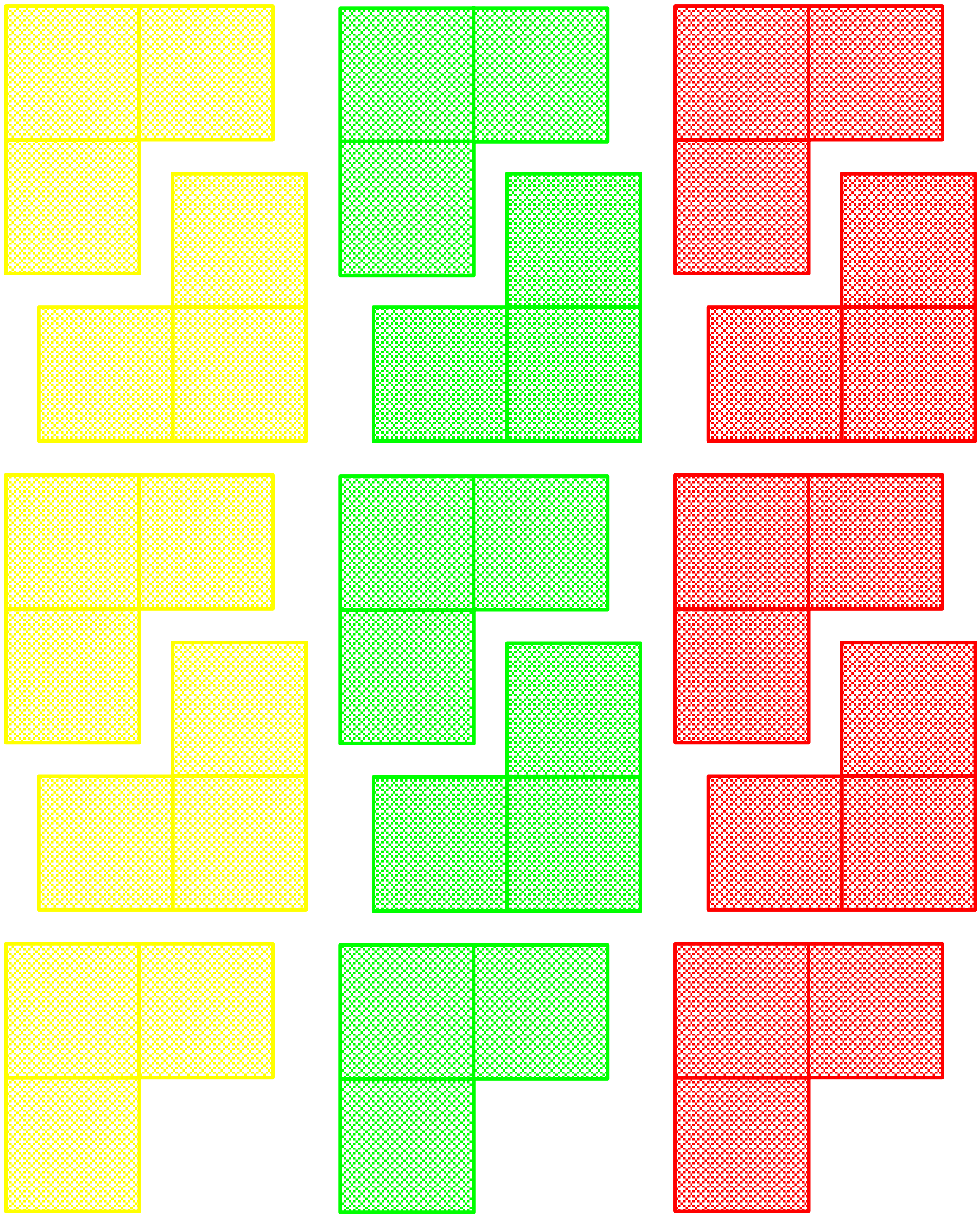
http://www.ilemaths.net/forum-sujet-539349.html
Voici l'exercice proposé sur ce forum.

> *Le jeu se joue sur une grille de 8x8 cases.*
> *Le joueur A pose un carré sur une case, où il veut.*
> *Le joueur B doit ensuite recouvrir les 63 cases restantes avec 21 pièces de 3 cases en forme de L. S'il y arrive, il gagne. Sinon c'est le joueur B qui gagne.*
> *Quel joueur a une stratégie gagnante ? (Une démonstration est attendue).*

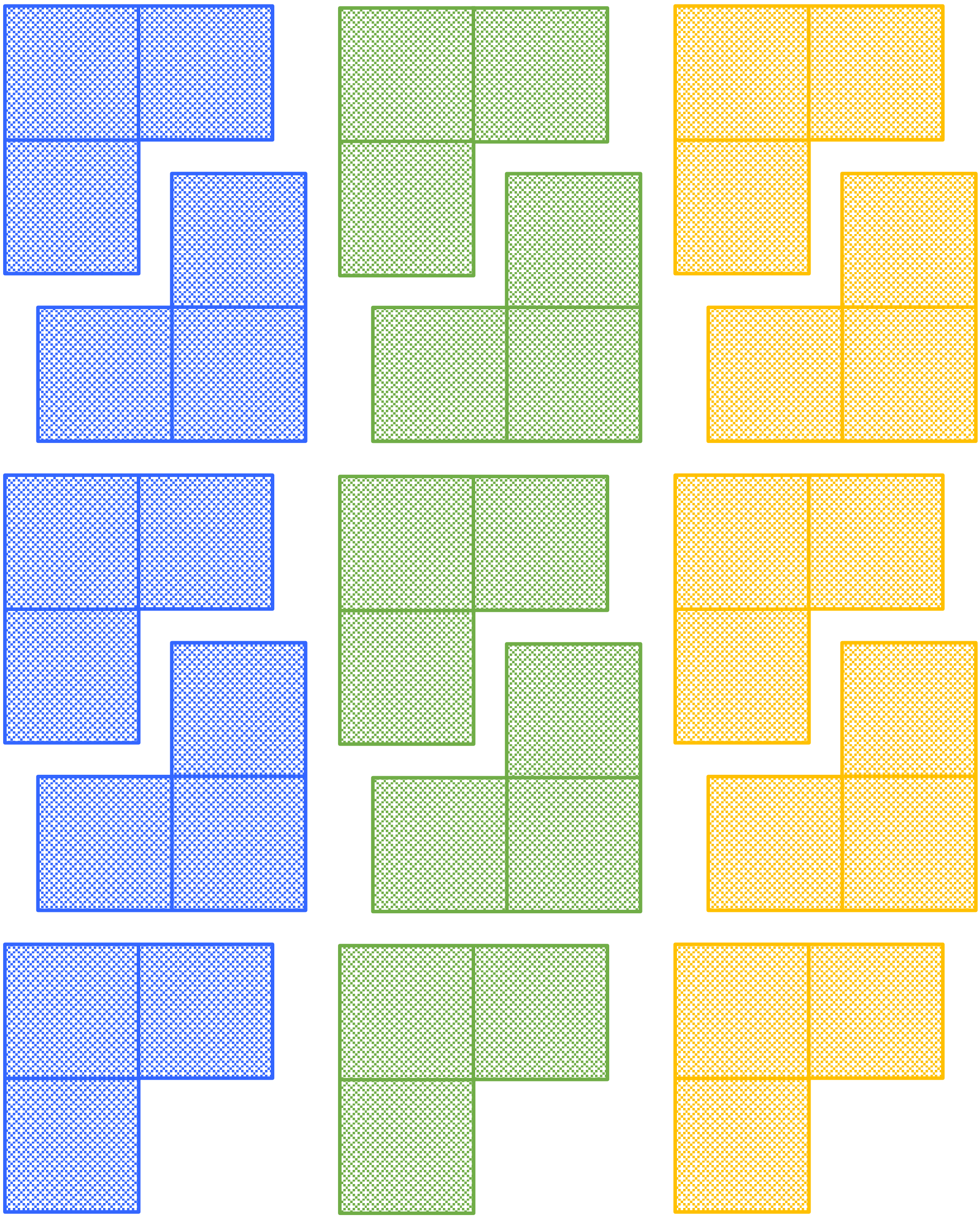
Une réponse a été postée montrant les recouvrements selon les 10 placements envisageables du carré posé.
Les pièces posées sont de nombreuses couleurs non réparties équitablement.

Dans ce document, sont examinés les cas des carrés 4x4, 5x5, 7x7 et 8x8. Des répartitions équitables des couleurs de pièces y sont envisagées.

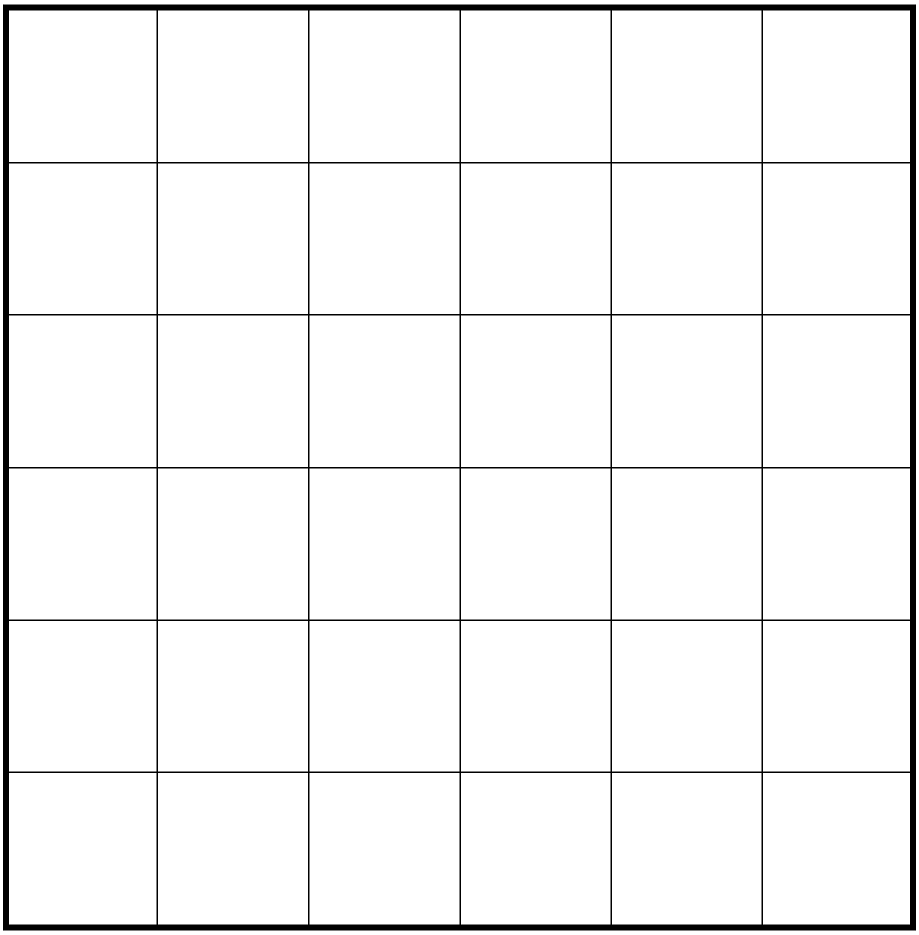
Des pièces à dupliquer puis découper



Des pièces à dupliquer puis découper



Un premier carré à recouvrir



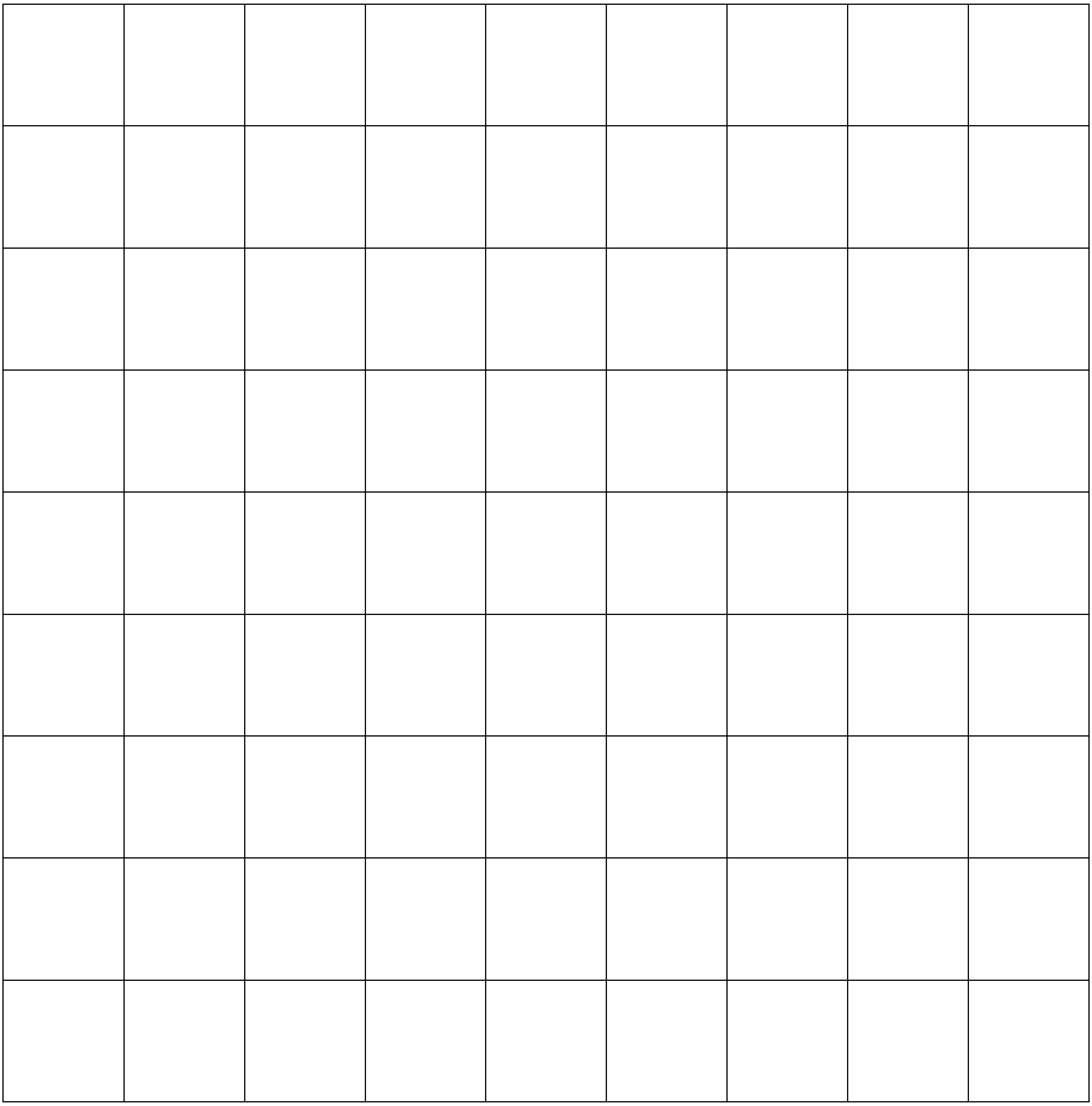
Étape n°1 : Recouvre le carré avec des « Petits L ».

Étape n°2 : Recouvre le carré de telle sorte que deux « Petits L » de même couleur ne se touchent au maximum que par un sommet.

Étape n°3 : En gardant la contrainte de l'étape n°2, utilise le moins possible de couleurs de « Petits L ».

Étape n°4 : Fait de plus qu'il y ait le même nombre de « Petits L » de chaque couleur.

Un deuxième carré à recouvrir



Étape n°1 : Recouvre le carré avec des « Petits L ».
Étape n°2 : Recouvre le carré de telle sorte que deux « Petits L » de même couleur ne se touchent au maximum que par un sommet.

Étape n°3 : En gardant la contrainte de l'étape n°2, utilise le moins possible de couleurs de « Petits L ».
Étape n°4 : Fait de plus qu'il y ait le même nombre de « Petits L » de chaque couleur.

Des « Petits L » et un carré (1)

1	**2**	**3**	**4**
5	**6**	**7**	**8**
9	**10**	**11**	**12**
13	**14**	**15**	**16**

Choisis un nombre figurant dans ce tableau. Avec des « Petits L », recouvre les cases ne contenant pas ce nombre.

Ce recouvrement est-il toujours possible ?

Réussiras-tu à utiliser le même nombre de pièces de couleur différente ?

Des « Petits L » et un carré (2)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Choisis un nombre figurant dans ce tableau. Avec des « Petits L », recouvre les cases ne contenant pas ce nombre.

Ce recouvrement est-il toujours possible ?

Réussiras-tu à utiliser le même nombre de pièces de couleur différente ?

Des « Petits L » et un carré (3)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Choisis un nombre figurant dans ce tableau. Avec des « Petits L », recouvre les cases ne contenant pas ce nombre.

Ce recouvrement est-il toujours possible ?

Réussiras-tu à utiliser le même nombre de pièces de couleur différente ?

Des « Petits L » et un carré (4)

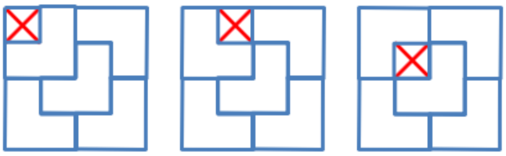
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Choisis un nombre figurant dans ce tableau. Avec des « Petits L », recouvre les cases ne contenant pas ce nombre.
Ce recouvrement est-il toujours possible ?

Réussiras-tu à utiliser le même nombre de pièces de couleur différente ?

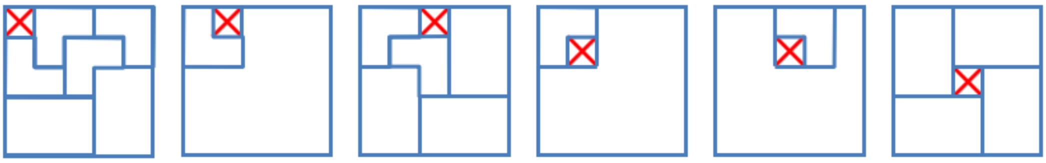
Des carrés presque recouverts par des « Petits L »

Le carré 2×2 ne peut pas être recouvert par un « Petit L ».
Une case reste libre. 2×2 – 1 = 3.

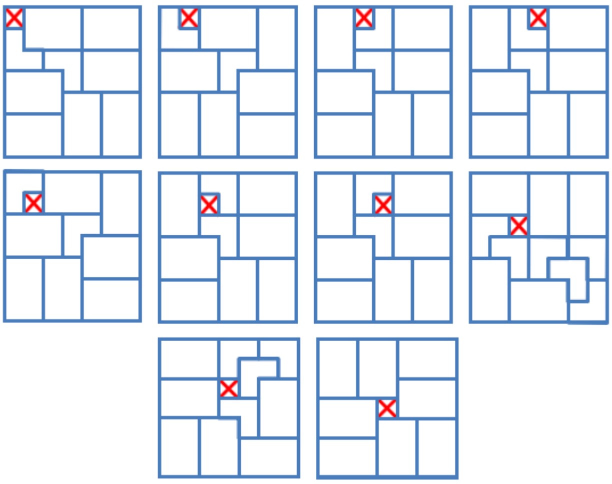


4×4 – 1 = 15. Cela donne envie d'utiliser cinq « Petits L » et laisser une case vide. Cette case vide a trois positions possibles, les autres cases peuvent être recouvertes par des « Petits L ».

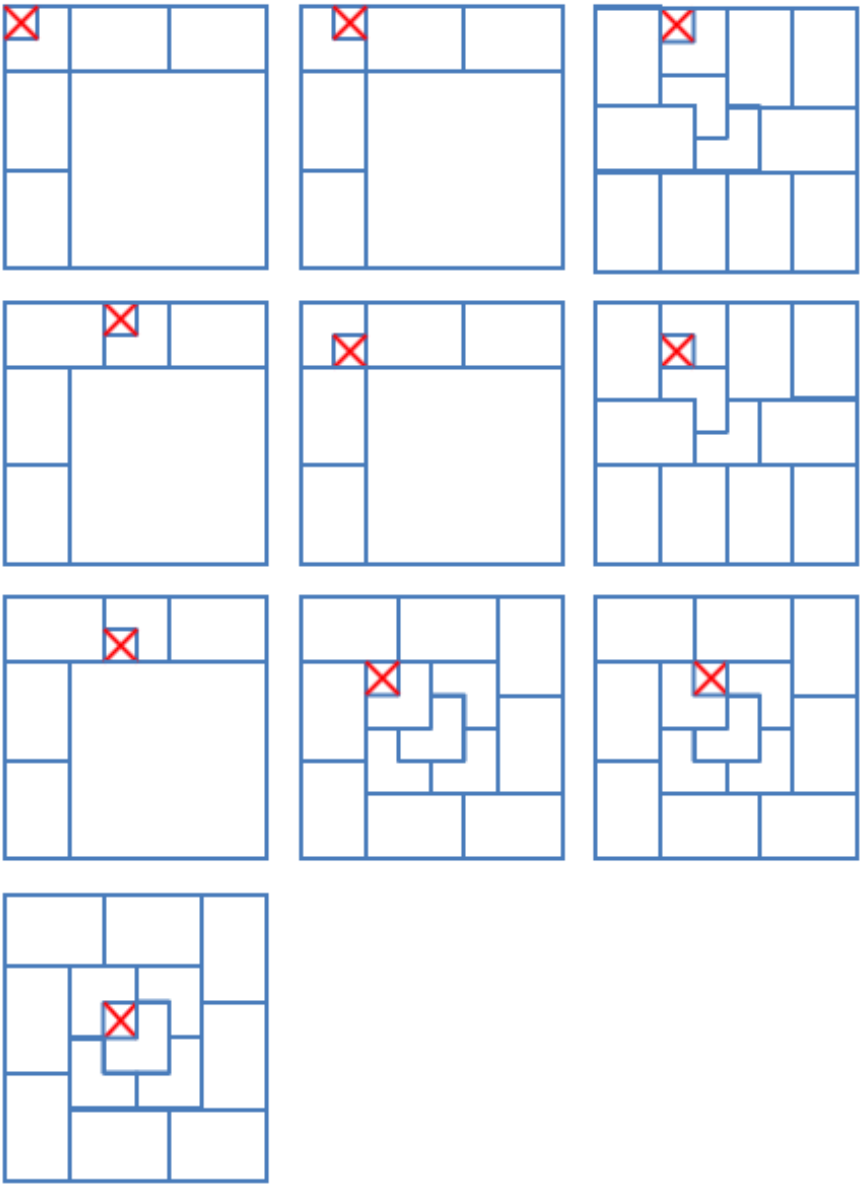
Ce problème peut-il se généraliser à tous les carrés de côté non multiple de 3 ?
Un entier non multiple de 3 peut s'écrire « $3n + 1$ » ou « $3n + 2$ ». Élevé au carré, il s'écrira « $9n^2 + 6n + 1$ » ou « $9n^2 + 12n + 4$ ». Je laisse une case vide, le nombre de cases à recouvrir sera « $9n^2 + 6n$ » ou « $9n^2 + 12n + 3$ ». Dans les deux cas, j'obtiens un multiple de 3, ce qui laisse espérer un recouvrement par des « Petits L ».



Pour le carré 5×5, six positions sont possibles pour la case laissée vide. Seules trois d'entre elles amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».



Pour le carré 7×7, dix positions sont possibles pour la case laissée vide. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».



Pour le carré 8×8, dix positions sont possibles pour la case laissée vide. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».

Remarque : Les rectangles 3×2 et les carrés 6×6 sont pavables par des « Petits L ». Pour alléger les dessins, leur recouvrement n'a pas été dessiné.

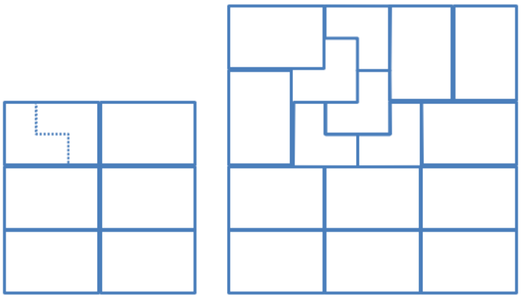
La recherche pourrait se poursuivre pour des carrés plus grands et pour éventuellement une généralisation…

Des carrés recouverts avec des « Petits L »

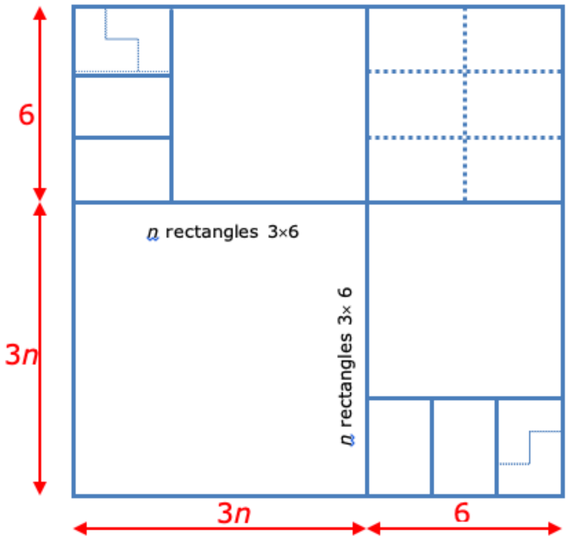
Comment caractériser des carrés recouverts par des « Petits L » ?

Le carré 3×3 ne peut pas être recouvert par des « Petits L ».

Il faut que le côté du carré n soit un multiple de 3 pour espérer le recouvrement du carré par des « Petits L ». Au vu du cas « n = 3 », il est clair que cette condition n'est pas suffisante.



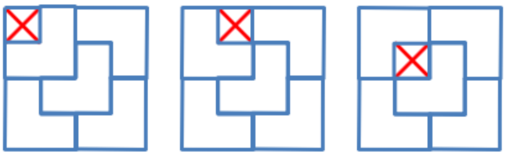
Les carrés 6×6 et 9×9 peuvent être recouverts par des « Petits L ».



Tout côté de carré multiple de 3 plus grand que 9 peut s'écrire sous la forme $c = 3n + 6$.
Le dessin ci-contre montre que tout carré de côté multiple de 3 (autre que 3) est recouvrable par des « Petits L ».

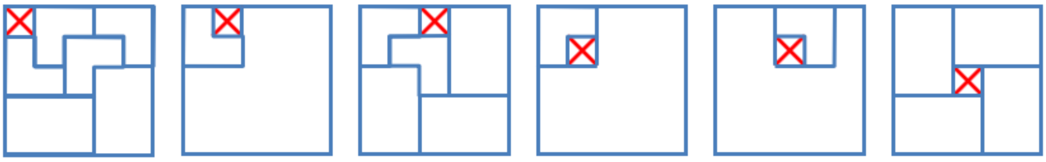
Des carrés presque recouverts par des « Petits L »

Le carré 2×2 ne peut pas être recouvert par un « Petit L ».
Une case reste libre. 2×2 − 1 = 3.

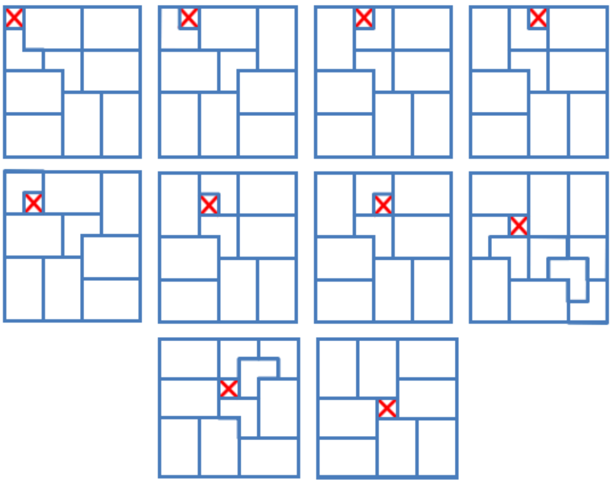


4×4 − 1 = 15. Cela donne envie d'utiliser cinq « Petits L » et laisser une case vide. Cette case vide a trois positions possibles, les autres cases peuvent être recouvertes par des « Petits L ».

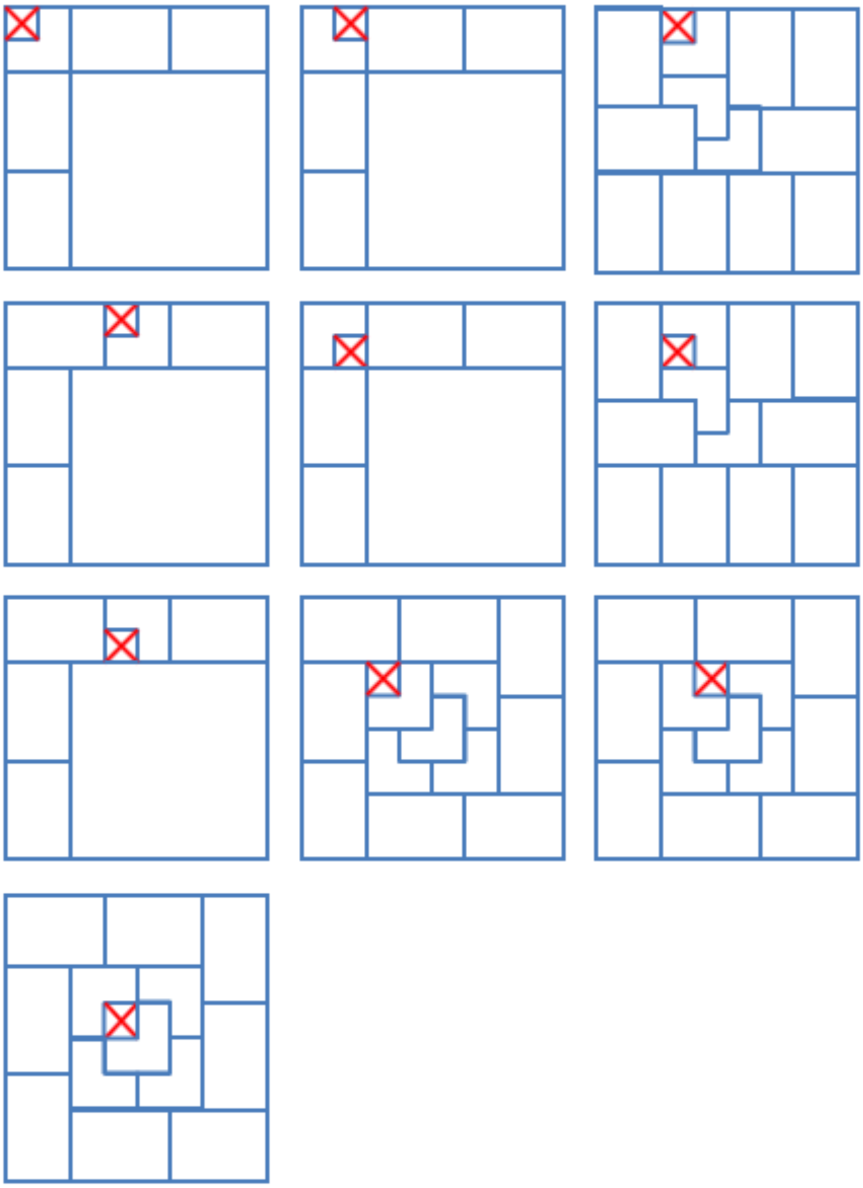
Ce problème peut-il se généraliser à tous les carrés de côté non multiple de 3 ?
Un entier non multiple de 3 peut s'écrire « $3n + 1$ » ou « $3n + 2$ ». Élevé au carré, il s'écrira « $9n^2 + 6n + 1$ » ou « $9n^2 + 12n + 4$ ». Je laisse une case vide, le nombre de cases à recouvrir sera « $9n^2 + 6n$ » ou « $9n^2 + 12n + 3$ ». Dans les deux cas, j'obtiens un multiple de 3, ce qui laisse espérer un recouvrement par des « Petits L ».



Pour le carré 5×5, six positions sont possibles pour la case laissée vide. Seules trois d'entre elles amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».



Pour le carré 7×7, dix positions sont possibles pour la case laissée vide. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».



Pour le carré 8×8, dix positions sont possibles pour la case laissée vide. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».

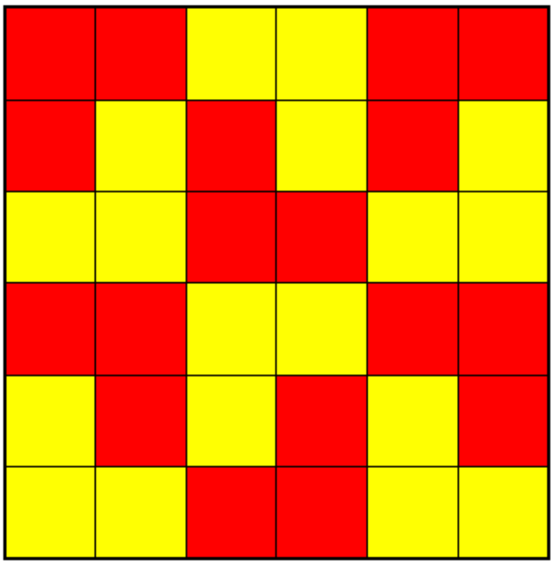
Remarque : Les rectangles 3×2 et les carrés 6×6 sont pavables par des « Petits L ». Pour alléger les dessins, leur recouvrement n'a pas été dessiné.

La recherche pourrait se poursuivre pour des carrés plus grands et pour éventuellement une généralisation…
<u>Remarque :</u> il est aisé de prouver qu'un carré de côté $3n+1$ ou $3n+2$ contient un nombre de petits carrés égal à un multiple de 3 plus 1.

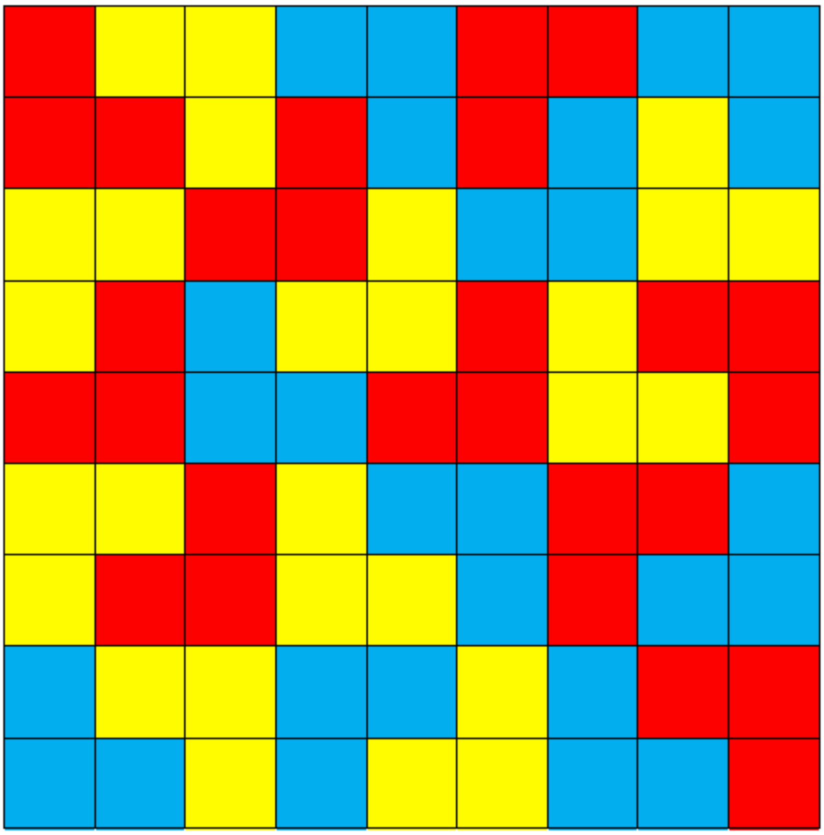
Éléments de solution

Un premier carré recouvert

Quatre pièces de deux couleurs différentes sont utilisées.



Un deuxième carré recouvert

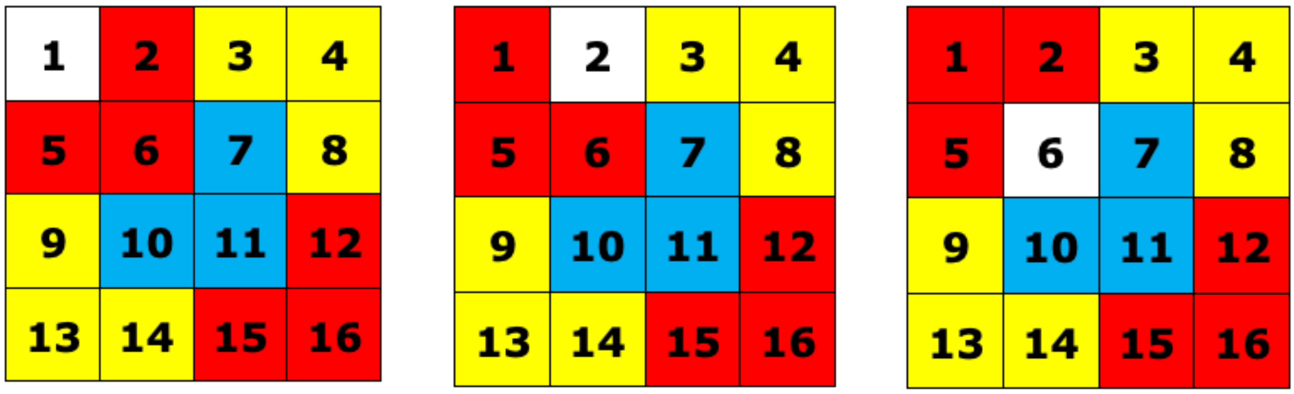


Neuf pièces de trois couleurs différentes sont utilisées. Deux pièces de même couleur ne se touchent jamais par un côté.

Pour des carrés 4x4

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Le recouvrement des autres cas se déduit en utilisant symétries et rotations.



Cinq couleurs seraient nécessaires pour utiliser le même nombre de pièces de chaque couleur. Dans les dessins ci-dessus, trois couleurs ont été utilisées, deux pièces de même couleur ne se touchent jamais.

Pour des carrés 5x5

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Le recouvrement des autres cas se déduit en utilisant symétries et rotations.

Pour les cases 2, 7 et 8, le recouvrement est impossible.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Deux pièces de quatre couleurs ont été utilisées. Deux pièces de même couleur ne se touchent jamais.

Pour des carrés 7x7

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49

Le recouvrement des autres cas se déduit en utilisant symétries et rotations.










Quatre pièces de quatre couleurs ont été utilisées. Deux pièces de même couleur ne se touchent jamais.

Pour des carrés 8x8

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Le recouvrement des autres cas se déduit en utilisant symétries et rotations.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

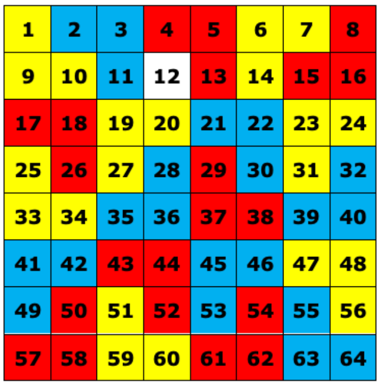
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

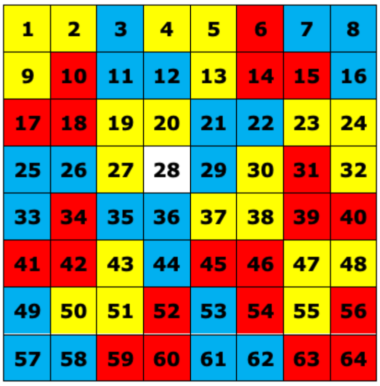
1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64





Sept pièces de trois couleurs ont été utilisées. Deux pièces de même couleur ne se touchent jamais par un côté.