Journée régionale de l'APMEP Lorraine

Des nombres très, très, TRÈS grands, mais finis : Introduction à la googologie

par Rémi Peyre (Univ. Lorraine)

23 mars 2022

Un, deux, trois, ... beaucoup !

Combien y a-t-il de cœurs sur chacune des figures suivantes ?

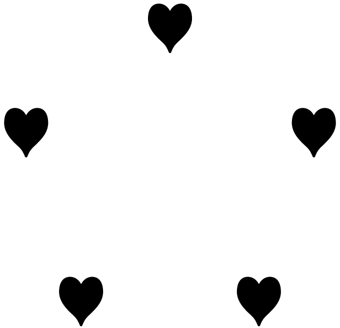
Un, deux, trois, ... beaucoup !

♥

♥ ♥

♥ ♥

Un, deux, trois, ... beaucoup !



Cinq

Symbole spécifique : ‘5’.

« Nombre immédiat », qu’on saisit directement.

Jusqu’à 8.

Un, deux, trois, ... beaucoup !

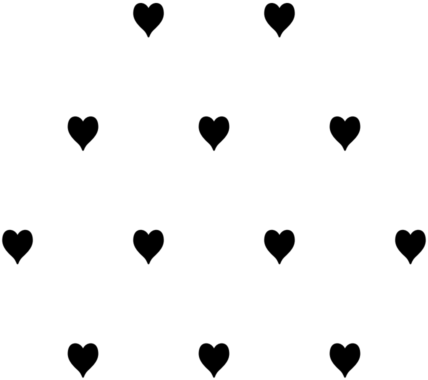
♥ ♥

♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥

Un, deux, trois, ... beaucoup !



Douze
Étymologiquement : Deux après dix.
« Nombre additif », qu'on comprend comme une somme.
Jusqu'à $8 + 8 = 16$.

Un, deux, trois, ... beaucoup !

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

Un, deux, trois, ... beaucoup !

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

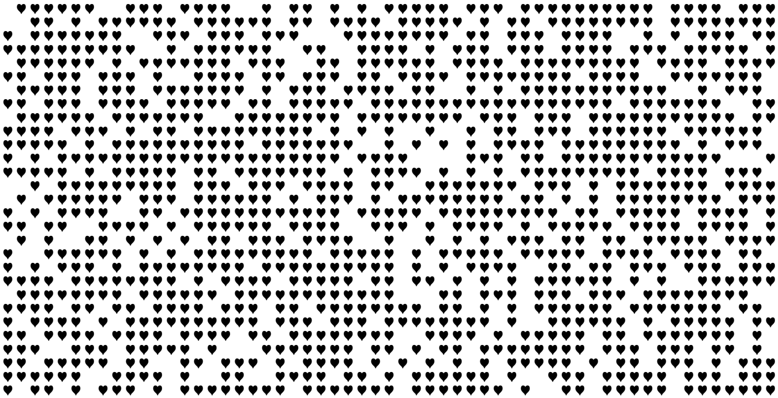
♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

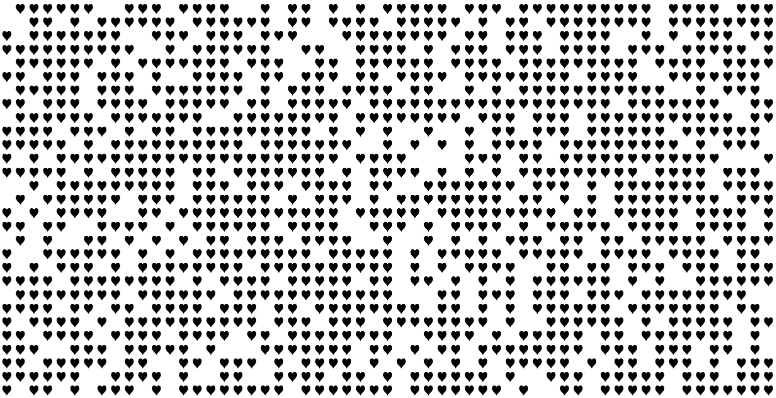
♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥ ♥

Quarante-six
Étymologiquement : Quatre dizaines et six.
« Nombre multiplicatif », qu'on comprend à partir d'un produit.
Jusqu'à $8 \times 8 = 64$.

Un, deux, trois, ... beaucoup !



Un, deux, trois, ... beaucoup !



1 259

S'écrit en chiffres plutôt qu'en lettres...

« Nombre puissant », qu'on écrit à l'aide de puissances itérées.

Jusqu'à $8^8 = 16\,777\,216$.

Base de représentation

« 1 259 » signifie $(((1 \times \mathrm{X} + 2) \times \mathrm{X}) + 5) \times \mathrm{X} + 9$. Comment ce nombre s'écrit-il en base 8 ?

Base de représentation

« 1 259 » signifie $(((1 \times \mathrm{X} + 2) \times \mathrm{X}) + 5) \times \mathrm{X} + 9$. Comment ce nombre s'écrit-il en base 8 ?

Réponse : 2 353.

Idée : Le choix de la base dix n'est qu'une convention ; les nombres existent et se manipulent indépendamment de ce choix !

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^7$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke :

(C). Nombre d'arbres sur Terre :

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial :

(E). Âge de la Terre, en années :

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil :

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée :

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^{7}$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke : $\approx 7{,}8 \times 10^{23} = 2{,}8 \times 8^{26}$.

(C). Nombre d'arbres sur Terre :

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial :

(E). Âge de la Terre, en années :

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil :

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée :

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^7$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke :
$\approx 7{,}8 \times 10^{23} = 2{,}8 \times 8^{26}$.

(C). Nombre d'arbres sur Terre :
$\approx 3{,}0 \times 10^{12} = 5{,}5 \times 8^{13}$.

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial :

(E). Âge de la Terre, en années :

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil :

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée :

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^7$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke :
$\approx 7{,}8 \times 10^{23} = 2{,}8 \times 8^{26}$.

(C). Nombre d'arbres sur Terre :
$\approx 3{,}0 \times 10^{12} = 5{,}5 \times 8^{13}$.

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial :
$\approx 2{,}6 \times 10^{25} = 1{,}3 \times 8^{28}$.

(E). Âge de la Terre, en années :

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil :

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée :

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^{7}$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke :
$\approx 7{,}8 \times 10^{23} = 2{,}8 \times 8^{26}$.

(C). Nombre d'arbres sur Terre :
$\approx 3{,}0 \times 10^{12} = 5{,}5 \times 8^{13}$.

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial :
$\approx 2{,}6 \times 10^{25} = 1{,}3 \times 8^{28}$.

(E). Âge de la Terre, en années :
$\approx 4{,}6 \times 10^{9} = 4{,}3 \times 8^{10}$.

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil :

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée :

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^{7}$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke :
$\approx 7{,}8 \times 10^{23} = 2{,}8 \times 8^{26}$.

(C). Nombre d'arbres sur Terre :
$\approx 3{,}0 \times 10^{12} = 5{,}5 \times 8^{13}$.

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial :
$\approx 2{,}6 \times 10^{25} = 1{,}3 \times 8^{28}$.

(E). Âge de la Terre, en années :
$\approx 4{,}6 \times 10^{9} = 4{,}3 \times 8^{10}$.

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil :
$\approx 1{,}1 \times 10^{57} = 1{,}5 \times 8^{63}$.

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée :

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^{7}$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke : $\approx 7{,}8 \times 10^{23} = 2{,}8 \times 8^{26}$.

(C). Nombre d'arbres sur Terre : $\approx 3{,}0 \times 10^{12} = 5{,}5 \times 8^{13}$.

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial : $\approx 2{,}6 \times 10^{25} = 1{,}3 \times 8^{28}$.

(E). Âge de la Terre, en années : $\approx 4{,}6 \times 10^{9} = 4{,}3 \times 8^{10}$.

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil : $\approx 1{,}1 \times 10^{57} = 1{,}5 \times 8^{63}$.

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée : $\approx 2{,}4 \times 10^{11} = 3{,}5 \times 8^{12}$.

Les grands nombres de la vraie vie

Notation exponentielle avec des puissance de dix (ou de huit) $\rightsquigarrow$ « Nombres exponentiels ».

(A). Nombre d'habitants de la Lorraine : $2\,311\,735 \approx 1{,}1 \times 8^7$.

(B). Nombre de bits de données que l'humanité stocke :
$\approx 7{,}8 \times 10^{23} = 2{,}8 \times 8^{26}$.

(C). Nombre d'arbres sur Terre :
$\approx 3{,}0 \times 10^{12} = 5{,}5 \times 8^{13}$.

(D). Nombre de gouttes d'eau dans l'océan mondial :
$\approx 2{,}6 \times 10^{25} = 1{,}3 \times 8^{28}$.

(E). Âge de la Terre, en années :
$\approx 4{,}6 \times 10^{9} = 4{,}3 \times 8^{10}$.

(F). Nombre de nucléons dans le Soleil :
$\approx 1{,}1 \times 10^{57} = 1{,}5 \times 8^{63}$.

(G). Nombre d'étoiles dans la Voie Lactée :
$\approx 2{,}4 \times 10^{11} = 3{,}5 \times 8^{12}$.

Et après ?... L'Univers a ses limites, mais pas l'imagination !

Jeu-concours !

Trouver un entier aussi grand que possible, explicitement défini sans recours à un artefact physique.

Jeu-concours !

Trouver un entier aussi grand que possible, explicitement défini sans recours à un artefact physique.

Les réponses de ma famille :

- **Laurent :** Six millions.
- **Fernand :** Le nombre d'Avogadro.
- **Françoise :** Cent mille milliards fois cent mille milliards, puissance cent mille milliards.
- **Luce :** $(N \times 10^N)^N$, où N est le nombre de millionnièmes de secondes dans une année.
- **Marie :** Neuf-cent-quatre-vingt-dix-neuf trilliards de trilliards à la puissance lui-même.
- **Anne :** $999\,999\,999\,999\,999\,999$ milliards puissance $999\,999\,999\ldots$, « en remplissant l'espace disponible pour la réponse ».

Réponse pour enfant de 7 ans

Réponse pour enfant de 7 ans

- Je regarde le nombre $999\,999\,999$, avec 9 fois le chiffre ‘9’. Je l’appelle « le premier nombre ».

Réponse pour enfant de 7 ans

- Je regarde le nombre $999\,999\,999$, avec 9 fois le chiffre '9'. Je l'appelle « le premier nombre ».
- Je regarde le nombre $999\ldots999$, en ayant utilisé $999\,999\,999$ fois le chiffre 9. Je l'appelle « le deuxième nombre ».

Réponse pour enfant de 7 ans

- Je regarde le nombre $999\,999\,999$, avec 9 fois le chiffre '9'. Je l'appelle « le premier nombre ».
- Je regarde le nombre $999\ldots999$, en ayant utilisé $999\,999\,999$ fois le chiffre 9. Je l'appelle « le deuxième nombre ».
- Je regarde le nombre $999\ldots999$, où le nombre de chiffres '9' correspond au deuxième nombre. Je l'appelle « le troisième nombre ».

Réponse pour enfant de 7 ans

- Je regarde le nombre $999\,999\,999$, avec 9 fois le chiffre '9'. Je l'appelle « le premier nombre ».
- Je regarde le nombre $999\ldots999$, en ayant utilisé $999\,999\,999$ fois le chiffre 9. Je l'appelle « le deuxième nombre ».
- Je regarde le nombre $999\ldots999$, où le nombre de chiffres '9' correspond au deuxième nombre. Je l'appelle « le troisième nombre ».
- Je répète encore cette opération, encore et encore, pendant un nombre de fois égal au troisième nombre.

Réponse pour enfant de 7 ans

- Je regarde le nombre $999\,999\,999$, avec 9 fois le chiffre ‘9’. Je l’appelle « le premier nombre ».
- Je regarde le nombre $999\ldots999$, en ayant utilisé $999\,999\,999$ fois le chiffre 9. Je l’appelle « le deuxième nombre ».
- Je regarde le nombre $999\ldots999$, où le nombre de chiffres ‘9’ correspond au deuxième nombre. Je l’appelle « le troisième nombre ».
- Je répète encore cette opération, encore et encore, pendant un nombre de fois égal au troisième nombre.
- Mon résultat est le dernier nombre ainsi obtenu.

Le pouvoir de l'imagination

Idées :

- Les nombres de Françoise, Marie et Luce existent et sont parfaitement définis, et pourtant la quantité qu'ils expriment dépasse toute possibilité physique !
- Le nombre d'Anne et le mien sont tellement grands qu'on ne peut même pas les *écrire* en base dix, car il faudrait tellement de chiffres que ça dépasserait les capacités de l'Univers... Pourtant ces nombres existent toujours, et sont toujours parfaitement définis !

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1							
2	1							
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8						
2	1							
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64					
2	1							
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$		
2	1							
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1							
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8						
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8					
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$		
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$	$8 \upuparrows 8$	$\cdots$
3	1							
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$	$8 \upuparrows 8$	$\cdots$
3	1	8						
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$	$8 \upuparrows 8$	$\cdots$
3	1	8	$8 \upuparrows 8$					
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$	$8 \upuparrows 8$	$\cdots$
3	1	8	$8 \upuparrows 8$	$A_2(8 \upuparrows 8)$	$A_2(A_2(8 \upuparrows 8))$	$\cdots$		
4	1							
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	⋯	8	⋯
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$	$8 \upuparrows 8$	$\cdots$
3	1	8	$8 \upuparrows 8$	$A_2(8 \upuparrows 8)$	$A_2(A_2(8 \upuparrows 8))$	$\cdots$	$A_2(A_3(7))$	$\cdots$
4	1							
⋮	$\vdots$							
8	1							
⋮	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$	$8 \upuparrows 8$	$\cdots$
3	1	8	$8 \upuparrows 8$	$A_2(8 \upuparrows 8)$	$A_2(A_2(8 \upuparrows 8))$	$\cdots$	$A_2(A_3(7))$	$\cdots$
4	1	8	$A_3(8)$	$A_3(A_3(8))$	$A_3(A_3(A_3(8)))$	$\cdots$	$A_3(A_4(7))$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$							
8	1							
$\vdots$	$\vdots$							

Le pouvoir de la récursivité !

	0	1	2	3	4	$\cdots$	8	$\cdots$
0	0	8	16	24	32	$\cdots$	64	$\cdots$
1	1	8	64	512	$4\,096$	$\cdots$	8^8	$\cdots$
2	1	8	8^8	8^{8^8}	$8^{8^{8^8}}$	$\cdots$	$8 \upuparrows 8$	$\cdots$
3	1	8	$8 \upuparrows 8$	$A_2(8 \upuparrows 8)$	$A_2(A_2(8 \upuparrows 8))$	$\cdots$	$A_2(A_3(7))$	$\cdots$
4	1	8	$A_3(8)$	$A_3(A_3(8))$	$A_3(A_3(A_3(8)))$	$\cdots$	$A_3(A_4(7))$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$
8	1	8	$A_7(8)$	$A_7(A_7(8))$	$A_7(A_7(A_7(8)))$	$\cdots$	$A_7(A_8(7))$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

L'art de la comparaison

Proposition

$$2 \uparrow\uparrow 66 < 8 \uparrow\uparrow 64 < 2 \uparrow\uparrow 67$$

L'art de la comparaison

Proposition

$$2 \upuparrows 66 < 8 \upuparrows 64 < 2 \upuparrows 67$$

Démonstration.

Pour la première inégalité :

- $2 \upuparrows 4 = 2^{2 \upuparrows 3} = 2^{16} < 2^{24} = 8^8 = 8 \upuparrows 2\,;$
- Par récurrence, $2 \upuparrows (n+2) < 8 \upuparrows n$ pour tout $n \geqslant 2$.

L'art de la comparaison

Proposition

$$2 \upuparrows 66 < 8 \upuparrows 64 < 2 \upuparrows 67$$

Démonstration.

Pour la première inégalité :

- $2 \upuparrows 4 = 2^{2 \upuparrows 3} = 2^{16} < 2^{24} = 8^8 = 8 \upuparrows 2\,;$
- Par récurrence, $2 \upuparrows (n+2) < 8 \upuparrows n$ pour tout $n \geqslant 2$.

Même principe pour la seconde inégalité, via

Lemme

Pour $x \geqslant 2$,

$$y > 4x \implies 2^y > 4 \times 8^x.$$

L'art de la comparaison

Proposition

$$2 \upuparrows 66 < 8 \upuparrows 64 < 2 \upuparrows 67$$

Démonstration.

Pour la première inégalité :

- $2 \upuparrows 4 = 2^{2 \upuparrows 3} = 2^{16} < 2^{24} = 8^8 = 8 \upuparrows 2$;
- Par récurrence, $2 \upuparrows (n+2) < 8 \upuparrows n$ pour tout $n \geqslant 2$.

Même principe pour la seconde inégalité, via

> ### Lemme
> *Pour $x \geqslant 2$,*
> $$y > 4x \implies 2^y > 4 \times 8^x.$$

Preuve du lemme : $4 \times 8^x = 2^2 \times 2^{3x} = 2^{3x+2} \underset{x \geqslant 2}{\leqslant} 2^{4x} \underset{\text{hyp}}{<} 2^y$. $\square$

Sur ce dont on ne peut pas parler...

Le nombre $A_8(8)$ est si monstrueusement grand qu'il défie l'imagination... Il est totalement impossible de l'écrire en chiffres ou en notation exponentielle, ou même de connaitre son premier chiffre !

Sur ce dont on ne peut pas parler...

Le nombre $A_8(8)$ est si monstrueusement grand qu'il défie l'imagination... Il est totalement impossible de l'écrire en chiffres ou en notation exponentielle, ou même de connaitre son premier chiffre !

Et pourtant, je peux vous dire que ce nombre finit par

...8626141790647792113905800605047924638926282809882953279478
770468962856661064418340424350486753535109298239082317722308
685888739834661706092014093832915141329516730633979376583934
040122377179022798083501548877762804873944370687905195263620
501156429928092760663583397031937934132002142375493121681412
576330474606245133508906102195178888031224485734244247275730
766288375102773892651193162095588510081521577035416895225856

Sur ce dont on ne peut pas parler...

Le nombre $A_8(8)$ est si monstrueusement grand qu'il défie l'imagination... Il est totalement impossible de l'écrire en chiffres ou en notation exponentielle, ou même de connaitre son premier chiffre !

Et pourtant, je peux vous dire que ce nombre finit par

```
...8626141790647792113905800605047924638926282809882953279478
770468962856661064418340424350486753535109298239082317722308
685888739834661706092014093832915141329516730633979376583934
040122377179022798083501548877762804873944370687905195263620
501156429928092760663583397031937934132002142375493121681412
576330474606245133508906102195178888031224485734244247275730
766288375102773892651193162095588510081521577035416895225856
```

Idée : Les mathématiques permettent de donner des propriétés de certains objets qu'il n'est même pas possible d'écrire !

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \uparrow\uparrow n$ finit par ... 416895225856.

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \uparrow\uparrow n$ finit par …416895225856.

Cela revient à dire que $8 \uparrow\uparrow n \mod 10^{12} = 416\,895\,225\,856$.

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \uparrow\uparrow n$ finit par ... 416895225856.

Cela revient à dire que $8 \uparrow\uparrow n \mod 10^{12} = 416\,895\,225\,856$.

- Par le théorème des restes chinois, il suffit de connaitre $8 \uparrow\uparrow n \mod 2^{12}$ et $8 \uparrow\uparrow n \mod 5^{12}$.

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \uparrow\uparrow n$ finit par …416895225856.

Cela revient à dire que $8 \uparrow\uparrow n \mod 10^{12} = 416\,895\,225\,856$.

- Par le théorème des restes chinois, il suffit de connaitre $8 \uparrow\uparrow n \mod 2^{12}$ et $8 \uparrow\uparrow n \mod 5^{12}$.
- $8 \uparrow\uparrow n \mod 2^{12} = 0$ car c'est $8^{8 \uparrow\uparrow (n-1)} = 2^{3 \times 8 \uparrow\uparrow (n-1)}$ $= 2^{3 \times 8 \uparrow\uparrow (n-1) - 12} \times 2^{12}$.

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \upuparrows n$ finit par ... 416895225856.

Cela revient à dire que $8 \upuparrows n \mod 10^{12} = 416\,895\,225\,856$.

- Par le théorème des restes chinois, il suffit de connaitre $8 \upuparrows n \mod 2^{12}$ et $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$.
- $8 \upuparrows n \mod 2^{12} = 0$ car c'est $8^{8 \upuparrows (n-1)} = 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1)}$ $= 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1) - 12} \times 2^{12}$.
- Pour connaitre $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod (4 \times 5^{11})$, car les valeurs de $8^k \mod 5^{12}$ suivent un cycle de longueur (4×5^{11}) (petit théorème de Fermat).

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \upuparrows n$ finit par ... 416895225856.

Cela revient à dire que $8 \upuparrows n \mod 10^{12} = 416\,895\,225\,856$.

- Par le théorème des restes chinois, il suffit de connaitre $8 \upuparrows n \mod 2^{12}$ et $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$.
- $8 \upuparrows n \mod 2^{12} = 0$ car c'est $8^{8 \upuparrows (n-1)} = 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1)}$ $= 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1) - 12} \times 2^{12}$.
- Pour connaitre $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod (4 \times 5^{11})$, car les valeurs de $8^k \mod 5^{12}$ suivent un cycle de longueur (4×5^{11}) (petit théorème de Fermat).
- Par restes chinois, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod 4$ et $8 \upuparrows (n-1) \mod 5^{11}$; le premier vaut 0 car $8^{8 \upuparrows (n-2)}$ est multiple de 8.

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \upuparrows n$ finit par …416895225856.

Cela revient à dire que $8 \upuparrows n \mod 10^{12} = 416\,895\,225\,856$.

- Par le théorème des restes chinois, il suffit de connaitre $8 \upuparrows n \mod 2^{12}$ et $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$.
- $8 \upuparrows n \mod 2^{12} = 0$ car c'est $8^{8 \upuparrows (n-1)} = 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1)}$ $= 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1) - 12} \times 2^{12}$.
- Pour connaitre $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod (4 \times 5^{11})$, car les valeurs de $8^k \mod 5^{12}$ suivent un cycle de longueur (4×5^{11}) (petit théorème de Fermat).
- Par restes chinois, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod 4$ et $8 \upuparrows (n-1) \mod 5^{11}$; le premier vaut 0 car $8^{8 \upuparrows (n-2)}$ est multiple de 8.
- Pour connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod 5^{11}$, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-2) \mod (4 \times 5^{10})$ par petit Fermat.

Preuve

Montrons que, pour $n \geqslant 13$, $8 \upuparrows n$ finit par ... 416895225856.

Cela revient à dire que $8 \upuparrows n \mod 10^{12} = 416\,895\,225\,856$.

- Par le théorème des restes chinois, il suffit de connaitre $8 \upuparrows n \mod 2^{12}$ et $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$.
- $8 \upuparrows n \mod 2^{12} = 0$ car c'est $8^{8 \upuparrows (n-1)} = 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1)}$ $= 2^{3 \times 8 \upuparrows (n-1) - 12} \times 2^{12}$.
- Pour connaitre $8 \upuparrows n \mod 5^{12}$, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod (4 \times 5^{11})$, car les valeurs de $8^k \mod 5^{12}$ suivent un cycle de longueur (4×5^{11}) (petit théorème de Fermat).
- Par restes chinois, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod 4$ et $8 \upuparrows (n-1) \mod 5^{11}$; le premier vaut 0 car $8^{8 \upuparrows (n-2)}$ est multiple de 8.
- Pour connaitre $8 \upuparrows (n-1) \mod 5^{11}$, il suffit de connaitre $8 \upuparrows (n-2) \mod (4 \times 5^{10})$ par petit Fermat.
- On itère ce raisonnement, jusqu'à tomber sur le modulo 1, où la valeur est forcément 0 ; puis on rembobine le film !

Théorème

Pour tout $b \in \mathbf{N}^*$, *pour tout* $p \in \mathbf{N}^*$, $n \mapsto b \uparrow\uparrow n \mod p$ *est une suite stationnaire.*

Théorème

Pour tout $b \in \mathbf{N}^*$, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $n \mapsto b \uparrow\uparrow n \mod p$ est une suite stationnaire.

Exercice :

1. Montrer que, modulo 8, les puissances de 3 valent successivement 1, $3, 1, 3, 1, 3, 1, \ldots$ (cycle de longueur 2) ; que modulo 32, le cycle est 1, $3, 9, 27, 17, 19, 25, 11, 1, \ldots$ (longueur 8) ; que modulo 128, c'est $1, 3$, $9, 27, 81, 115, 89, 11, 33, 99, 41, 123, 113, 83, 121, 107, 65, 67, 73, 91, 17$, $51, 25, 75, 97, 35, 105, 59, 49, 19, 57, 43, 1, \ldots$ (longueur 32).
2. Montrer que, pour $n \geqslant 0$, $3 \uparrow\uparrow n$ est impair.
3. En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, $3 \uparrow\uparrow n \mod 8 = 3$.
4. En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$, $3 \uparrow\uparrow n \mod 32 = 27$, puis que, pour tout $n \geqslant 3$, que $3 \uparrow\uparrow n \mod 128 = 59$.

Un algorithme simple...

```
def Ackermann(k, n):
    # Première colonne
    lignes = [[0]] + [[1] for i in range(k)]
    while len(lignes[k]) <= n:
        # Identification de la prochaine ligne à compléter
        i = k
        while i > 0:
            laligne = lignes[i]
            m = laligne[len(laligne) - 1]
            if m < len(lignes[i - 1]):
                break
            i -= 1
        # Écriture d'une nouvelle case
        if i == 0:
            laligne = lignes[0]
            laligne.append(laligne[len(laligne) - 1] + 8)
        else:
            lignes[i].append(lignes[i - 1][m])
    return lignes[k][n]
```

Au-delà d'Ackermann : Nombres de Taro

On a envie d'itérer la fonction d'Ackermann à son tour...

- Tableau d'Ackermann $A_{1,k}(n)$ en partant de $A_{1,0}(n) := A_n(n)$.

Au-delà d'Ackermann : Nombres de Taro

On a envie d'itérer la fonction d'Ackermann à son tour...

- Tableau d'Ackermann $A_{1,k}(n)$ en partant de $A_{1,0}(n) := A_n(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{2,k}(n)$ en partant de $A_{2,0}(n) := A_{1,n}(n)$.
- ...

Au-delà d'Ackermann : Nombres de Taro

On a envie d'itérer la fonction d'Ackermann à son tour...

- Tableau d'Ackermann $A_{1,k}(n)$ en partant de $A_{1,0}(n) := A_n(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{2,k}(n)$ en partant de $A_{2,0}(n) := A_{1,n}(n)$.
- ...
- Tableau d'Ackermann $A_{1,0,k}(n)$ en partant de $A_{1,0,0}(n) := A_{n,n}(n)$.

Au-delà d'Ackermann : Nombres de Taro

On a envie d'itérer la fonction d'Ackermann à son tour...

- Tableau d'Ackermann $A_{1,k}(n)$ en partant de $A_{1,0}(n) := A_n(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{2,k}(n)$ en partant de $A_{2,0}(n) := A_{1,n}(n)$.
- ...
- Tableau d'Ackermann $A_{1,0,k}(n)$ en partant de $A_{1,0,0}(n) := A_{n,n}(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{1,1,k}(n)$ en partant de $A_{1,1,0}(n) := A_{1,0,n}(n)$.
- ...

Au-delà d'Ackermann : Nombres de Taro

On a envie d'itérer la fonction d'Ackermann à son tour...

- Tableau d'Ackermann $A_{1,k}(n)$ en partant de $A_{1,0}(n) := A_n(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{2,k}(n)$ en partant de $A_{2,0}(n) := A_{1,n}(n)$.
- ...
- Tableau d'Ackermann $A_{1,0,k}(n)$ en partant de $A_{1,0,0}(n) := A_{n,n}(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{1,1,k}(n)$ en partant de $A_{1,1,0}(n) := A_{1,0,n}(n)$.
- ...
- Tableau d'Ackermann $A_{2,0,k}(n)$ en partant de $A_{2,0,0}(n) := A_{1,n,n}(n)$.
- ...

Au-delà d'Ackermann : Nombres de Taro

On a envie d'itérer la fonction d'Ackermann à son tour...

- Tableau d'Ackermann $A_{1,k}(n)$ en partant de $A_{1,0}(n) := A_n(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{2,k}(n)$ en partant de $A_{2,0}(n) := A_{1,n}(n)$.
- ...
- Tableau d'Ackermann $A_{1,0,k}(n)$ en partant de $A_{1,0,0}(n) := A_{n,n}(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{1,1,k}(n)$ en partant de $A_{1,1,0}(n) := A_{1,0,n}(n)$.
- ...
- Tableau d'Ackermann $A_{2,0,k}(n)$ en partant de $A_{2,0,0}(n) := A_{1,n,n}(n)$.
- ...
- $A_{(\ell+1),0,\ldots,0}(n) := A_{\ell,n,\ldots,n}(n)$.
- ...

Au-delà d'Ackermann : Nombres de Taro

On a envie d'itérer la fonction d'Ackermann à son tour…

- Tableau d'Ackermann $A_{1,k}(n)$ en partant de $A_{1,0}(n) := A_n(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{2,k}(n)$ en partant de $A_{2,0}(n) := A_{1,n}(n)$.
- …
- Tableau d'Ackermann $A_{1,0,k}(n)$ en partant de $A_{1,0,0}(n) := A_{n,n}(n)$.
- Tableau d'Ackermann $A_{1,1,k}(n)$ en partant de $A_{1,1,0}(n) := A_{1,0,n}(n)$.
- …
- Tableau d'Ackermann $A_{2,0,k}(n)$ en partant de $A_{2,0,0}(n) := A_{1,n,n}(n)$.
- …
- $A_{(\ell+1),0,\ldots,0}(n) := A_{\ell,n,\ldots,n}(n)$.
- …

Imaginez seulement ce que vaut $A_{8,8,8,8,8,8,8,8}(8)$… !

La hiérarchie de croissance rapide

Pour $k < k'$, la k'-ème ligne du tableau d'Ackermann est asymptotiquement plus grande que la k-ième ligne, au sens où, pour tout n suffisamment grand, $A_{k'}(n) > A_k(n)$.

Idem pour les fonctions de Taro : si s et s' sont deux suites de nombres distinctes (ne commençant pas par 0), soit $A_s(n) > A_{s'}(n)$ asymptotiquement, soit $A_s(n) < A_{s'}(n)$ asymptotiquement, selon la règle suivante :

1. Si les deux suites sont de longueurs différentes : la plus longue l'emporte ;
2. Sinon, si les premiers nombres sont distincts : le plus grand l'emporte ;
3. Sinon, si les seconds nombres sont distincts : le plus grand l'emporte ;
4. &c.

La hiérarchie de croissance rapide

En fait, ces suites en indice des nombres de Taro codent des *ordinaux* ; et on vient de définir la hiérarchie de croissance rapide pour les ordinaux $< \omega^\omega$.

La hiérarchie de croissance rapide

En fait, ces suites en indice des nombres de Taro codent des *ordinaux* ; et on vient de définir la hiérarchie de croissance rapide pour les ordinaux $< \omega^\omega$.

La théorie des fonctions calculables à croissance rapide se confond alors avec celle de la théorie des grands ordinaux dénombrables calculables... Les constructions des ordinaux ε_0, de Fefermann-Schütte, de Veblen, de Bachmann-Howard définissent autant d'extensions de la hiérarchie de croissance rapide, qui sont calculables algorithmiquement.

Les castors affairés

Fixons-nous un langage de programmation capable de manipuler des entiers de n'importe quelle taille, dont les programmes s'écrivent avec un certain alphabet fini. (Disons, le cœur de *Python* avec l'alphabet ASCII).

Les castors affairés

Fixons-nous un langage de programmation capable de manipuler des entiers de n'importe quelle taille, dont les programmes s'écrivent avec un certain alphabet fini. (Disons, le cœur de *Python* avec l'alphabet ASCII).

$\Sigma(n)$: Plus grand nombre pouvant être calculé par un programme de longueur $\leqslant n$. (Nombres de Radó).

Les castors affairés

Fixons-nous un langage de programmation capable de manipuler des entiers de n'importe quelle taille, dont les programmes s'écrivent avec un certain alphabet fini. (Disons, le cœur de *Python* avec l'alphabet ASCII).

$\Sigma(n)$: Plus grand nombre pouvant être calculé par un programme de longueur $\leqslant n$. (Nombres de Radó).

Théorème

$$\forall k, n \in \mathbf{N}^* \qquad A_k(n) \leqslant \Sigma(999 + \log(k) + \log(n))$$

$$A_{8,8,8,8,8,8,8,8,8}(8) \leqslant \Sigma(1\,999)$$

Les castors affairés

$\Sigma(n)$: Plus grand nombre pouvant être calculé par un programme de longueur $\leqslant n$. (Nombres de Radó).

Les castors affairés

$\Sigma(n)$: Plus grand nombre pouvant être calculé par un programme de longueur $\leqslant n$. (Nombres de Radó).

Théorème

Aucune fonction programmable ne peut calculer la fonction $n \mapsto \Sigma(n)$.

Idée : La suite $n \mapsto \Sigma(n)$ est parfaitement définie ; et pourtant elle ne peut pas être calculée par un programme... !

Démonstration.

Sinon, notant K la longueur du code de la fonction en question, on pourrait calculer $\Sigma(n) + 1$ à l'aide d'un programme de taille $K + \log(n) + 2$, d'où $K + \log(n) + 2 > n$ pour tout n... $\square$

Les castors affairés

$\Sigma(n)$: Plus grand nombre pouvant être calculé par un programme de longueur $\leqslant n$. (Nombres de Radó).

Théorème

Aucune fonction programmable ne peut calculer la fonction $n \mapsto \Sigma(n)$.

Idée : La suite $n \mapsto \Sigma(n)$ est parfaitement définie ; et pourtant elle ne peut pas être calculée par un programme... !

Démonstration.

Sinon, notant K la longueur du code de la fonction en question, on pourrait calculer $\Sigma(n)+1$ à l'aide d'un programme de taille $K+\log(n)+2$, d'où $K+\log(n)+2>n$ pour tout n... $\square$

Corolaire

- *Aucun algorithme ne peut déterminer systématiquement, un programme lui étant donné, si ce programme s'arrête.*

Les castors affairés

$\Sigma(n)$: Plus grand nombre pouvant être calculé par un programme de longueur $\leqslant n$. (Nombres de Radó).

Théorème

Aucune fonction programmable ne peut calculer la fonction $n \mapsto \Sigma(n)$.

Idée : La suite $n \mapsto \Sigma(n)$ est parfaitement définie ; et pourtant elle ne peut pas être calculée par un programme... !

Démonstration.

Sinon, notant K la longueur du code de la fonction en question, on pourrait calculer $\Sigma(n) + 1$ à l'aide d'un programme de taille $K + \log(n) + 2$, d'où $K + \log(n) + 2 > n$ pour tout n... □

Corolaire

- *Aucun algorithme ne peut déterminer systématiquement, un programme lui étant donné, si ce programme s'arrête.*
- *Il existe un programme qui ne s'arrête jamais, mais dont ce non-arrêt ne peut pas être prouvé. (*Indécidabilité du problème de l'arrêt*).*

Le boss final

Définition

Le n-ième nombre de Rayo est le plus grand nombre qu'on puisse définir par une formule de taille n dans le langage de l'arithmétique du premier ordre.

Concrètement : On considère les formules à une variable libre, portant sur les propriétés de $\mathbf{N}$, exprimée à l'aide des opérations élémentaires, p. ex. : « $(\exists m \quad n = m \times 2)$ et $(\exists m \quad n = m + 4)$ et $(\forall p, q \quad (n = p + q \implies (\exists r, s \quad p = (r+2) \times (s+2))$ ou $(\exists r, s \quad q = (r+2) \times (s+2))))$ » ; en se restreignant à celles de ces formules qui caractérisent un unique entier naturel. Le plus grand des entiers ainsi caractérisé par une formule à $\leqslant n$ symboles est noté $\mathrm{Rayo}(n)$.

Le boss final

Définition

Le n-ième nombre de Rayo est le plus grand nombre qu'on puisse définir par une formule de taille n dans le langage de l'arithmétique du premier ordre.

Concrètement : On considère les formules à une variable libre, portant sur les propriétés de $\mathbf{N}$, exprimée à l'aide des opérations élémentaires, p. ex. : « $(\exists m \quad n = m \times 2)$ et $(\exists m \quad n = m + 4)$ et $(\forall p, q \quad (n = p + q \implies (\exists r, s \quad p = (r+2) \times (s+2))$ ou $(\exists r, s \quad q = (r+2) \times (s+2))))$ » ; en se restreignant à celles de ces formules qui caractérisent un unique entier naturel. Le plus grand des entiers ainsi caractérisé par une formule à $\leqslant n$ symboles est noté $\mathrm{Rayo}(n)$.

Théorème

$\mathrm{Rayo}(8^8)$ *dépasse n'importe quel nombre de castor affairé auquel vous auriez pu penser jusque-là… !*

Le boss final

Définition

Le n-ième nombre de Rayo est le plus grand nombre qu'on puisse définir par une formule de taille n dans le langage de l'arithmétique du premier ordre.

Concrètement : On considère les formules à une variable libre, portant sur les propriétés de $\mathbf{N}$, exprimée à l'aide des opérations élémentaires, p. ex. : « $(\exists m \quad n = m \times 2)$ et $(\exists m \quad n = m + 4)$ et $(\forall p, q \quad (n = p + q \implies (\exists r, s \quad p = (r+2) \times (s+2))$ ou $(\exists r, s \quad q = (r+2) \times (s+2))))$ » ; en se restreignant à celles de ces formules qui caractérisent un unique entier naturel. Le plus grand des entiers ainsi caractérisé par une formule à $\leqslant n$ symboles est noté $\mathrm{Rayo}(n)$.

Théorème

$\mathrm{Rayo}(8^8)$ *dépasse n'importe quel nombre de castor affairé auquel vous auriez pu penser jusque-là... !*

Théorème

La fonction $n \mapsto \mathrm{Rayo}(n)$ *ne peut pas être définie arithmétiquement...*

Bibliographie

- « Des nombres bien plus grands que vous ne l'imaginez ! », par J.-P. Delahaye, *Pour la Science* n° 320 (juin 2004).
- https://googology.fandom.com/wiki/