Empilements de prismes ou de cylindres

François DROUIN (APMEP Groupe Maths et Arts)

L'architecte qui a conçu cette agence bancaire à **Laxou** a imaginé et fait construire un empilement de prismes à base hexagonale.

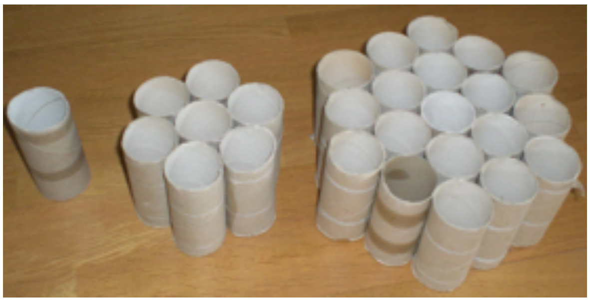
Des boites permettent de visualiser et comprendre l'empilement choisi par l'architecte.

Combien faudrait-il de prismes pour la réalisation d'un immeuble à 4 étages ?

Combien faudrait-il de prismes pour la réalisation d'un immeuble à 10 étages ?

Combien faudrait-il de prismes pour la réalisation d'un immeuble à n étages ?

Le lien pourra être fait avec cet assemblage de cylindres.



Les lecteurs du Petit Vert reconnaîtront peut-être une situation évoquée dans les numéros 54 et 55 téléchargeables sur le site de la régionale APMEP Lorraine.

http://apmeplorraine.fr/IMG/pdf/pv54.pdf

http://apmeplorraine.fr/IMG/pdf/pv55.pdf

Pour une lecture plus aisée, voici les extraits des Petits Verts 54 et 55 évoquant ces empilements de cylindre.

Dans le Petit Vert 54

L'APMEP EN 3D

La Régionale Lorraine a participé, avec les élèves du Club « Jeux & Maths » du collège Les Avrils de Saint-Mihiel, à EXPOSCIENCES - PERL 98 les 26, 27, 28 et 29 mars derniers à Blénod-les-Pont-à-Mousson (voir notre précédent bulletin).

Quatre stands de notre exposition « OBJETS MATHÉMATIQUES » y ont été présentés, ainsi que des travaux du Club (voir article ci-contre, EST REPUBLICAIN du 17 avril 1998). Les visiteurs ont pu, pour mieux appréhender l'espace, manipuler et colorier divers objets. Deux défis leur avaient été proposés : d'une part le coloriage du patron d'un cube (épreuve que nous avions proposée au Rallye Mathématique de Lorraine, organisé par la Régionale en 1992), d'autre part un problème de dénombrement de cylindres pour construire une tour (curiosité découverte par les élèves du Club de Saint-Mihiel) dont nous vous proposons l'énoncé ci-dessous ; on peut d'ailleurs apercevoir (vaguement) cette tour à gauche sur la photo.

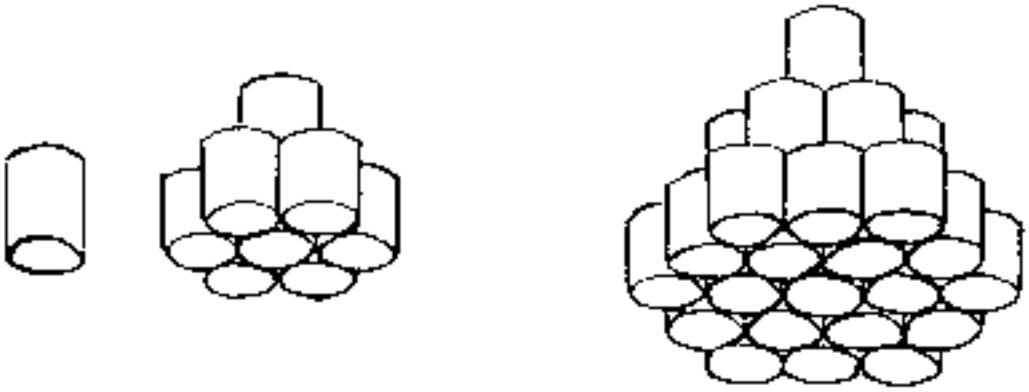
Rendez-vous est d'ores et déjà pris pour P.E.R.L. 2000, en espérant beaucoup d'autres stands mathématiques.

Une tour est formée de cylindres.

Étage supérieur : un cylindre ; avant-dernier étage : un cylindre entouré par les cylindres accolés (soit 7 cylindres pour cet étage) ; étage juste en dessous : ceux de l'étage immédiatement au-dessus, entourés par les cylindres accolés ; et ainsi de suite... (voir schéma, vu de dessous).

Combien de cylindres seront nécessaires pour construire une tour de ce type de 9 étages ?

Des visiteurs (adultes et élèves) ont résolu ce problème. Les lecteurs du PETIT VERT sauront-ils, eux, trouver le nombre de cylindres nécessaires pour une tour de ***n*** étages ?



Dans le Petit Vert 55

EMPILEMENTS DE CYLINDRES

Rappel de l'énoncé (voir figure dans le PETIT VERT n°54 page 5) :

Une tour est formée de cylindres. Étage supérieur : un cylindre ; avant-dernier étage : un cylindre entouré par les cylindres accolés (soit 7 cylindres pour cet étage) ; étage juste en dessous : ceux de l'étage immédiatement au-dessus, entourés par les cylindres accolés ; et ainsi de suite...

Combien de cylindres seront nécessaires pour construire une tour de ce type de 9 étages ? pour une tour de ***n*** étages ?

Nous avons reçu trois courriers relatifs à ce petit problème : Richard CHERY (Collège de la Plante Gribe, PAGNY SUR MOSELLE), Christian CHADUTEAU (Collège Les Avrils, SAINT-MIHIEL) et François DROUIN (même collège), courriers comportant tous trois une solution exacte.

Appelons u_1, u_2, ... u_n les nombres de cylindres nécessaires pour le 1er, le 2ème, ... le nème étage, et S_n le nombre total de cylindres utilisés pour les n étages.

L'expérience montre que $u_1 = 1$, $u_2 = 7$ (= 1+6), $u_3 = 19$ (= 1+6+12) etc. et que $S_n = n^3$.

<u>Démonstration</u> (n'est pas au niveau du collège !!!) :

Le nème étage est constitué du (n-1)ème étage entouré d'un « hexagone » comportant (n-1) cylindres sur chacun de ses côtés.

D'où $u_n = 1 + 6\times1 + 6\times2 + ... + 6\times(n-1) = 1 + 6\times n(n-1)/2 = 3n^2 - 3n + 1$.

Pour S_n, raisonnons par récurrence : supposons $S_{n-1} = (n-1)^3$.

Alors $S_n = S_{n-1} + u_n = (n-1)^3 + (3n^2 - 3n + 1) = n^3$. CQFD.

N.B. : il fallait 729 cylindres pour une tour de 9 étages.

Richard CHERY ajoute : « Excellent problème, que je soumettrai aux élèves de mon club... Il mériterait presque une parution dans le Petit Vert ». Voilà, c'est chose faite.