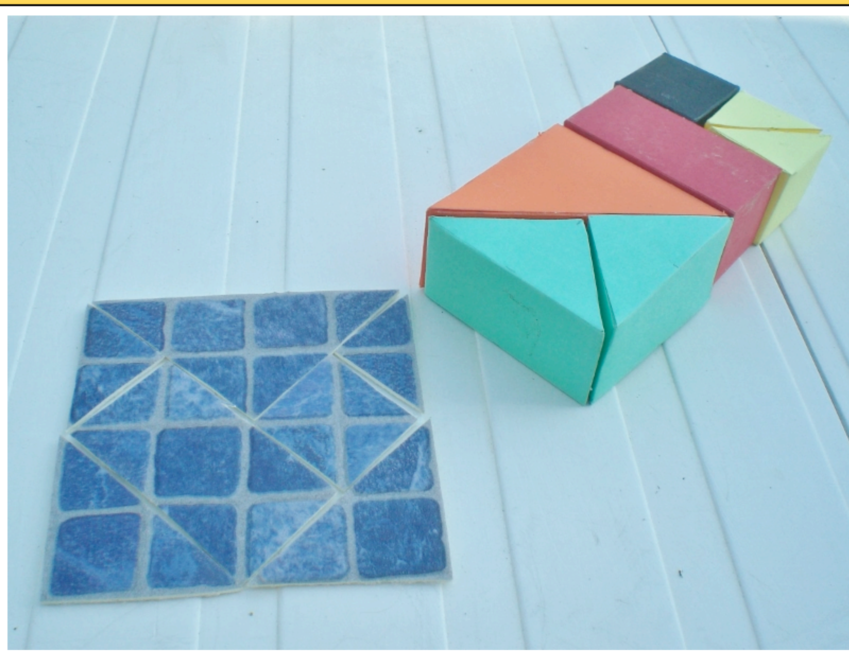
A.P.M.E.P. LORRAINE

François DROUIN

LE CARRÉ DE METZ

ET

LE PAVÉ DE METZ



François DROUIN

LE CARRÉ DE METZ

ET

LE PAVÉ DE METZ

Préface de Jean FROMENTIN

Publication de la régionale A.P.M.E.P. Lorraine
Brochure n°14, 2014

Dessin de Pol Le Gall paru dans le numéro 42 de la revue PLOT (APMEP 2013)

© APMEP-Régionale Lorraine 2014

Imprimé en mars 2014 par l'atelier central de reprographie
de l'Université de Lorraine (Nancy)
I.S.B.N. 978-2-906476-13-4

Préface

C'est l'amitié et la proximité de pensée avec François Drouin qui m'ont fait accepter d'écrire la préface de cette brochure à l'esprit de laquelle j'adhère complètement. « Esprit », oui, mais c'est plutôt du concret que François nous propose.

À une époque où les écrans envahissent notre environnement (ce n'est pas une critique, c'est un constat), où il semble qu'il faille absolument passer par ces nouveaux outils technologiques pour être efficace dans son enseignement (là, c'est plutôt une critique !), cette brochure nous rappelle combien il est important de faire manipuler des objets matériels (les objets virtuels seront ensuite d'autant mieux perçus), pour que les élèves s'approprient les connaissances mathématiques, qu'ils les « touchent du doigt » aux sens propre et figuré, qu'ils les « vivent », et que ces connaissances deviennent pour eux « naturelles ».
Je peux d'autant mieux défendre ce point de vue que cette « matérialisation » des mathématiques a été le fil conducteur de toute ma carrière d'enseignant. C'est le Polydron, le Lego, le Meccano dont vous avez pu lire les articles dans la revue PLOT de l'APMEP. Il y a aussi le Spirograph qui permet de concrétiser, avec de belles épicycloïdes, la division euclidienne, les multiples, les diviseurs, le PGCD et le PPCM, et bien sûr les puzzles proposés dans les brochures JEUX de l'APMEP dont les activités rejoignent celles de cette brochure et auxquelles François a beaucoup participé.
Toutes ces activités conçues à partir de divers matériels permettent de démystifier les mathématiques, de les rendre attrayantes, et surtout de les faire « vivre » en installant chez les élèves de bonnes images mentales qui leur permettront, par la suite, de recevoir d'autant mieux les objets virtuels qui nous envahissent.

Ce qui m'a le plus étonné dans le Carré de Metz, c'est que ce puzzle, par sa simplicité, (cinq triangles rectangles isocèles, un rectangle et un carré — tiens, sept pièces ! —) offre une immense richesse mathématique, et ceci dès les premiers niveaux de l'école primaire. Ce sont des activités de reproductions « matérielles » de polygones plus ou moins classiques ; des activités mettant en œuvre les symétries axiale et centrale par retournement ou demi-tour des pièces ; tout un travail sur les agrandissements et réductions et donc sur les échelles ; une pratique des aires et des volumes sans formule, par dénombrement d'unités, activités qui développent les notions elles-mêmes d'aire et de volume.

Et oui, il est aussi question de volume et c'est une des idées géniales de François d'avoir pensé à donner de l'épaisseur à ce carré de Metz qui devient bien sûr le Pavé de Metz ! Le carré devient un cube, le rectangle un parallélépipède et les autres pièces des prismes à bases triangulaires. Le plus étonnant, c'est que ces sept pièces « épaisses » permettent de réaliser un cube et bien sûr beaucoup d'autres solides !

Vous doutez de mon propos ? Emparez-vous de cette brochure, réalisez les pièces, parcourez les pages, faites les activités proposées. Vous en redemanderez !

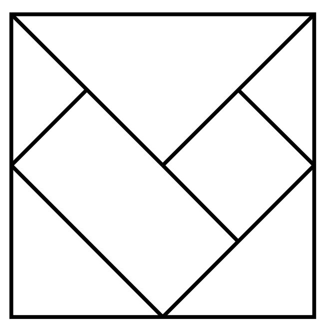
Jean Fromentin

0 - Naissance du Carré de Metz

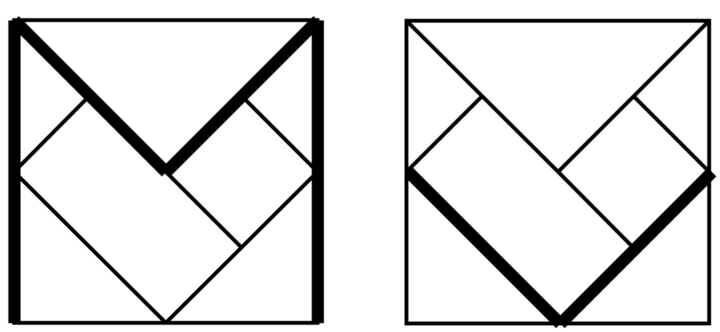
Partageons les Mathématiques

Le thème des Journées Nationales de l'A.P.M.E.P. fin octobre 2012 à Metz m'a incité à créer ce puzzle. À cette époque, je travaillais à l'I.U.F.M. sur le site de cette ville, mes étudiants préparaient le concours pour devenir Professeur des Ecoles : j'ai ainsi favorisé des pistes d'utilisation pouvant être mises en œuvre dans leurs futures classes.
J'ai volontairement choisi un découpage en pièces admettant toutes au moins un axe de symétrie, les jeunes élèves n'ont ainsi pas à se soucier des faces à utiliser. Cela permet le découpage des puzzles dans des morceaux de revêtement de sol dont les faces sont différenciées. Ce matériau est peu coûteux, se découpe aisément avec une paire de ciseaux, sa souplesse fait éviter les risques de blessures dues à des maladresses lors de manipulations.

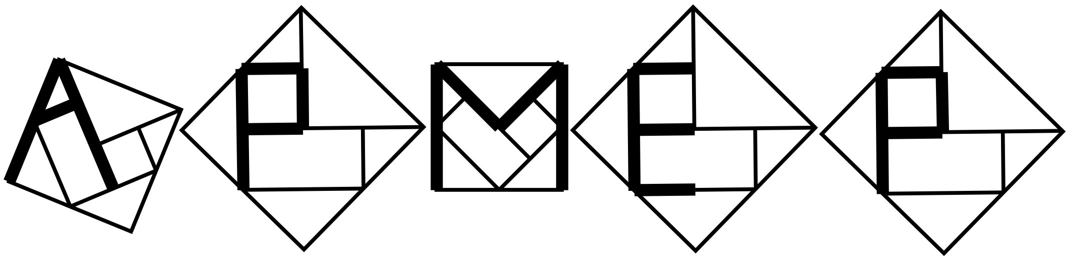
J'ai favorisé les triangles, rectangles et carrés qui sont les polygones rencontrés de façon précoce par les jeunes élèves.



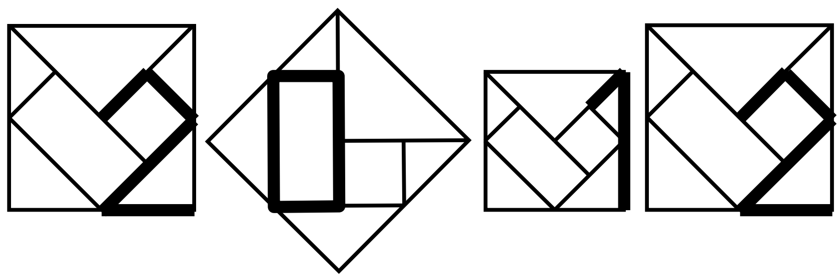
Le puzzle créé, j'y ai vu le M de Metz, de Moselle, de Meurthe-et-Moselle et de Meuse, et également le V de Vosges.



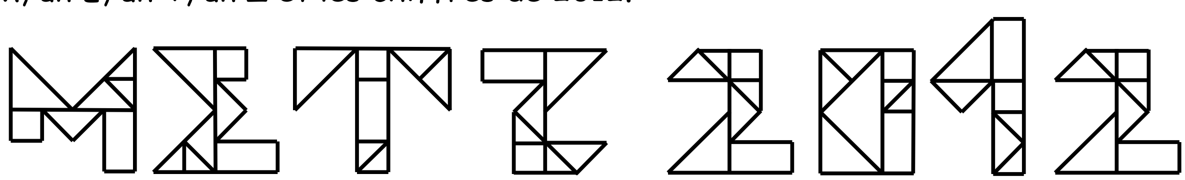
J'y ai également vu les lettres du sigle de notre association :



J'ai poursuivi ma recherche. J'y ai vu les chiffres formant le nombre 2012, année de nos Journées à Metz.



Joëlle Agamis (Collège de Montmédy) a réussi à assembler les pièces pour former un M, un E, un T, un Z et les chiffres de 2012.



Rachel François (Ecole de Moyen) et Walter Nurdin (IUFM de Lorraine) ont réalisé un bel assemblage coloré des pièces pour décorer la tribune de la salle de l'Arsenal, lieu de l'inauguration et de la première conférence des Journées.

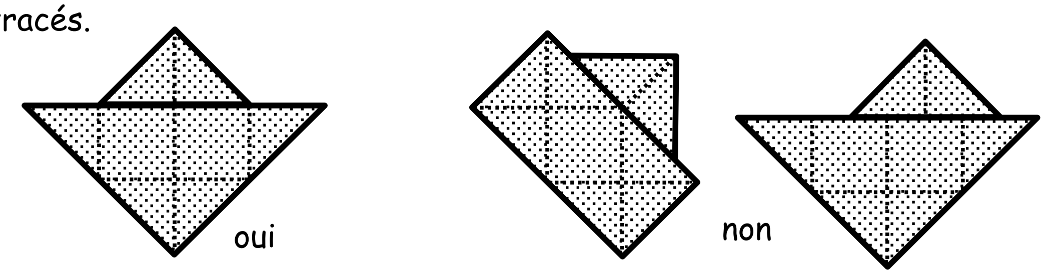
Mes premières recherches ont été faites avec un puzzle découpé dans un carré non quadrillé de 12 cm de côté. Petit à petit, il m'est apparu l'intérêt de pièces sur lesquelles étaient visibles des éléments du quadrillage dans lequel elles étaient découpées : cela facilite leur manipulation et l'éventuelle reproduction par les élèves de créations de formes nouvelles.
Un premier quadrillage formé de carrés de 3 cm de côté a été utilisé. Il a été exploité avec mes étudiants de l'I.U.F.M. ou dans les classes des Professeurs des Écoles m'ayant permis de tester en situation l'intérêt de ce nouveau puzzle : Rachel François à l'école de Moyen (54) et Philippe Paquot à l'école de Sampigny (55).

Des documents ont été petit à petit déposés sur l'ancien site de la régionale A.P.M.E.P. Lorraine. Le site étant en reconstruction suite à la malveillance d'un hacker, ils ne sont plus accessibles depuis l'automne 2013.
Ils ont été repris, corrigés et complétés pour l'écriture de cette brochure, elle même accompagnée d'un dossier qui sera téléchargeable dans le coin « Jeux » du nouveau site de l'A.P.M.E.P. Lorraine.
Ce dossier sera nommé « Carre_Metz_complements » : dans l'attente de la finalisation du nouveau site (www.apmeplorraine.fr), il peut être demandé à l'adresse contact@apmeplorraine.fr.

Assemblage des pièces

Trois types d'assemblages sont évoqués.
Pour le premier, les seules contraintes étaient d'utiliser les sept pièces, de ne pas les faire se chevaucher et de donner un nom aux assemblages réalisés. Ceux-ci peuvent être ensuite proposés pour un recouvrement par les sept pièces du Carré de Metz. Une présentation dans un ordre croissant de difficulté a été tentée.

Pour le deuxième, une contrainte supplémentaire a été ajoutée :
Deux pièces pourront être accolées si elles assurent le prolongement des pointillés qui y sont tracés.



Utiliser des puzzles géométriques dont les pièces laissent visibles un quadrillage est peu présent dans les jeux du commerce, dans les manuels ou les documents téléchargeables. Les brochures de l'A.P.M.E.P., « Jeux Ecole 1 » et « Jeux 8 » utilisent un quadrillage avec le Puzzle de Marine, « Jeux Ecole 2 » fait de même pour l'activité 1 du Puzzle « Octogramme ».

Avec de jeunes élèves, cette deuxième contrainte aura besoin d'un temps d'appropriation. Elle facilite cependant les manipulations pendant les temps de recherche de recouvrement de configurations ainsi que la reproduction sur papier quadrillé des polygones créés. De plus, lorsque deux pièces sont accolées, est vécue la mise bout à bout des traits du quadrillage, préparant le fait que dans certaines situations, le prolongement de « traits droits » sera intéressant (utile ?) : la notion de droite se construit petit à petit. Enfin, la conservation des directions du quadrillage fait vivre ce qui s'appellera plus tard « droites parallèles et perpendiculaires ».

Le troisième type d'assemblage met en avant des déplacements de pièces pour passer d'une configuration à une autre. Les mots et expressions « symétrie centrale » ou « rotation », « translation » ont été remplacés par « demi-tour » et « glissement », privilégiant la compréhension du geste amenant au déplacement à l'utilisation du vocabulaire mathématique éventuellement utilisé plus tard dans l'enseignement secondaire.

Triangles, carrés, rectangles avec 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 pièces

Les recherches présentées peuvent être proposées comme un défi : réussir à construire le polygone demandé en utilisant de plus en plus de pièces. Des impossibilités apparaissent : selon l'âge de ceux à qui ces défis sont proposés, la réponse pourra être « je ne réussis pas » ou « est-ce impossible ? ». La différence entre ces deux réponses n'est pas toujours claire dans la tête de certains élèves. Avec des élèves plus âgés, des éléments de preuve des impossibilités pourront être élaborés.
Bien que les trapèzes ne figurent ni dans les programmes de l'École élémentaire, ni dans les programmes de l'enseignement secondaire, il ne semble pas néfaste de les faire rencontrer aux élèves.

Des polygones avec les 7 pièces

Un triangle et des quadrilatères peuvent être réalisés avec les 7 pièces. Ils ont été rencontrés à la fin de la partie « **assemblage des pièces** » et ne sont pas repris ici. Une grande place est maintenant faite aux paires de polygones pouvant être réalisées. Les pièces du Carré de Metz fourni dans cette brochure en permettent le recouvrement et autorisent l'utilisation de cette activité avec de jeunes élèves.
Rechercher des paires de polygones isométriques est tentant : il semble que ce type de paire n'existe que dans le cas d'un carré et d'un trapèze rectangle.
A la fin des propositions, des solutions fournies sans quadrillage apparent pourront venir en aide au lecteur ou à ses élèves.
Ce travail de recouvrement est une occasion d'utiliser les noms des quadrilatères construits et reconnus de manière perceptive (le trapèze n'a pas été exclu).

Les pièces et des éléments de symétrie

Les cinq types de pièces formant le Carré de Metz possèdent au moins un axe de symétrie. De ce fait, les utilisateurs n'ont pas à se soucier de leur éventuel retournement et les « bricoleurs » n'ont pas à rendre visible le quadrillage sur les deux faces. Deux des pièces admettent également un centre de symétrie. Les propositions faites débordent donc de ce qui est rencontré à l'École élémentaire.
Des assemblages de 2 ou 3 pièces sont d'abord proposés, ils pourront être complétés par des assemblages de plus de 3 pièces. Concernant les assemblages de 7 pièces, des déplacements symétriques de paires de pièces sont utilisés.
Les pistes présentées pour réaliser des configurations à pourtour symétrique transforment les symétries utilisées en « outils » facilitant la créativité de celui qui manipule les pièces. Cet aspect donne du sens à l'introduction de la symétrie orthogonale et de la symétrie centrale avant qu'elles ne puissent devenir plus tard des outils pour démontrer.

Agrandissements et réductions

Les notions d'agrandissement et de réduction donnent du sens à la notion d'échelle. Les configurations proposées mettent en évidence les liens entre l'échelle et les longueurs des côtés et la non-pertinence de ces liens à propos des aires. En classe, la notion d'échelle est souvent liée à des plans ou à des cartes et donc à des réductions. Les échelles liées à des agrandissements pourront par la suite être reprises lors de l'étude d'images d'insectes par exemple.

Sous-figures

Il s'agit d'un travail d'anticipation pour dépasser les fonctionnements par « essais erreurs ». Deux pièces doivent être utilisées : où pourra être la frontière entre ces deux pièces ? Les dessins de ces deux pièces vont devenir des sous-figures de la figure proposée. Des renseignements sont donnés à propos du tracé de cette frontière. Il est possible que des élèves ayant bien en tête les images des pièces du Carré de Metz n'aient pas besoin de cette aide. Cependant le fait de « relier deux points », « prolonger un côté », « utiliser le milieu d'un côté », « utiliser un axe de symétrie » sont des compétences mathématiques qu'il sera utile de faire formaliser si elles ont été utilisées quelque peu inconsciemment : « Explique ce que tu as tracé. »

Des dessins du Carré de Metz

Ces dessins pourront être proposés en fin de Cycle 3 : ils sont de véritables problèmes à résoudre dans le domaine géométrique. Des élèves pourraient être tentés d'utiliser des notions d'agrandissement en lien avec la proportionnalité. Cependant, ces activités ont été conçues pour mettre en œuvre des propriétés géométriques constatées de façon instrumentée sur le dessin initial : des milieux ou des reports de longueurs égales, des cotés perpendiculaires, la reconnaissance d'un carré, d'un rectangle et de triangles rectangles isocèles. Le carré proposé à reproduire a été dessiné sans quadrillage apparent. Les reproductions sont proposées dans des orientations différentes de celles du dessin de départ, sur du papier quadrillé ou du papier uni. Lors du travail sur papier quadrillé, réussir à retrouver le dessin du carré contenant les sept pièces facilite la poursuite des tracés. Sur papier uni, ce carré est plus difficile à retrouver à partir de la pièce proposée : des reports de longueurs, des tracés de perpendiculaires seront sollicités.

Le Carré de Metz se construit petit à petit

Trois types de « quadrillages » différents sont utilisés. Étape par étape, le Carré de Metz est dessiné. En utilisant trois unités d'aire différentes, est demandée la mesure de l'aire des pièces déjà placées : il n'est pas inutile de faire rencontrer des mesures d'aire d'une même figure écrites avec des nombres différents. La proposition 1 ne nécessite qu'un dénombrement des unités d'aire, la proposition 2 peut mettre en œuvre des regroupements de demi-unités d'aire, la proposition 3 fait rencontrer une mesure d'aire égale à une écriture fractionnaire inférieure à 1.

Ce qui est obtenu dans la colonne 7 pourra être mis en relation au collège avec ce qui se nommera « effectif cumulé » et « fréquence cumulée »…

Jeu de l'Oie et Carré de Metz

Le fonctionnement est celui présenté dans la brochure « Jeux de l'Oie mathématiques » éditée il y a quelque temps par l'IREM de Lorraine. Un plateau avec des nombres coloriés se trouve dans le dossier d'accompagnement téléchargeable. Ce type de jeux a été conçu pour être utilisé en autonomie par les élèves, l'enseignant restant attentif à la bonne utilisation des fiches « solutions ». Les questions abordent d'une part les propriétés géométriques des dessins des pièces du Carré de Metz, d'autre part des liens entre la masse des pièces et leur aire. L'utilisateur peut ne pas utiliser certaines questions et les remplacer par d'autres qu'il jugera mieux adaptées à ce qu'il pense avoir été acquis par ses élèves.

Le Pavé de Metz

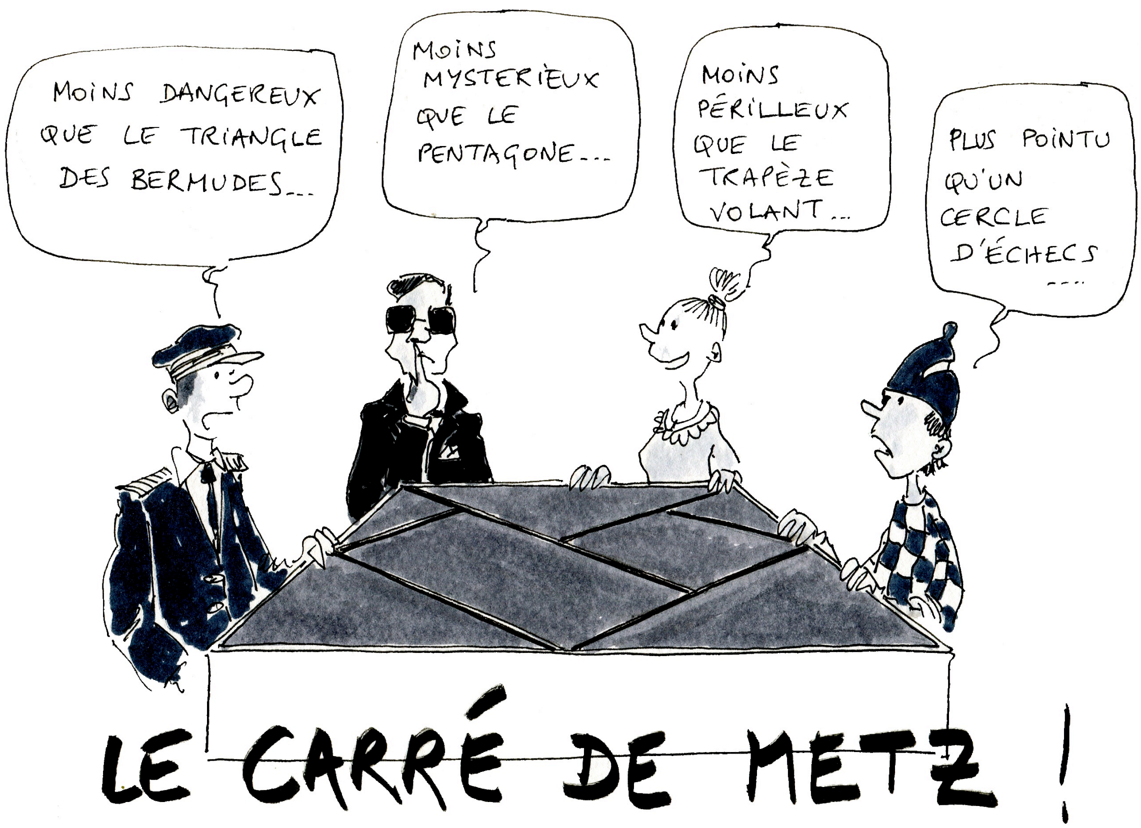
A partir du Carré de Metz, puzzle plat, il était tentant de donner de l'épaisseur aux pièces et obtenir un nouveau puzzle permettant la réalisation de solides. Des patrons des pièces sont fournis. Ils pourront être photocopiés sur du papier épais, découpés puis collés. Les patrons proposés ont une forme très classique, d'autres pourront être recherchés.

Première partie : Des dessins présentent des solides à reconstruire avec des pièces du Pavé de Metz. Les motifs des pièces se retrouvent dans les dessins proposés, facilitant un travail à propos de ce que l'œil voit, de ce que le doigt peut toucher et de ce qui est dessiné.

Deuxième partie : Des manipulations des pièces permettent la réalisation de solides de même volume ou d'établir des relations entre des solides de volumes différents. Il y a là l'occasion de donner du sens à la notion de volume. Les mesures de volumes sont abordées sans utilisation de formules mais en utilisant des unités de volumes variées.

Troisième partie : Des jeux dits « du portrait » sont souvent mis en œuvre. Des listes de propriétés sont utilisées, cependant la recherche du minimum de propriétés permettant la reconnaissance du solide ne doit pas être négligée, elle amènera au collège la notion de « propriété caractéristique ». Une proposition est fournie, d'autres pourront avec profit être imaginées par les élèves.

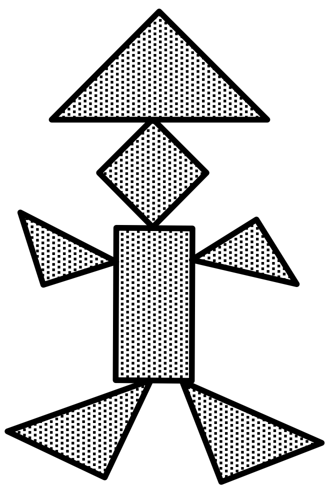
Quatrième partie : Ce qui est proposé complète ce qui a été fait avec le Carré de Metz. Les liens entre échelle et longueur des arêtes restent présents, ainsi que la non-pertinence de ces liens à propos des volumes. En classe, la notion d'échelle est rencontrée pour des dessins ou des figures planes. Il y ici l'occasion de la faire vivre avec des solides.



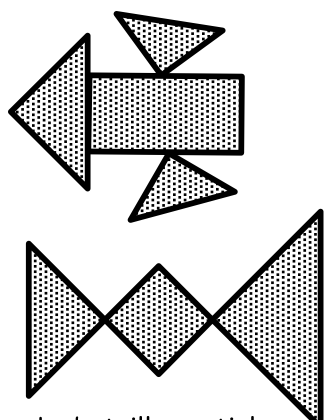
Dessin de Pol Le Gall

1 - Assemblage des pièces

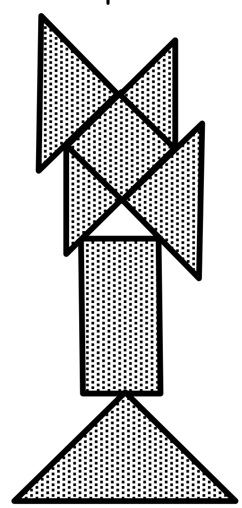
Avec de très jeunes élèves, le respect des alignements des lignes du quadrillage n'est pas aisé. En 2011, des étudiants de l'I.U.F.M. de Lorraine (site de Metz Montigny) ont créé des assemblages pendant un temps de formation dépendant de l'U.E.D.8 (prise en charge des publics à besoins éducatifs particuliers).
Le travail avec les dessins où les pièces sont apparentes met en œuvre la reconnaissance des pièces et leur « orientation ».
Elles pourront également être utilisées en fin de cycle 1, être intégrées dans un récit créé par des élèves puis illustré en Arts visuels. Plus l'assemblage des pièces est compact, plus il va être difficile à reconstituer. Nous pourrons considérer que les configurations proposées à la suite vont de la plus simple à moins simple.
L'ensemble des créations se trouve dans le document d'accompagnement téléchargeable. Elles sont fournies dans des dimensions utilisables par les élèves.



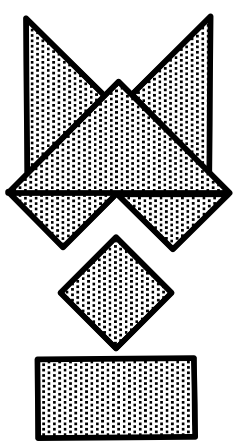
Monsieur le coureur



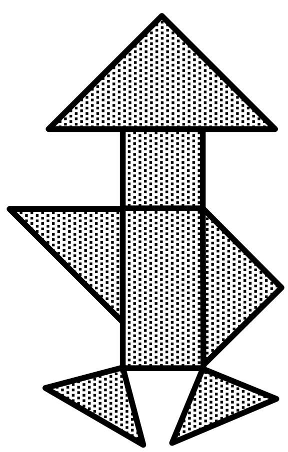
La bataille spatiale



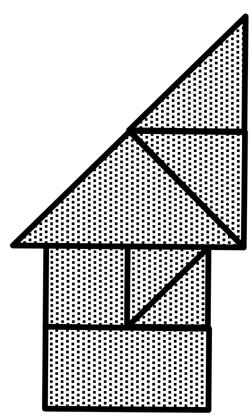
Le moulin



Monsieur le chat

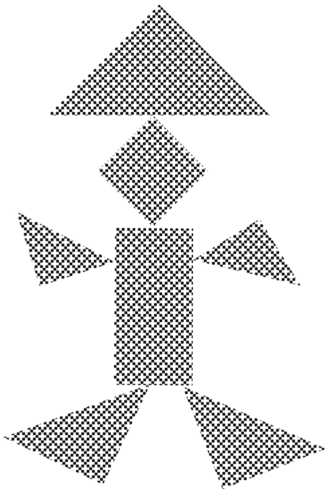


Un chinois

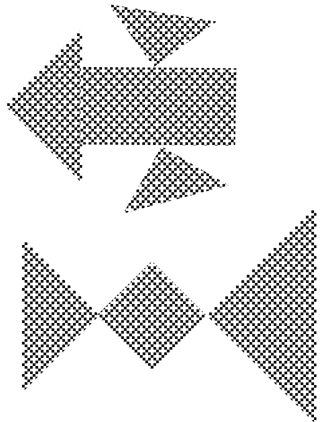


La maison à la
grande cheminée

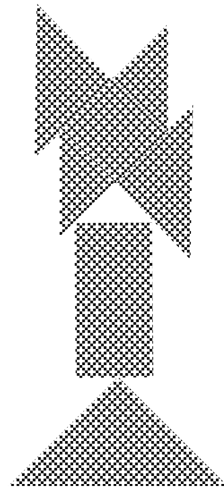
Les silhouettes à recouvrir



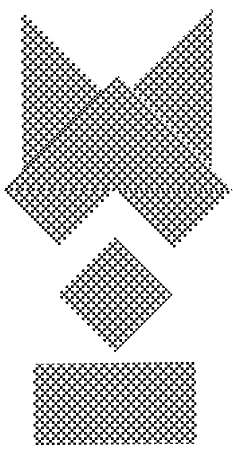
Monsieur le coureur



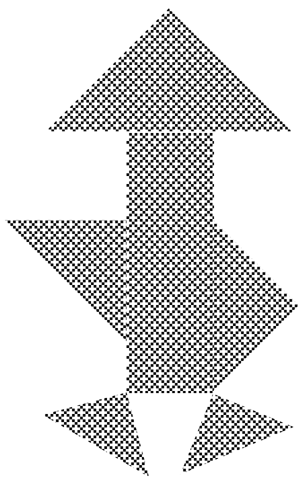
La bataille spatiale



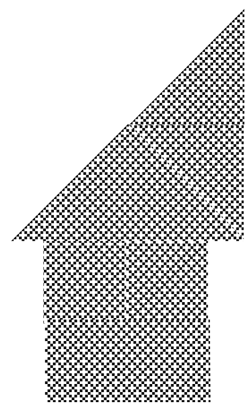
Le moulin



Monsieur le chat

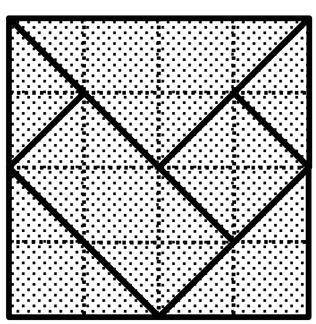


Un chinois

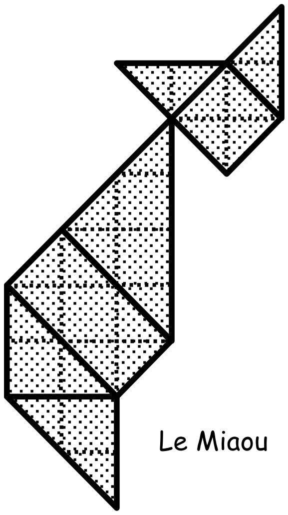


La maison à la
grande cheminée

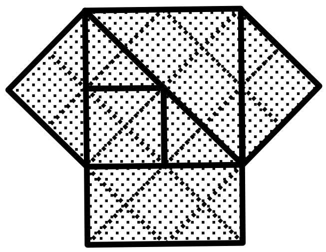
La recherche se fait par essais-erreurs, des formes sont éventuellement reconnues. Voici le puzzle utilisé pour réaliser les dessins ci dessus : après photocopie, il permet de travailler sur ce document papier.



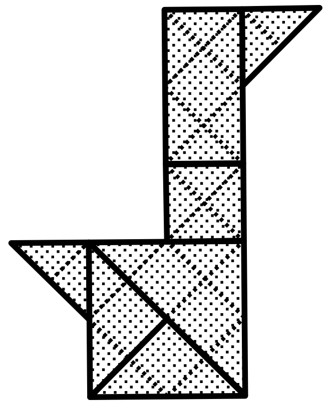
Voici d'autres assemblages imaginés en 2012 par des étudiants de l'IUFM de Lorraine (site de Metz Montigny) dans le cadre de leur U.E.D.8 (prise en charge des publics à besoins éducatifs particuliers). L'ensemble des créations se trouve dans le document d'accompagnement téléchargeable, dans des dimensions utilisables par les élèves.



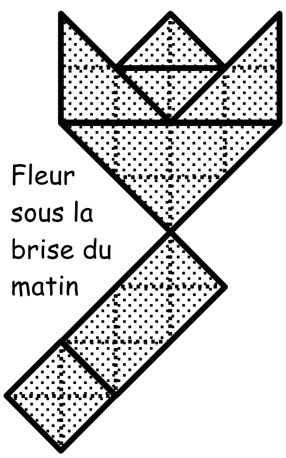
Le Miaou



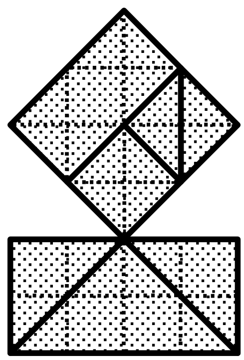
Une coupe



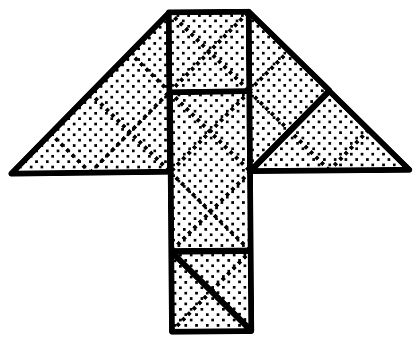
Une oie



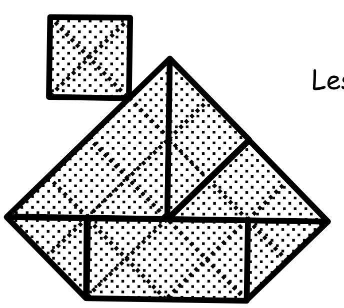
Fleur sous la brise du matin



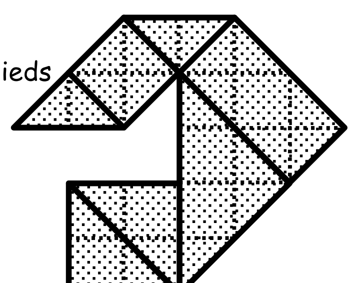
Une pensée (une fleur, quoi !)



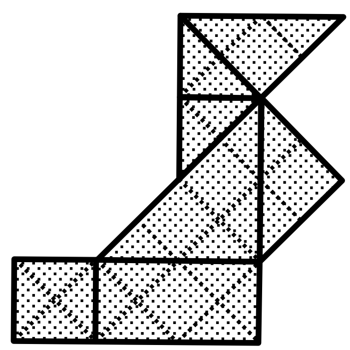
Un ange



Le bateau

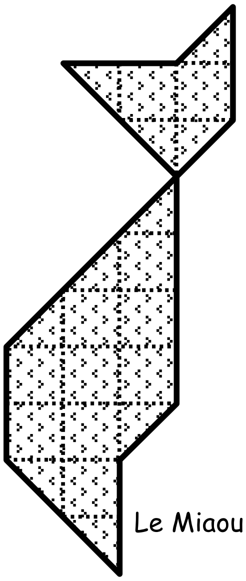


Le gymnaste

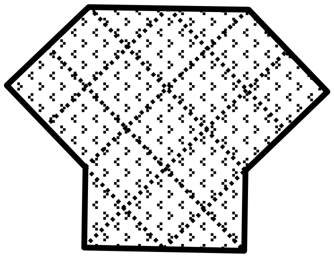


Un chien docile

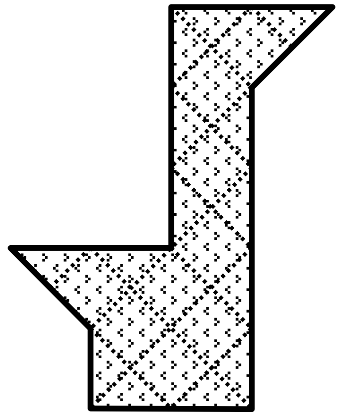
Les silhouettes à recouvrir



Le Miaou

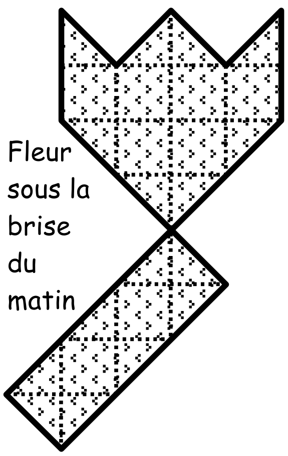


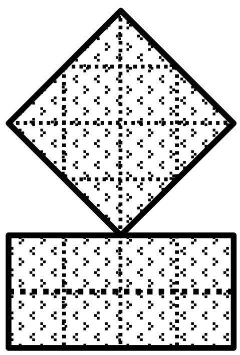
Une coupe



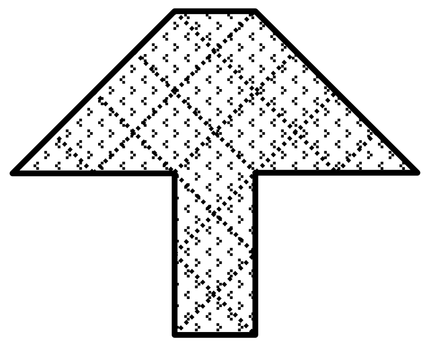
Une oie

Fleur sous la brise du matin

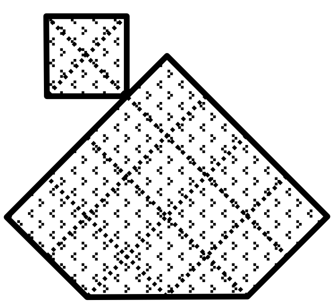




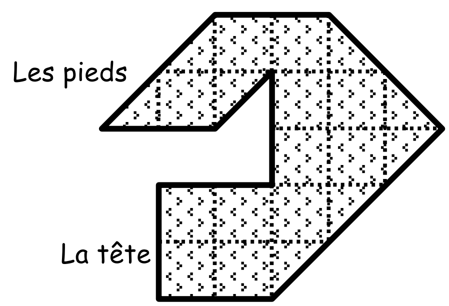
Une pensée (une fleur, quoi !)



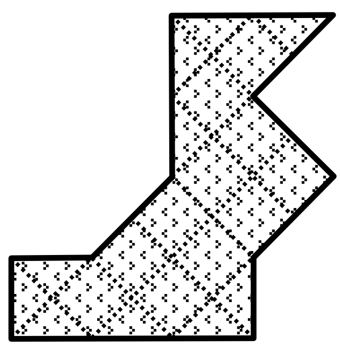
Un ange



Le bateau



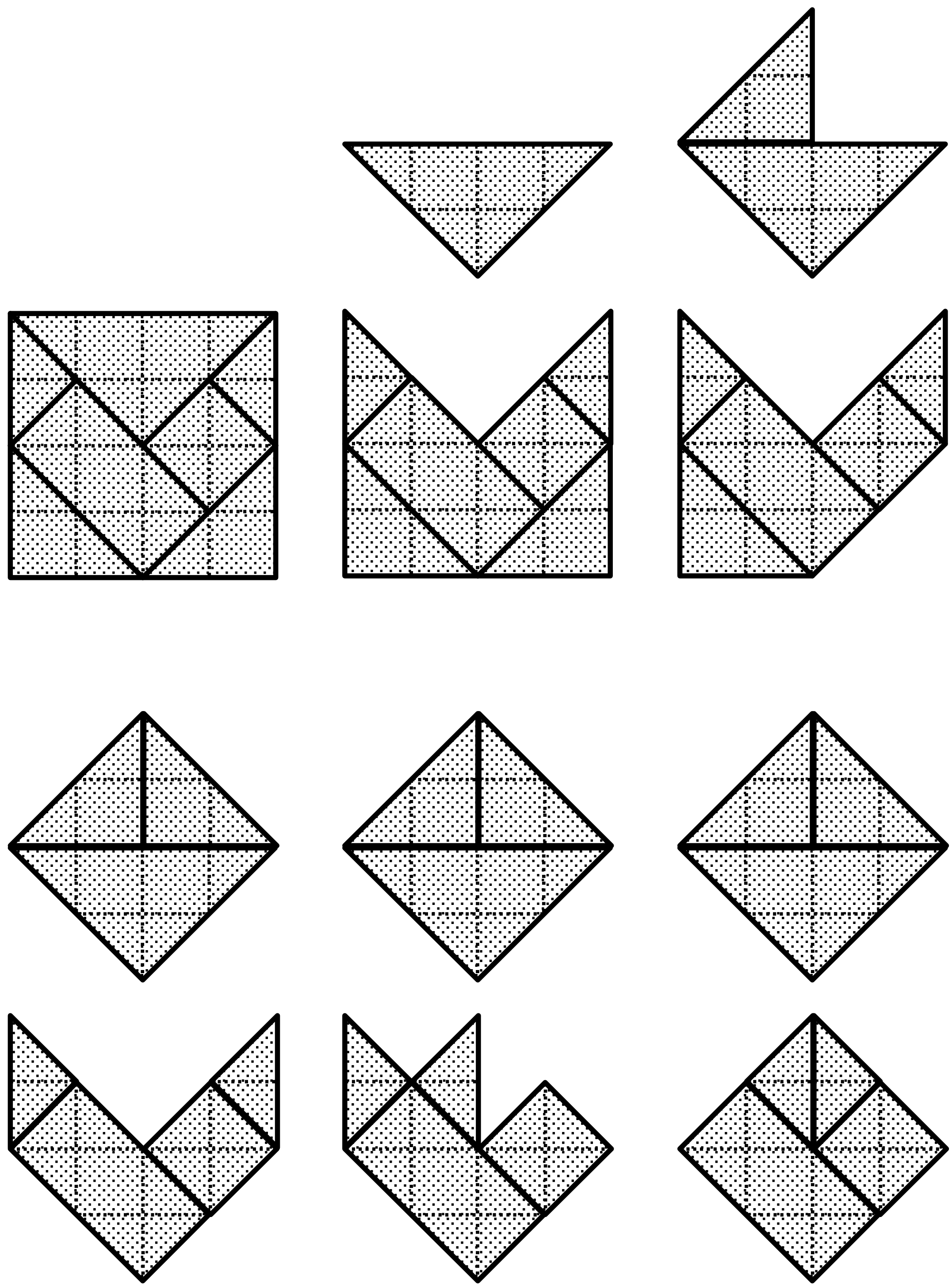
Le gymnaste



Un chien docile

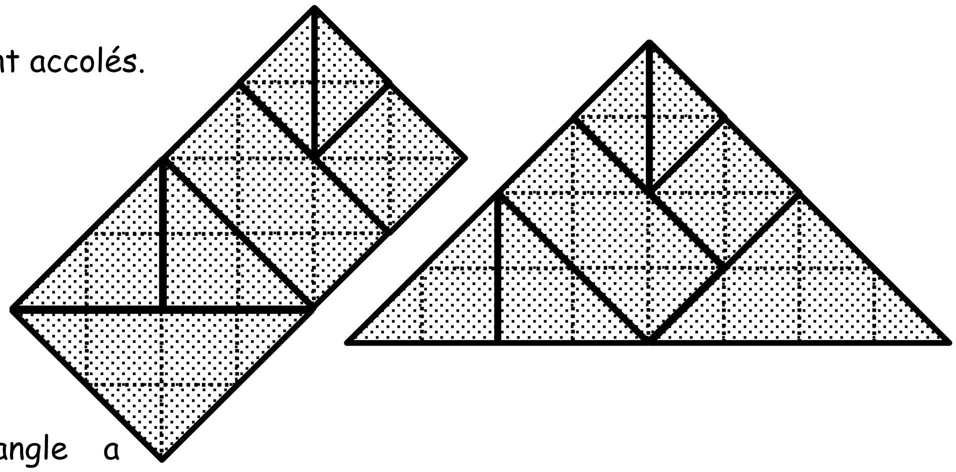
Aide : disposer les pièces de telle sorte que les traits du quadrillage apparent et celui des formes à recouvrir soient dans les mêmes directions.

Pour mettre en œuvre d'autres contenus mathématiques

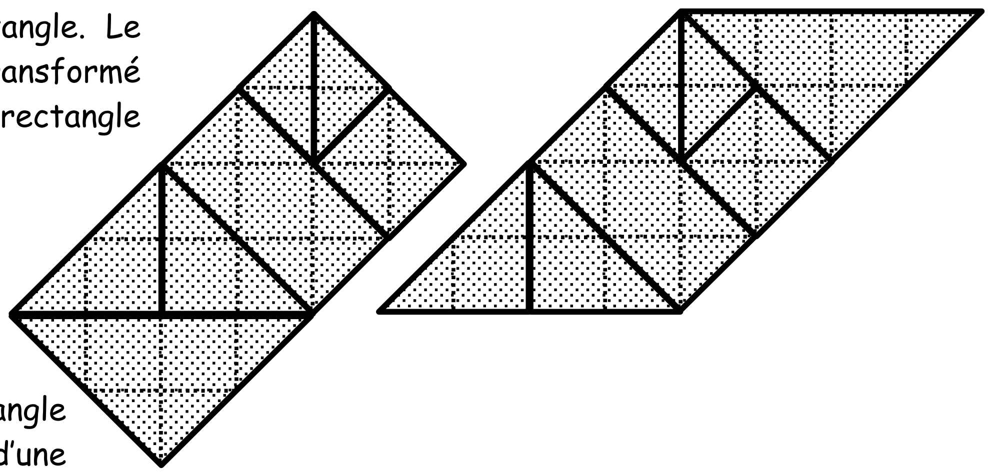


Les pièces déplacées ont glissé sans changer d'orientation. Le carré initial s'est transformé en deux carrés supposables.

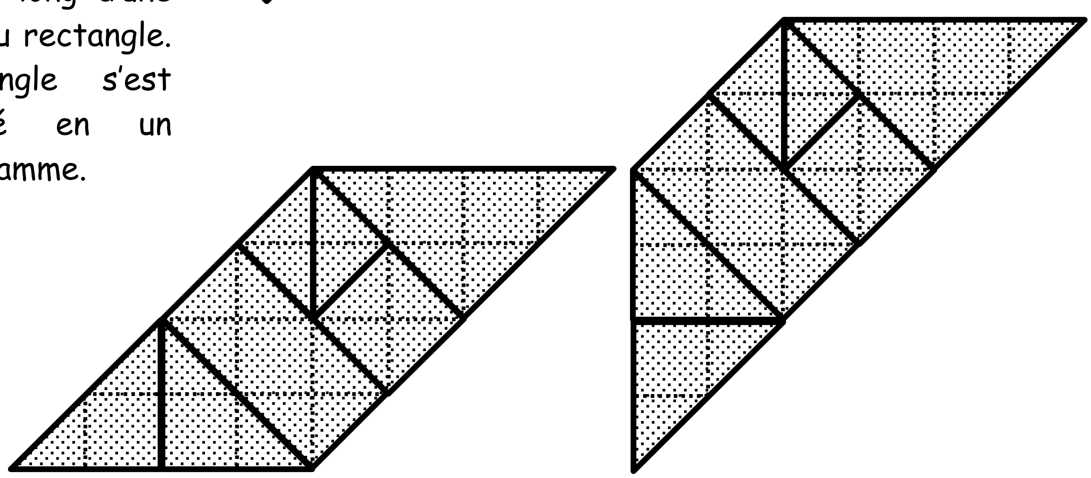
Les deux carrés sont accolés.



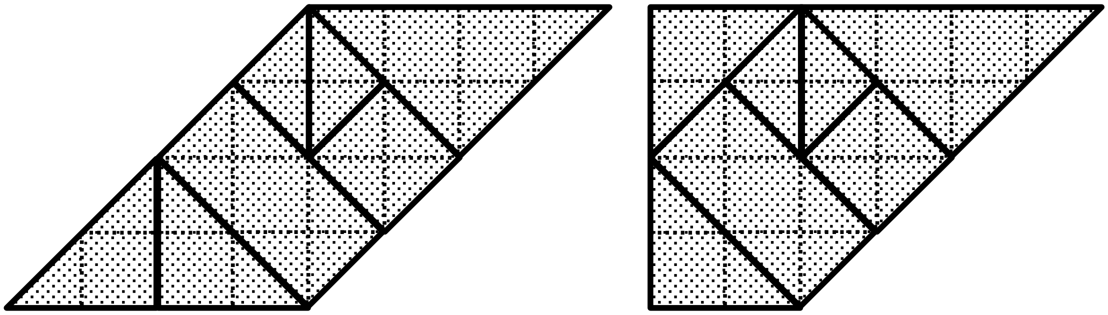
Le «grand» triangle a tourné d'un demi-tour autour du milieu d'une longueur du rectangle. Le rectangle s'est transformé en un triangle rectangle isocèle.



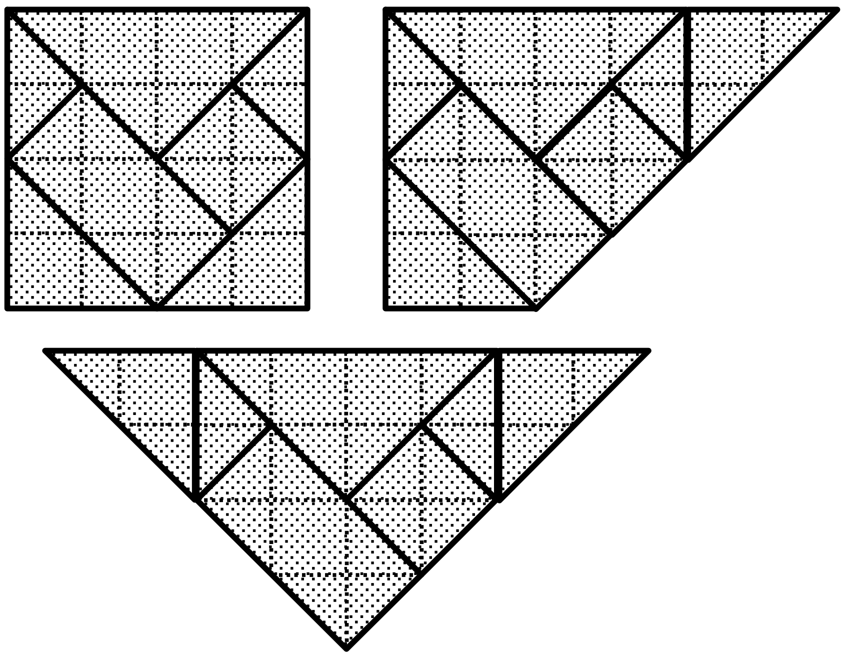
Le « grand » triangle a glissé le long d'une longueur du rectangle. Le rectangle s'est transformé en un parallélogramme.



Un « moyen » triangle a tourné d'un demi-tour autour du milieu d'un côté du parallélogramme. Le parallélogramme s'est transformé en un trapèze isocèle.



Un « moyen » triangle a tourné d'un demi-tour autour du milieu d'un autre côté du parallélogramme. Le parallélogramme s'est transformé en un trapèze rectangle.



Chaque « moyen » triangle a tourné d'un demi-tour autour d'un milieu de côté du carré initial. Le carré initial a été transformé en un triangle rectangle isocèle. Remarque : la solution obtenue est différente de celle obtenue à partir du rectangle.

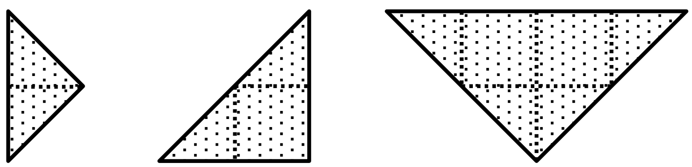
Les triangles, le rectangle et le carré du Carré de Metz admettant tous au moins un axe de symétrie, il n'est pas utile de retourner des pièces.

Volontairement, dans ce qui précède, les mots ou expressions « symétrie orthogonale », symétrie centrale », « rotation » et « translation » n'ont pas été utilisés. La manipulation et la verbalisation des gestes permettant leur déplacement sont l'occasion d'une rencontre avec les isométries qui seront éventuellement étudiées plus tard.

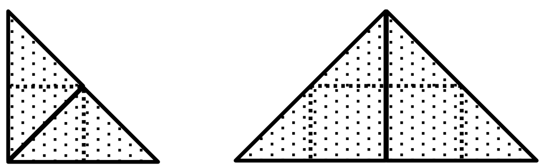
2 - Triangles, carrés, rectangles avec 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 pièces

Des triangles

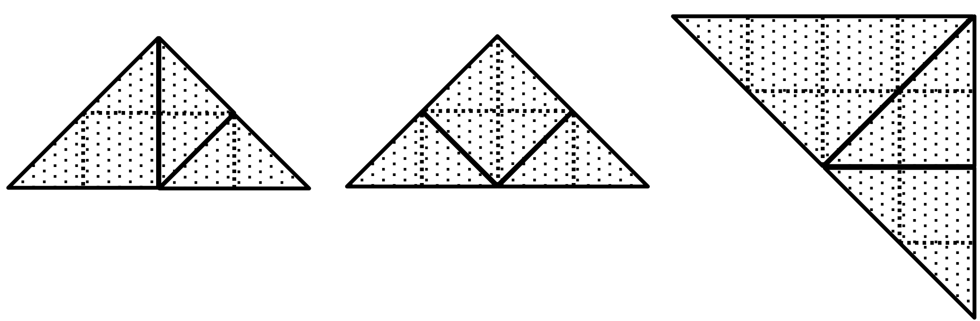
Avec une pièce, je peux réaliser un triangle rectangle isocèle.



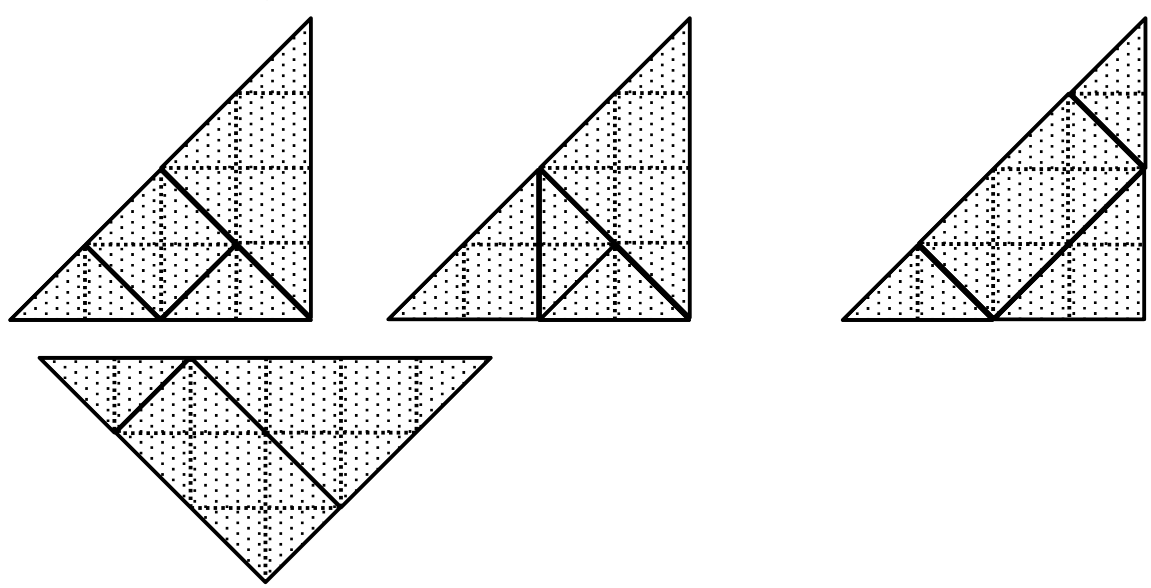
Avec deux pièces, je peux réaliser un triangle rectangle isocèle.



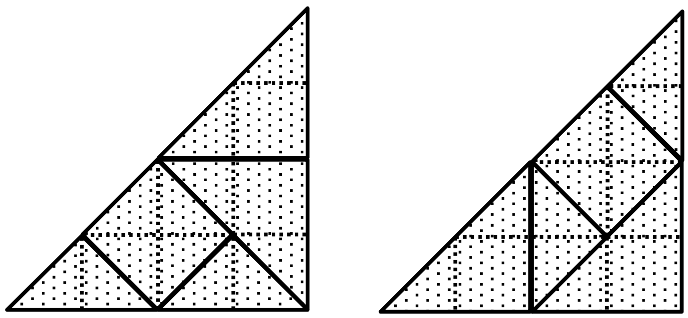
Avec trois pièces, je peux réaliser un triangle rectangle isocèle.



Avec quatre pièces, je peux réaliser un triangle rectangle isocèle.

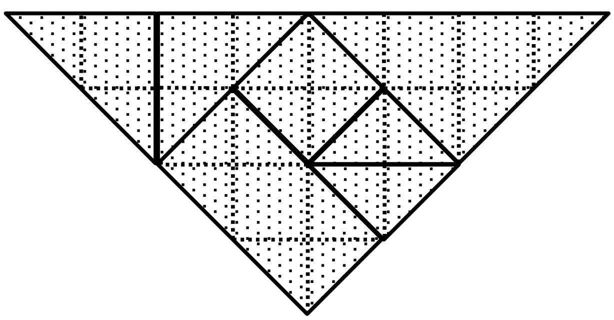


Avec cinq pièces, je peux réaliser un triangle rectangle isocèle.



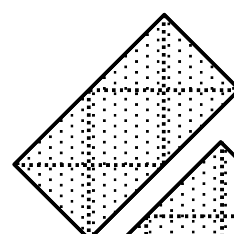
Avec six pièces, je ne sais pas réaliser un triangle rectangle isocèle.

Avec sept pièces, je peux réaliser un triangle rectangle isocèle.

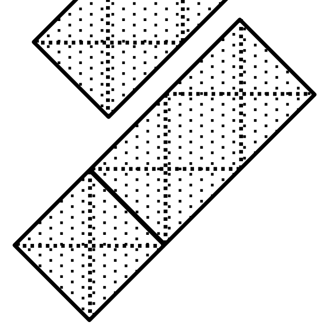


Des rectangles non carrés

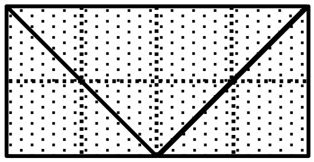
Avec une pièce, je peux réaliser un rectangle non carré.

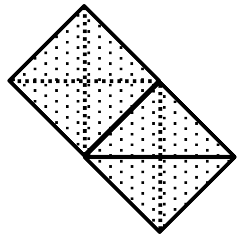


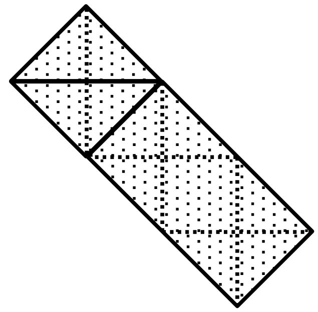
Avec deux pièces, je peux réaliser un rectangle non carré.



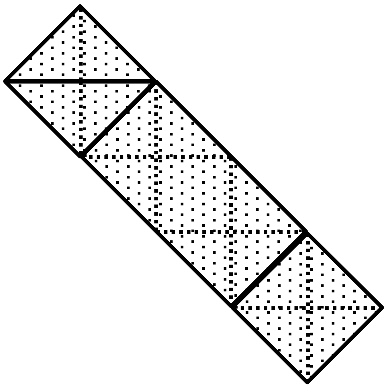
Avec trois pièces, je peux réaliser un rectangle non carré.

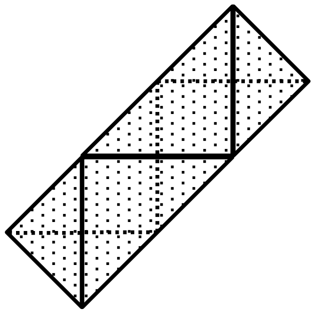


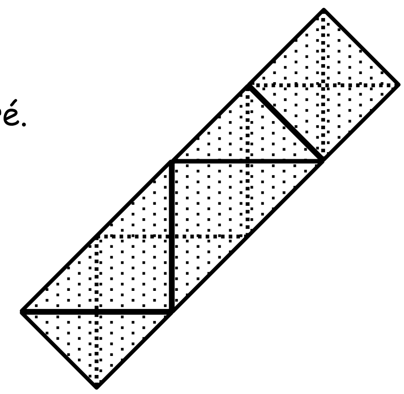




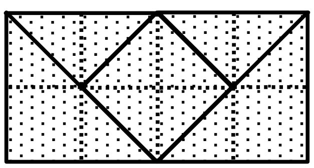
Avec quatre pièces, je peux réaliser un rectangle non carré.

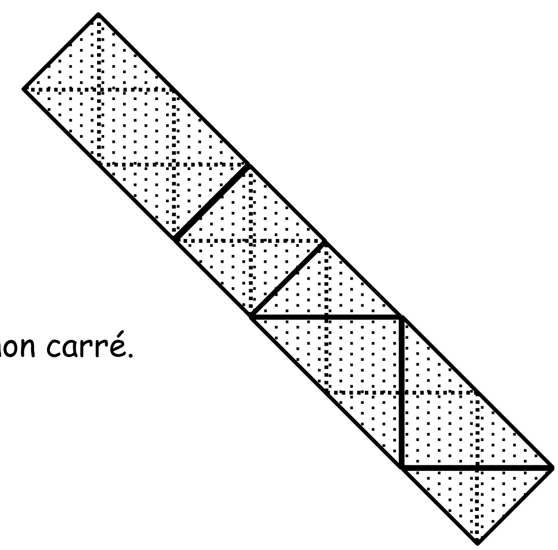






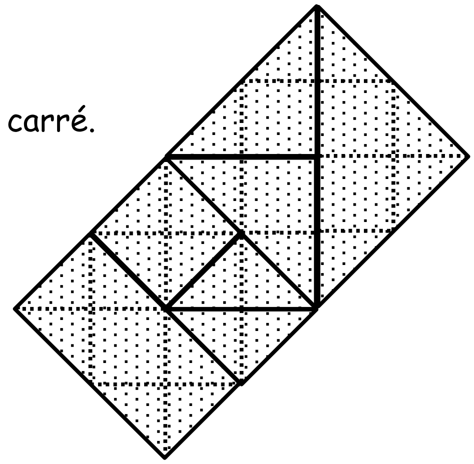
Avec cinq pièces, je peux réaliser un rectangle non carré.





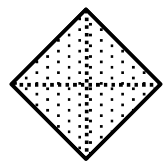
Avec six pièces, je peux réaliser un rectangle non carré.

Avec sept pièces, je peux réaliser un rectangle non carré.

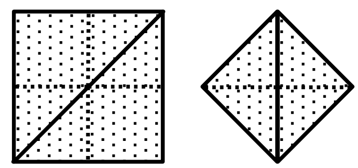


Des carrés

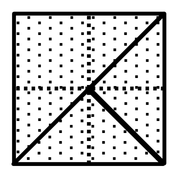
Avec une pièce, je peux réaliser un carré.



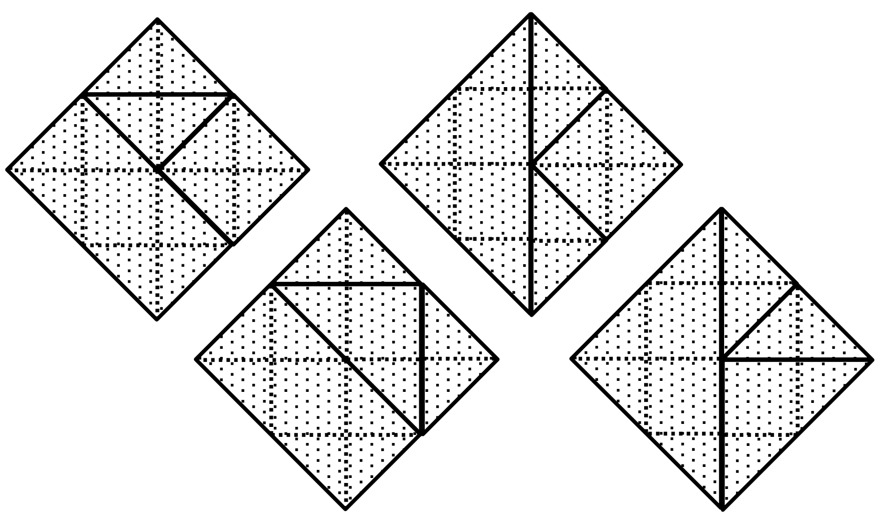
Avec deux pièces, je peux réaliser un carré.



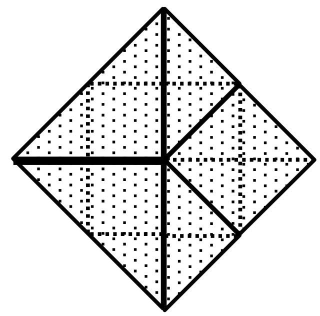
Avec trois pièces, je peux réaliser un carré.



Avec quatre pièces, je peux réaliser un carré.

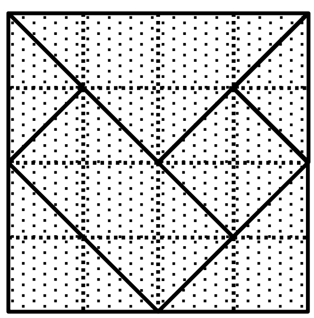


Avec cinq pièces, je peux réaliser un carré.



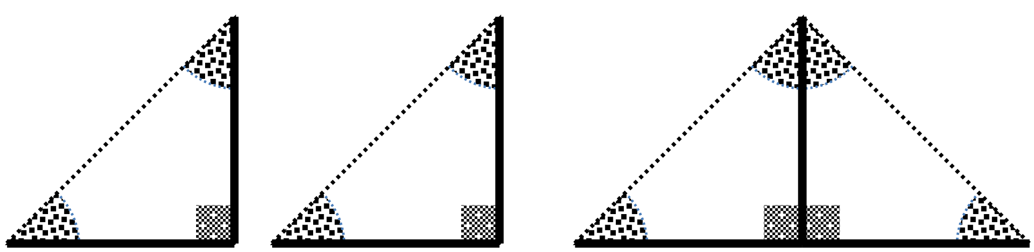
Avec six pièces, je ne sais pas réaliser un carré.

Avec les sept pièces, je retrouve le Carré de Metz.



Eléments de preuve

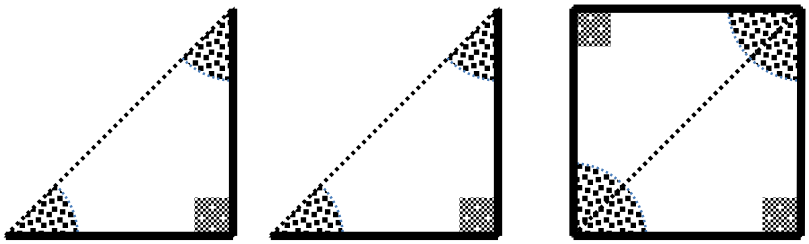
Pourquoi suis-je sûr que cet assemblage me fournit un triangle rectangle isocèle ?



Les deux pièces assemblées sont des triangles rectangles isocèles superposables, donc les traits en pointillés ont même longueur. De plus les deux angles droits m'assurent l'alignement des deux côtés ont un point commun. J'ai bien obtenu un triangle.

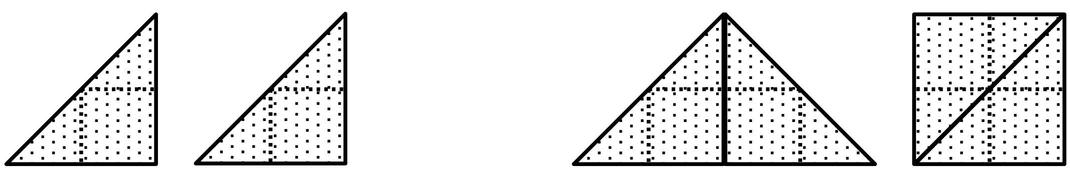
Un triangle rectangle isocèle a deux angles aigus égaux chacun à un demi angle droit. Je suis convaincu que le triangle obtenu a un angle droit et deux côtés de même longueur. C'est un triangle isocèle.

Pourquoi suis-je sûr que cet assemblage me fournit un carré ?

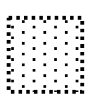


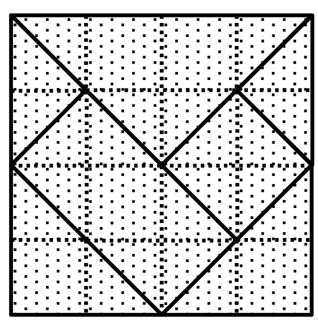
Le fait que les deux triangles rectangles isocèles soient superposables m'a permis d'obtenir un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur : c'est un losange. De plus en utilisant les demi angles droits, je suis sûr d'avoir obtenu un quadrilatère qui a quatre côtés égaux et quatre angles droits. Je suis donc sûr d'avoir obtenu un carré.
Ces deux exemples montrent que le passage de la géométrie perceptive à la géométrie déductive peut se faire assez tôt.

Plus tard, au collège, on verra des propriétés caractéristiques du carré permettant de ne pas avoir à s'assurer d'autant de choses. De plus, l'utilisation du quadrillage visible sur les pièces sera sollicitée pour des calculs de longueur par exemple.



Un carré avec 6 pièces ?



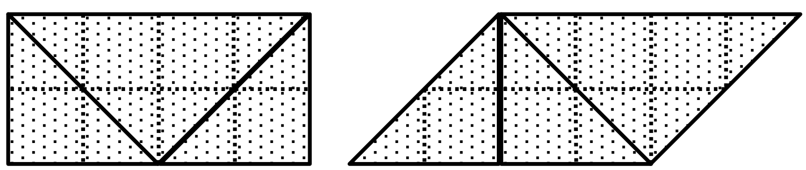


Si l'unité d'aire est l'aire d'un carreau du quadrillage, l'aire totale des pièces a pour mesure 16. L'aire d'une des pièces du Carré de Metz a pour mesure 1, 2 ou 4. Un carré formé avec 6 pièces aura donc une aire de mesure 15, 14 ou 12. Les carrés éventuellement formés avec 6 pièces ont leurs côtés soit parallèles aux lignes du quadrillage, soit parallèles aux diagonales des carreaux du quadrillage. De tels carrés ont des côtés soit entiers soit multiples de $\sqrt{2}$, ce qui n'est pas le cas des carrés de mesure d'aire 15, 14 ou 12. Je ne réussirai donc pas à construire un carré avec 6 pièces.

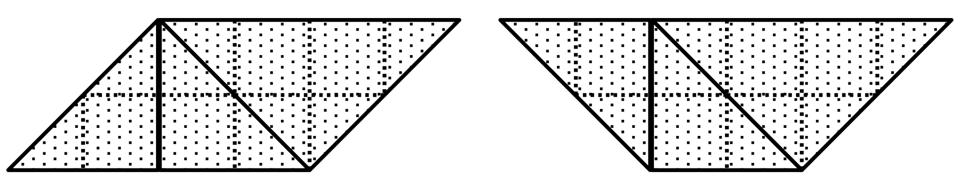
Un triangle avec 6 pièces ?

Je garde la même unité d'aire que précédemment. L'aire totale des pièces a pour mesure 16. L'aire d'une pièce a pour mesure 1, 2 ou 4. Un triangle formé avec 6 pièces aura donc une aire de mesure 15, 14 ou 12. Les angles des pièces n'étant que des angles droits ou des demi-angles droits, les triangles éventuellement construits avec 6 pièces ne seront que des triangles rectangles isocèles d'aire de mesure 15, 14 ou 12. Ces triangles isocèles peuvent être considérés comme des demi-carrés et leurs côtés seront soit parallèles aux lignes du quadrillage, soit parallèles aux diagonales des carreaux du quadrillage. De tels carrés ont des côtés soit entiers soit multiples de $\sqrt{2}$, ce qui n'est pas le cas des carrés ayant pour mesure d'aire 2×15, 2×14 ou 2×12. Je ne réussirai donc pas à construire un triangle avec 6 pièces.

Des parallélogrammes

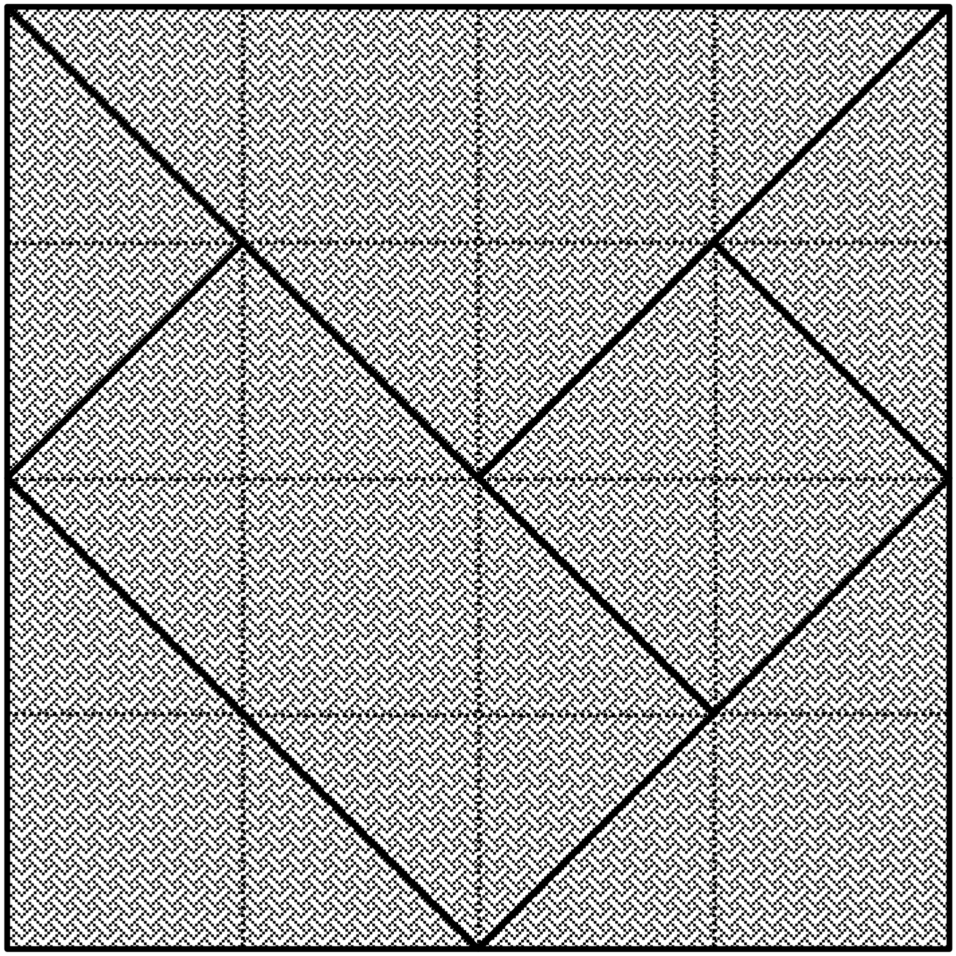


Les dessins des rectangles dessinés précédemment autorisent ce « glissement ». Aucune pièce du Carré de Metz n'est un parallélogramme, mais je peux en réaliser en utilisant 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 pièces.



Un autre déplacement transformera le rectangle en un trapèze isocèle. Aucune pièce du Carré de Metz n'est un trapèze isocèle, mais je peux en réaliser en utilisant 2, 3, 4, 5, 6 ou 7 pièces.

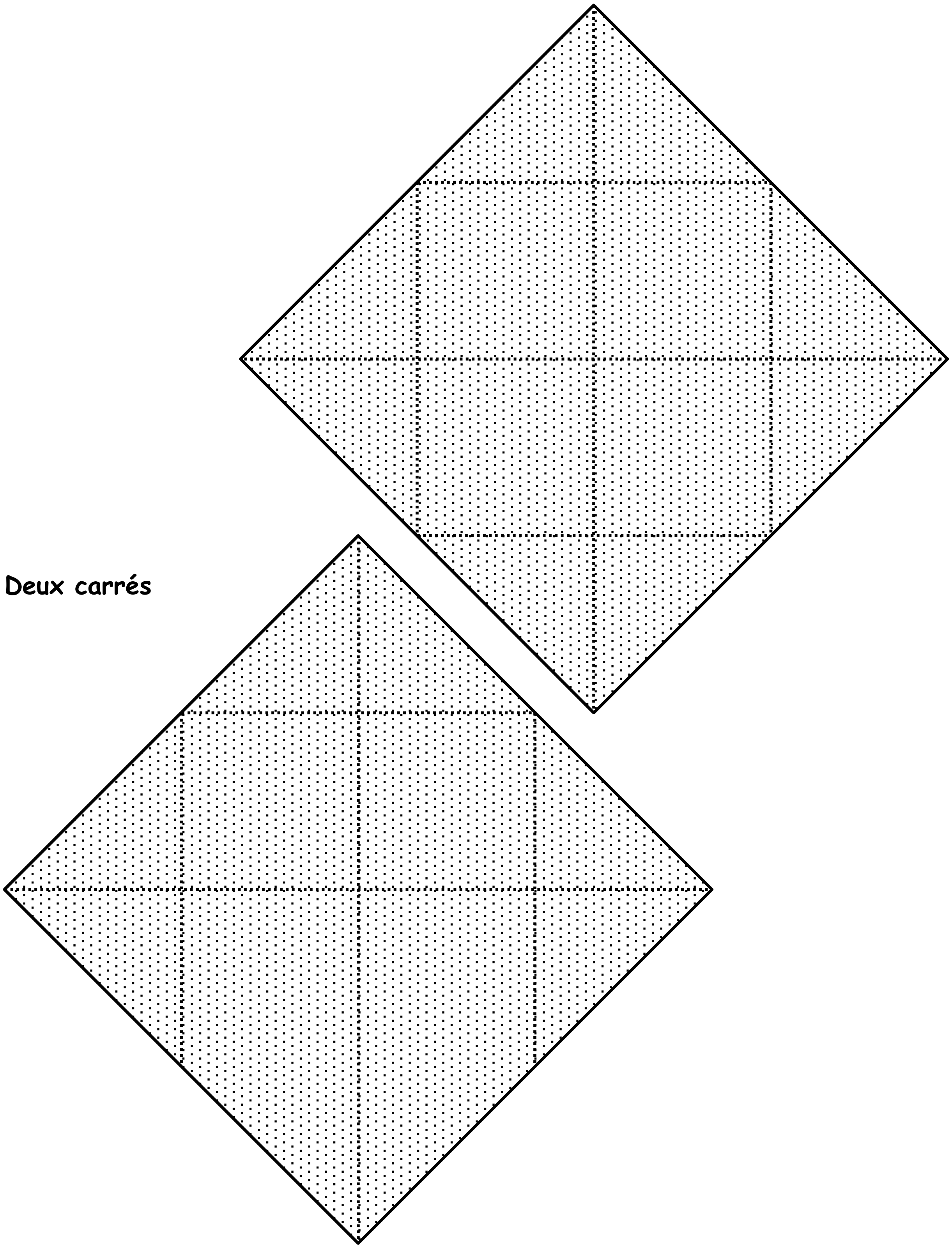
3 - Des polygones avec les sept pièces

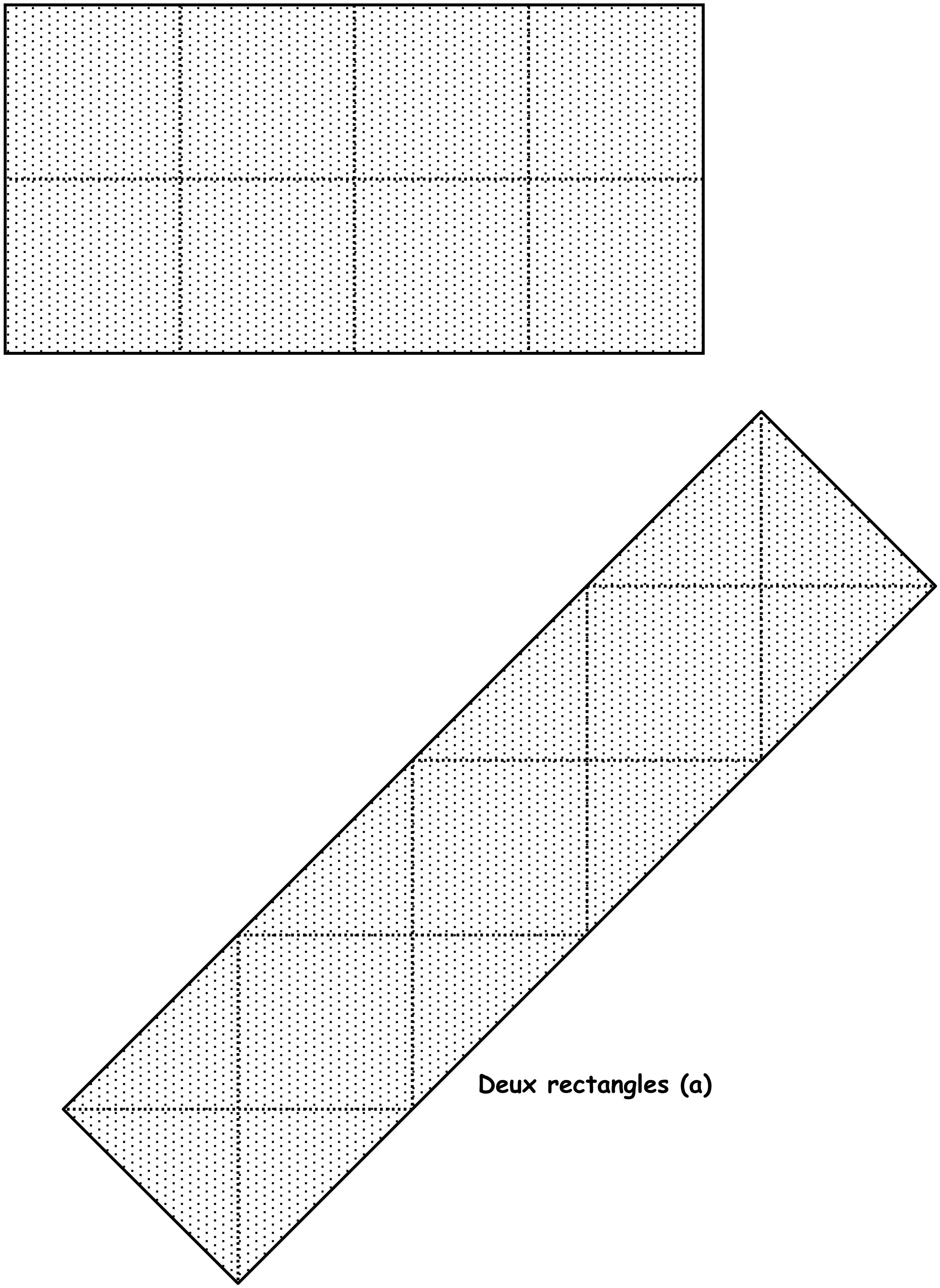


Voici un Carré de Metz à photocopier puis à découper.

Il permet le recouvrement des paires de polygones des pages qui suivent.

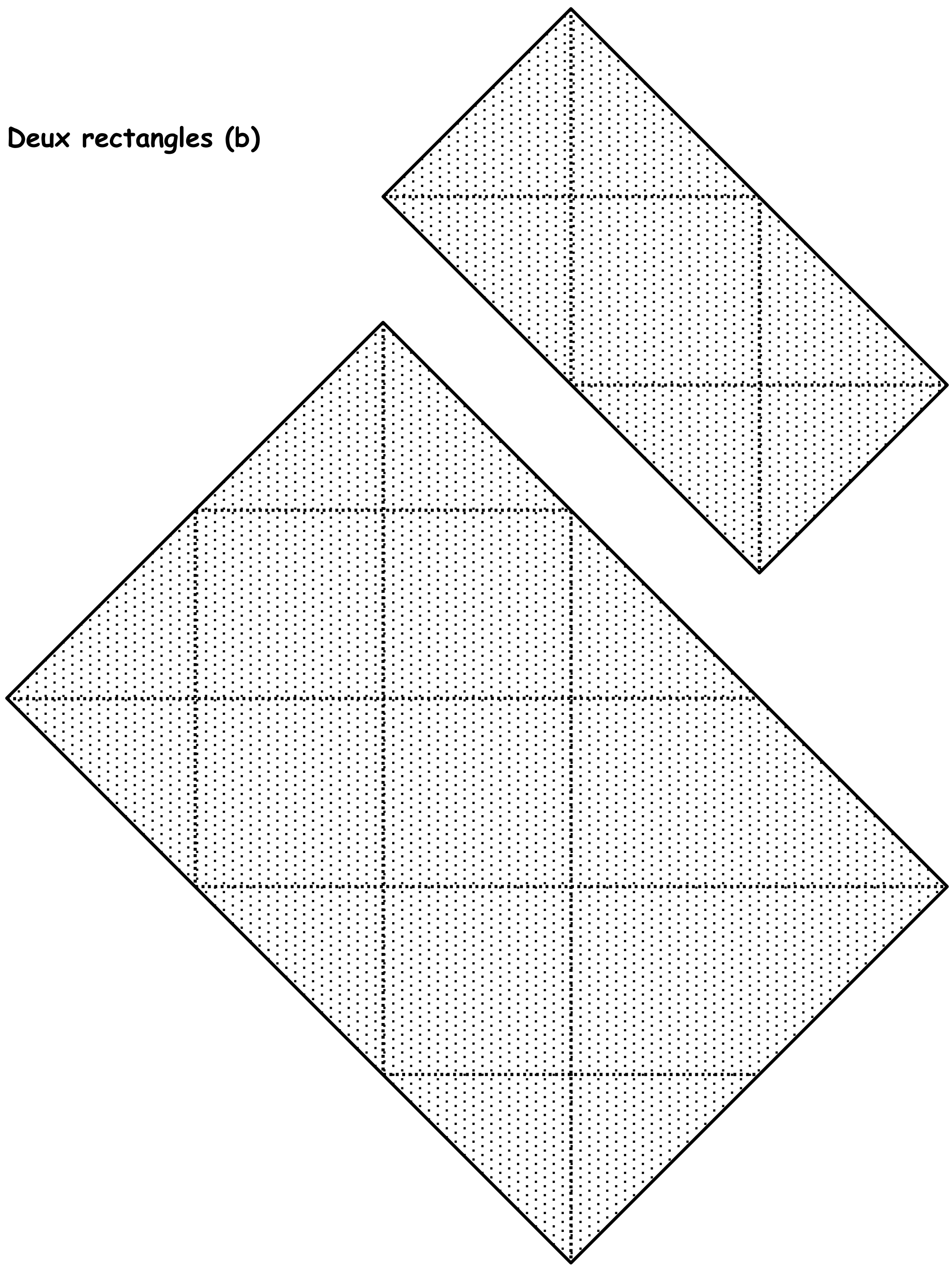
Deux carrés

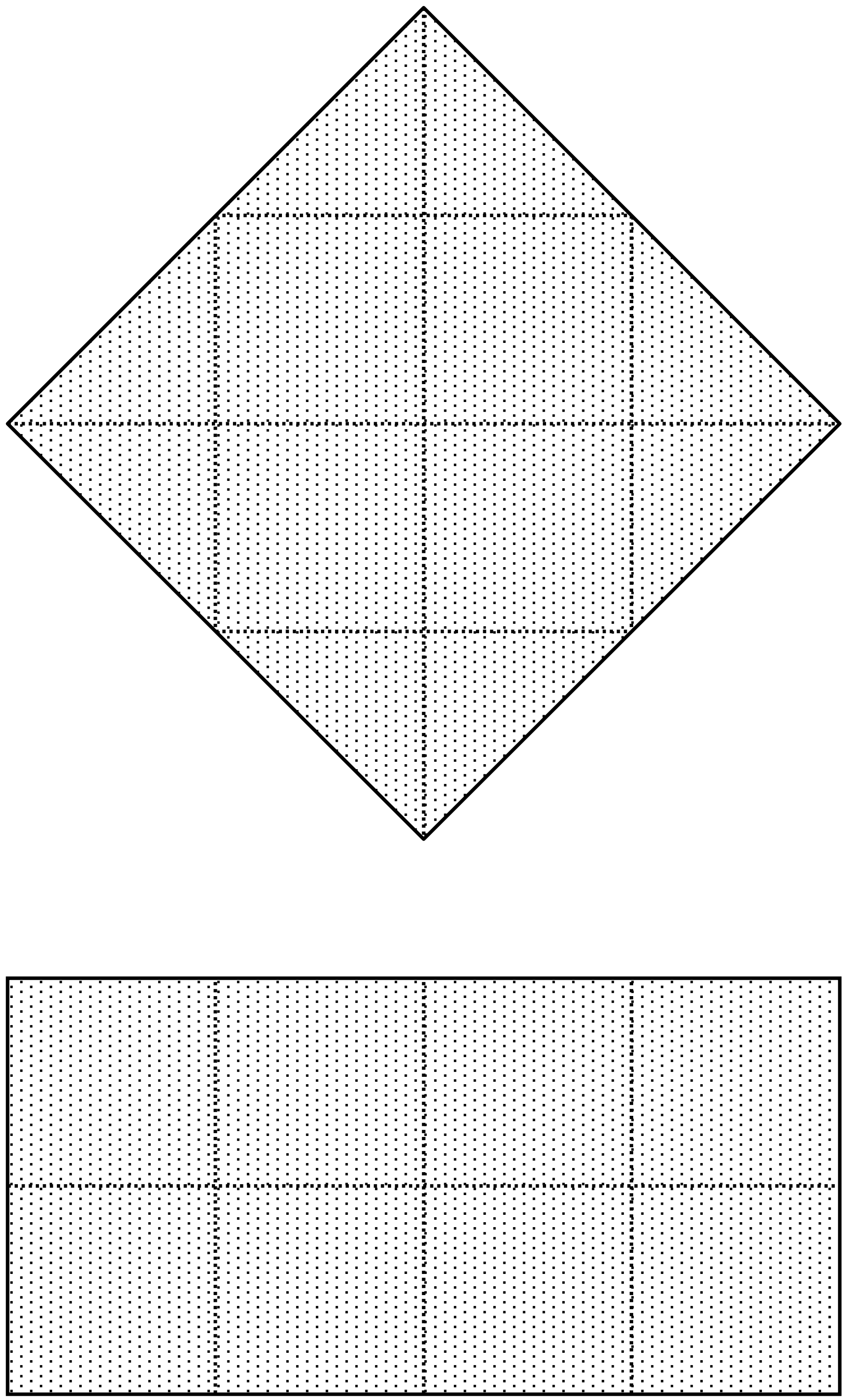




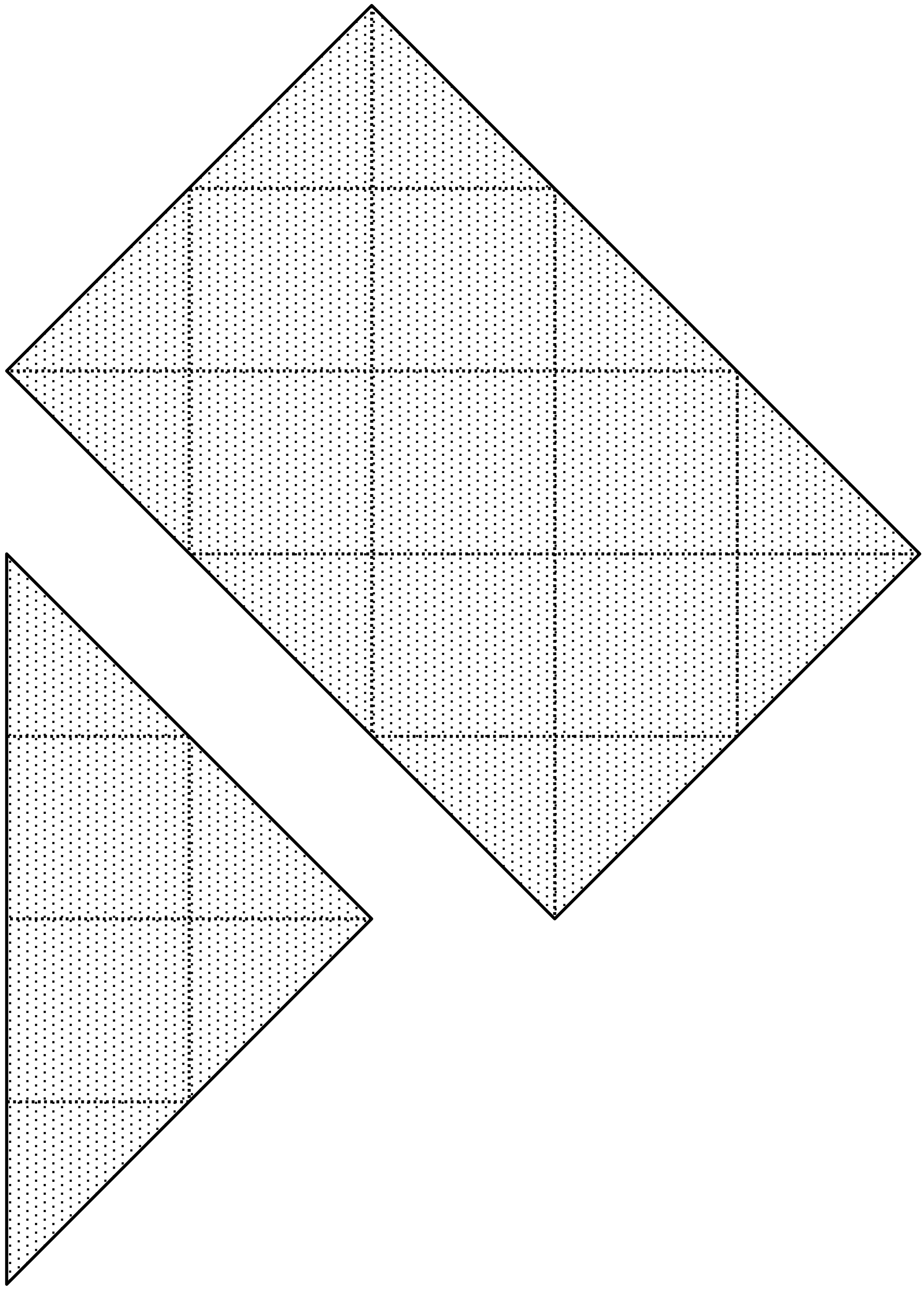
Deux rectangles (a)

Deux rectangles (b)



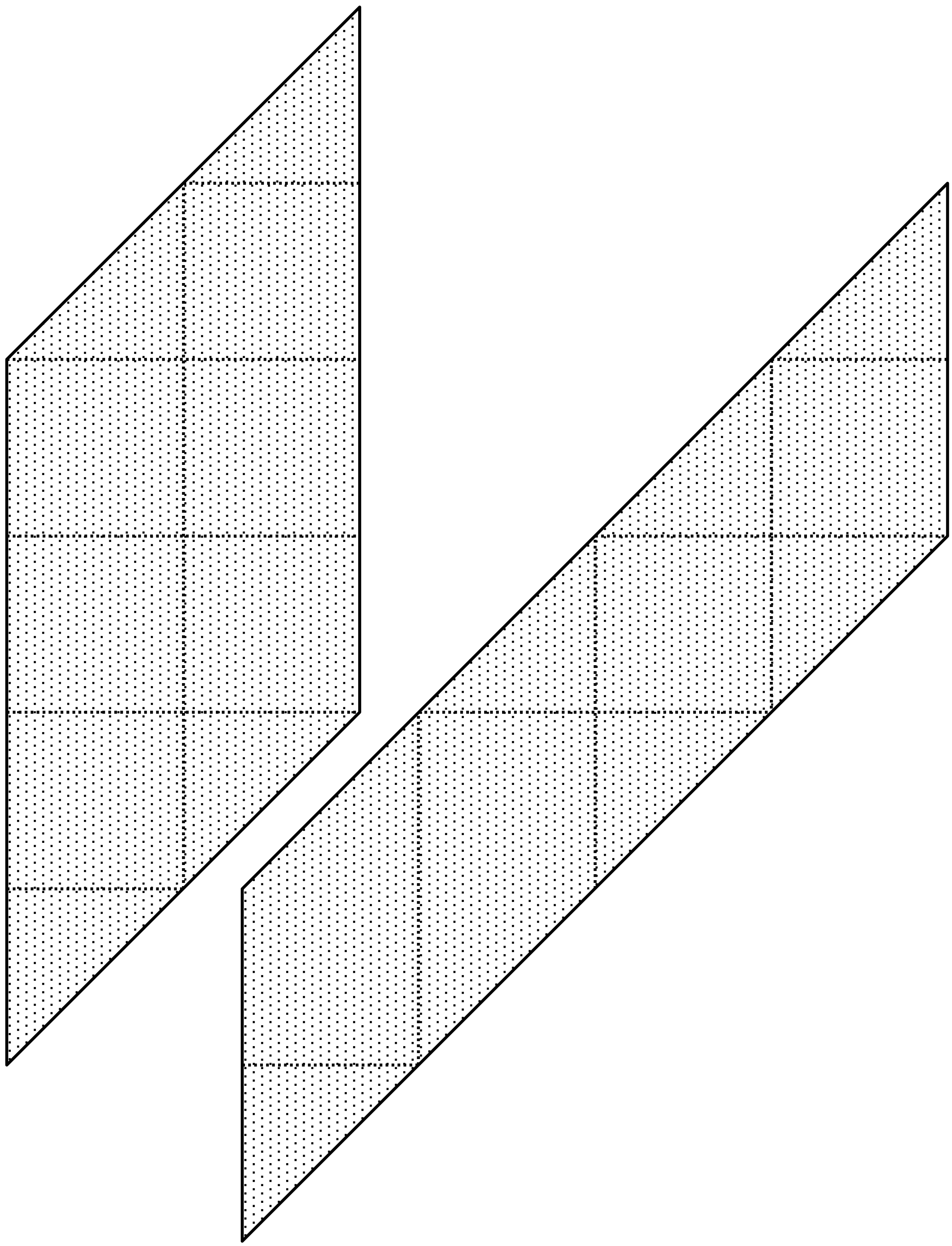


Un carré et un rectangle

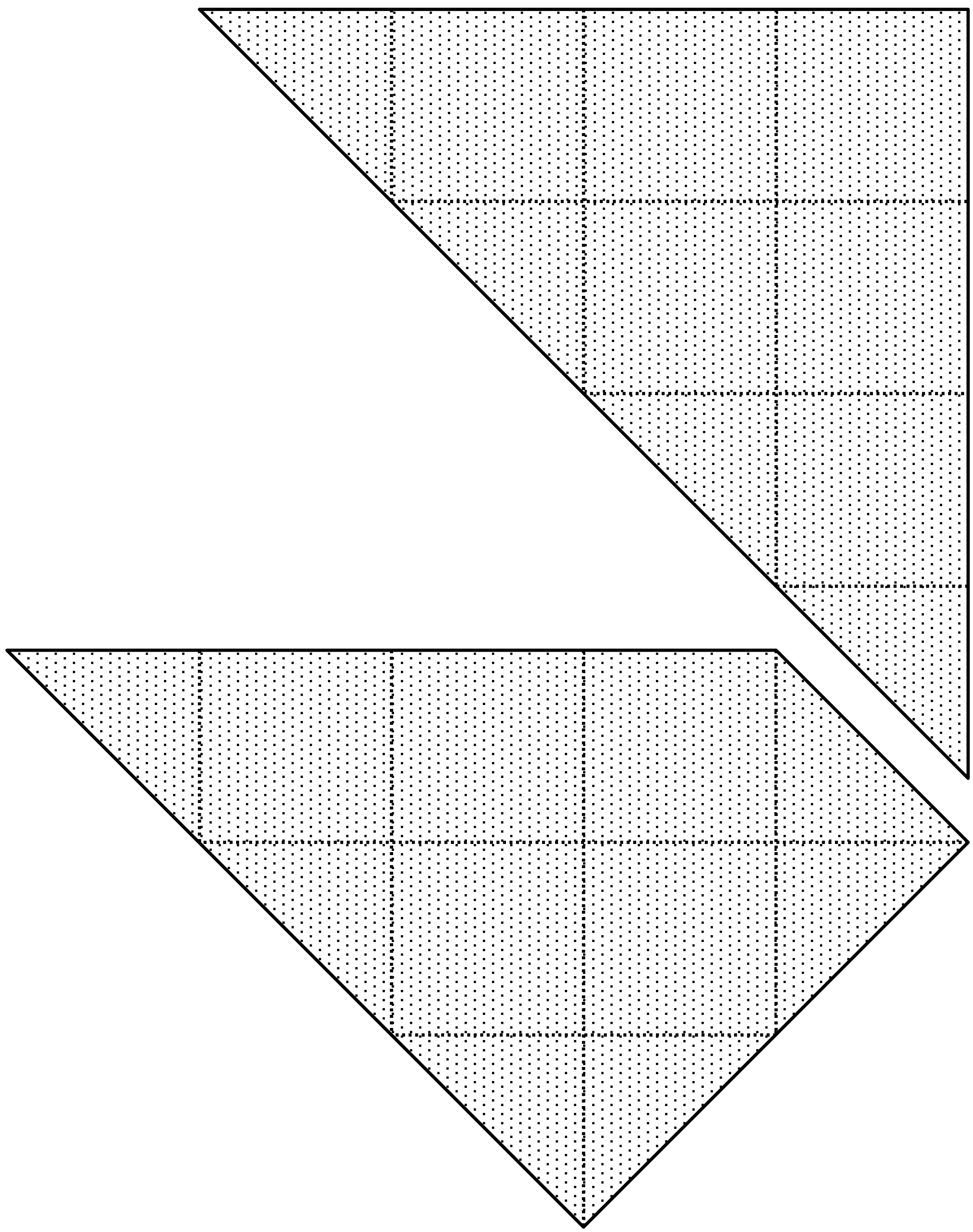


Un rectangle et un triangle

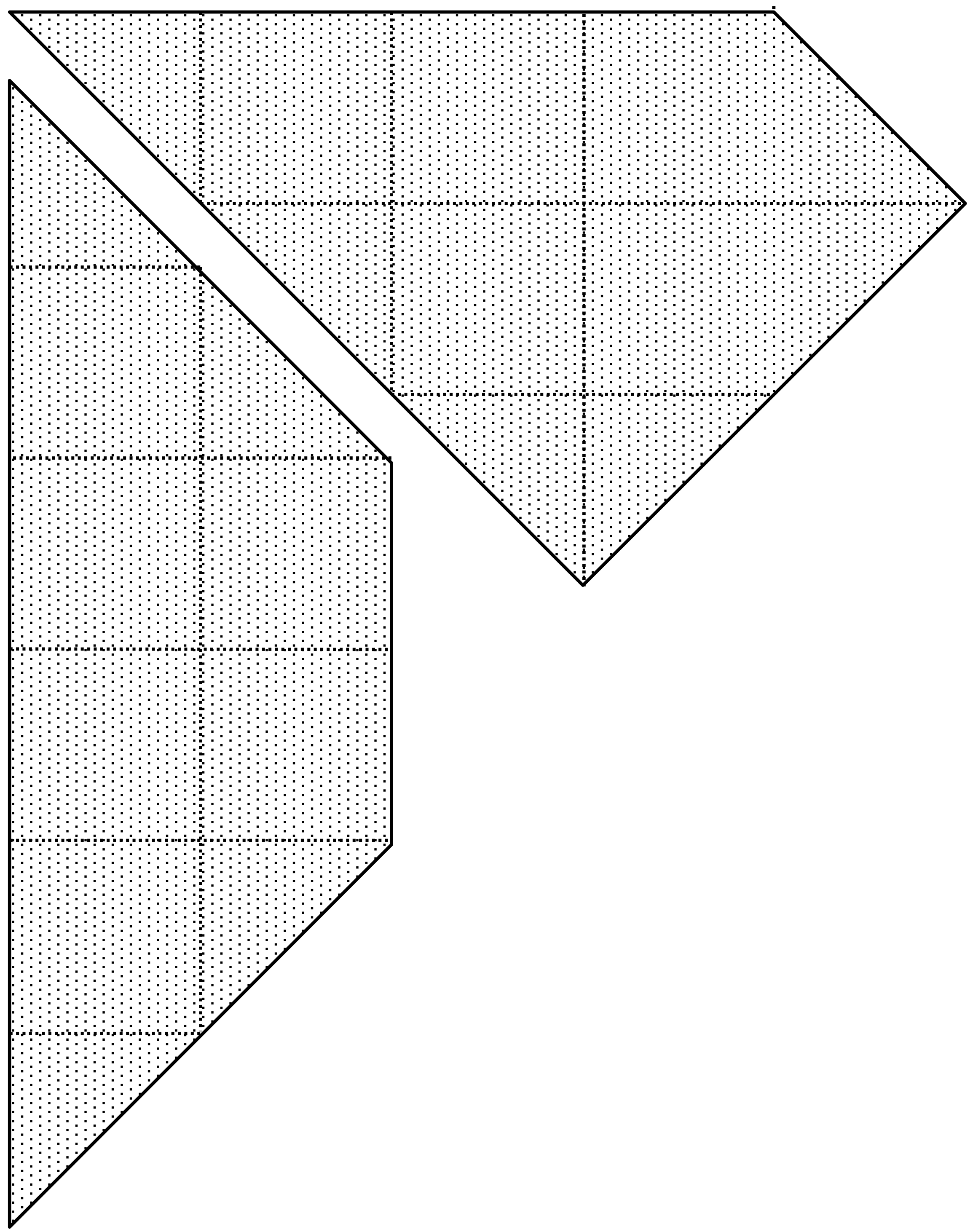
Deux parallélogrammes



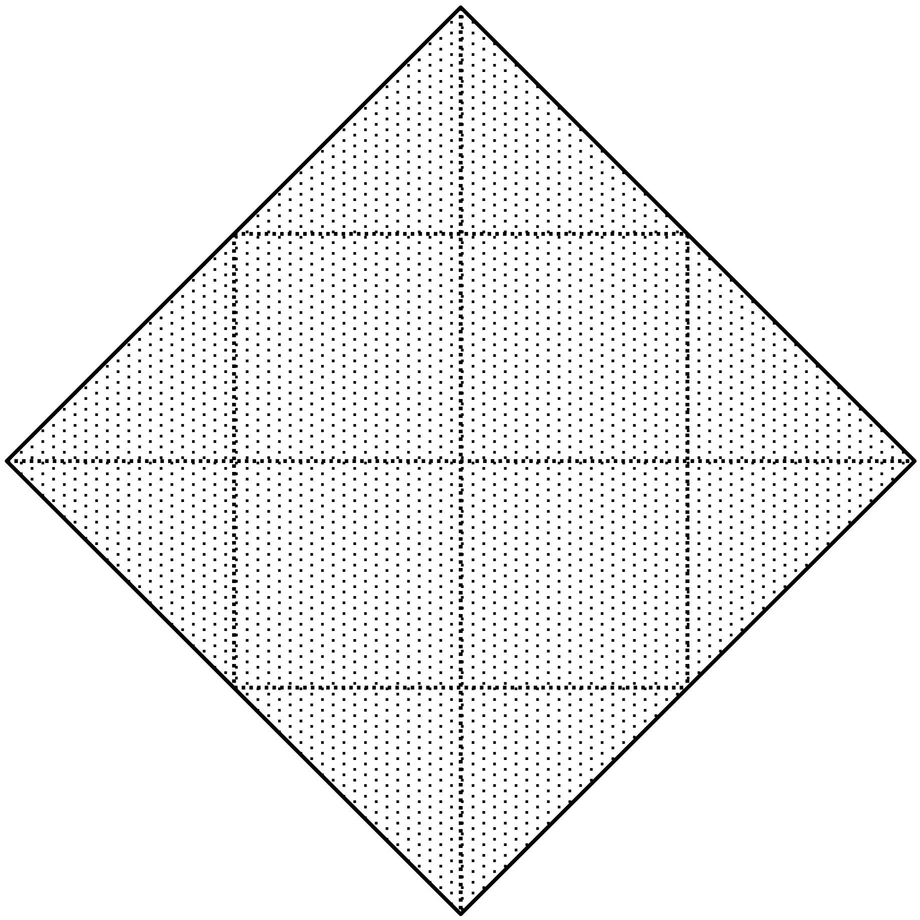
Un triangle et un trapèze rectangle

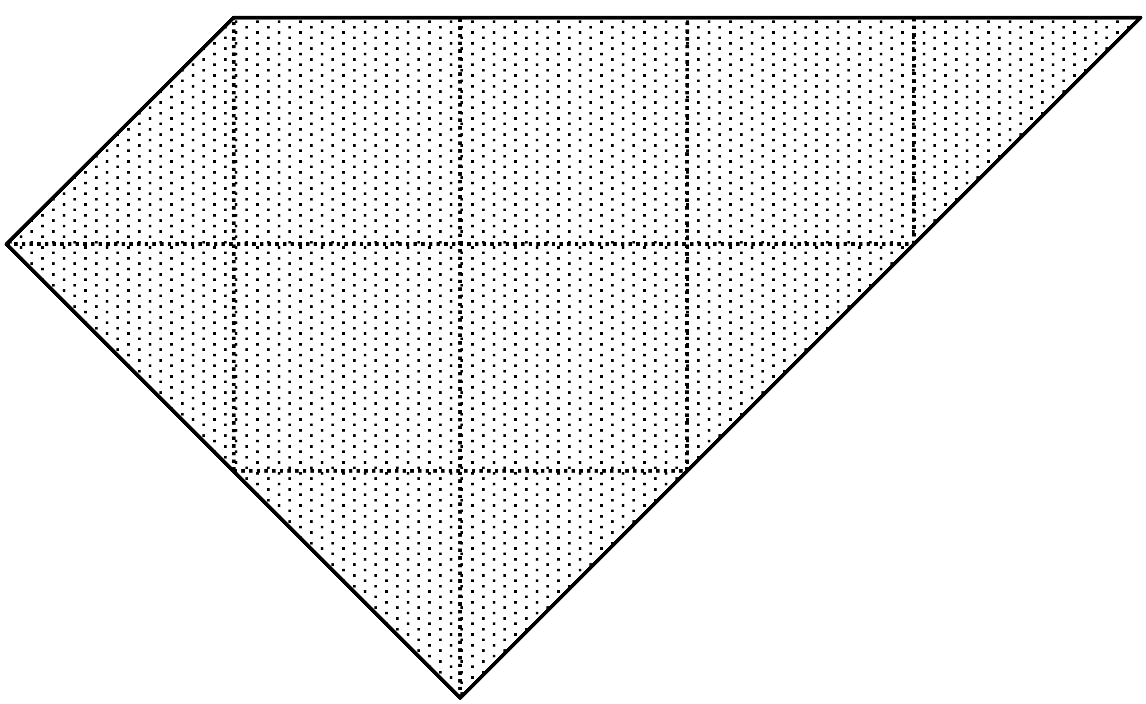


Un trapèze rectangle et un trapèze isocèle

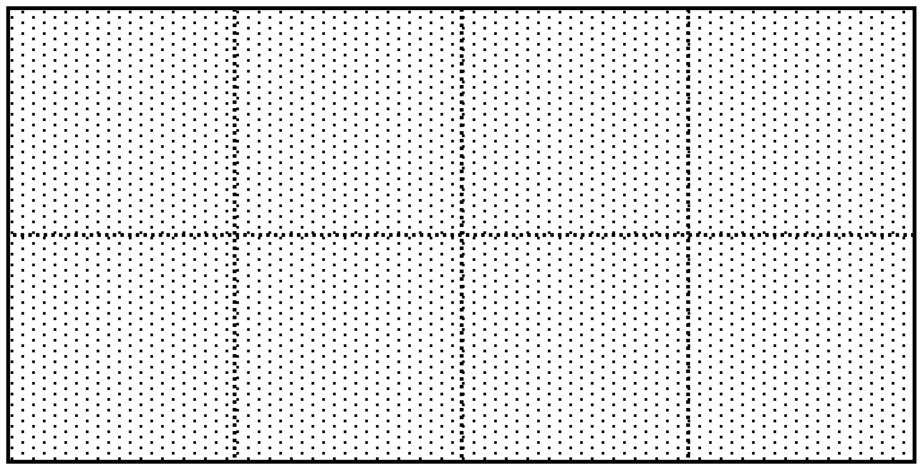


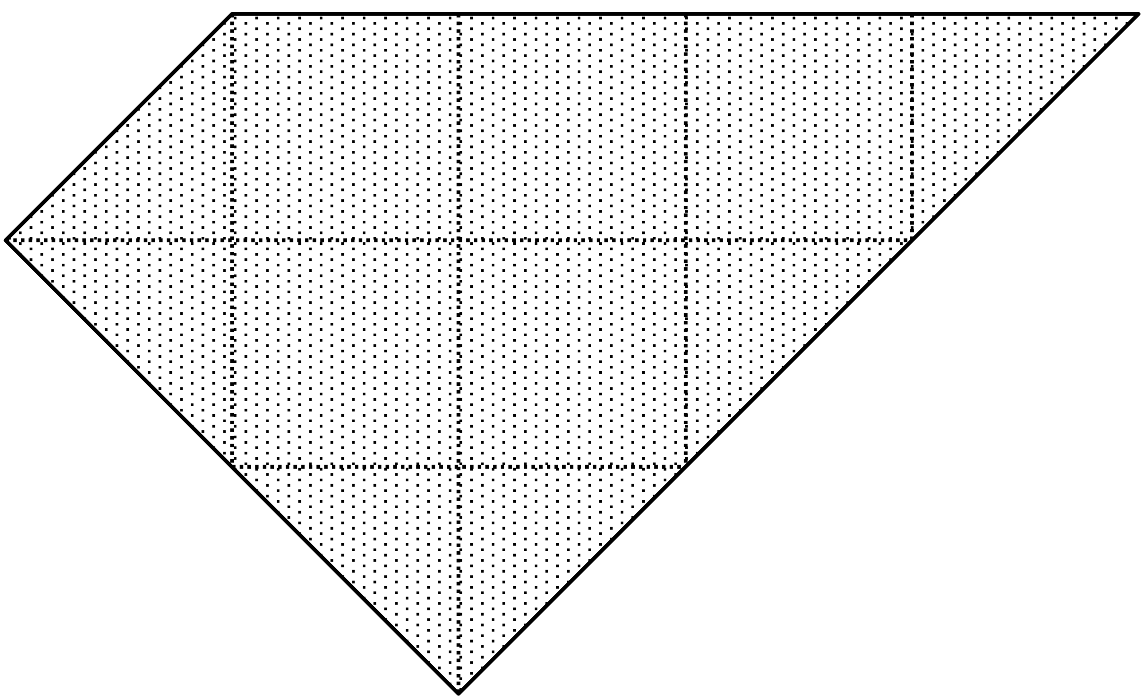
Un carré et un trapèze rectangle



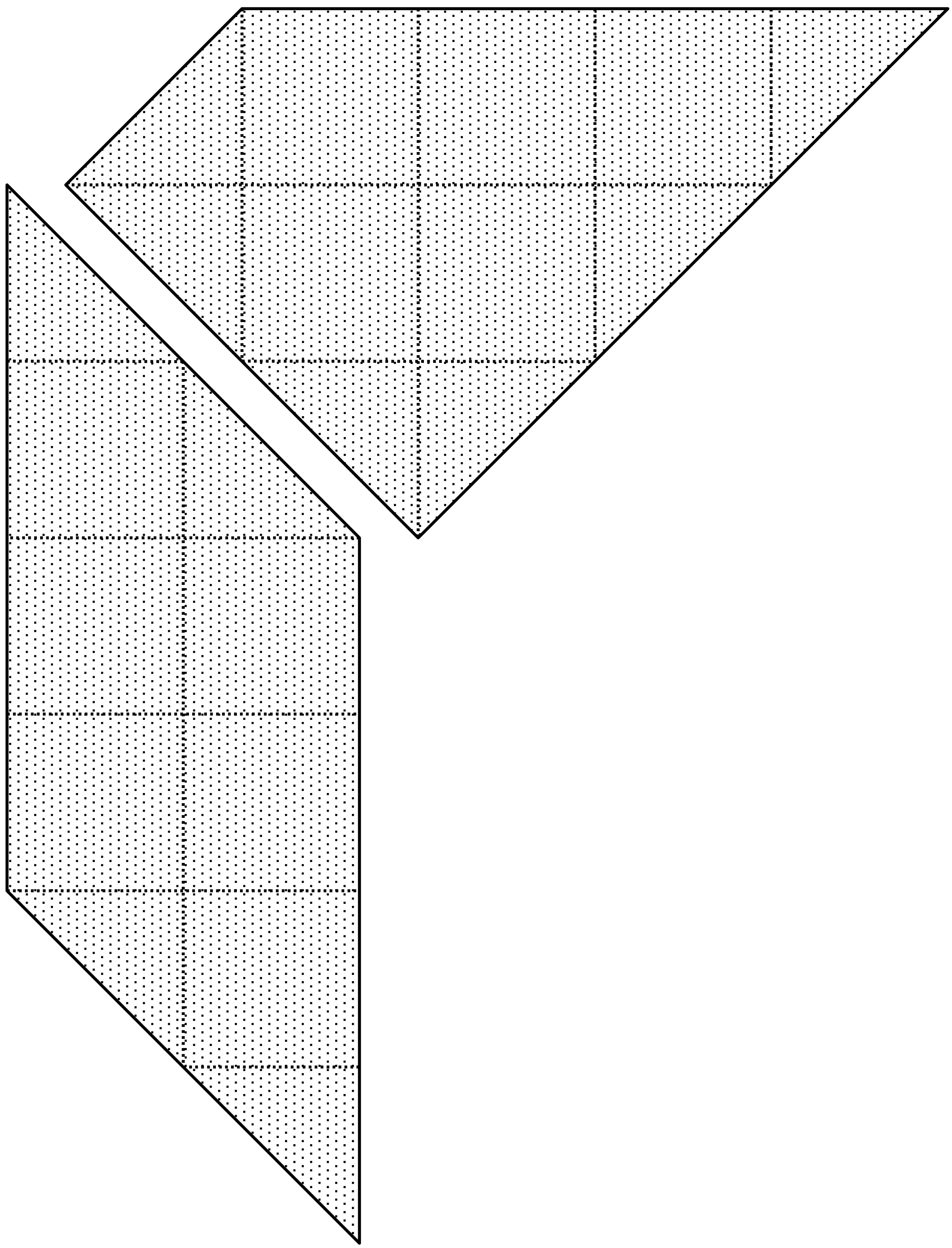


Un rectangle et un trapèze rectangle

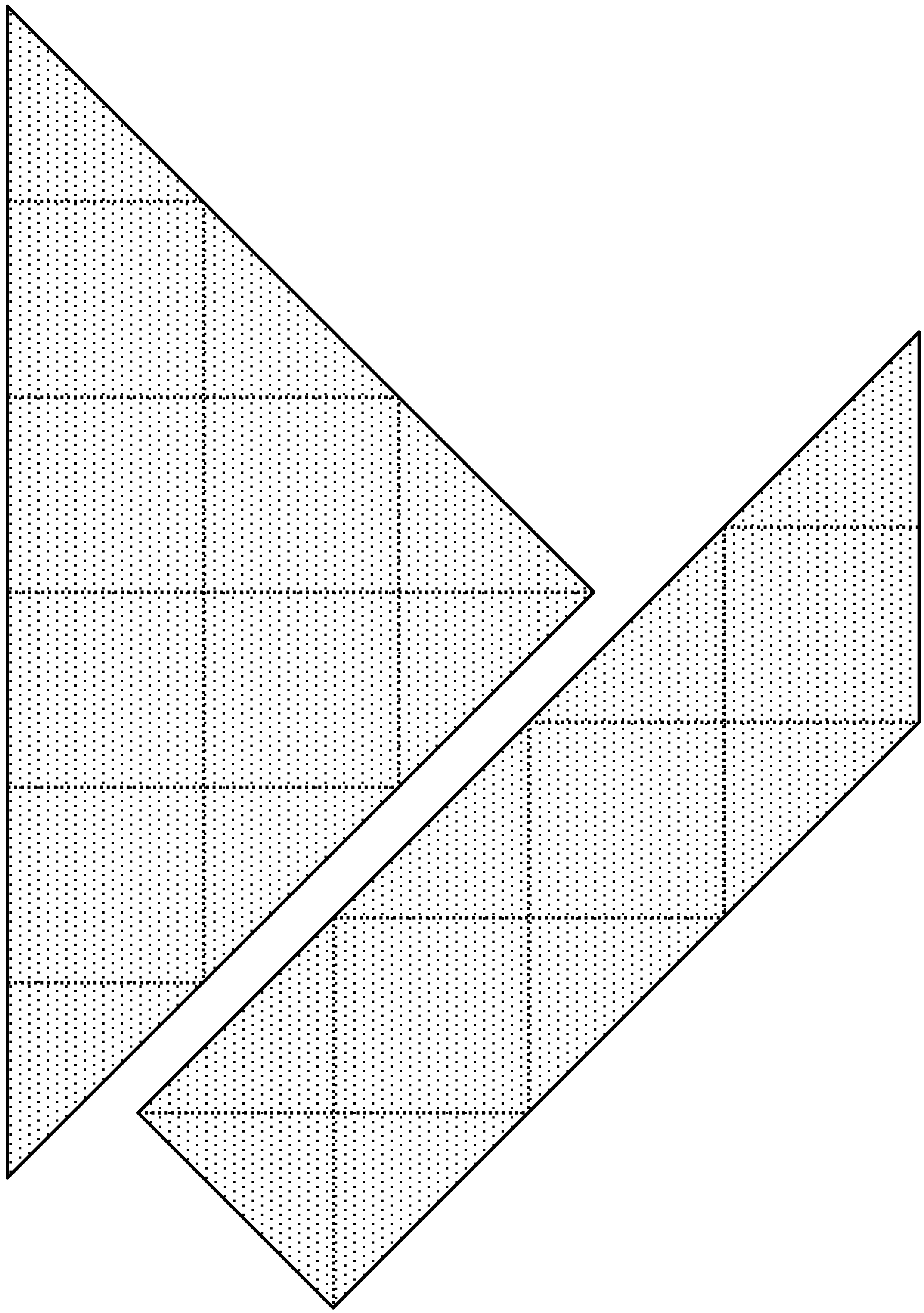




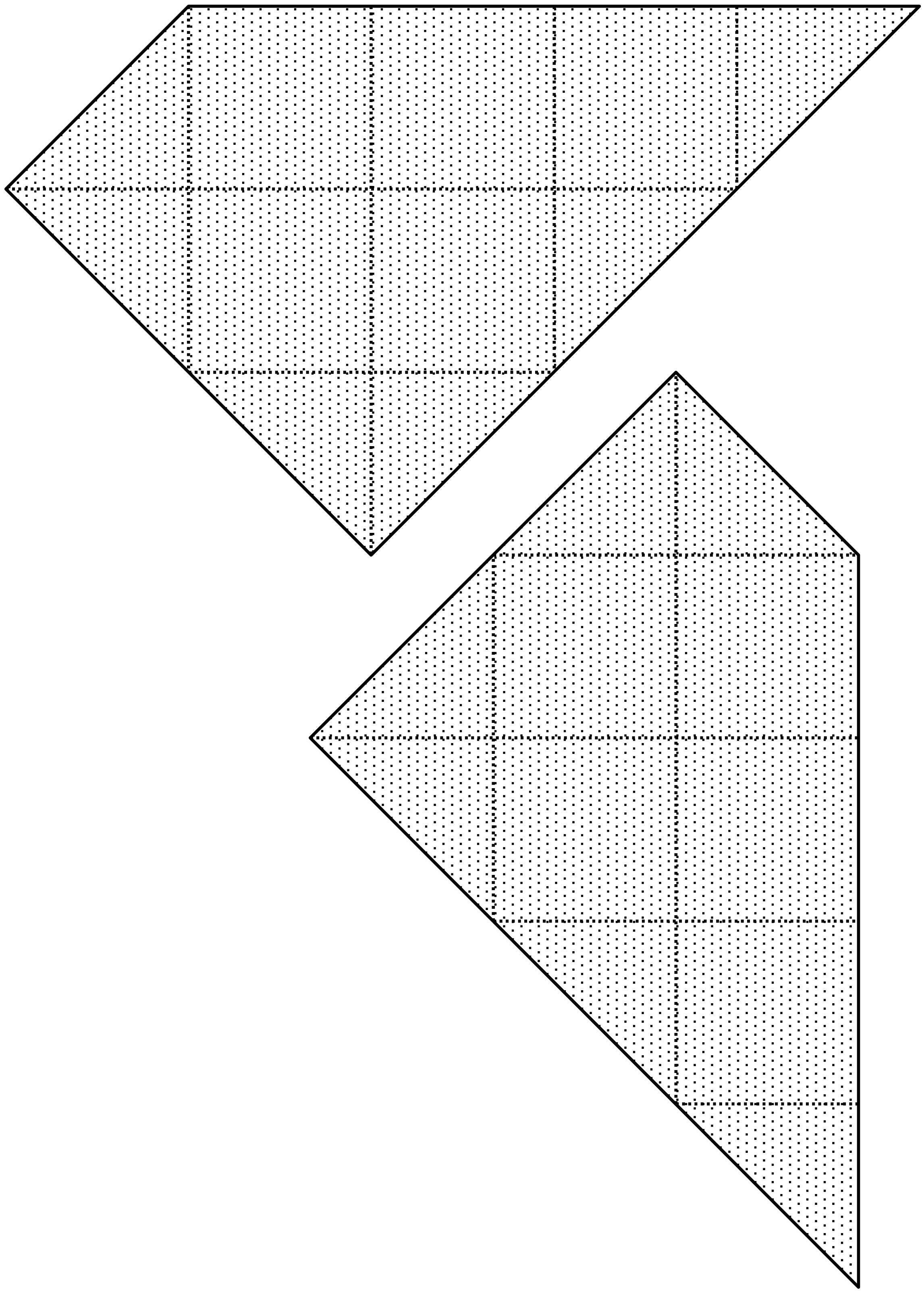
Un parallélogramme et un trapèze rectangle



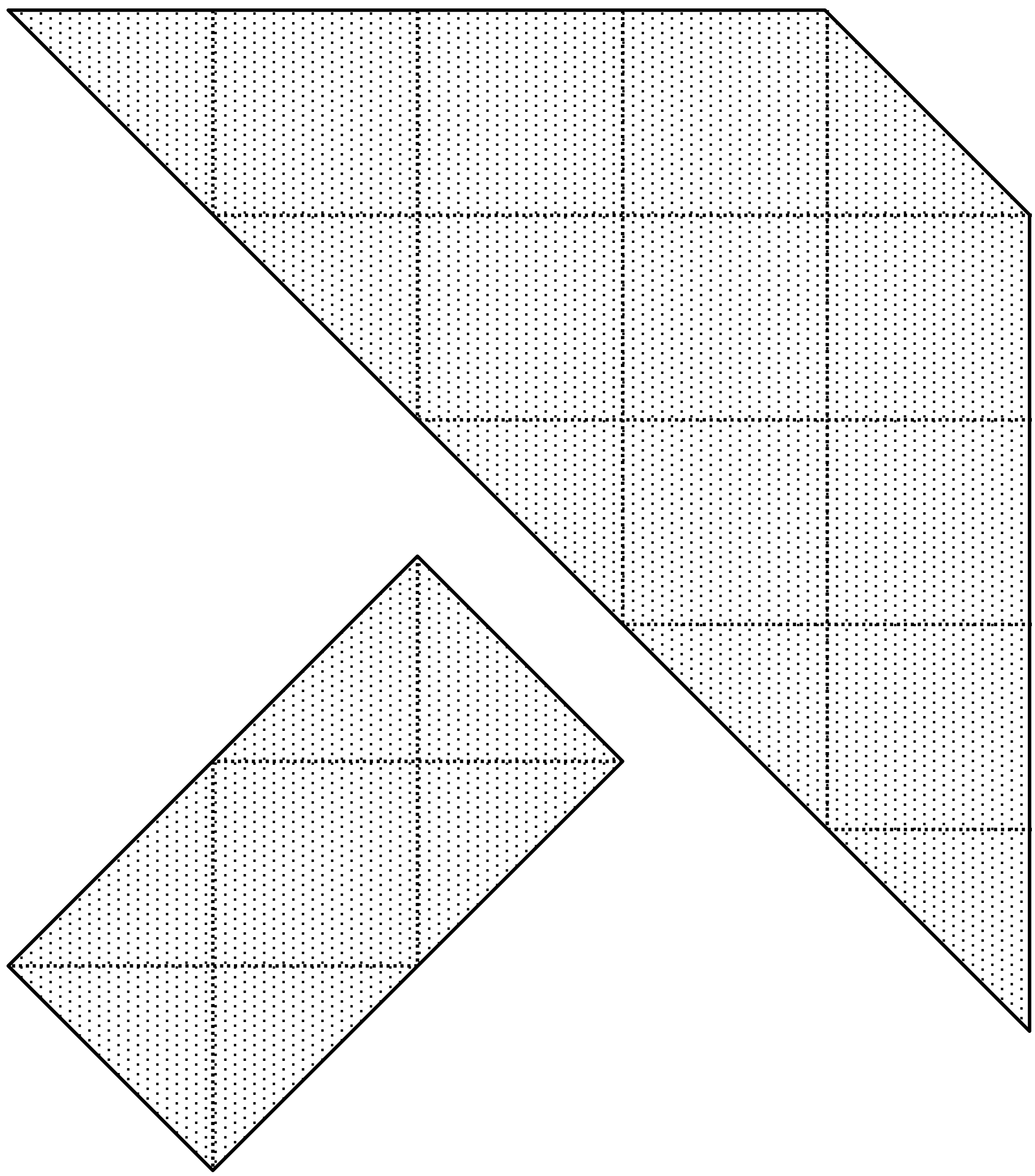
Un triangle et un trapèze rectangle



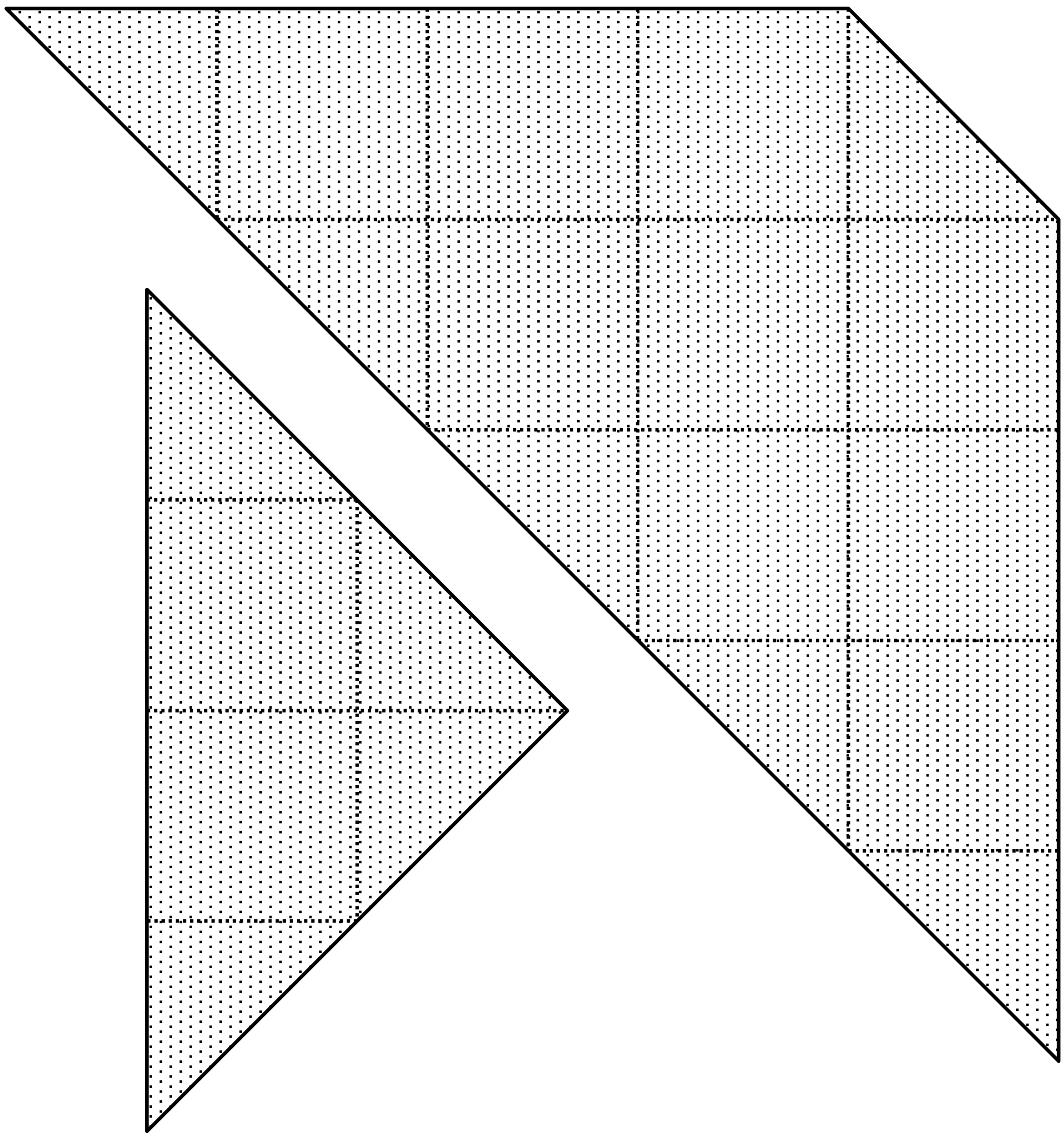
Deux trapèzes rectangles



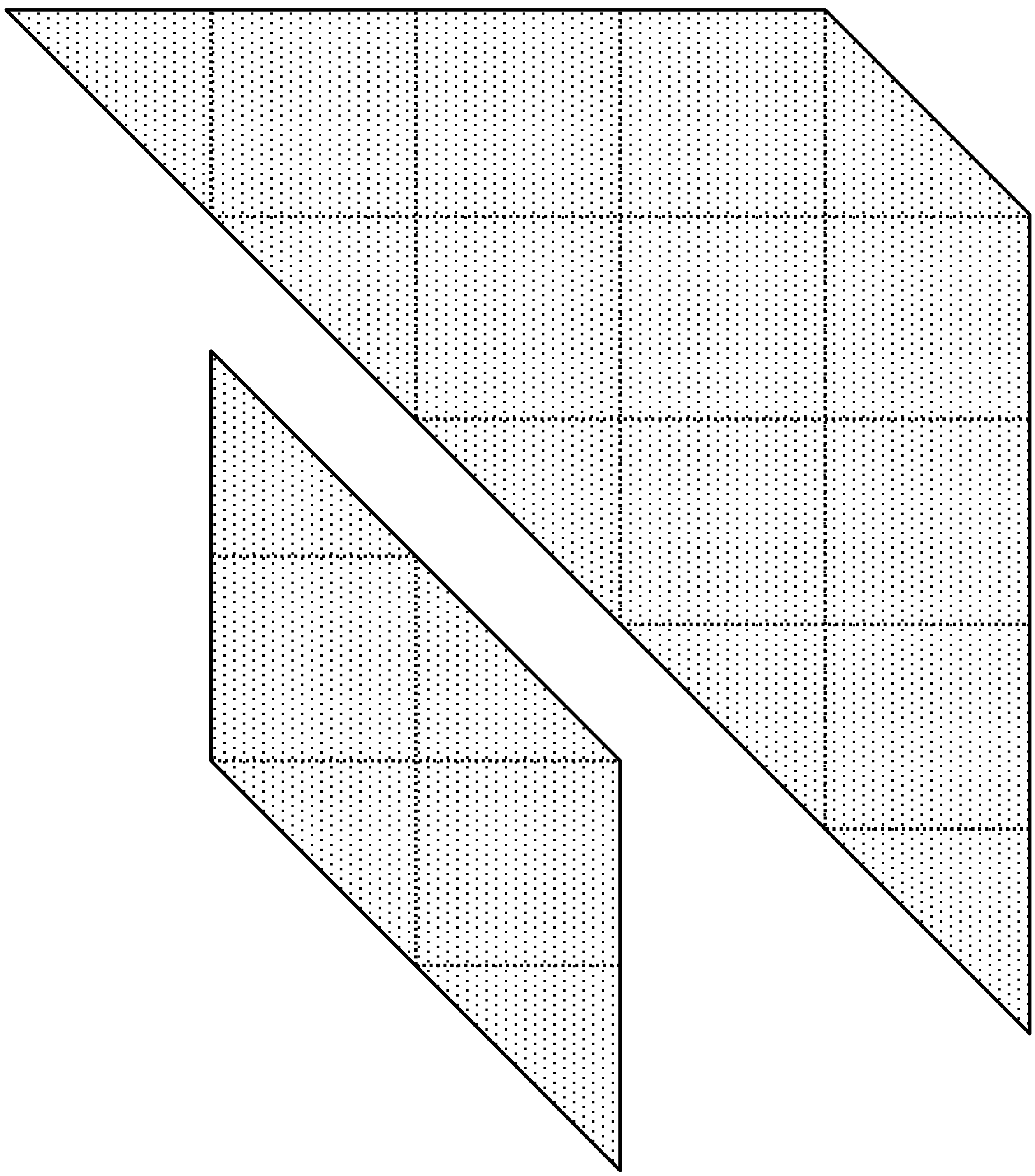
Un trapèze isocèle et un rectangle



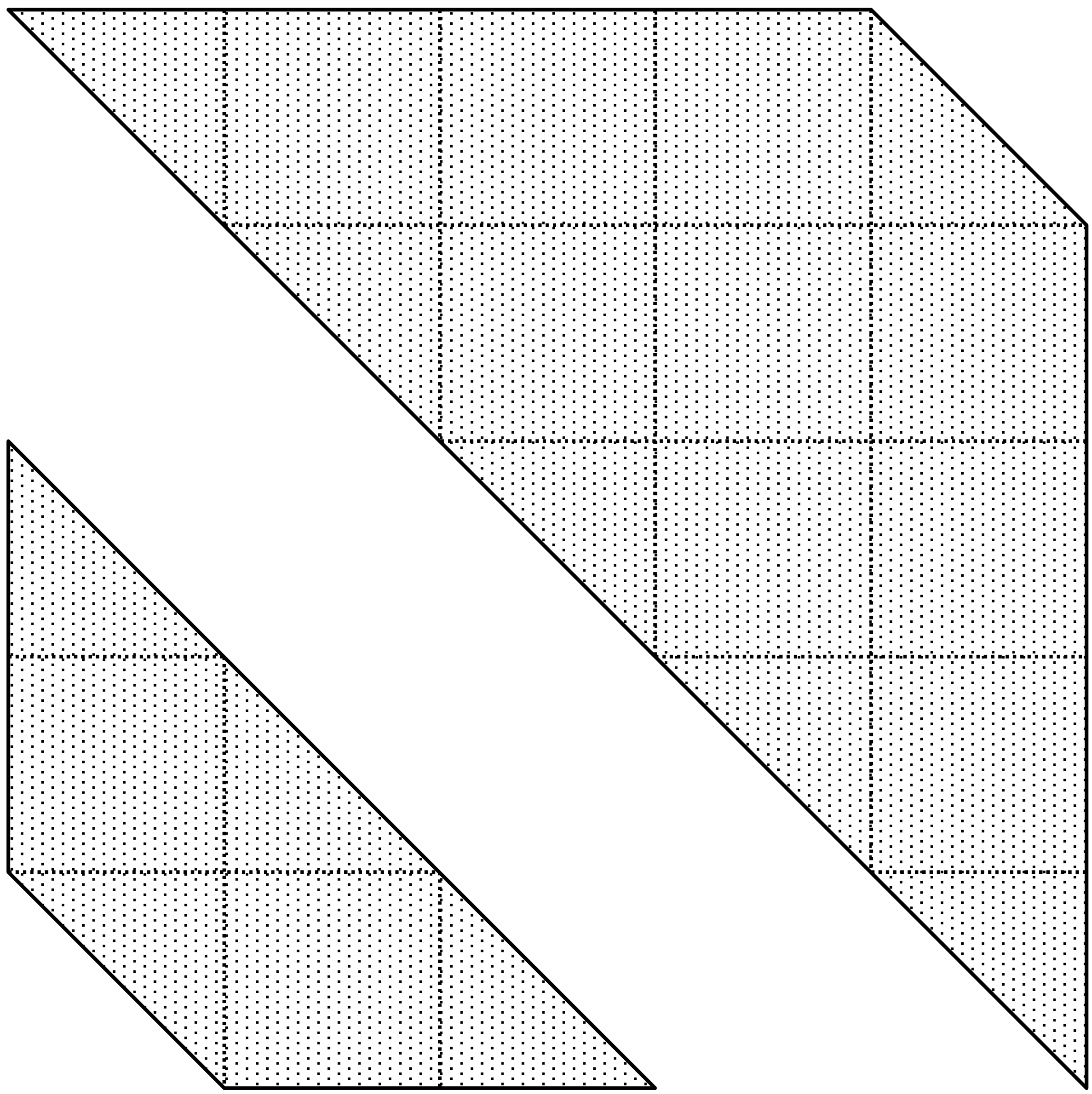
Un trapèze isocèle et un triangle



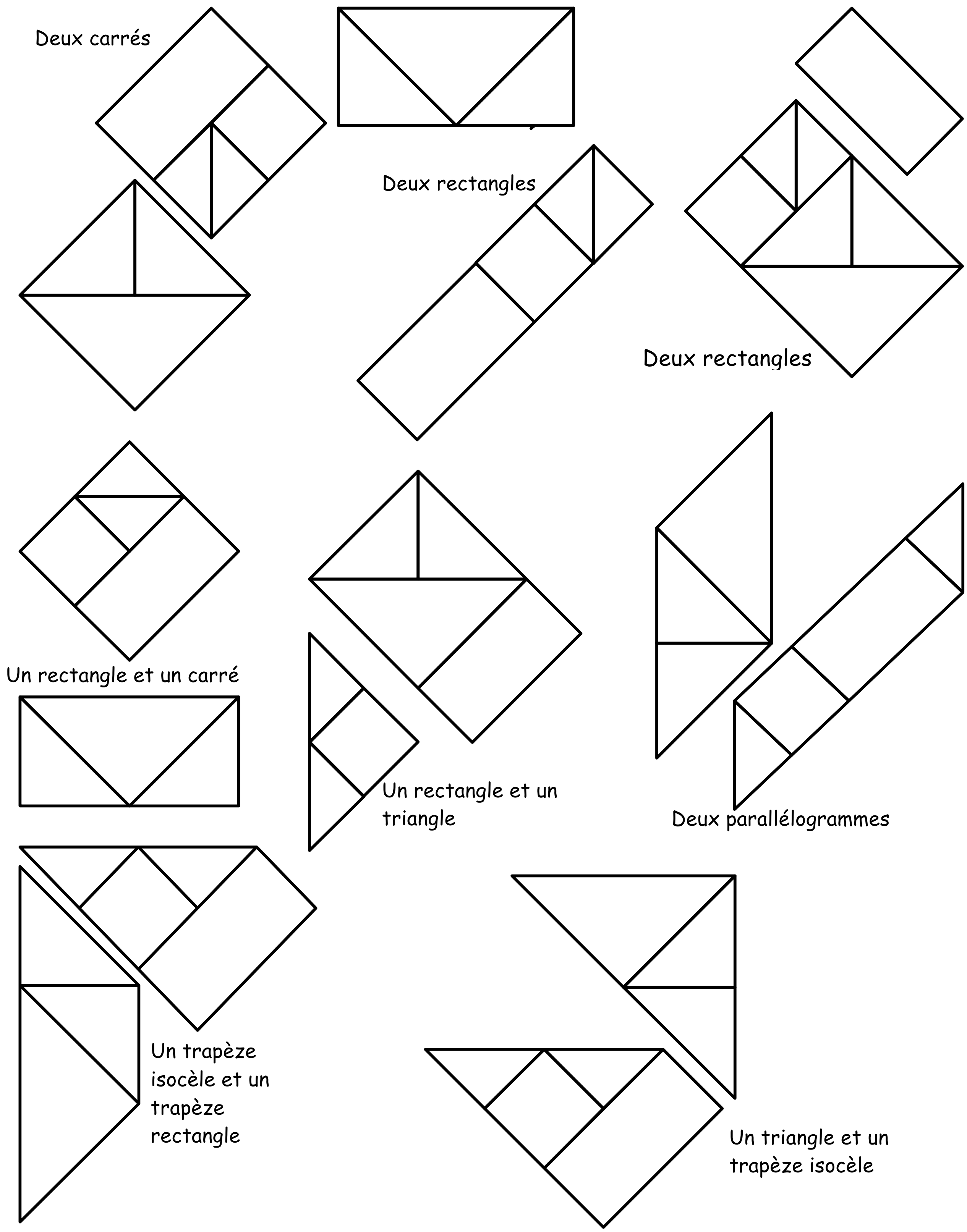
Un trapèze isocèle et un parallélogramme

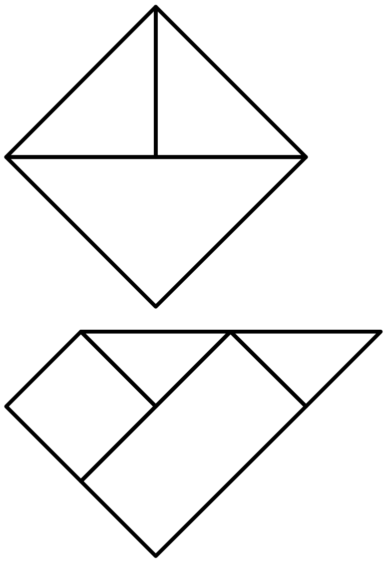


Deux trapèzes isocèles

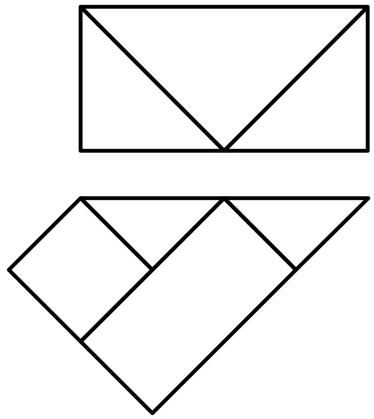


Des solutions

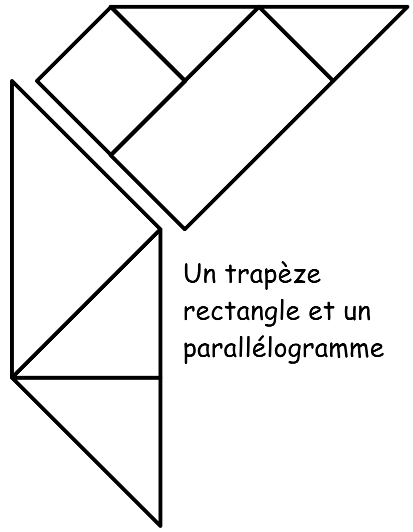




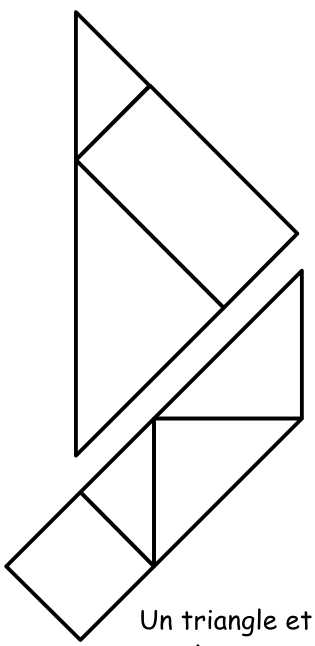
Un carré et un trapèze



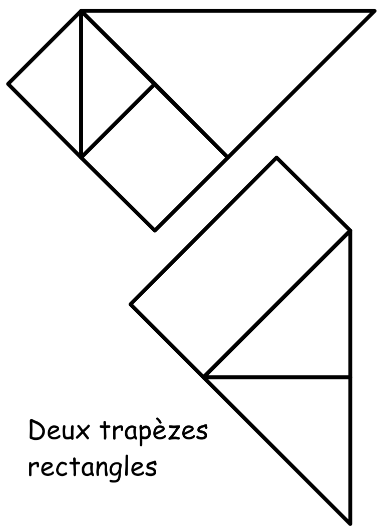
Un rectangle et un trapèze rectangle



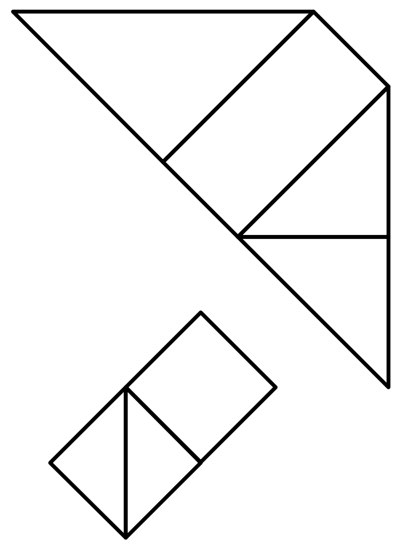
Un trapèze rectangle et un parallélogramme



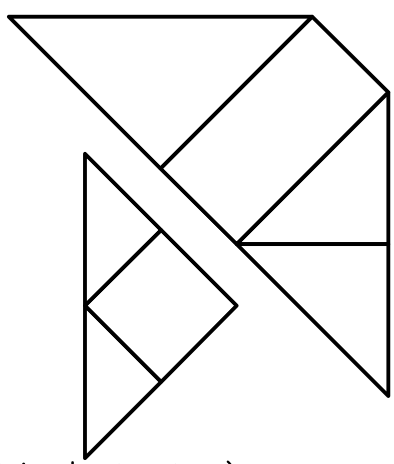
Un triangle et un trapèze rectangle



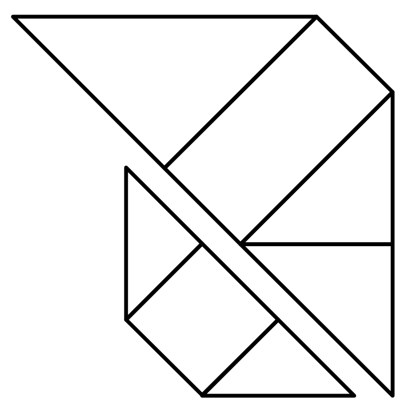
Deux trapèzes rectangles



Un rectangle et un trapèze



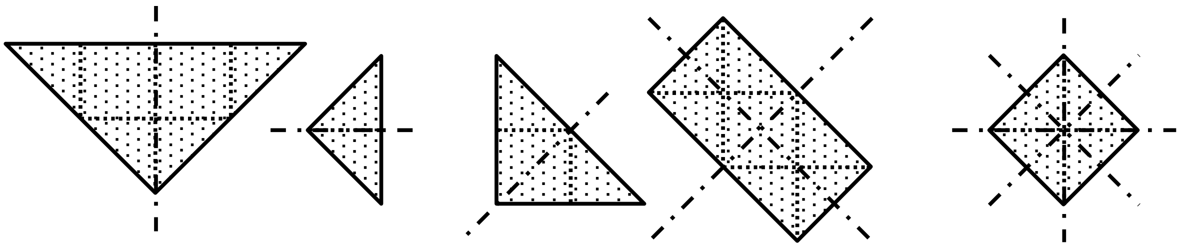
Un triangle et un trapèze isocèle



Deux trapèzes isocèles

4 - Les pièces et des éléments de symétrie

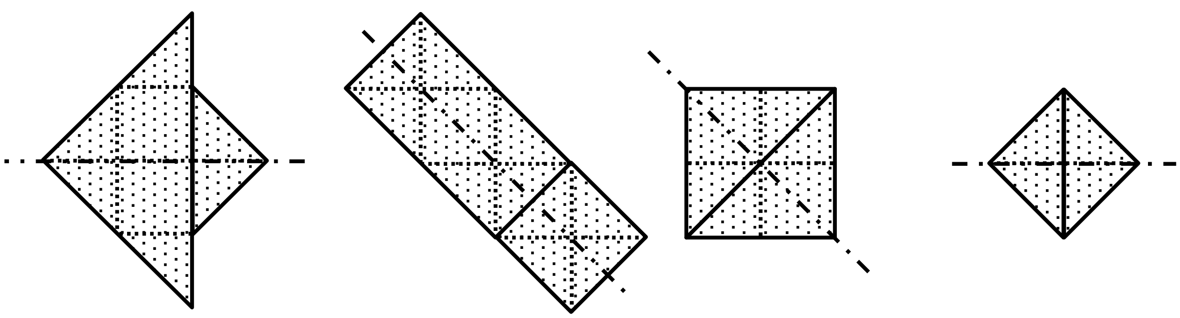
Les cinq types de pièces formant le Carré de Metz possèdent au moins un axe de symétrie.



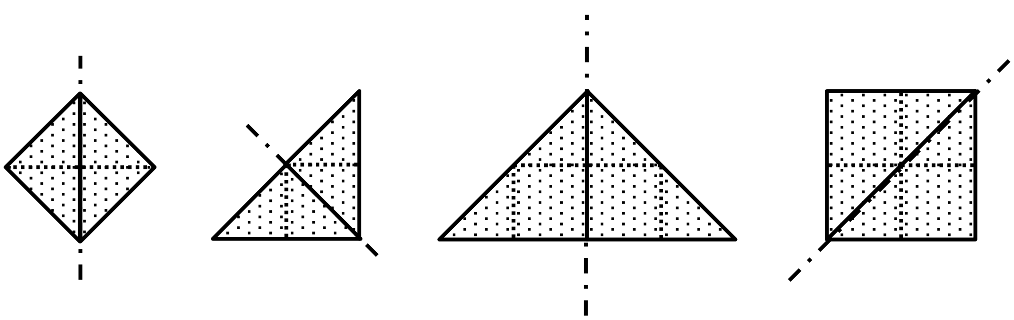
De plus, le rectangle et le carré possèdent un centre de symétrie.

Avec 2 ou 3 pièces, voici quelques pistes pour obtenir des assemblages dont le pourtour est symétrique.

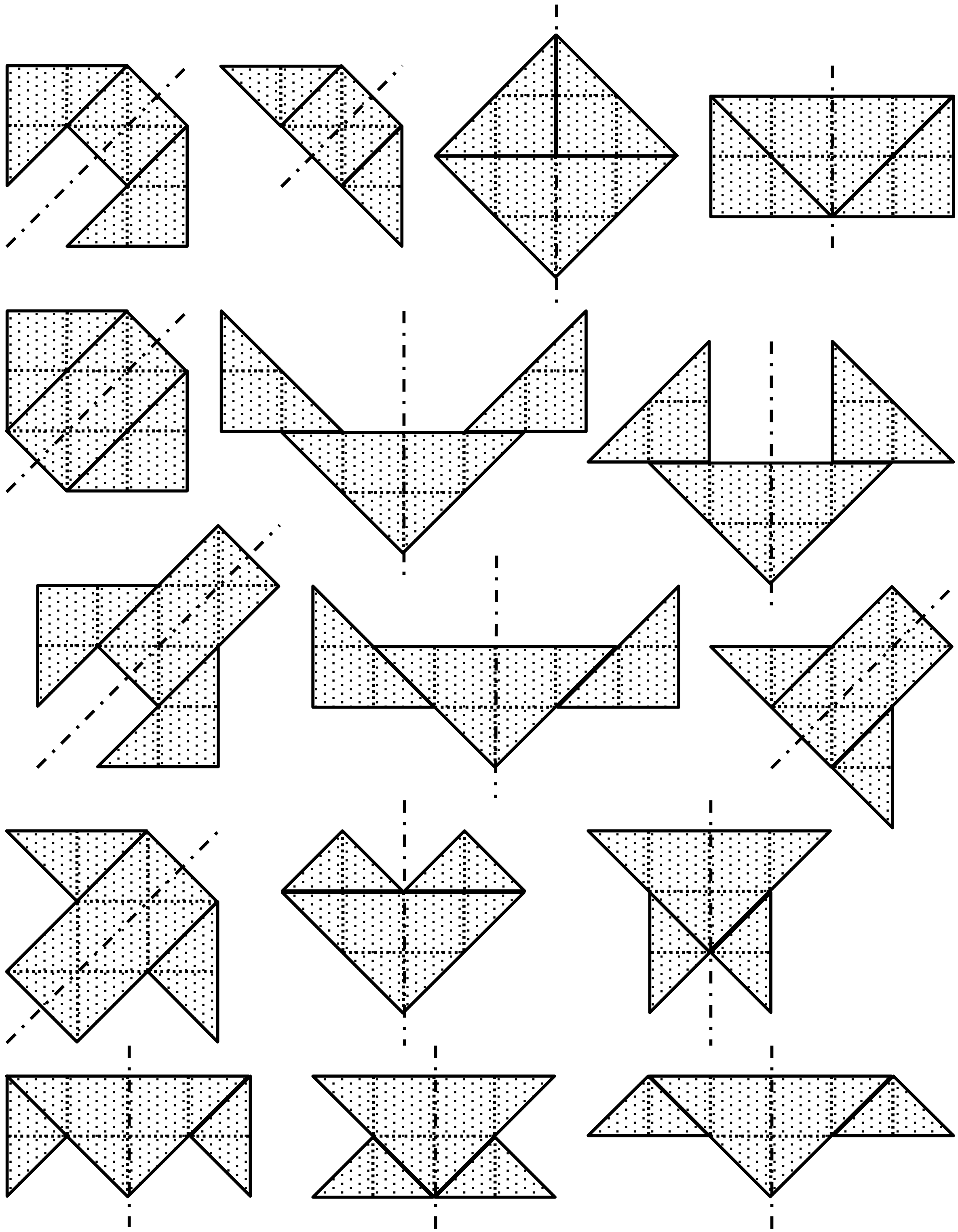
Deux pièces possédant un axe de symétrie commun sont mises côte à côte.



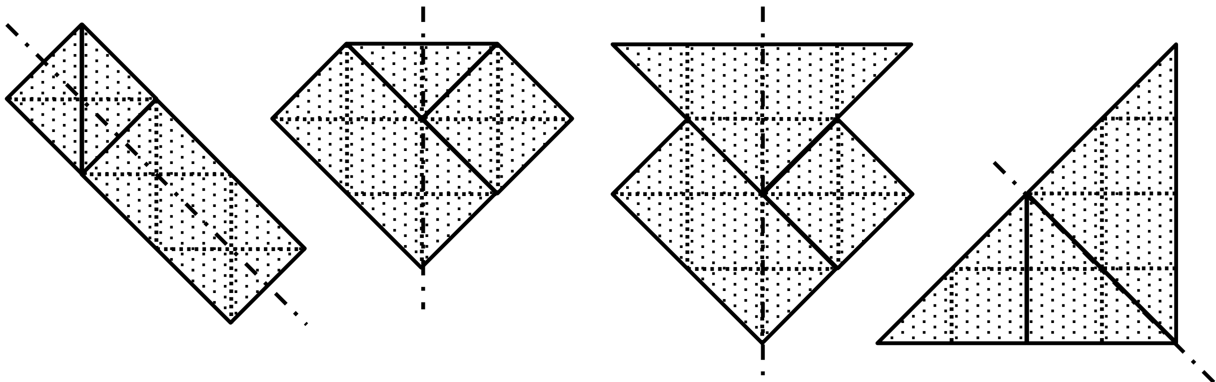
Les deux « petits » triangles et les deux « moyens » triangles peuvent être disposés symétriquement.



Deux triangles superposables sont disposés symétriquement par rapport à l'axe d'une troisième pièce.

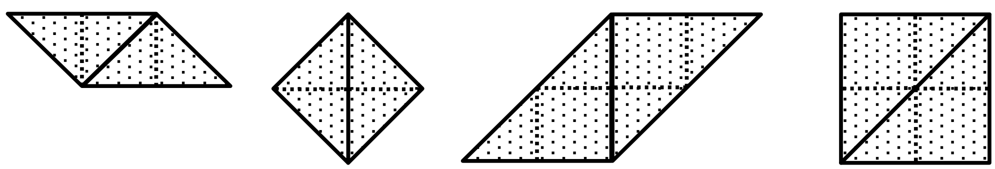


Des assemblages non symétriques de pièces permettent la création d'assemblages dont le pourtour est symétrique.

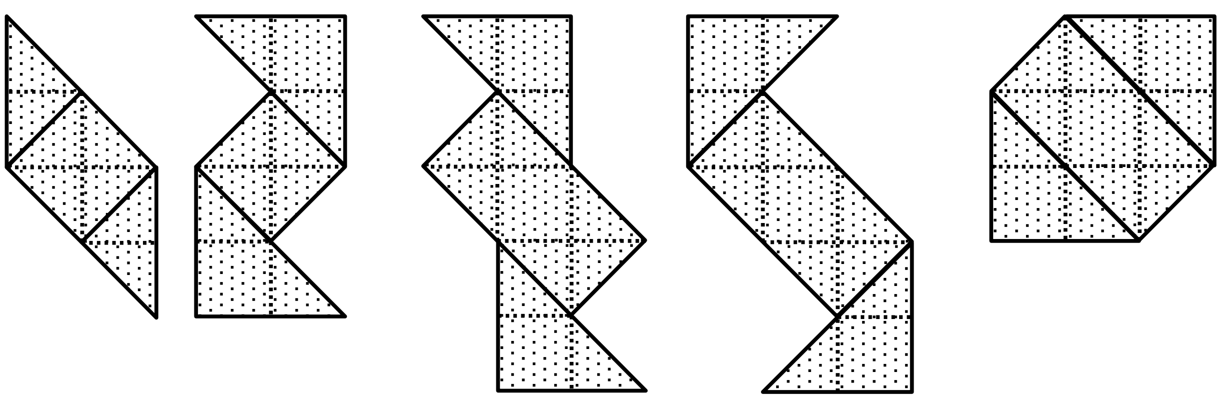


Pour un centre de symétrie

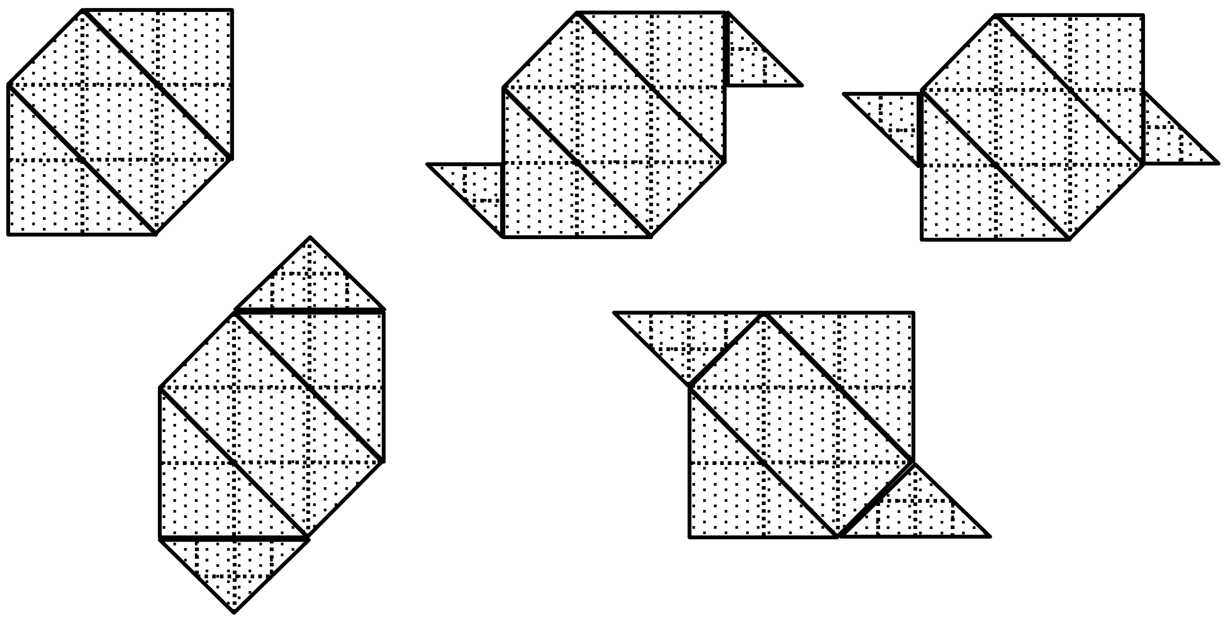
Les deux « petits » triangles et les deux « moyens » triangles peuvent être disposés de manière symétrique (des axes de symétrie complètent parfois le centre de symétrie).



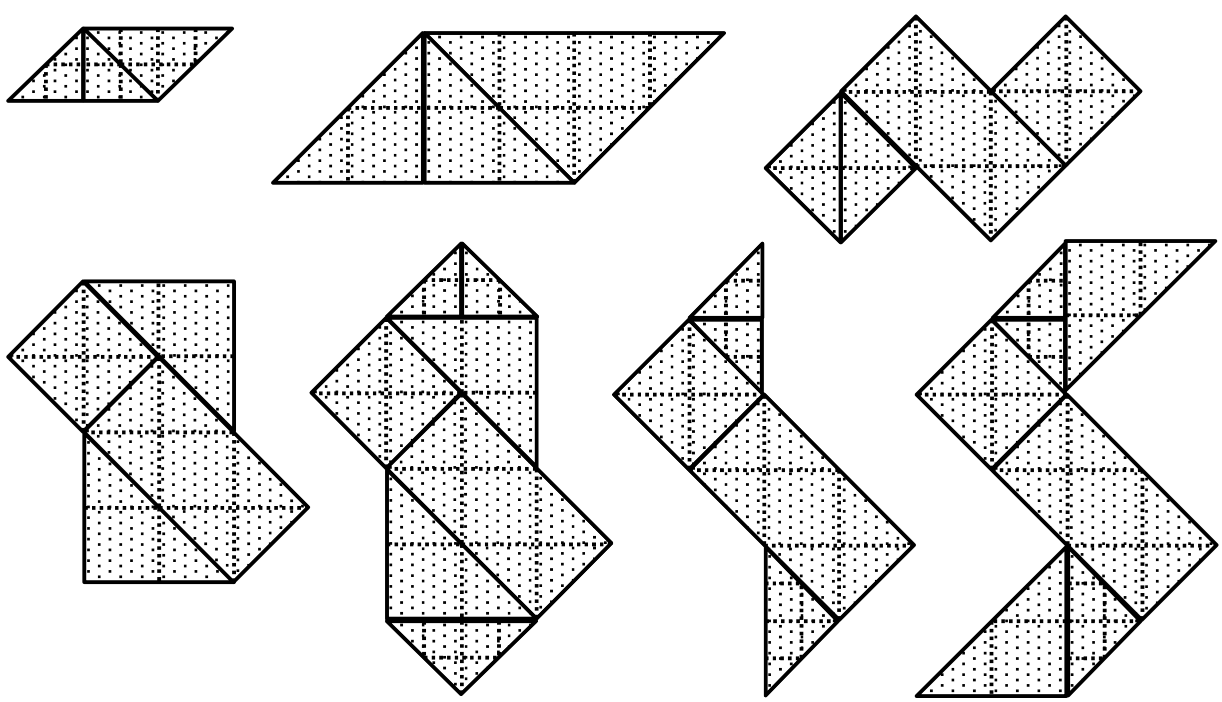
Le carré et le rectangle admettent un centre de symétrie. Le placement symétrique des deux « petits » triangles ou des deux « moyens » triangles fourni des configurations admettant un centre de symétrie.



Voici un assemblage de trois pièces possédant un centre de symétrie. Il peut être utilisé pour d'autres assemblages symétriques.

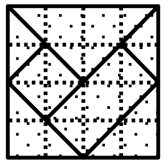


Des assemblages non symétriques de pièces permettent la création d'assemblages dont le pourtour est symétrique.

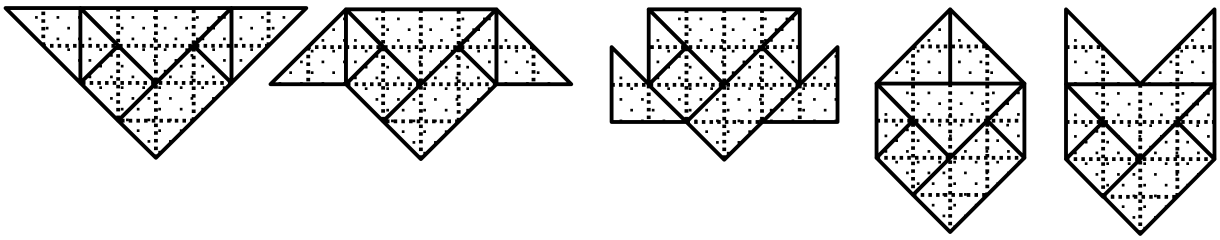


Pour réaliser des figures symétriques avec les sept pièces du Carré de Metz

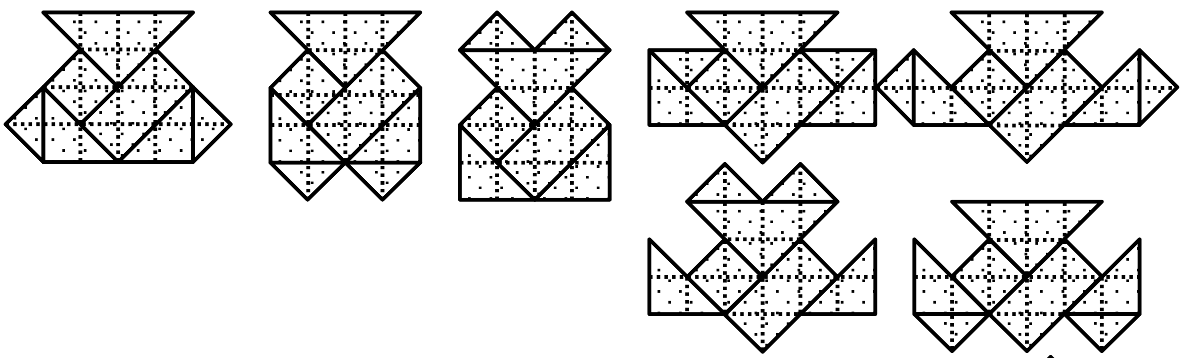
A partir du carré



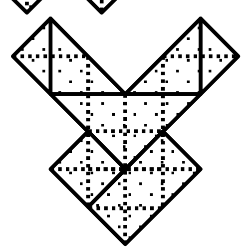
Le déplacement symétrique des deux « moyens » triangles fournit d'autres polygones.

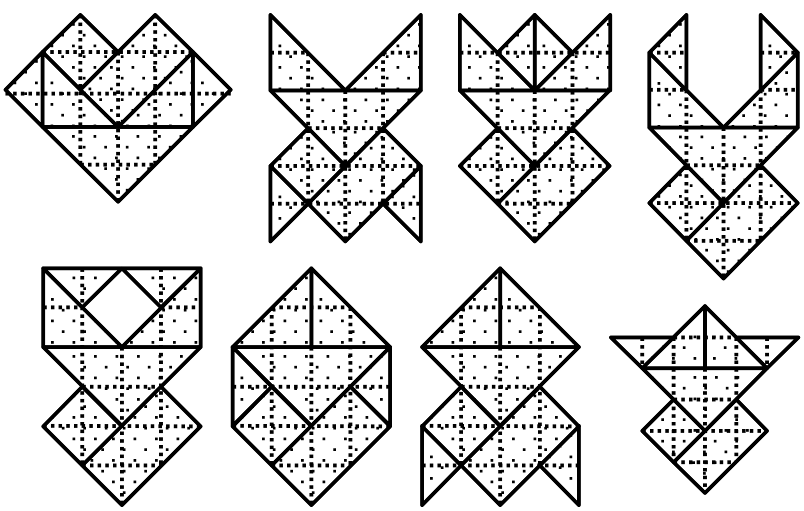


Le déplacement symétrique des deux petits triangles dans les figures précédentes fournit d'autres polygones.

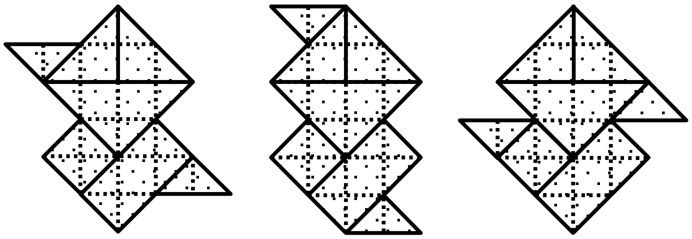


Cette vision des deux « V » fournit un autre polygone de départ.

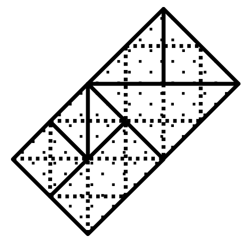


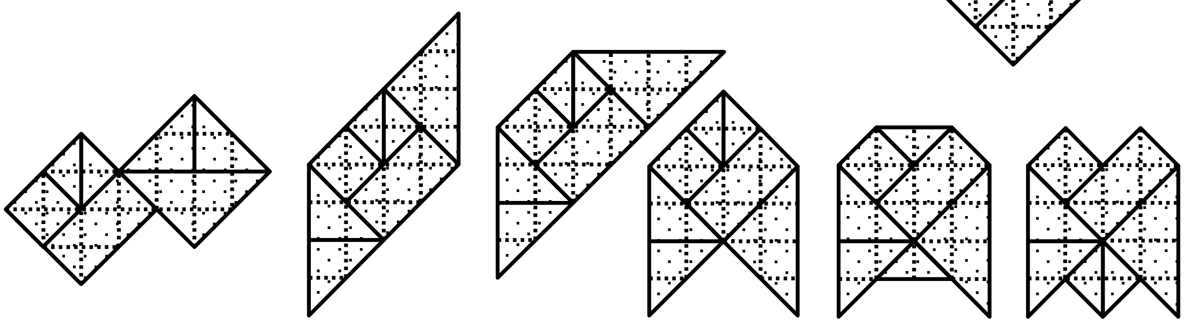


La partie « centrale » admettant un centre de symétrie, des polygones admettant eux aussi un centre de symétrie sont trouvés.

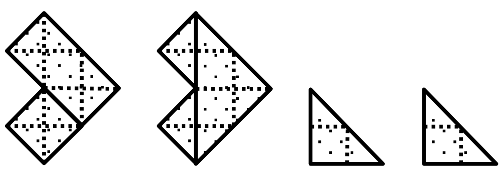


Un rectangle formé de deux carrés accolés est construit.
Il fournit des polygones ayant des éléments de symétrie.

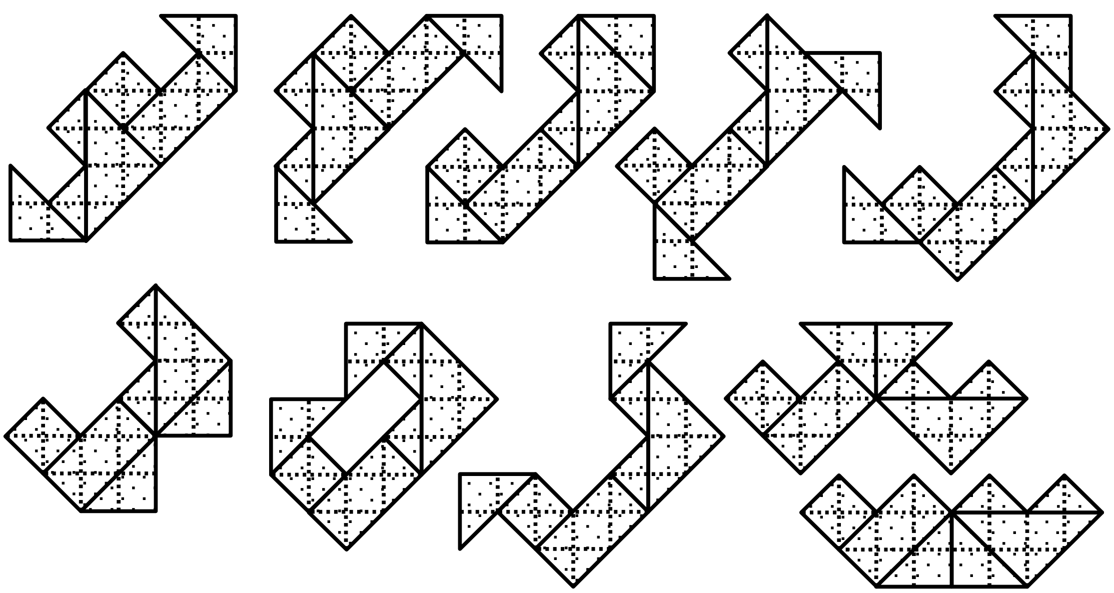


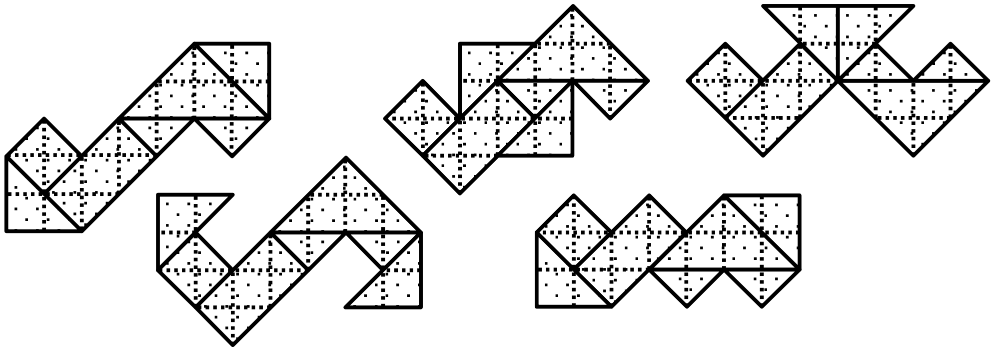


Avec les sept pièces, deux « petits L » sont réalisés et il reste les deux « moyens triangles ».

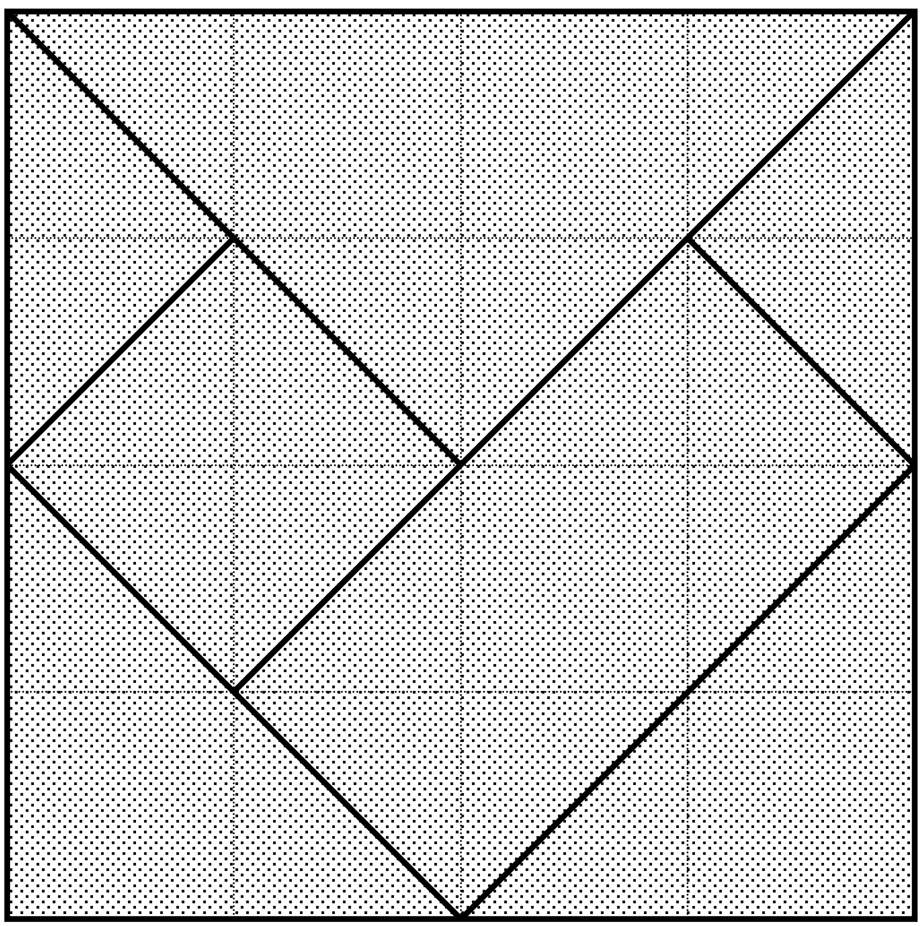


Symétries centrales et symétries orthogonales seront au rendez vous.

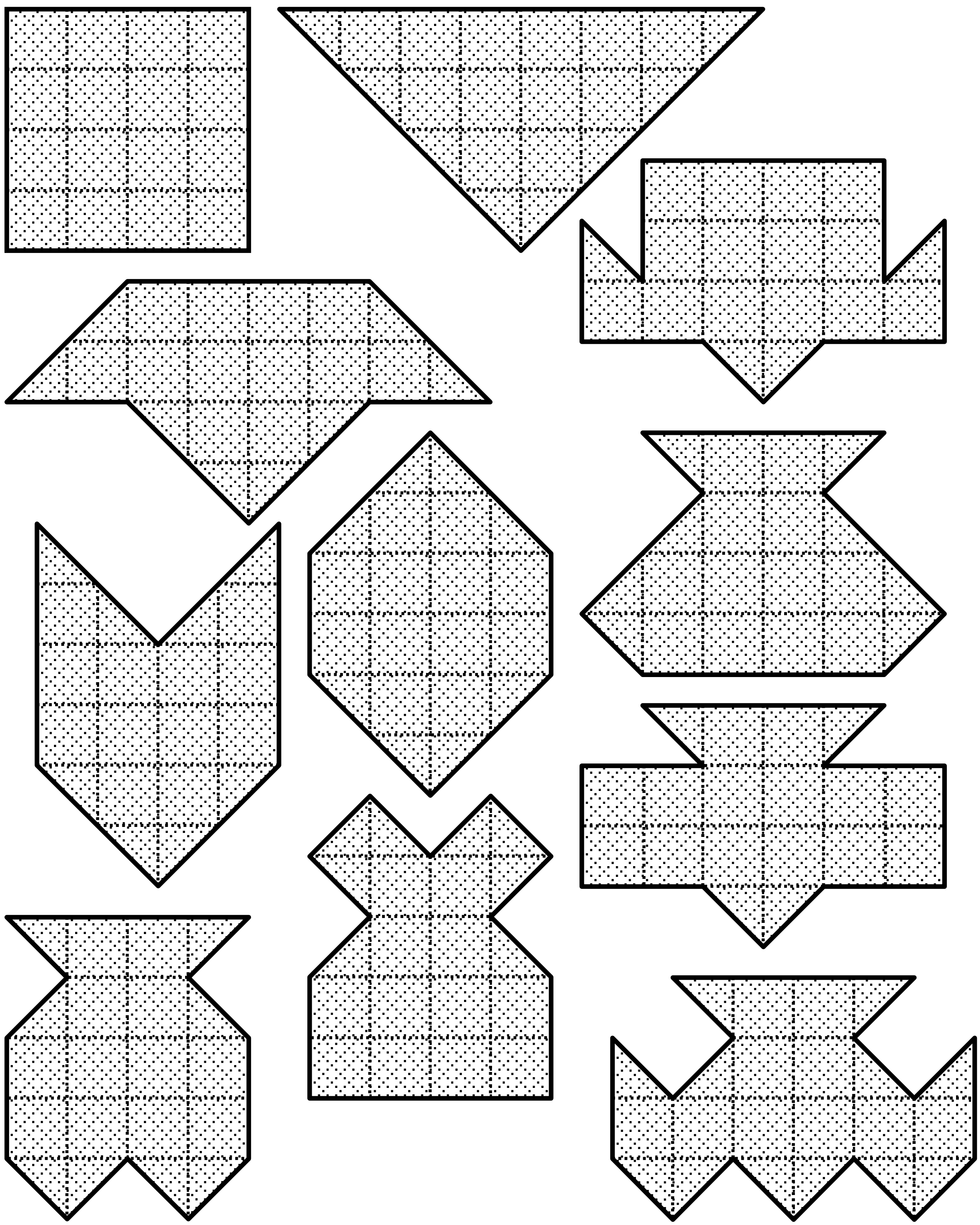


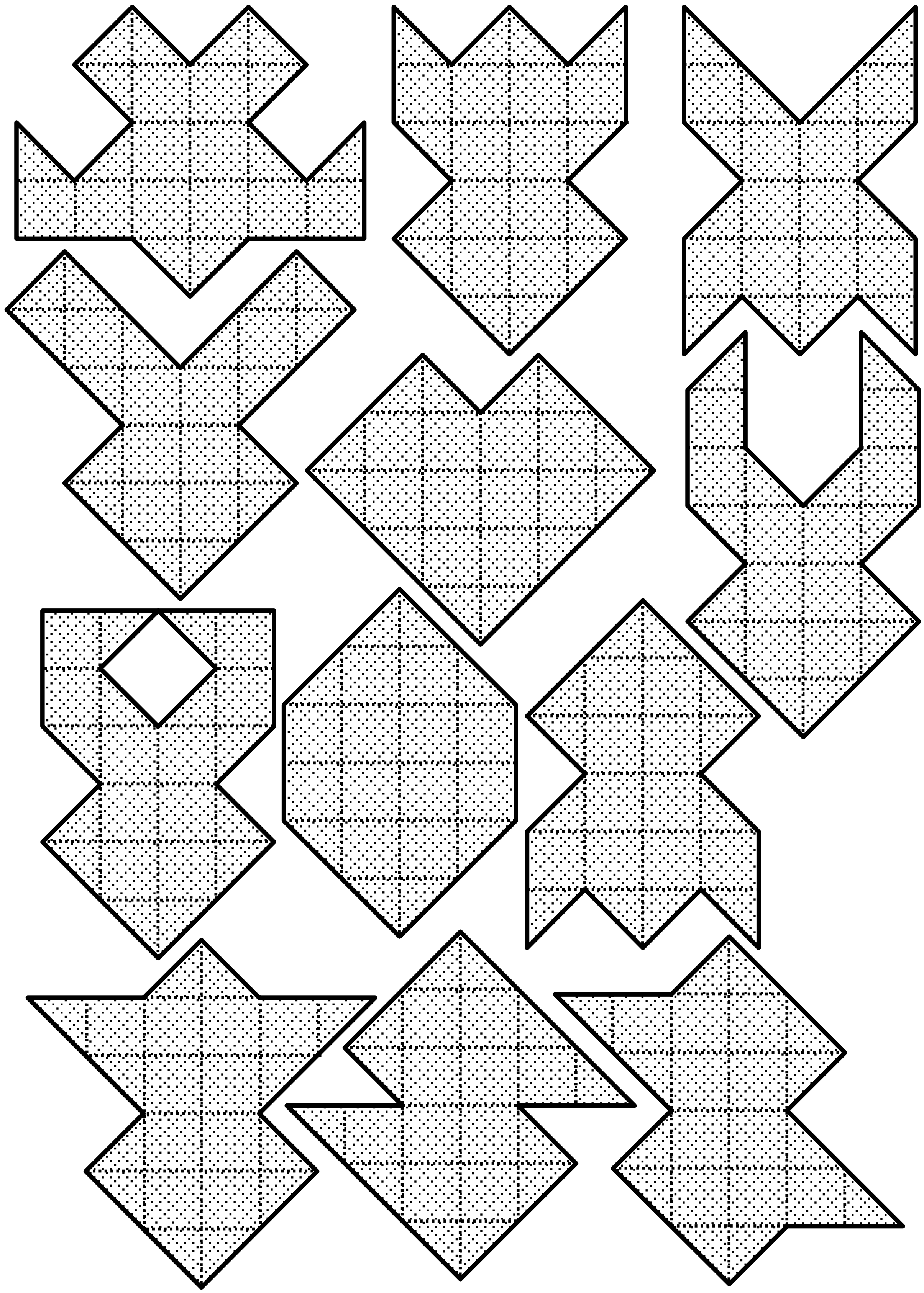


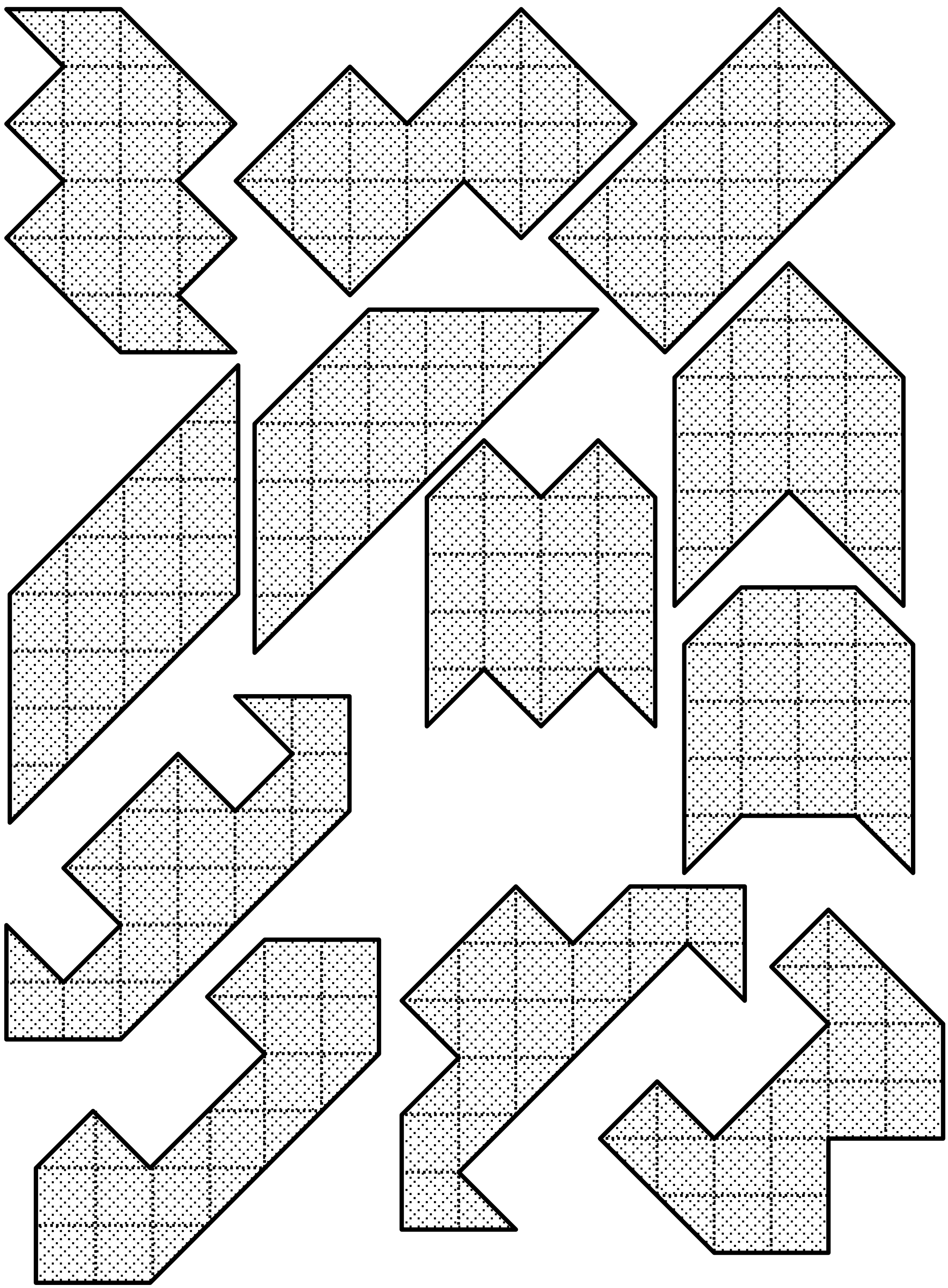
Un Carré de Metz pour rechercher les configurations proposées dans les pages suivantes

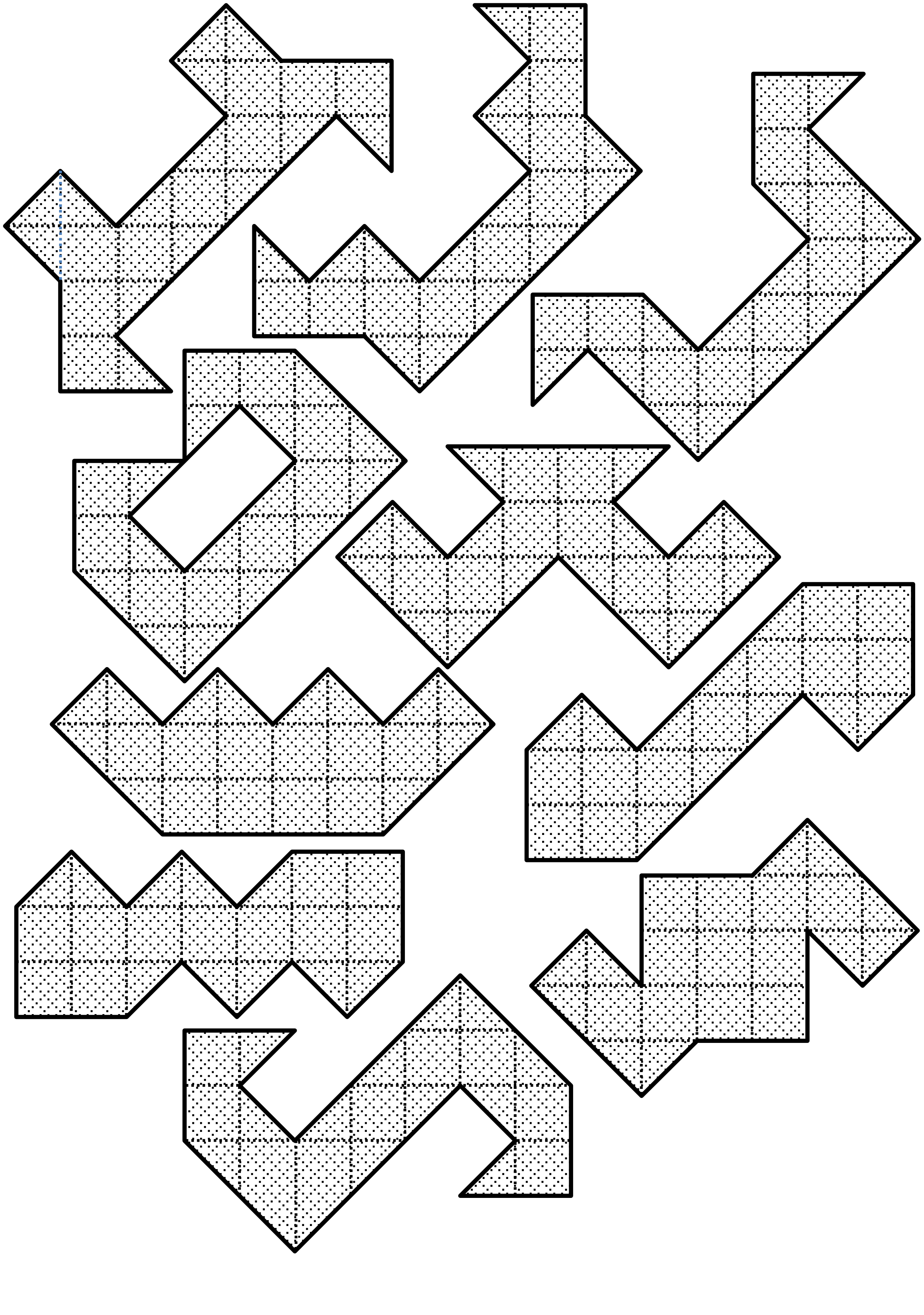


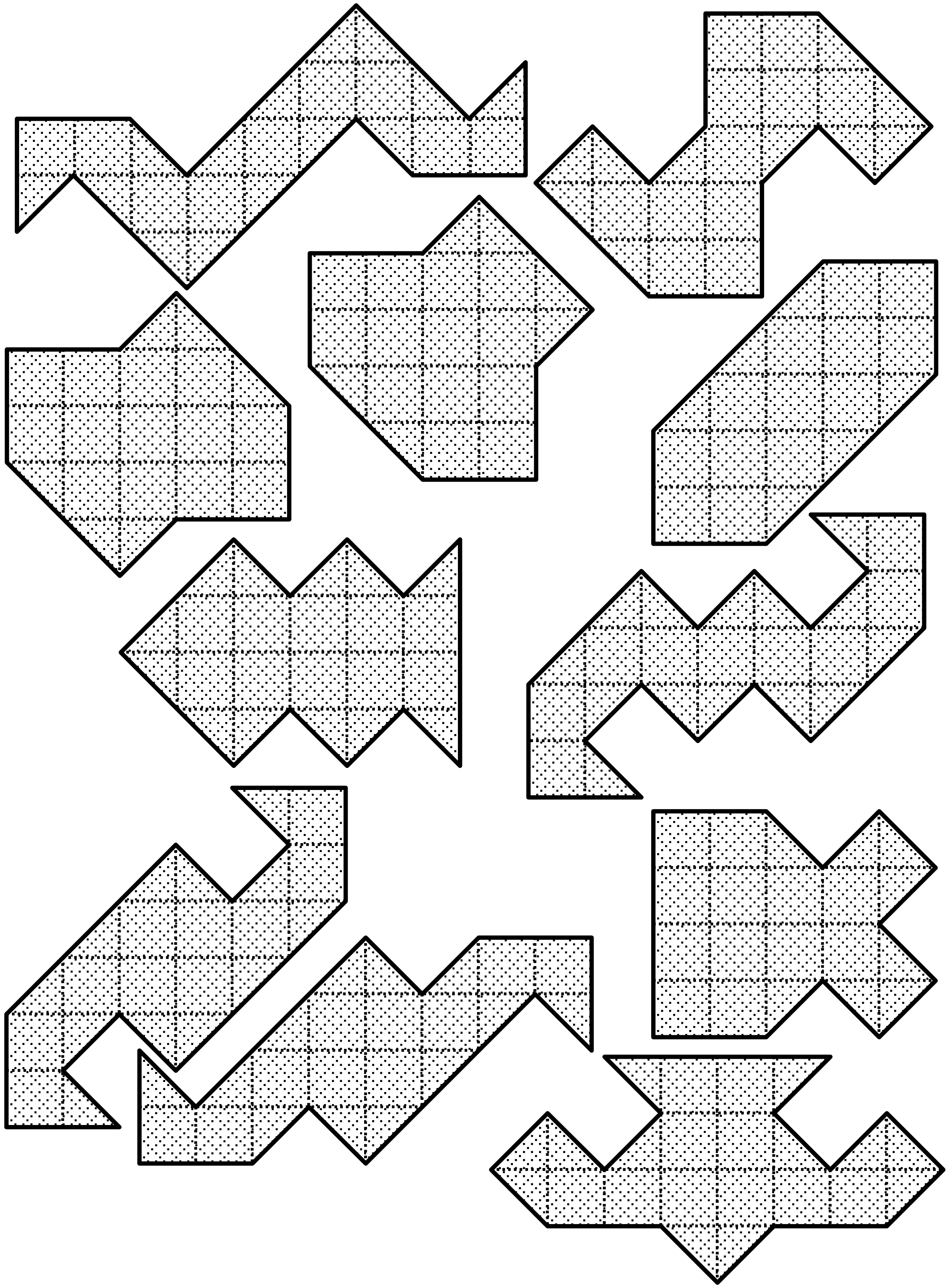
Des figures symétriques réalisées avec les sept pièces du carré de Metz. La collection n'est pas exhaustive…





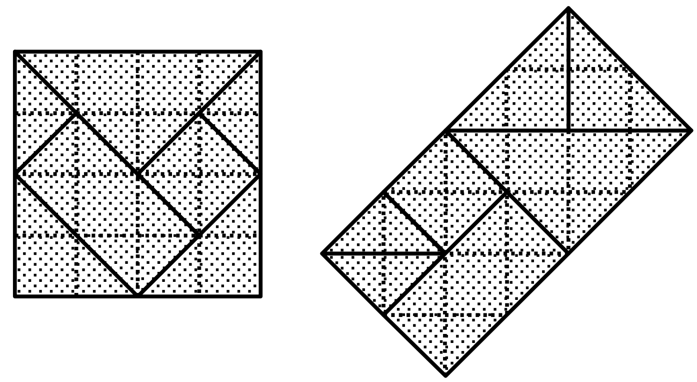






5 - Agrandissements et réductions

Le puzzle utilisé



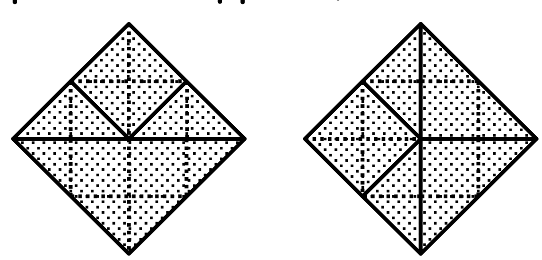
En utilisant les huit pièces, un rectangle est réalisé.

Les longueurs des côtés de la pièce rectangulaire sont moitié de celles du rectangle obtenu.
Les longueurs des côtés du rectangle obtenu sont le double de celles de la pièce rectangulaire.
Le dessin de la pièce rectangulaire est une réduction du dessin du grand rectangle à l'échelle $\frac{1}{2}$.
Le dessin du rectangle obtenu est un agrandissement du dessin de la pièce rectangulaire à l'échelle 2.

Remarques

Les longueurs des côtés du rectangle obtenu sont le double des longueurs des côtés du rectangle mais l'aire du rectangle obtenu n'est pas le double de l'aire du rectangle.
Après agrandissement ou réduction, un rectangle reste un rectangle.

En utilisant quatre pièces ou cinq pièces, un carré est réalisé.



Les longueurs des côtés de la pièce carrée sont moitié de celles du carré obtenu.
Les longueurs des côtés du carré obtenu sont le double de celles de la pièce carrée.

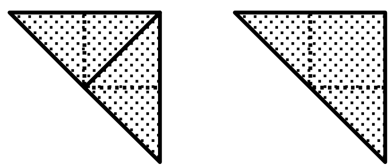
Le dessin de la pièce carrée est une réduction du dessin du grand carré à l'échelle $\frac{1}{2}$.

Le dessin du grand carré est un agrandissement du dessin de la pièce carrée à l'échelle 2.

Remarques

Les longueurs des côtés du carré obtenu sont le double des longueurs des côtés de la pièce carrée, mais l'aire du carré obtenu n'est pas le double de l'aire de la pièce carrée.
Après agrandissement ou réduction, un carré reste un carré.

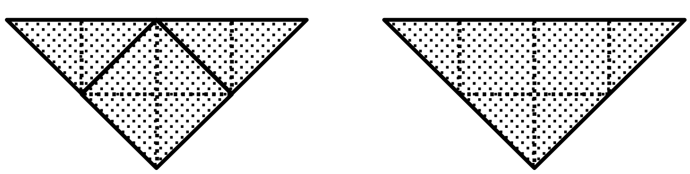
En utilisant les deux « petits » triangles, un triangle superposable au « moyen » triangle est obtenu.



L'aire d'un « petit » triangle est moitié de l'aire du « moyen » triangle obtenu.
L'aire du « moyen » triangle obtenu est le double de l'aire d'un « petit » triangle.
Les longueurs des côtés du « moyen » triangle ne sont pas le double de celles d'un « petit » triangle.
Les longueurs des côtés du « petit » triangle ne sont la moitié de celles d'un « moyen » triangle.

Le dessin d'un « petit » triangle n'est pas une réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$ du dessin du « moyen » triangle.
Le dessin du « moyen » triangle n'est pas un agrandissement à l'échelle 2 du dessin d'un « petit » triangle.

En utilisant trois pièces, un triangle superposable au « grand » triangle est obtenu.



Les longueurs des côtés du « petit » triangle sont moitié de celles du « grand » triangle.
Les longueurs des côtés du « grand » triangle obtenu sont le double de celles d'un « petit » triangle.

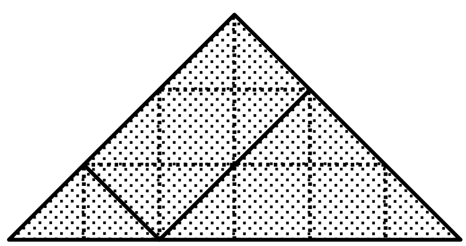
Le dessin d'un « petit » triangle est un agrandissement à l'échelle $\frac{1}{2}$ du dessin du « grand » triangle.
Le dessin du « grand » triangle est une réduction à l'échelle 2 du dessin d'un « petit » triangle.

Remarques

Les longueurs des côtés du « grand » triangle obtenu sont le double de celles d'un « petit » triangle mais l'aire du « grand » triangle obtenu n'est pas le double de l'aire d'un « petit » triangle.

Après agrandissement ou réduction, un triangle rectangle isocèle reste un triangle rectangle isocèle.

En utilisant trois pièces, un autre triangle rectangle isocèle est obtenu.



Les longueurs des côtés du « petit » triangle sont le tiers de celles du triangle obtenu.
Les longueurs des côtés du triangle obtenu sont le triple de celles du « petit » triangle.

Le dessin du « petit » triangle est une réduction à l'échelle $\frac{1}{3}$ du dessin du triangle obtenu.
Le dessin du triangle obtenu est un agrandissement à l'échelle 3 du dessin d'un « petit » triangle.

Les longueurs des côtés du « moyen » triangle sont les deux tiers de celles du grand triangle obtenu.
Les longueurs des côtés du grand triangle obtenu sont une fois et demi celles du « moyen » triangle.

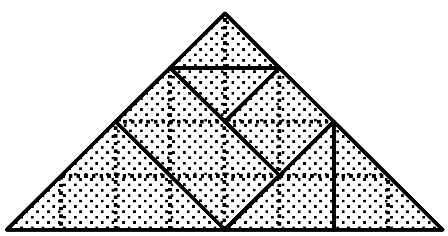
Le dessin du « moyen » triangle est une réduction à l'échelle $\frac{2}{3}$ du dessin du grand triangle obtenu.

Le dessin du grand triangle obtenu est une réduction à l'échelle $\frac{3}{2}$ du dessin d'un « petit » triangle. Rappel : $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

Remarques

Les longueurs des côtés du grand triangle obtenu sont le triple des longueurs des côtés du « petit » triangle mais l'aire du grand triangle obtenu n'est pas le triple de l'aire du « petit » triangle.
Les longueurs des côtés du grand triangle obtenu sont les deux tiers de celles des dimensions d'un « moyen » triangle mais l'aire du grand triangle obtenu n'est pas les deux tiers de l'aire d'un « moyen » triangle.

En utilisant les huit pièces, j'ai réalisé un triangle rectangle isocèle.



Les longueurs des côtés du « moyen » triangle sont moitié de celles du grand triangle obtenu.
Les longueurs des côtés du grand triangle obtenu sont le double de celles du « moyen » triangle.

Le dessin d'un « moyen » triangle est une réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$ du dessin du grand triangle obtenu.
Le dessin du grand triangle obtenu est un agrandissement à l'échelle 2 du dessin du « moyen » triangle.

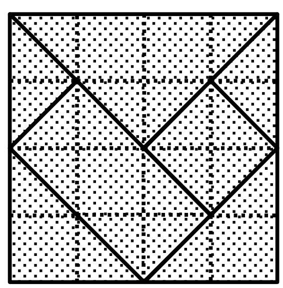
Les longueurs des côtés d'un « petit » triangle sont le quart de celles du grand triangle obtenu.
Les longueurs des côtés du grand triangle obtenu sont quatre fois celles d'un « petit » triangle.

Le dessin d'un « petit » triangle est une réduction à l'échelle $\frac{1}{4}$ du dessin du grand triangle obtenu.
Le dessin du grand triangle obtenu est un agrandissement à l'échelle 4 du dessin d'un « petit » triangle.

Remarques

Les longueurs des côtés du grand triangle obtenu sont le double de celles du « moyen » triangle mais l'aire du grand triangle obtenu n'est pas le double de celle du « moyen » triangle.
Les longueurs des côtés du grand triangle obtenu sont quatre fois celles des dimensions d'un « petit » triangle mais l'aire du grand triangle obtenu n'est pas quatre fois celle d'un « petit » triangle.

Plus tard, au collège



Avec les sept pièces, un grand carré est formé. C'est un agrandissement à l'échelle $2\sqrt{2}$ de la pièce carrée. Le petit carré est une réduction à l'échelle $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ du carré obtenu.
Le « moyen » triangle est un agrandissement à l'échelle $\sqrt{2}$ du « petit » triangle. Le « petit » triangle est une réduction à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{2}}$ du « petit » triangle.
Des échelles quelque peu inhabituelles sont rencontrées.

6 – Sous-figures

Extraits des programmes 2008 de l'Ecole Elémentaire :

CP :
Reconnaître et nommer un carré, un rectangle, un triangle.
Reproduire les figures géométriques simples à l'aide d'instruments ou de techniques : règles, quadrillage, papier calque.

CE1 :
Décrire, reproduire, tracer un carré, un rectangle, un triangle rectangle.
Utiliser des instruments pour réaliser des tracés : règle, équerre ou gabarit de l'angle droit.
Percevoir et reconnaître quelques relations et propriétés géométriques : alignement, angle droit, axe de symétrie, égalité de longueurs.
Repérer des cases, des nœuds d'un quadrillage.

L'utilisation d'un quadrillage apparait au courant du Cycle 2, il semble donc intéressant d'envisager en quoi il peut intervenir lors de recherches (utilisation d'alignements) ou de transmissions de résultats de recherches (dessins sur papier quadrillé).

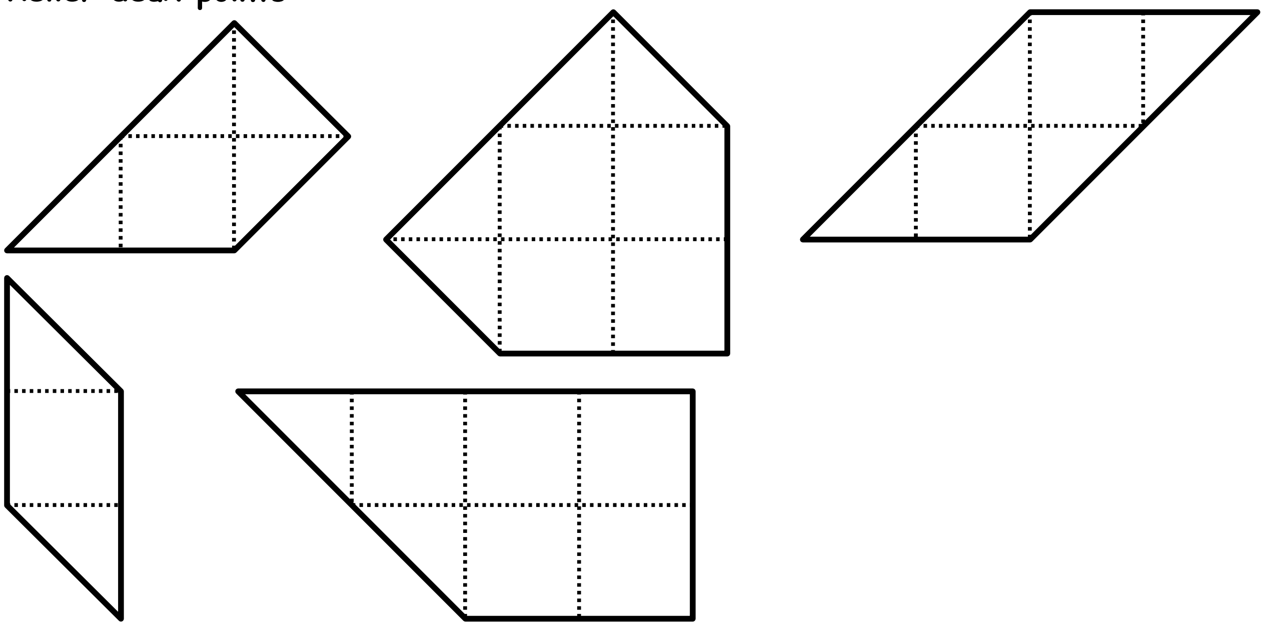
Une observation des polygones permet de retrouver en sous figures les deux pièces qui ont été utilisées. Les jeunes élèves pourront observer, recouvrir les dessins avec les pièces du puzzle. Les plus âgés chercheront à anticiper l'assemblage sans le réaliser. Le tracé du pourtour des pièces pourra être fait sur le dessin proposé ou par reproduction sur une feuille quadrillée. La règle est souvent d'abord utilisée pour relier des points, sans se poser la question de ce qu'est un point pour l'élève. Elle est utilisée ici en situation pour prolonger un côté, relier deux sommets, faire apparaître un axe de symétrie. Des milieux de côté sont aussi rencontrés. Ce travail sur papier quadrillé sera réactivé lorsque l'élève travaillera sur son cahier.

Voici une possibilité d'utilisation : proposer une configuration, indiquer le nombre de pièces utilisées et donner la précision indiquée.

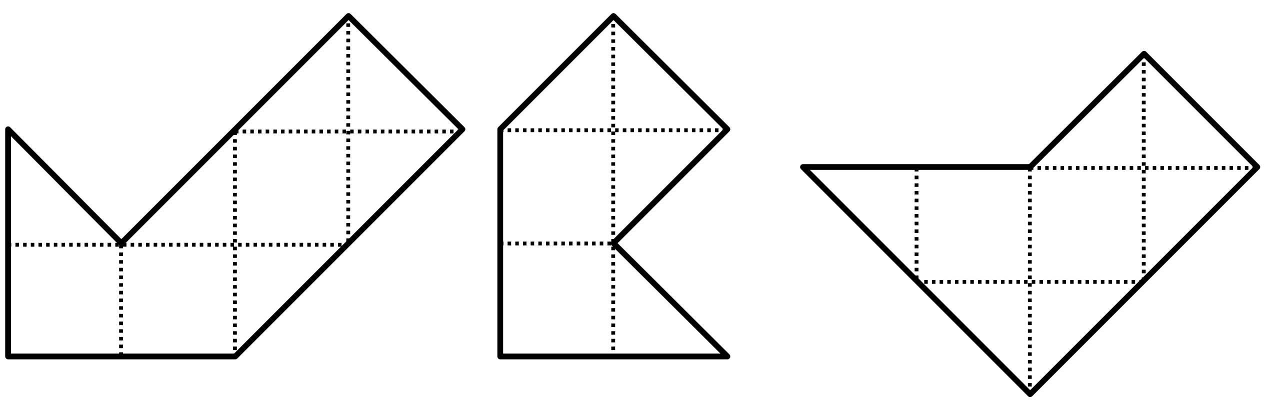
Le document présente quelques propositions d'assemblages de deux pièces. Il serait sans nul doute intéressant d'explorer les assemblages de trois pièces ou plus.

Avec deux pièces :

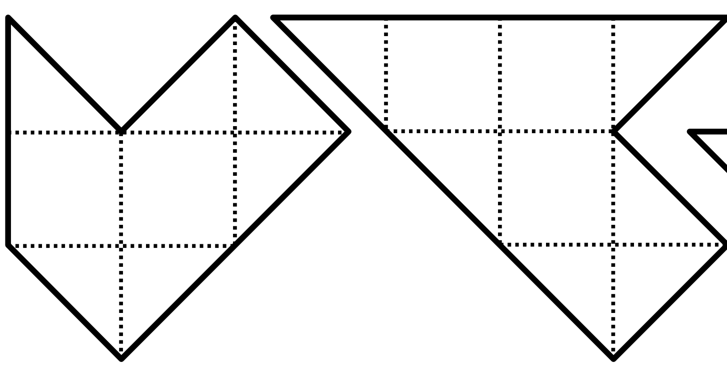
Relier deux points

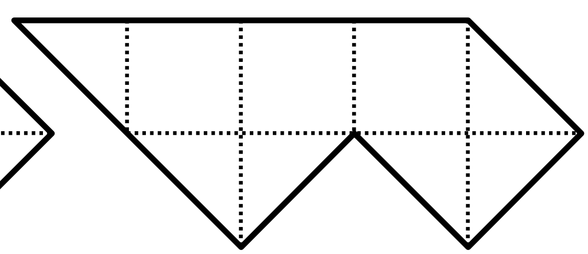


Prolonger un côté ou relier deux points

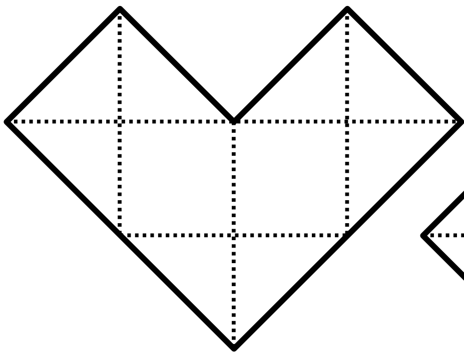
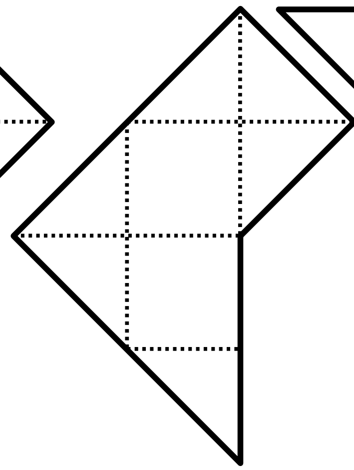
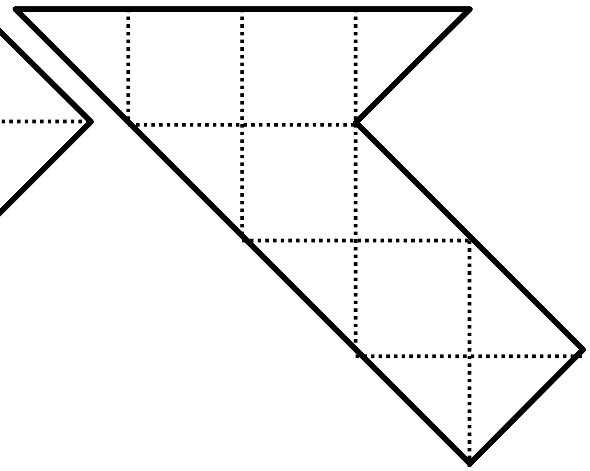


Deux possibilités

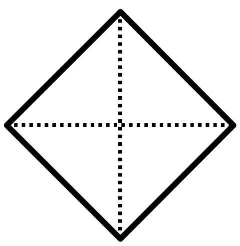
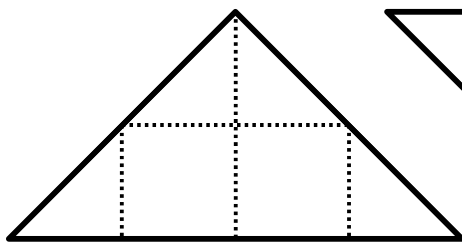
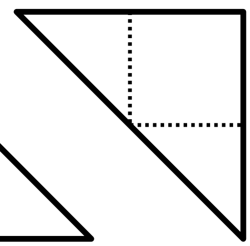
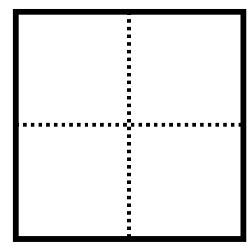




Prolonger un côté, utiliser le milieu d'un côté

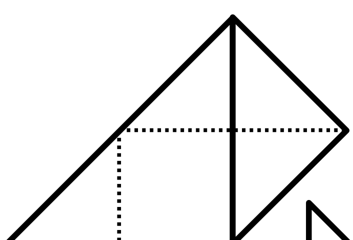
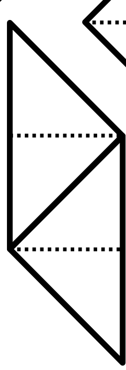
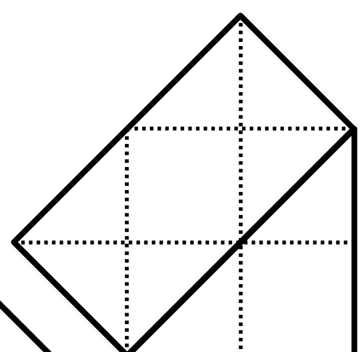
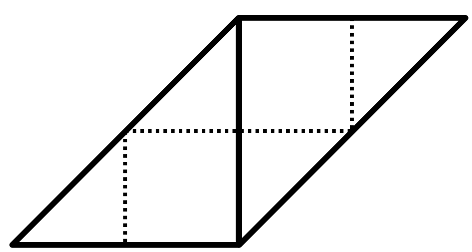
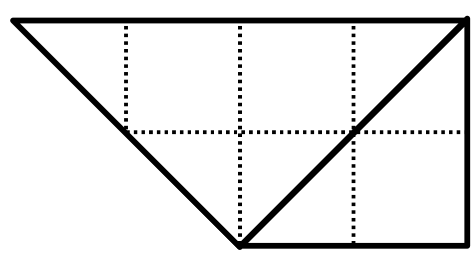
Utiliser le milieu d'un côté ou un axe de symétrie

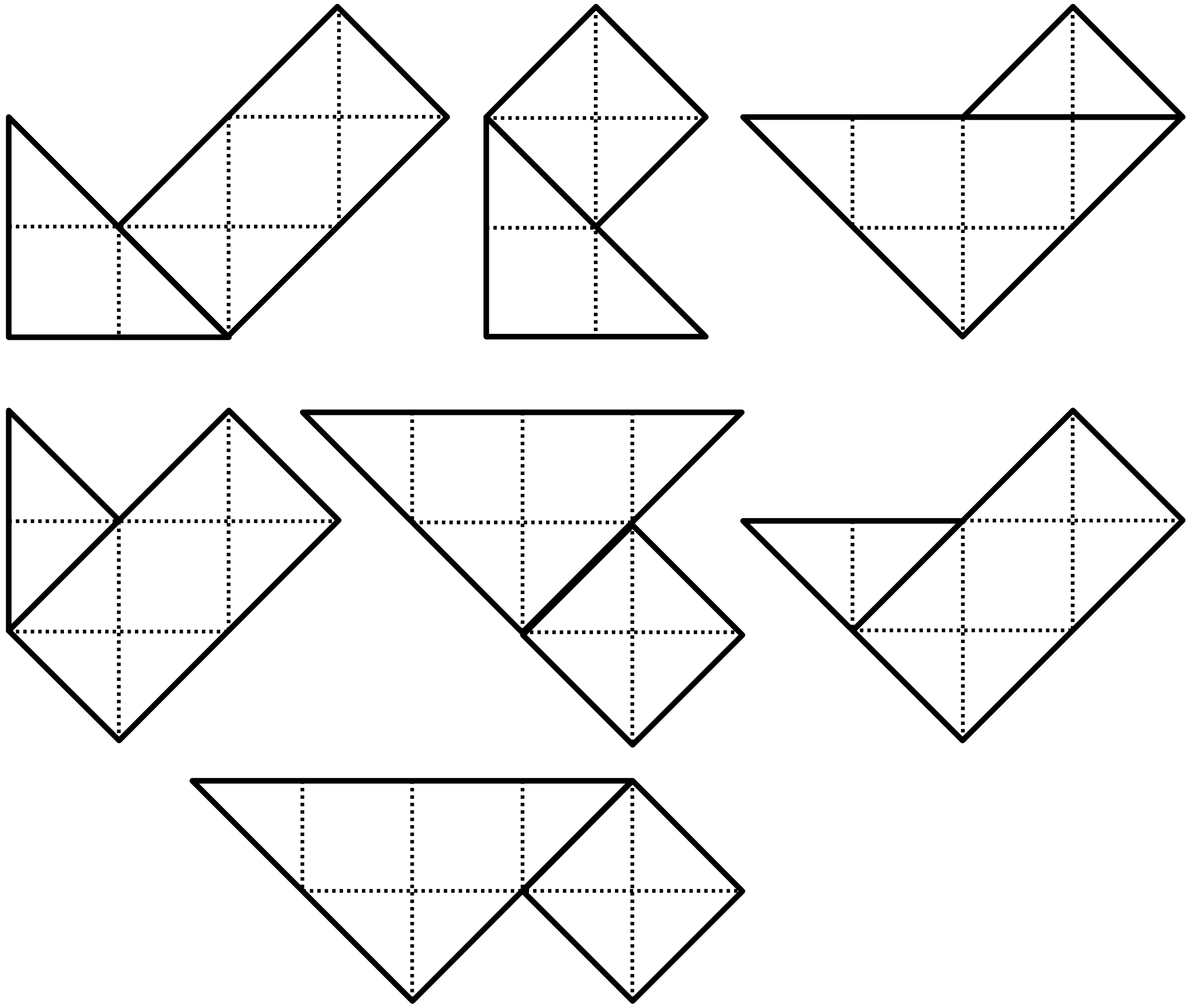
Des solutions

__Avec deux pièces__ :

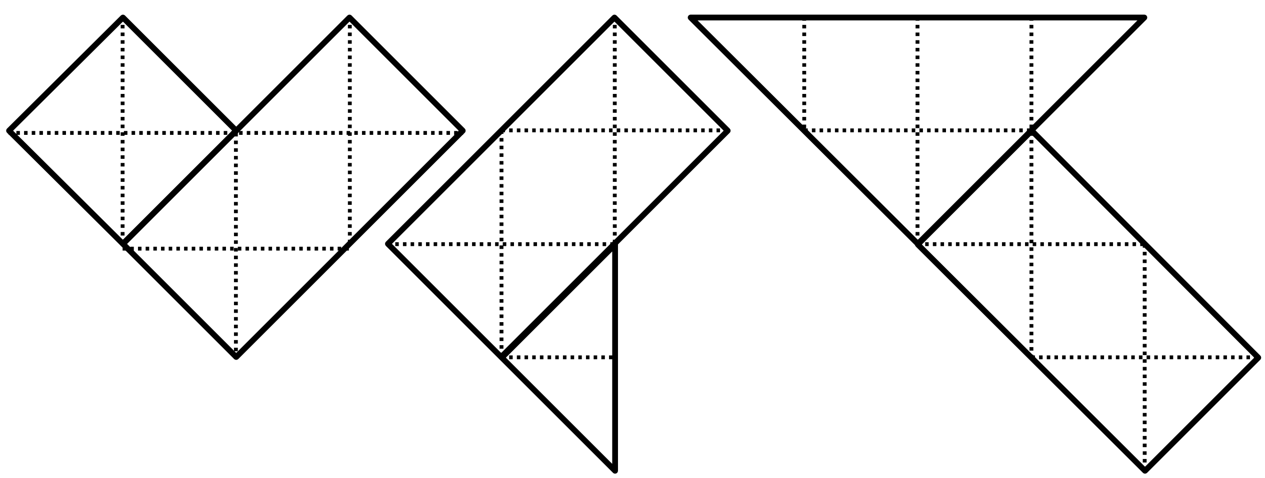
Relier deux points

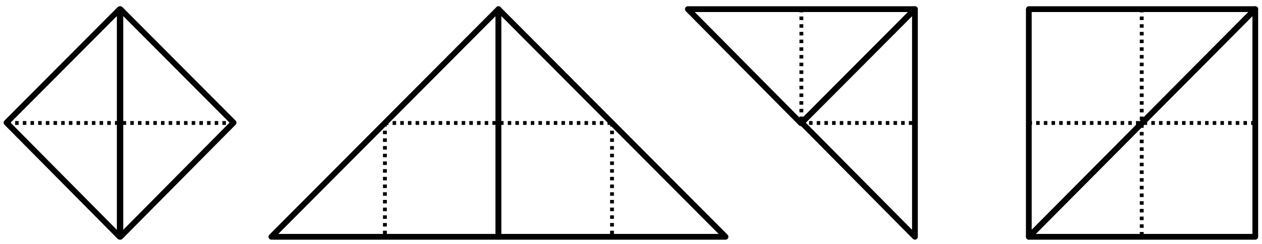
Prolonger un côté ou relier deux points



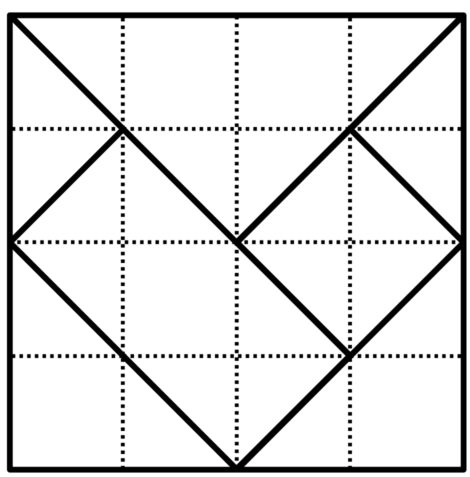
Prolonger un côté, utiliser le milieu d'un côté



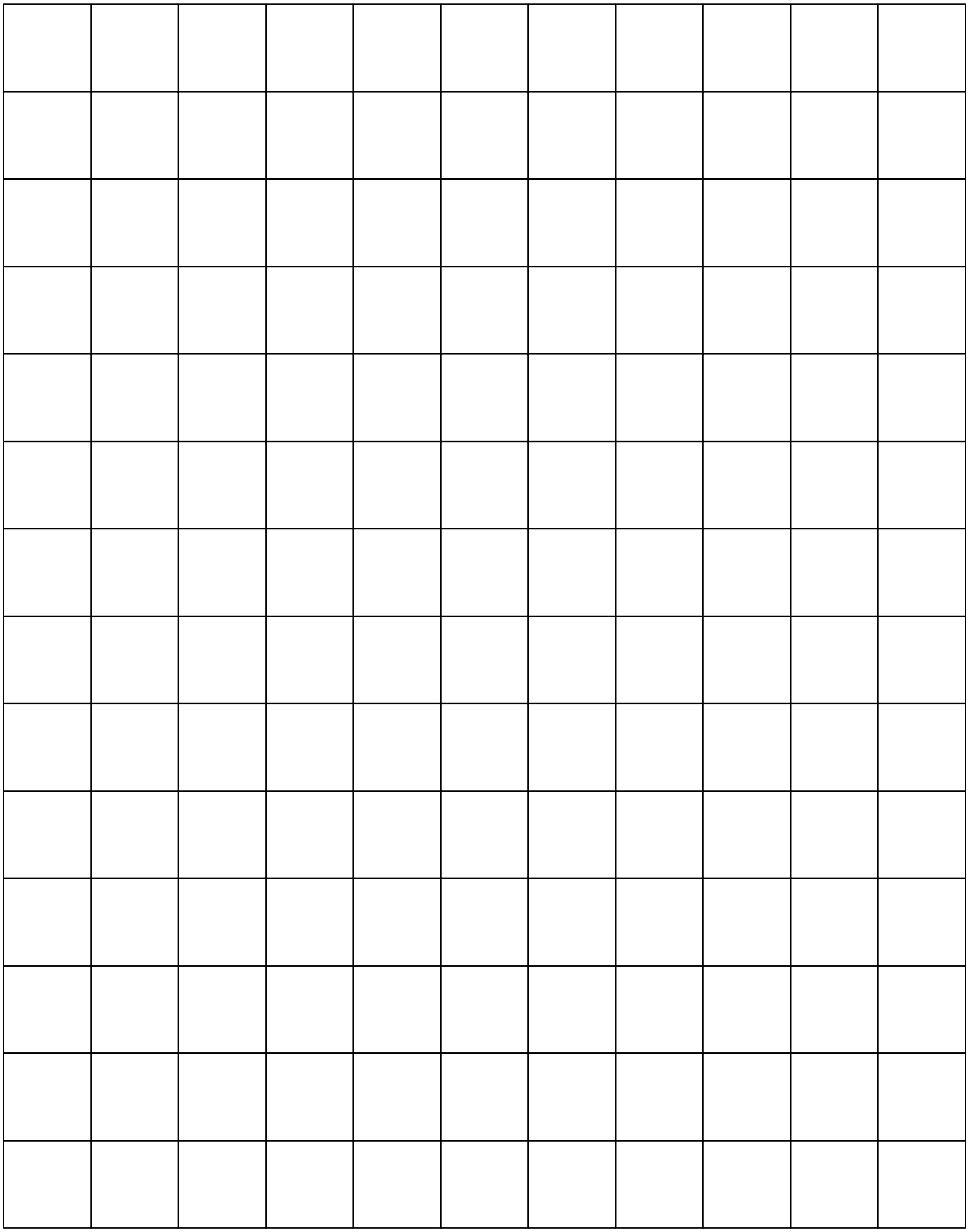
Utiliser le milieu d'un côté ou un axe de symétrie



Un Carré de Metz à l'échelle des propositions des pages précédentes:

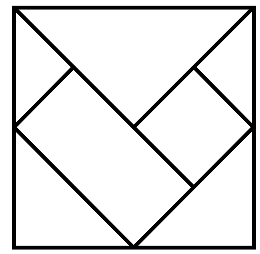


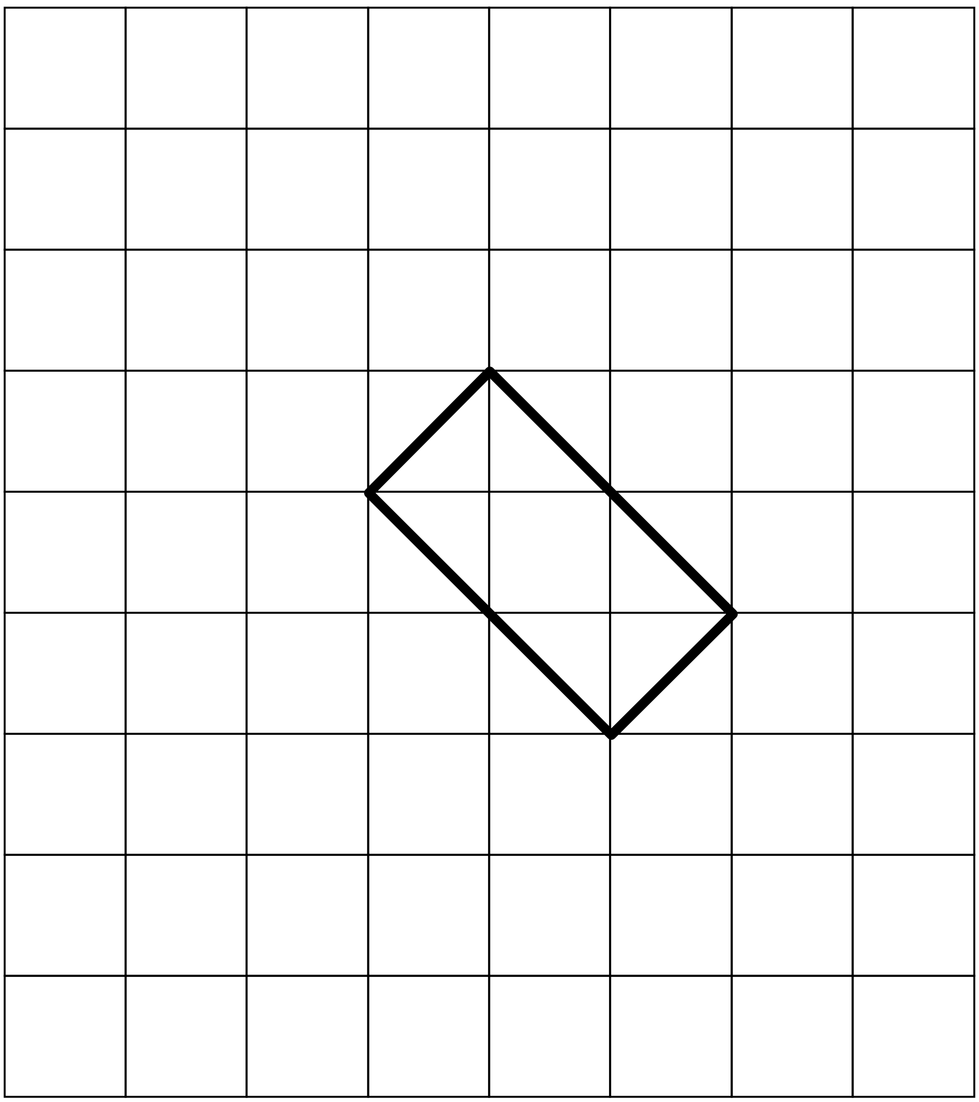
Une feuille utilisant le même quadrillage que celui utilisé dans les propositions des pages précédentes



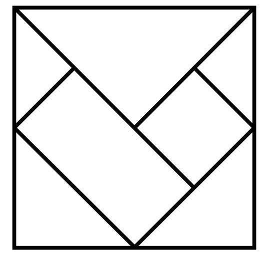
7 - Des dessins du carré de Metz

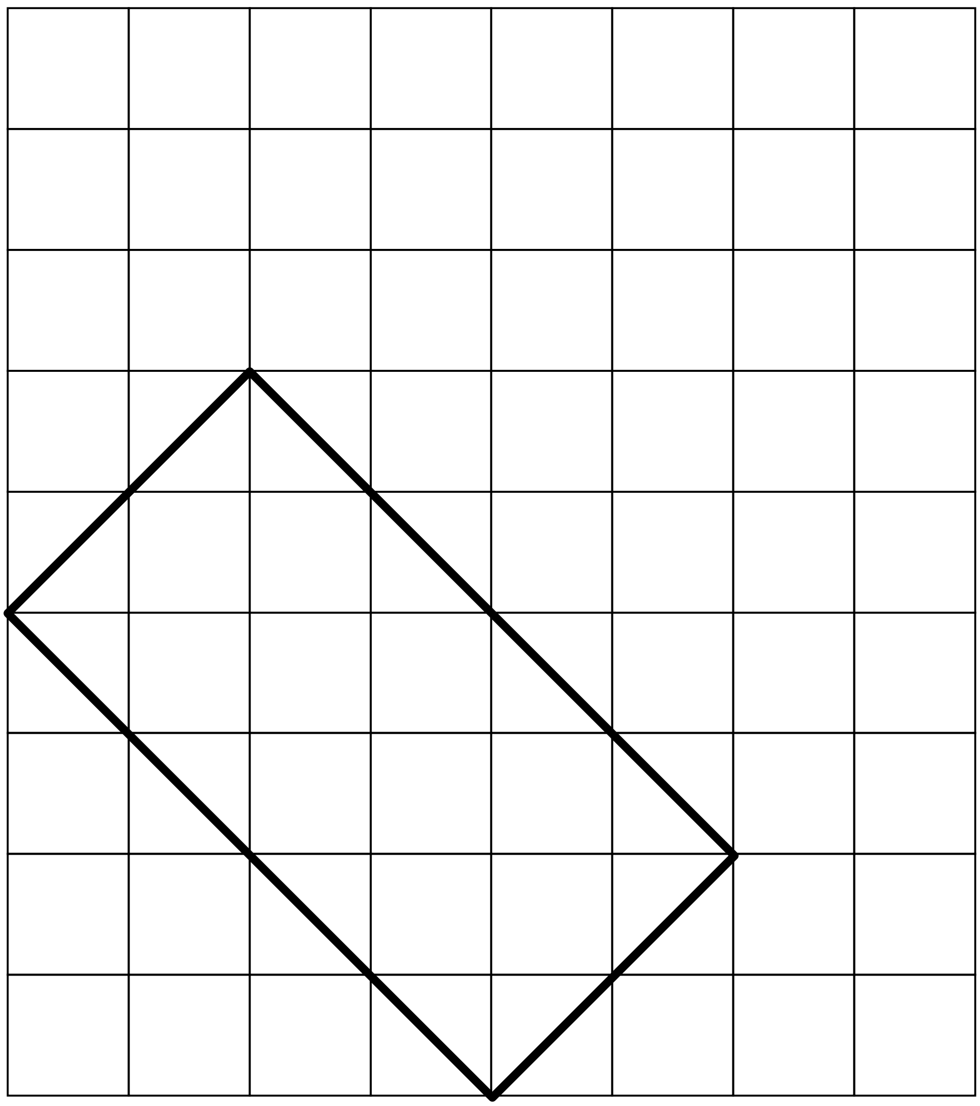
Dessin 1 : Dans le quadrillage ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



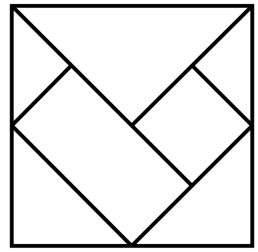


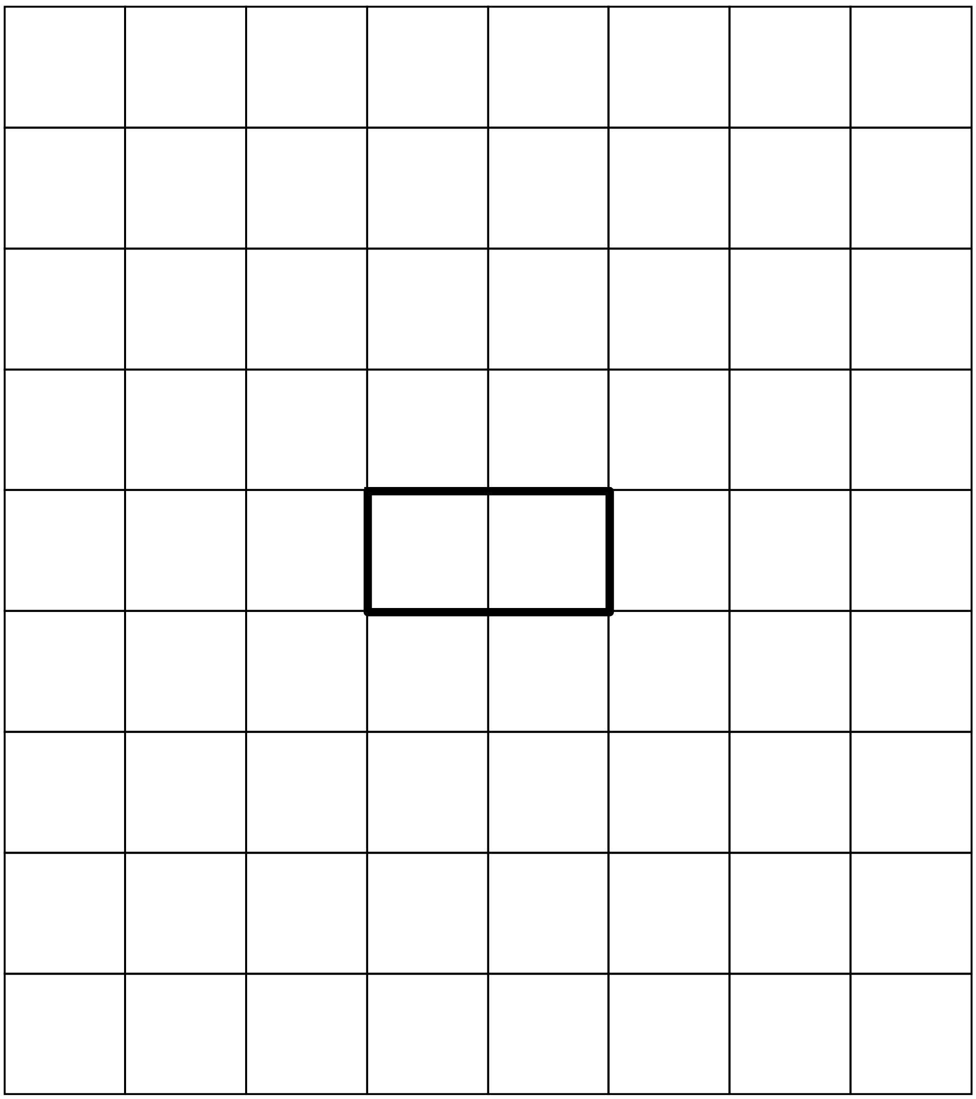
Dessin 2 : Dans le quadrillage ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



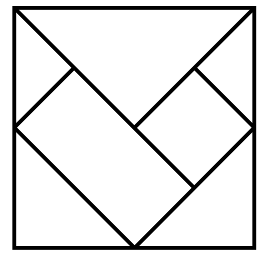


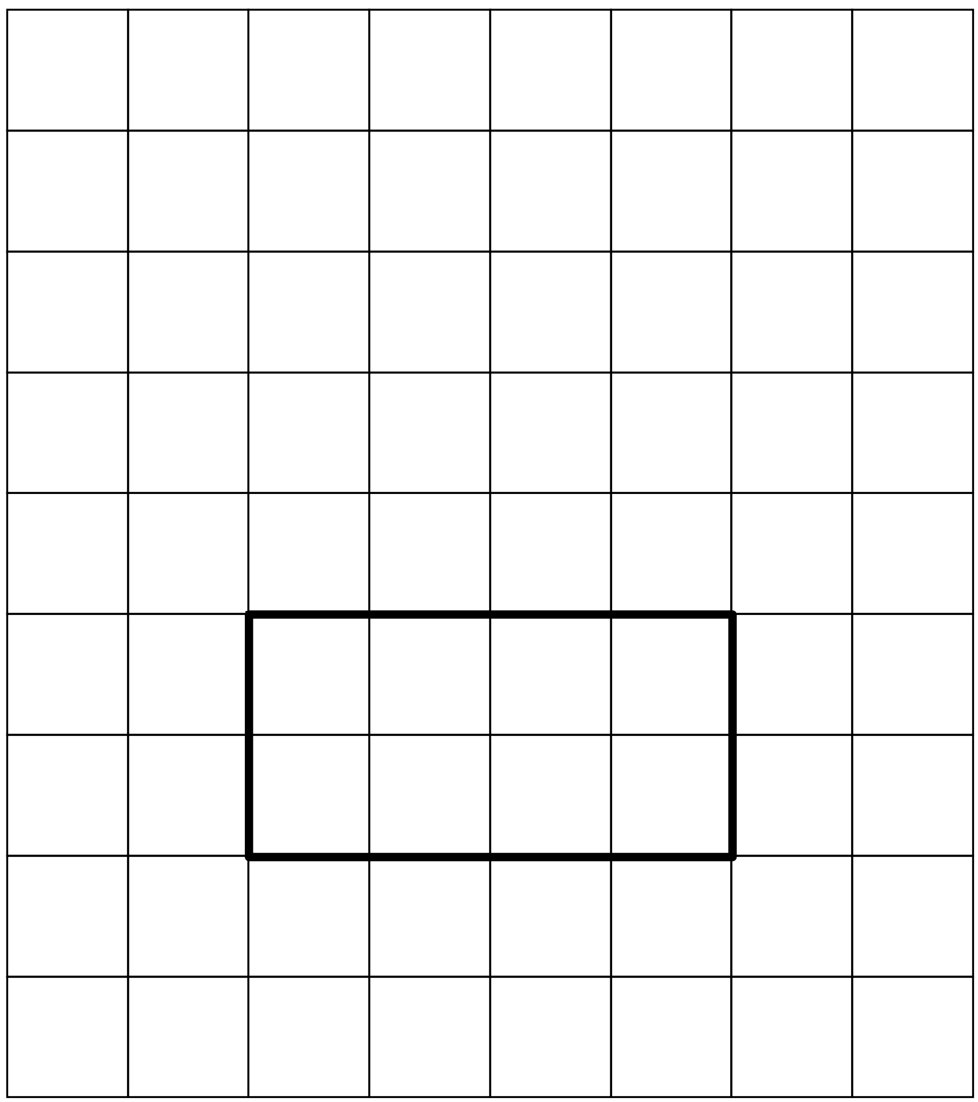
Dessin 3 : Dans le quadrillage ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



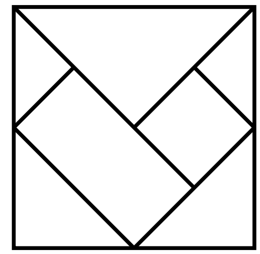


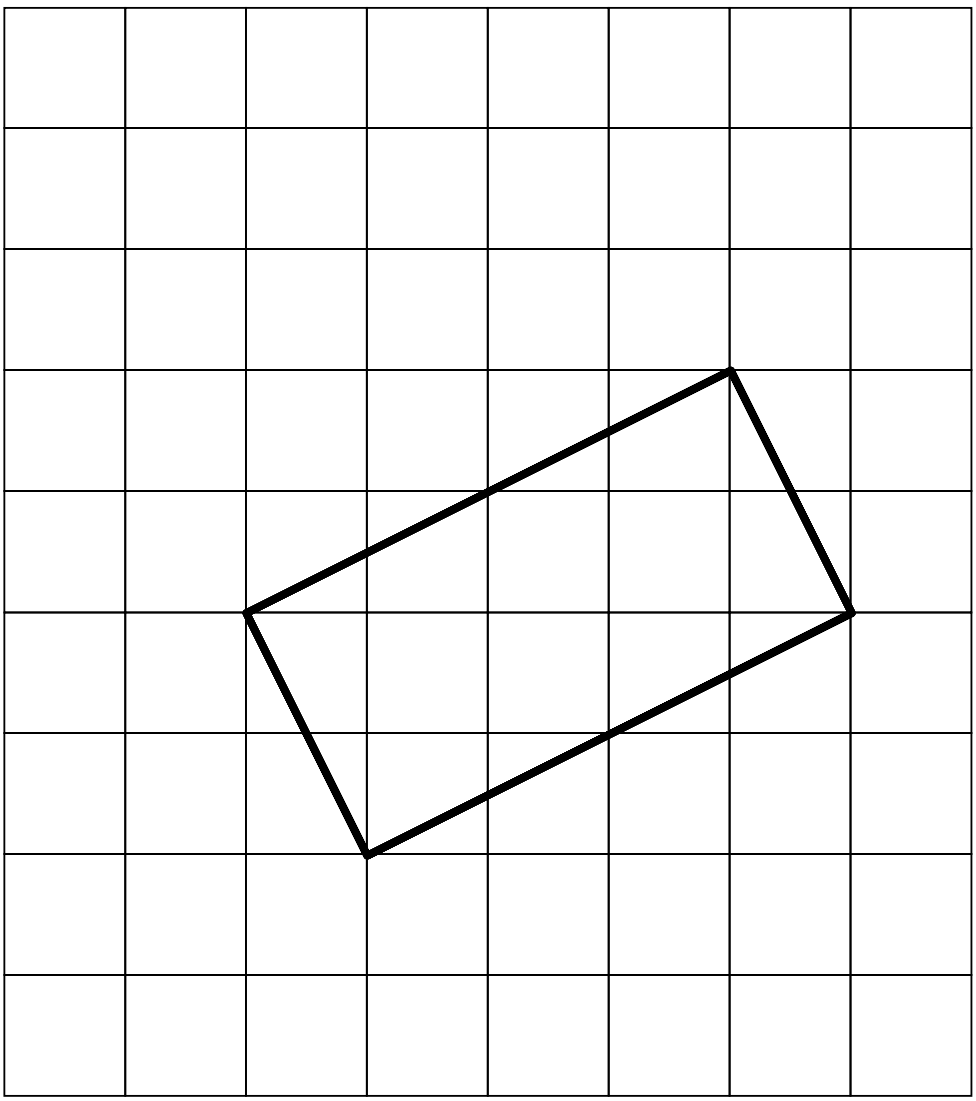
Dessin 4 : Dans le quadrillage ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



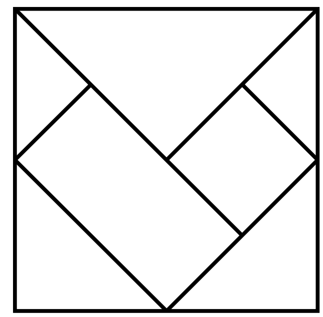


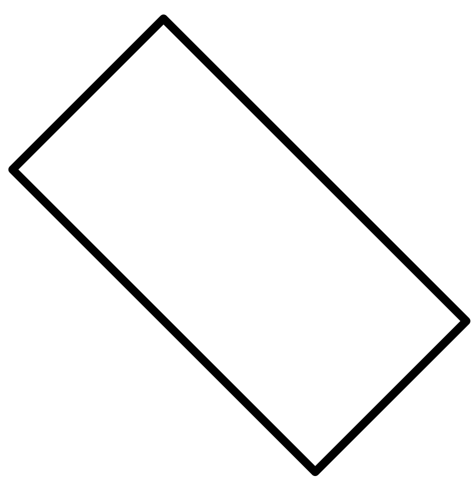
Dessin 5 : Dans le quadrillage ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



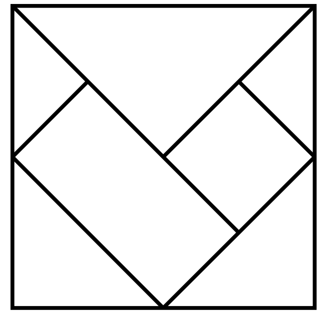


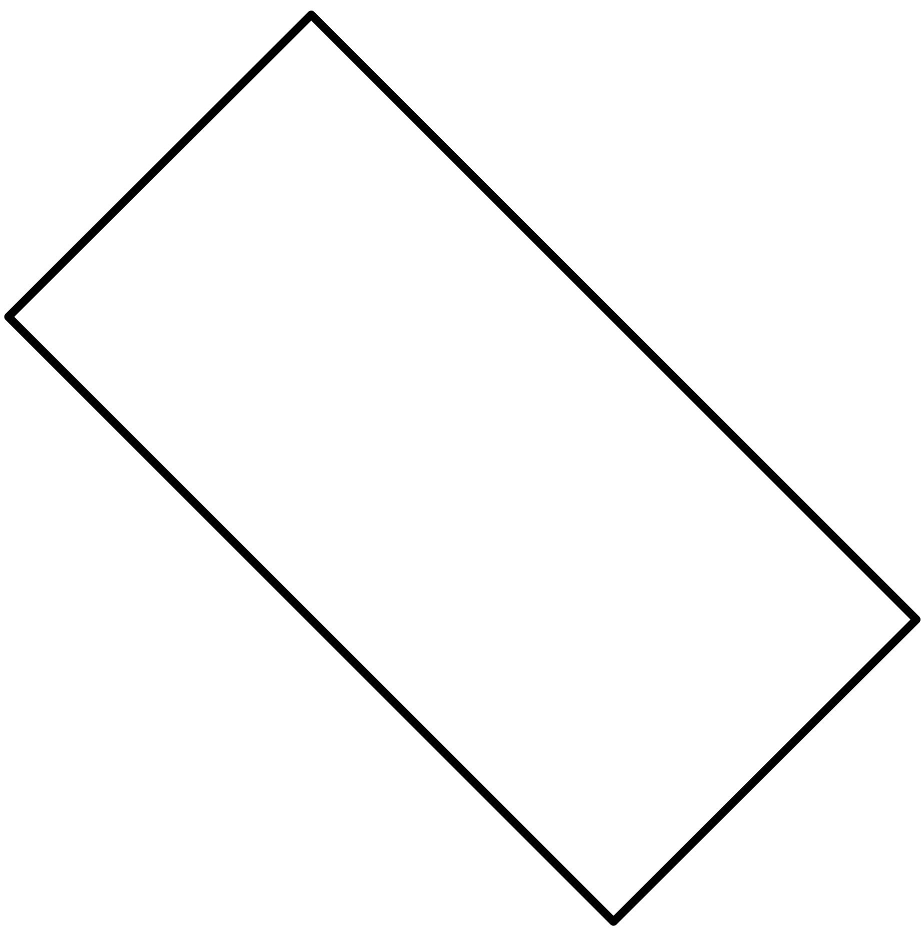
Dessin 6 : Ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



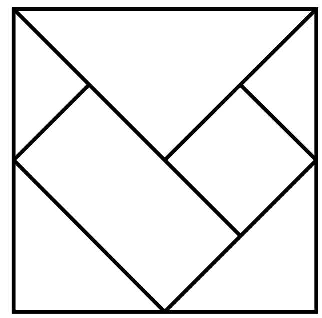


Dessin 7 : Ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.

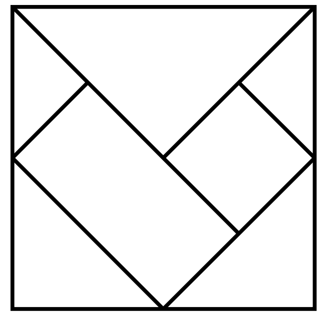




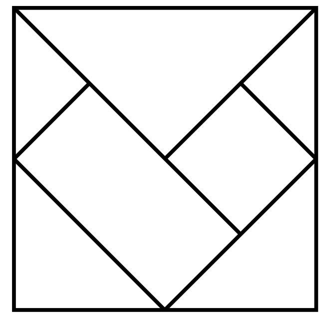
Dessin 8 : Ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.

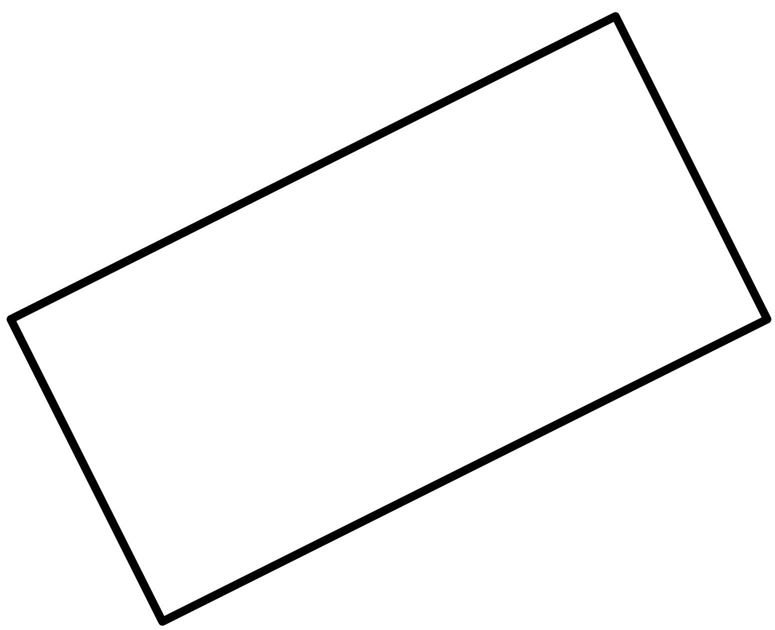


Dessin 9 : Ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



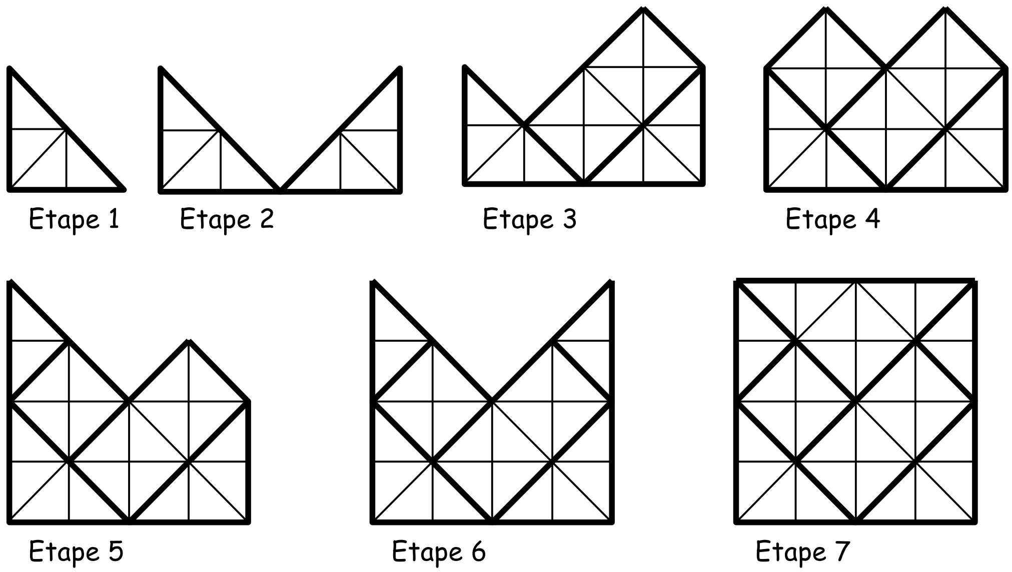
Dessin 10 : Ci-dessous, dessine le Carré de Metz. J'ai déjà placé la pièce rectangulaire.



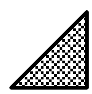


8 - Le Carré de Metz se construit petit à petit

Une première construction



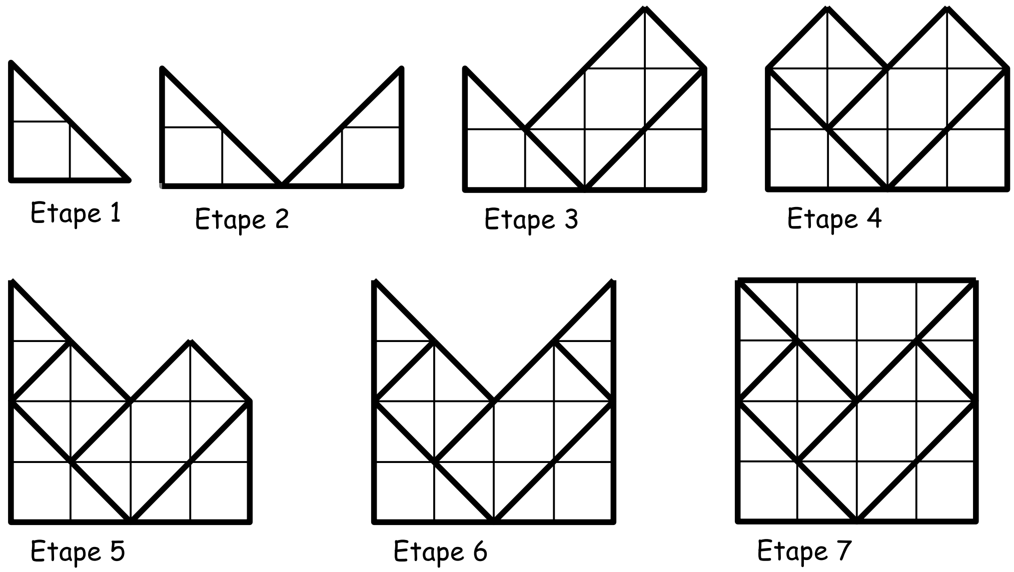
L'aire de ce triangle est l'unité d'aire.

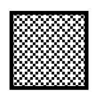


	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6	Etape 7
Aire totale des pièces placées							
Fraction du Carré de Metz déjà construit							

L'aire des pièces placées se fait par dénombrement des unités d'aire. Le fait que le triangle unité d'aire soit un trente-deuxième du carré facilite le remplissage de la deuxième ligne du tableau.

Une deuxième construction

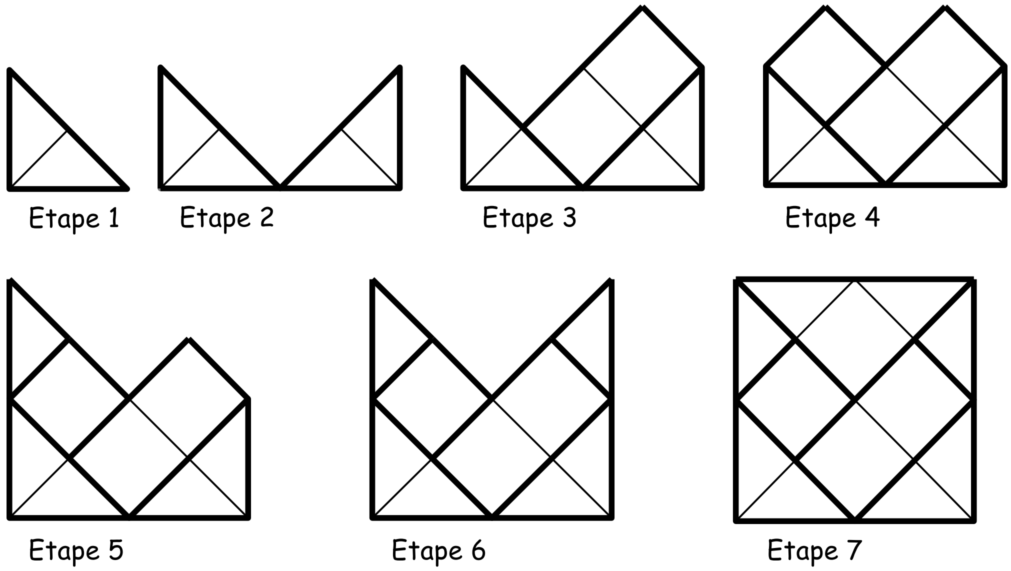


L'aire de ce carré est l'unité d'aire. 

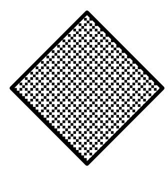
	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6	Etape 7
Aire totale des pièces placées							
Fraction du Carré de Metz déjà construit							

L'aire des pièces placées se fait par dénombrement des unités d'aire. Le fait que le carré unité d'aire soit un seizième du carré facilite le remplissage de la deuxième ligne du tableau.

Une troisième construction



L'aire de ce carré est l'unité d'aire.



	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5	Etape 6	Etape 7
Aire totale des pièces placées							
Fraction du Carré de Metz déjà construit							

L'aire des pièces placées se fait par dénombrement des unités d'aire. Le fait que le carré unité d'aire soit un huitième du carré facilite le remplissage de la deuxième ligne du tableau.

9 - Jeu de l'Oie et Carré de Metz

Le plateau et le fonctionnement du jeu s'inspirent de ce qui avait fait il y a quelque temps dans la brochure « Jeux de l'Oie mathématiques » de l'IREM de Lorraine. Le plateau de jeu gagnera à être agrandi au format A3. Des codes de couleurs sont associés aux cases du plateau :

Violet : case 52. La prison : passe trois tours.
Bleu : cases 56, 16. Avance de cinq cases et tire une carte question.
Orange : cases 15, 35, 55. Recule de deux cases et tire une carte question.
Vert : cases 10, 30, 50. Avance de deux cases et tire une carte question.
Rouge : case 58. Le puits : retourne à la case départ.
Brun : cases 19, 59. Recule de cinq cases et tire une case question.
Noir : toutes les autres cases. Tire une carte question.

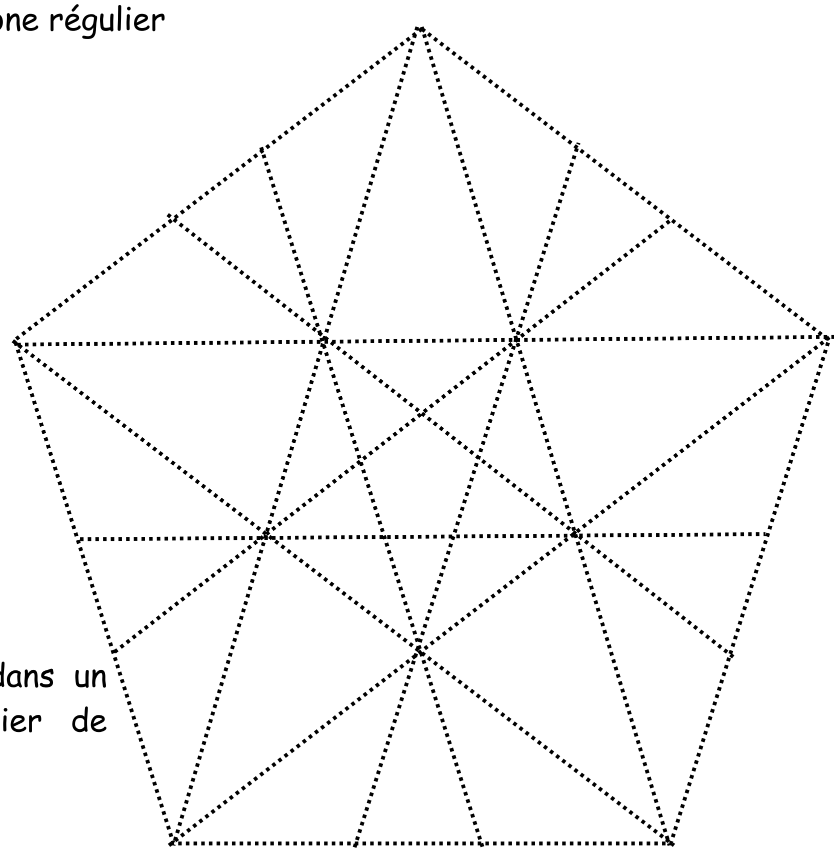
Dans le plateau complémentaire proposé en téléchargement, les nombres indiqués dans les cases sont coloriés. Dans l'exemplaire fourni avec cette brochure, les chiffres sont noirs : l'utilisateur pourra par exemple coller des petits papiers de couleur.
Un plateau de jeu traditionnel peut être également utilisé, le code des couleurs sera alors adapté.
Comme dans la brochure de l'IREM de Lorraine, un dé à 12 faces est utilisé (lancer 2 dés à 6 faces ne permet pas l'obtention du résultat « 1 »).
Le dé est lancé. Le pion est déplacé du nombre de cases indiqué sur le dé.
Dans tous les cas, la réussite à la question figurant sur les cartes permet d'avancer le pion de deux cases supplémentaires. L'échec fait reculer le pion de deux cases.
Les cartes « JOKER » permettent soit de racheter une mauvaise réponse (et tout de même d'avancer le pion de deux cases), soit d'annuler les aspects négatifs de certaines cases comme la case « prison ».
Les cartes « SURPRISE » permettent de ne pas avoir de réponse à fournir.
Les trente-deux cartes « QUESTIONS » peuvent également servir comme ensemble de petits problèmes à proposer aux élèves dans un autre contexte.
Les feuilles « SOLUTIONS » peut être utilisées par l'adulte « meneur de jeu » ou à tour de rôle par les élèves en cas de fonctionnement en autonomie.

Un plateau de jeu

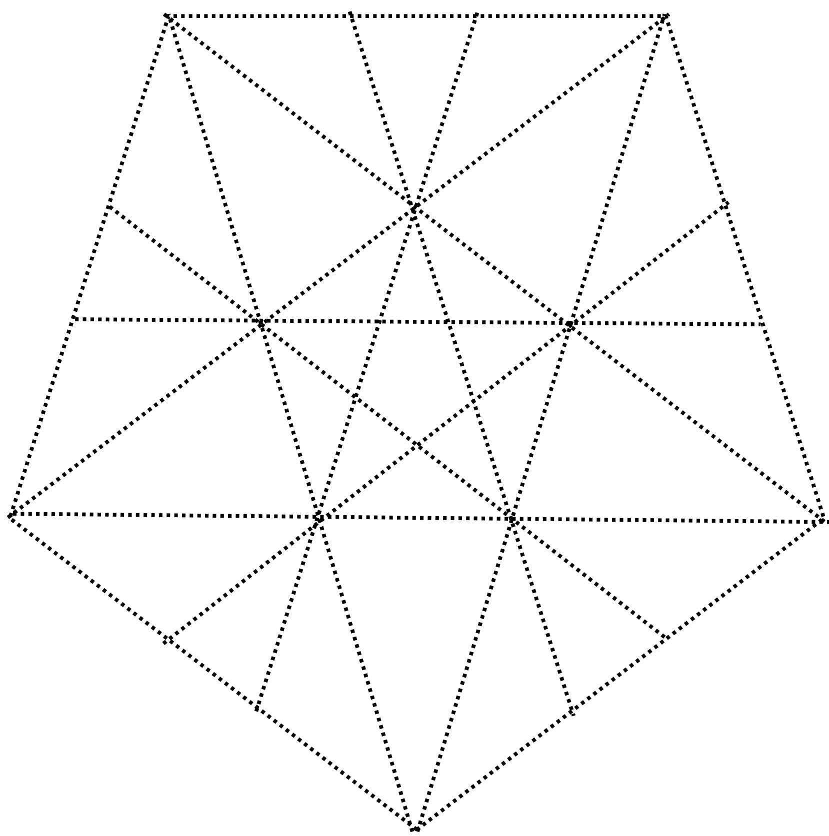
1	32	31	30	29	28	27
2	33	56	55	54	53	26
3	34	57	J		52	25
4	35	58	E	L	51	24
5	36	59	U	'	50	23
6	37	60		O	49	22
7	38	61	D	I	48	21
8	39	62	E	E	47	20
9	40	63			46	19
10	41	42	43	44	45	18
11	12	13	14	15	16	17

Pour dessiner le patron d'un dé à douze faces

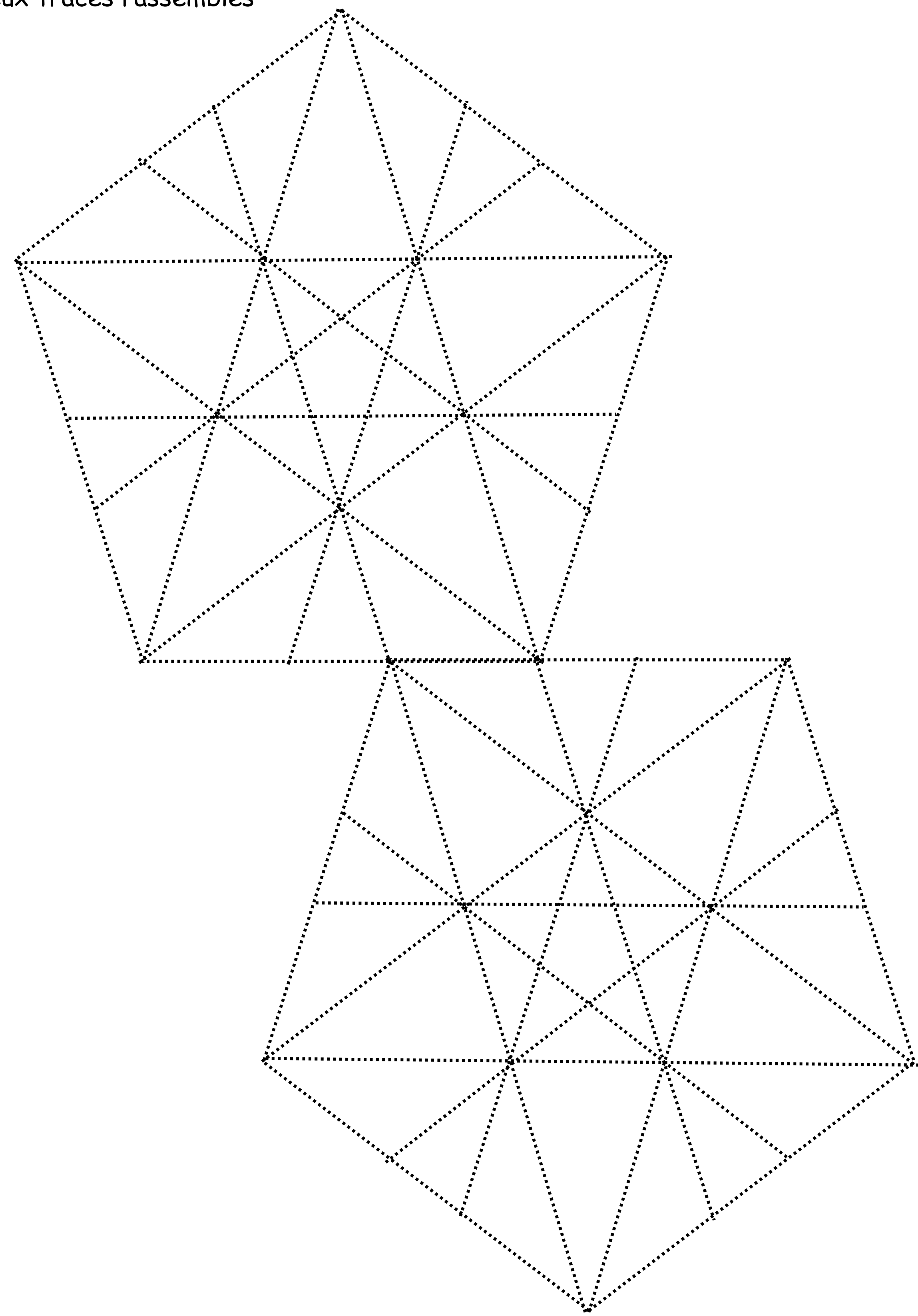
Des tracés dans un pentagone régulier



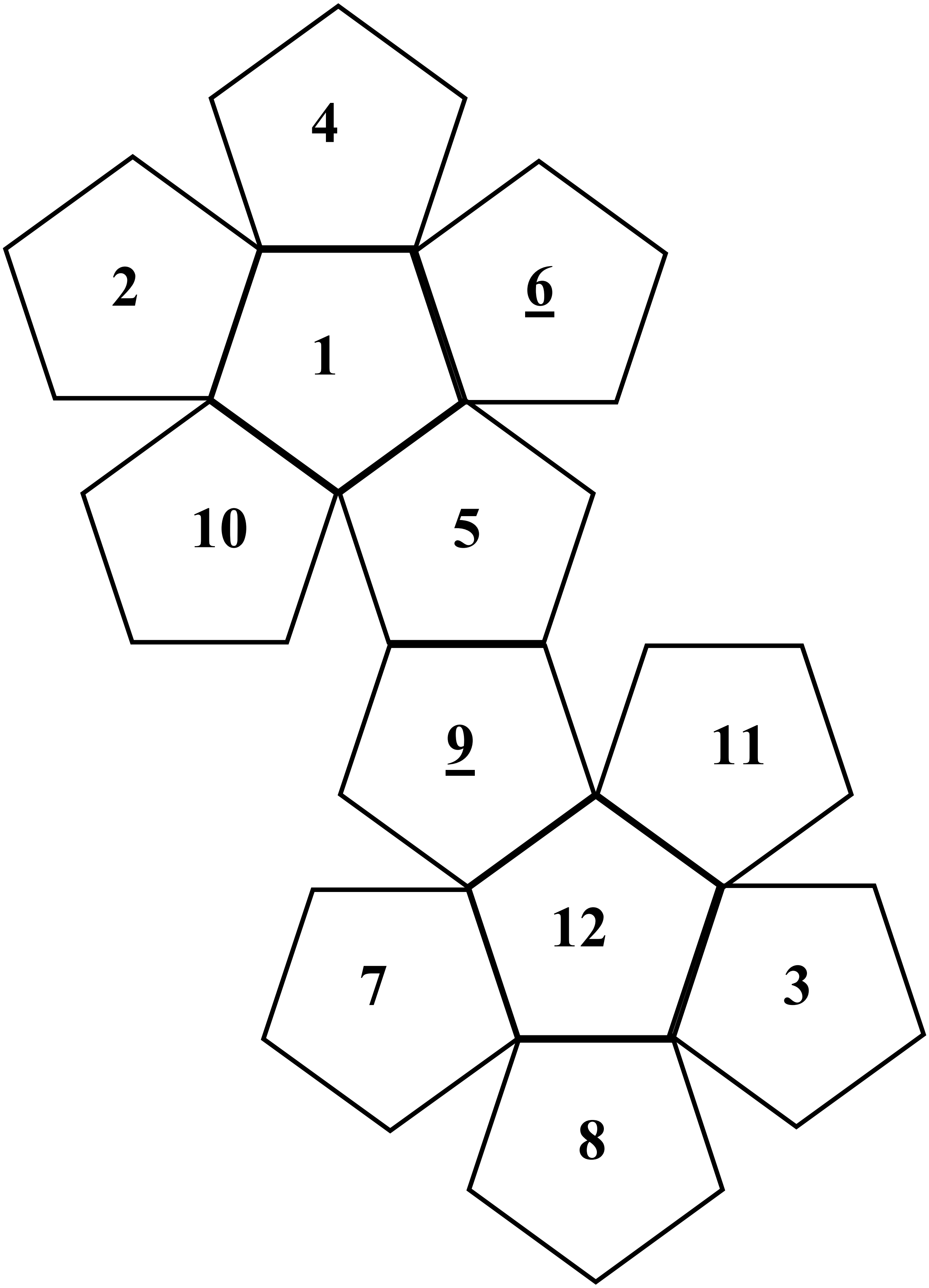
Des tracés semblables dans un second pentagone régulier de mêmes dimensions



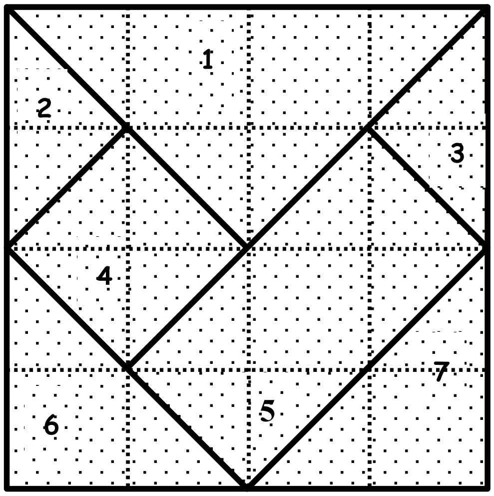
Les deux tracés rassemblés

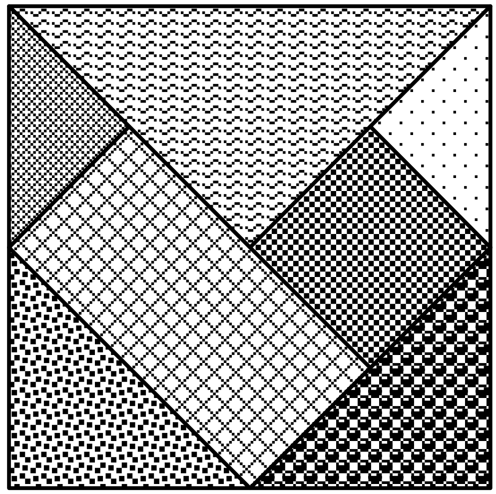


Un patron de dé à douze faces : la somme des nombres inscrits sur deux faces opposées est égale à 13.



Le puzzle et les pièces numérotées et grisées :





Cartes « surprise ». Cartes « Joker »

JOKER	**JOKER**	**JOKER**	**JOKER**
SURPRISE Reculez de trois cases. Ne tirez pas de carte question.	**SURPRISE** Avancez de deux cases. Ne tirez pas de carte question.	**SURPRISE** Passez votre tour. Ne tirez pas de carte question.	**SURPRISE** Avancez de trois cases. Ne tirez pas de carte question.

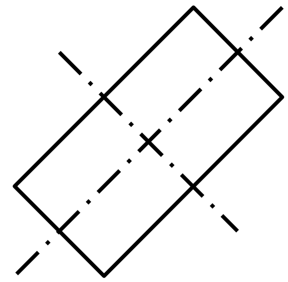
Les cartes « questions » :

M1 Quelle pièce a deux axes de symétrie ?	M2 Quelle pièce a plus de deux axes de symétrie ?	M3 Quelle pièce a même aire que la pièce carrée ?	M4 Quelle pièce a même aire que la pièce rectangulaire ?
M5 Quelles pièces ont une aire double de la pièce carrée ?	M6 Quelles pièces ont une aire double de celle de la pièce 3 ?	M7 Quelles pièces ont une aire double de celle de la pièce 2 ?	M8 Recouvrir la pièce 5 avec trois des triangles du puzzle.
M9 Comment recouvrir la pièce 1 en utilisant trois triangles ?	M10 Quelles pièces ont une aire moitié de celle de la pièce carrée ?	M11 Quelles pièces ont une aire moitié de celle de la pièce rectangulaire ?	M12 Quelles pièces ont une aire moitié de celle de la pièce 1 ?
M13 Quelles pièces ont une aire moitié de celle de la pièce 6 ?	M14 Quelles pièces ont une aire moitié de celle de la pièce 7 ?	M15 Comment recouvrir la pièce 1 en utilisant trois pièces du puzzle ?	M16 Avec les sept pièces du puzzle, former deux carrés de même aire.

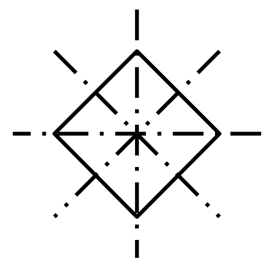
M17 Quelles pièces ont un seul angle droit ?	M18 Quelles pièces ont plus d'un angle droit ?	M19 Quelles pièces n'ont pas de côtés parallèles ?	M20 Quelles pièces ont des côtés parallèles ?
M21 Quelles pièces n'ont que des angles droits ?	M22 Quelles pièces ont des angles aigus ?	M23 Quelles pièces n'ont pas d'angles aigus ?	M24 Quelles pièces ont des côtés de longueurs différentes ?
M25 Quelle pièce a des côtés de même longueur ?	M26 Si l'ensemble des pièces pèse 40 g, combien pèse la pièce 1?	M27 Si la pièce 1 pèse 20g, combien pèse l'ensemble des pièces?	M28 Si la pièce 1 pèse 60g, combien pèse la pièce 6?
M29 Si la pièce 6 pèse 60g, combien pèse la pièce 1?	M30 Si la pièce 6 pèse 30g, combien pèse la pièce 2?	M31 Si la pièce 2 pèse 30g, combien pèse la pièce 6?	M32 Si la pièce 6 pèse 80g, combien pèse la pièce 4?

Feuilles « solution »

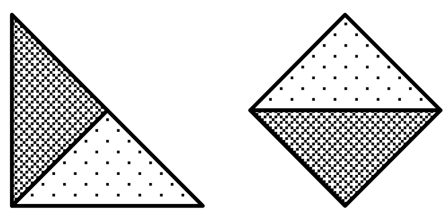
M1 : Le rectangle 5 a deux axes de symétrie : ses deux médianes.



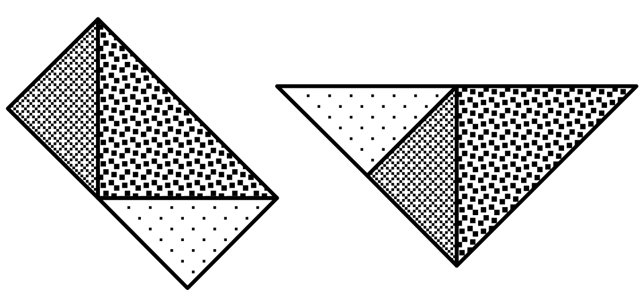
M2 : Le carré 4 a plus de deux axes se symétrie. Elle a quatre axes de symétrie : ses deux médianes et ses deux diagonales.



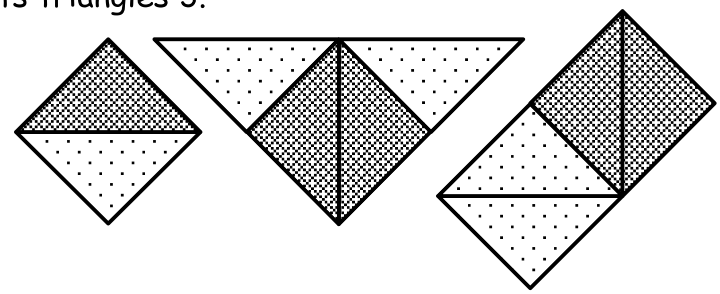
M3 : Les moyens triangles 6 et 7 ont même la aire que le carré car je peux les recouvrir par les petits triangles.



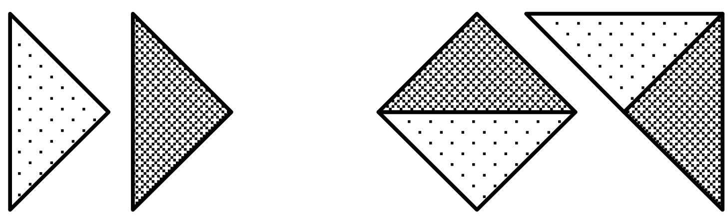
M4 : Le grand triangle 1 a la même aire que le rectangle car je peux les recouvrir par un moyen triangle et deux petits triangles



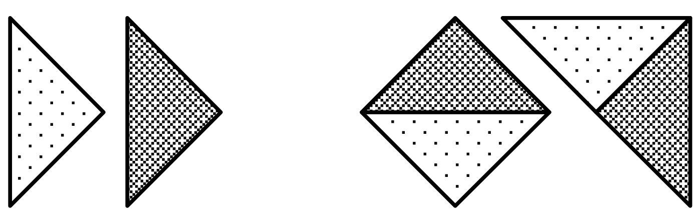
M5 : Le rectangle 5 et le grand triangle rectangle 1 ont une aire double de celle du carré 4. Je recouvre le carré 4 avec deux petits triangles 3, je recouvre le rectangle 5 avec quatre petits triangles 3, je recouvre le grand triangle 1 avec quatre petits triangles 3.



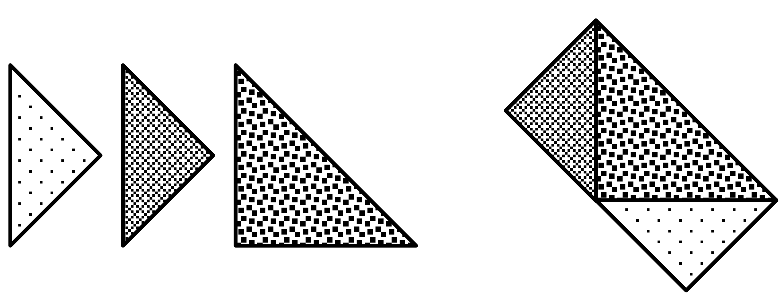
M6 : Le carré 4 et les moyens triangles 6 et 7 ont une aire double du petit triangle 3. Ces trois pièces sont chacune recouvertes par deux petits triangles 3.



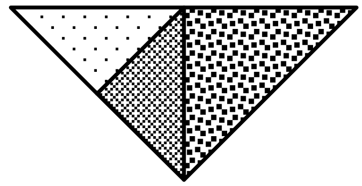
M7 : Le carré 4 et les moyens triangles 6 et 7 ont une aire double du petit triangle 2. Ces trois pièces sont chacune recouvertes par deux petits triangles 2.



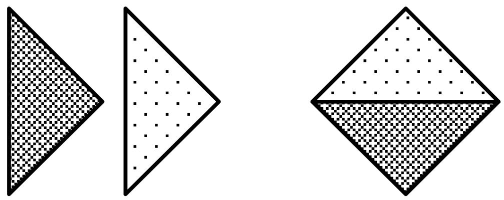
M8 : J'utilise les deux petits triangles 2 et 3 et un moyen triangle 6 ou 7.



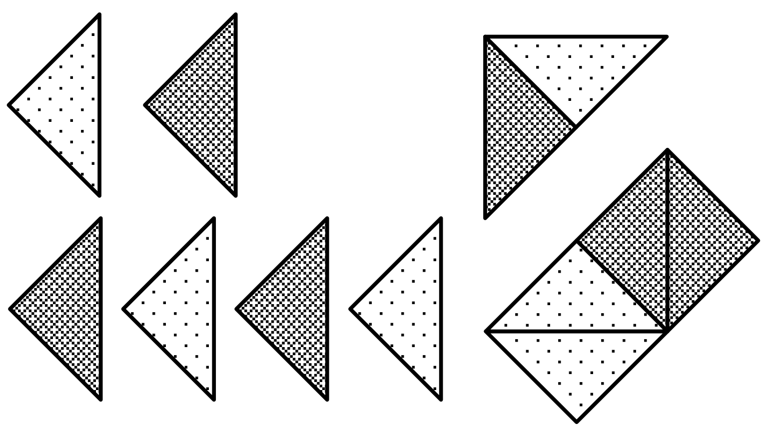
M9 : La pièce 1 sera recouverte par les deux petits triangles 2 et 3 et par l'un des deux moyens triangles 6 ou 7.



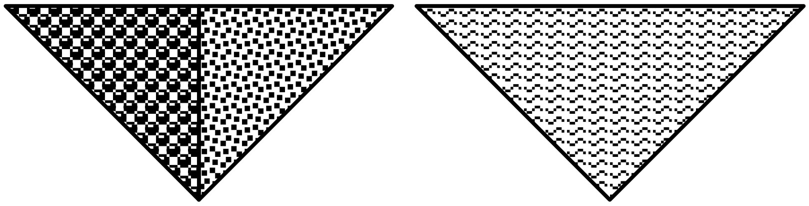
M10 : Les petits triangles 2 et 3 ont une aire moitié de celle de la pièce carrée 4.



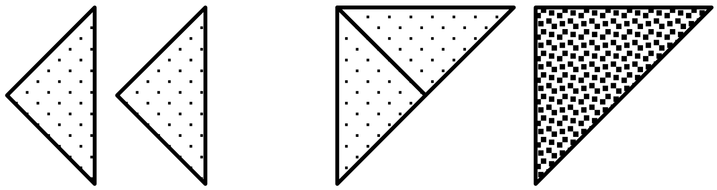
M11 : Les moyens triangles 6 et 7 ont une aire moitié de l'aire de la pièce rectangulaire : Les moyens triangles peuvent être recouverts par deux petits triangles, le rectangle peut être recouvert par quatre petits triangles.



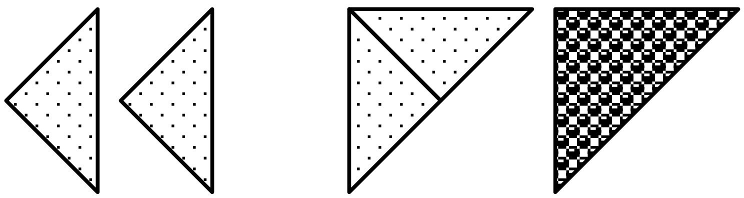
M12 : Les moyens triangles 5 ou 6 ont une aire moitié de celle de la pièce 1.



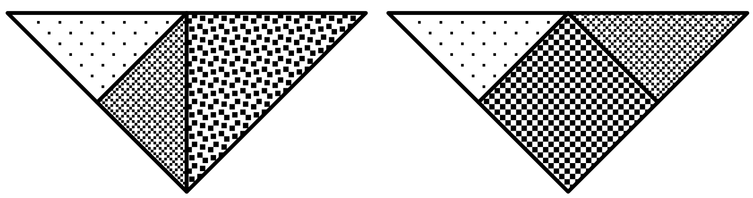
M13 : Les petits triangles 2 ou 3 ont une aire moitié de celle de la pièce 6.



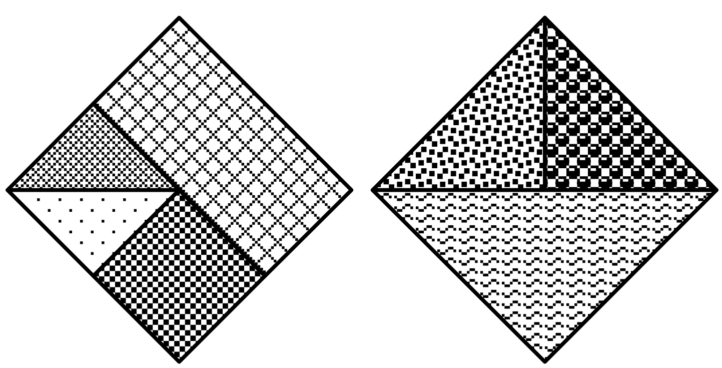
M14 : Les petits triangles 2 ou 3 ont une aire moitié de celle de la pièce 7.



M15 : Je peux recouvrir la pièce 1 avec un moyen triangle 6 ou 7 et deux petits triangles 2 et 3. Je peux aussi recouvrir la pièce 1 avec les deux petits triangles 2 et 3 et le carré 4.



M16 : J'ai utilisé les sept pièces et j'ai formé deux carrés de même aire.



M17 : Les pièces 1, 2, 3, 6 et 7 sont des triangles rectangles isocèles. Elles n'ont qu'un angle droit.

M18 : La pièce 4 est un carré, elle a quatre angles droits. La pièce 5 est un rectangle, elle a quatre angles droits. Les pièces 4 et 5 ont donc plus d'un angle droit.
M19 : Les pièces 1, 2, 3, 6 et 7 sont des triangles. Elles n'ont pas de côtés parallèles.

M20 : La pièce 4 est un carré, ses côtés opposés sont parallèles. La pièce 5 est un rectangle, ses côtés opposés sont parallèles. Les pièces qui ont des côtés parallèles sont les pièces 4 et 5.

M21 : La pièce 4 est un carré, ses quatre sont droits. La pièce 5 est un rectangle, ses quatre angles sont droits. Les pièces qui n'ont que des angles droits sont les pièces 4 et 5.

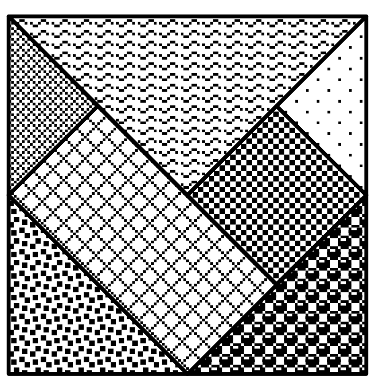
M22 : Les pièces 1, 2, 3, 6 et 7 sont des triangles rectangles isocèles. Chacune d'elles a deux angles aigus.

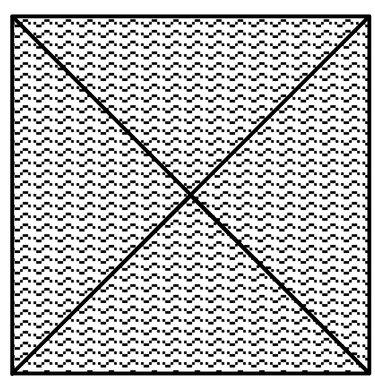
M23 : La pièce 4 est un carré, la pièce 5 est un rectangle. Ces deux pièces n'ont que des angles droits. Les pièces 4 et 5 n'ont pas d'angles aigus.

M24 : La pièce 5 est un rectangle dont la longueur n'est pas égale à la largeur. Les pièces 1, 2, 3, 5 et 6 sont des triangles rectangles isocèles et ne sont pas des triangles équilatéraux. Les triangles 1, 2, 3, 5, 6 et le rectangle 5 ont des côtés de longueurs différentes.

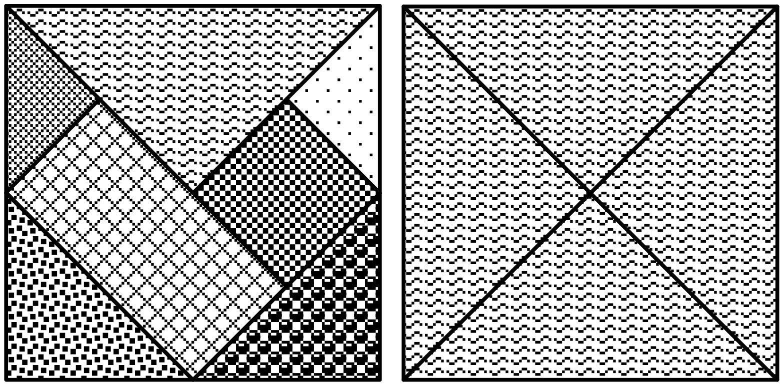
M25 : La pièce 4 est un carré. Ses quatre côtés ont même longueur.

M26 : Le carré formé avec les sept pièces peut être recouvert par quatre pièces 1. Si l'ensemble des pièces du puzzle pèse 40g, une pièce 1 pèse le quart de 40g, donc 10g.

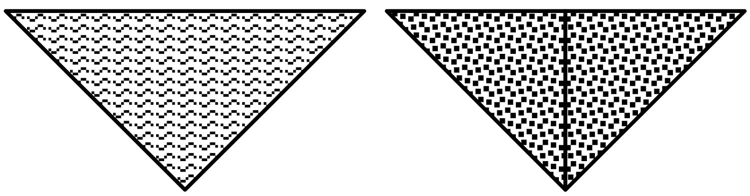




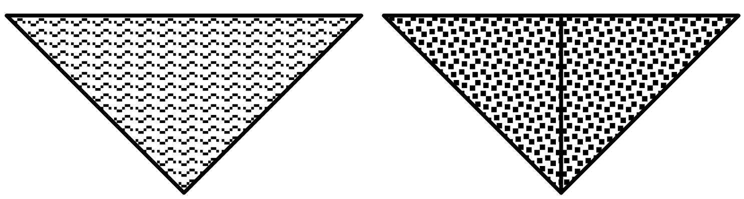
M27 : Le carré formé avec les sept pièces peut être recouvert par quatre pièces 1. Si la pièce 1 pèse 20g, l'ensemble des sept pièces du puzzle pèse quatre fois 20g, donc 80g.



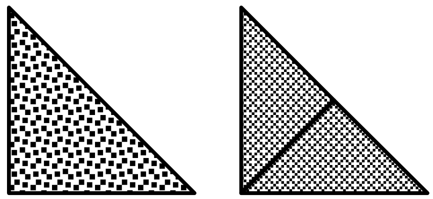
M28 : Le grand triangle 1 peut être recouvert par deux moyens triangles 6. Si la pièce 1 pèse 60g, la pièce 6 pèse la moitié de 60g, donc 30g.



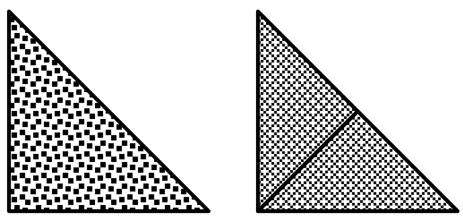
M29 : Le grand triangle 1 peut être recouvert par deux moyens triangles 6. Si une pièce 6 pèse 60g, la pièce 1 pèse le double de 60g, donc 120g.



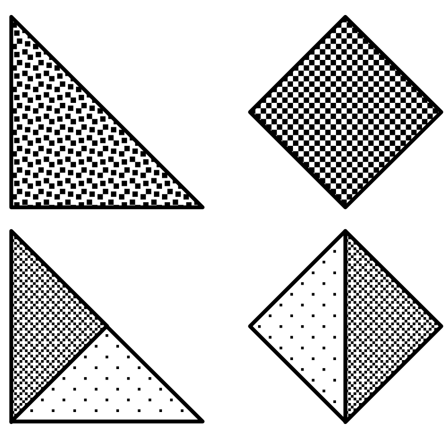
M30 : Le moyen triangle 6 peut être recouvert par deux petits triangles 2. Si la pièce 6 pèse 30g, la pièce 2 pèse la moitié de 30g, donc 15g.



M31 : Le moyen triangle 6 peut être recouvert par deux petits triangles 2. Si la pièce 2 pèse 30g, la pièce 2 pèse le double de 30g, donc 60g.

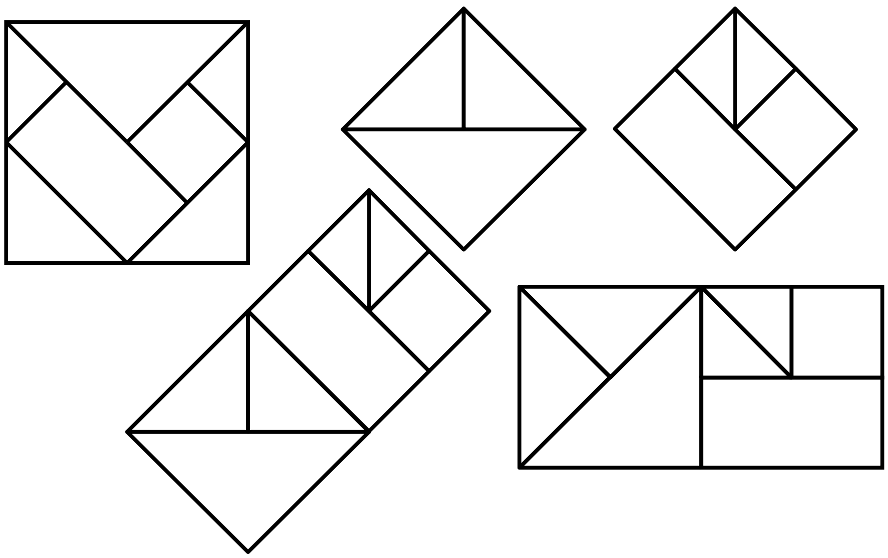


M32 : Le moyen triangle 6 peut être recouvert par les petits triangles 2 et 3. Le carré 4 peut être recouvert par les petits triangles 2 et 3. Les pièces 6 et 4 ont même aire, les pièces 6 et 4 ont même masse. La pièce 6 pèse 80g, donc la pièce 4 pèse 80g.



10 - Le Pavé de Metz

Avec les sept pièces du Carré de Metz, deux carrés superposables sont construits. Ces deux carrés accolés permettent la réalisation d'un rectangle.

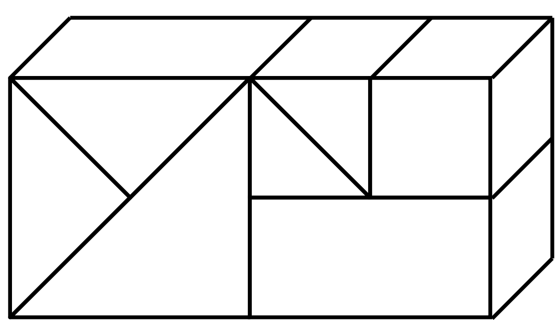


Donnons au rectangle une épaisseur égale au côté de la pièce carrée. Un pavé nommé assez naturellement le « Pavé de Metz » est obtenu. Il est formé de sept pièces : un cube, un pavé droit, un « grand » prisme à base triangulaire, deux « moyens » prismes à base triangulaire et deux « petits » prismes à base triangulaire.

Remarques

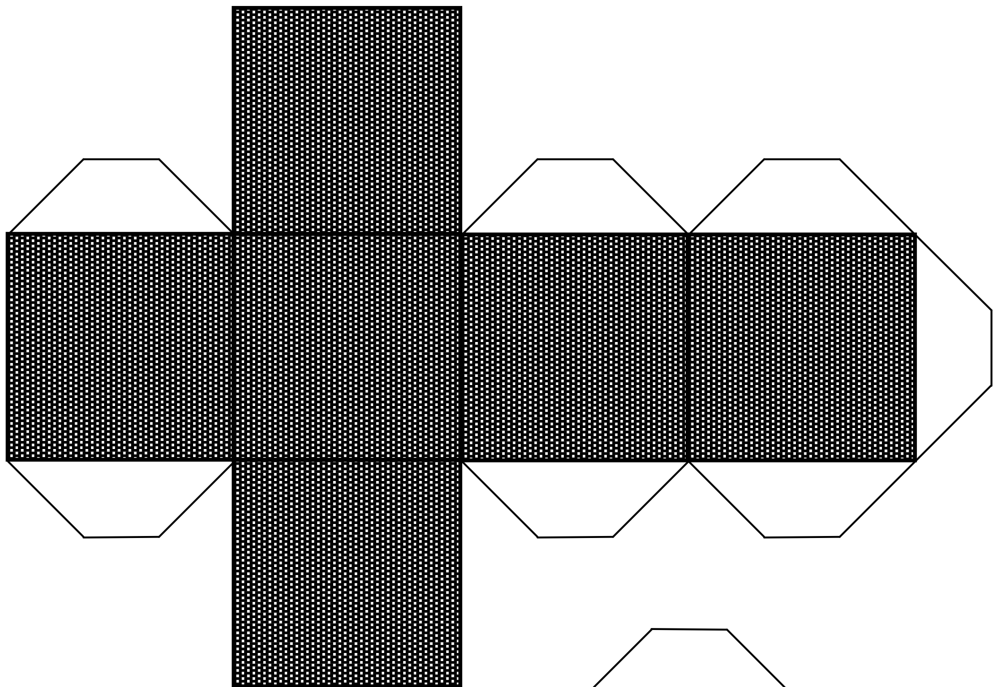
Le cube est un prisme à base carrée, le pavé droit est un prisme à base rectangulaire : les sept pièces du Pavé de Metz sont toutes des prismes.

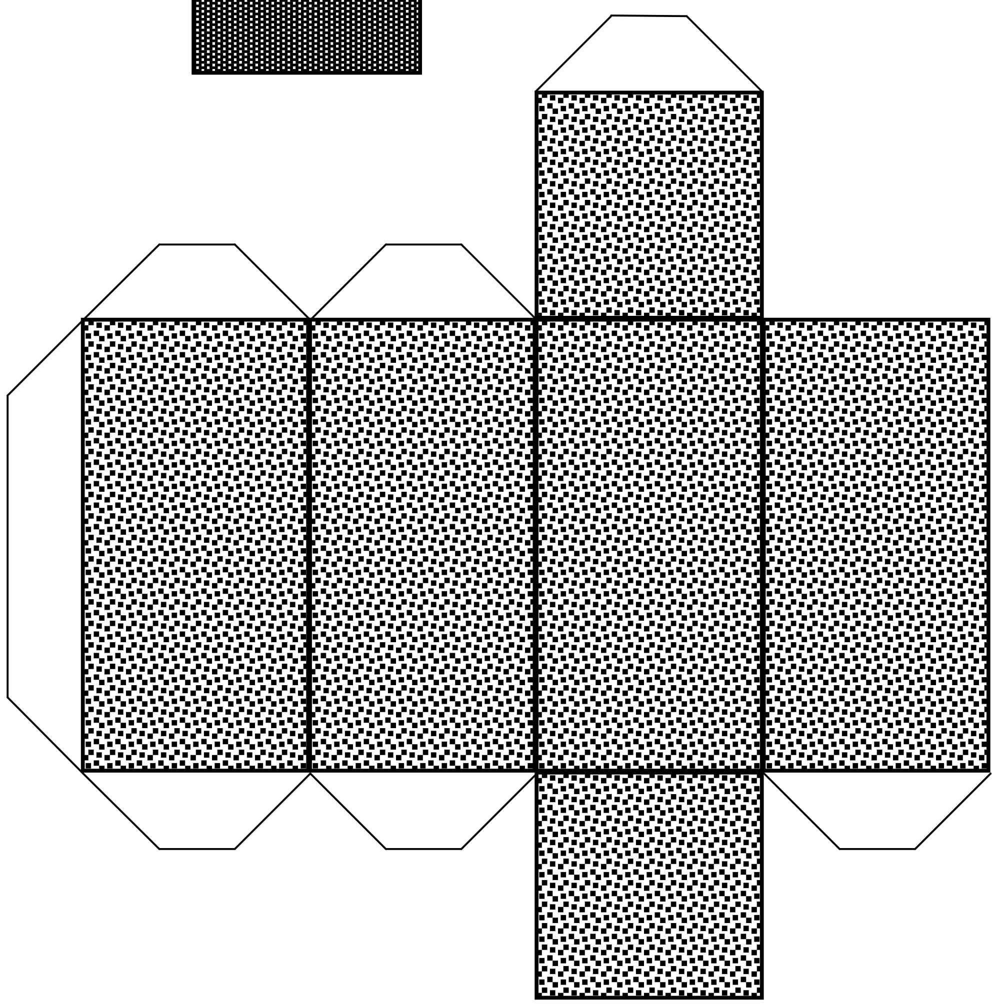
Le pavé de Metz se découpe en deux pavés droits qui juxtaposés, permettent la réalisation d'un cube. Cela donne envie de poursuivre la recherche d'autres solides réalisables avec les sept pièces.

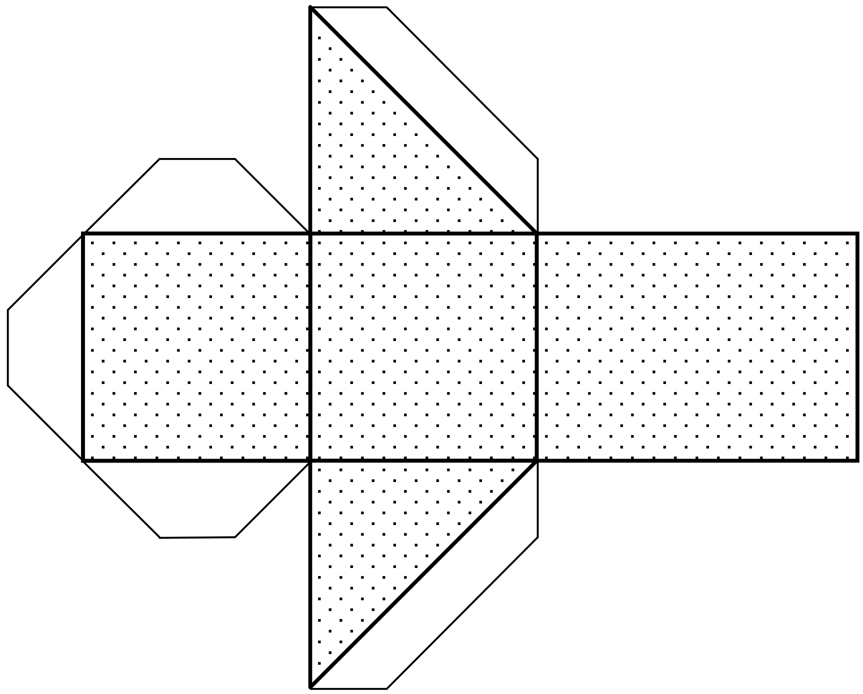


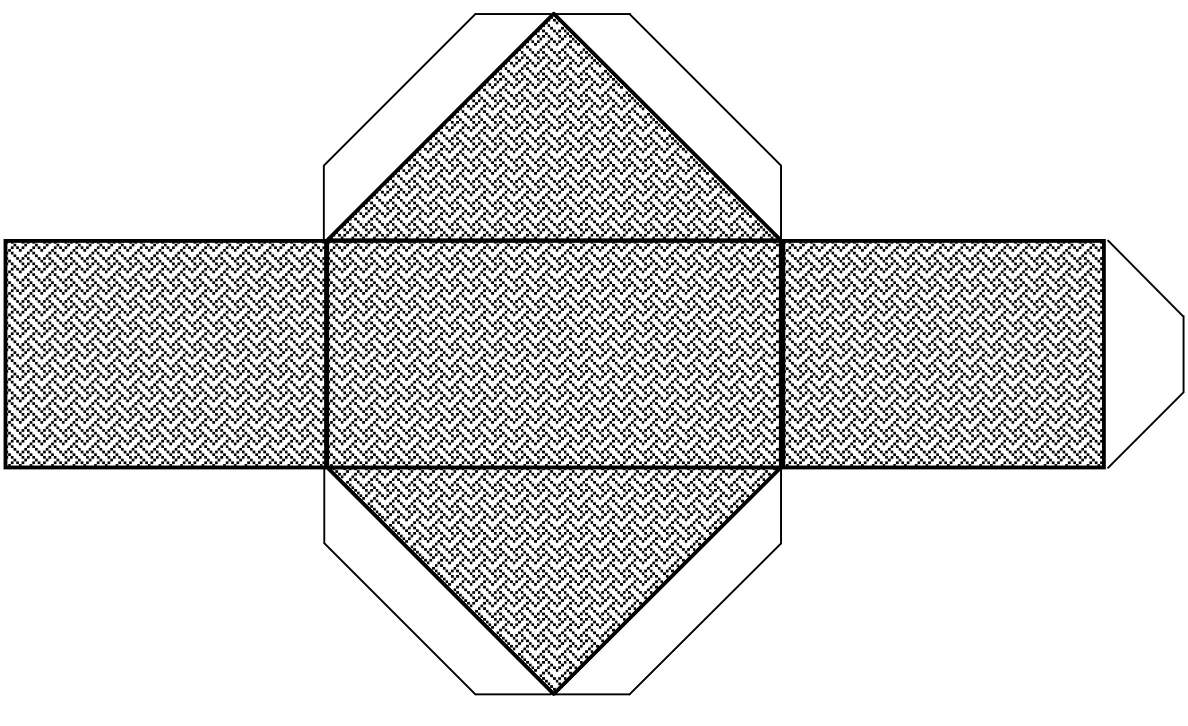
Patrons des sept pièces

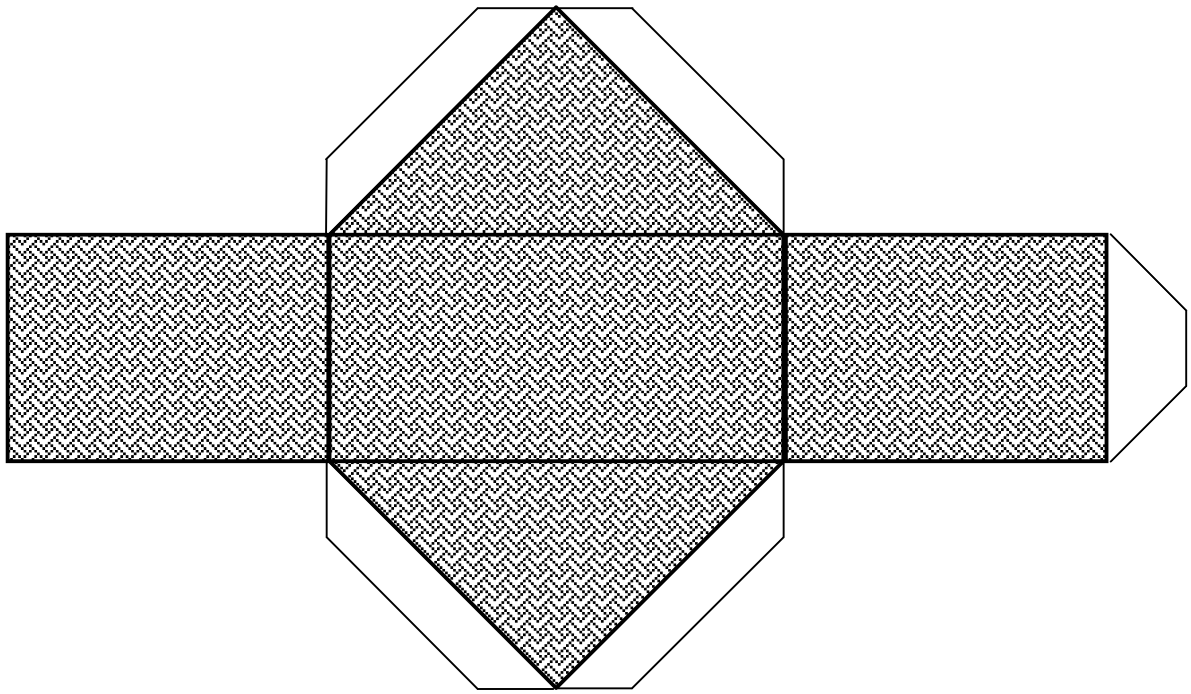
Photocopier sur du papier un peu épais.

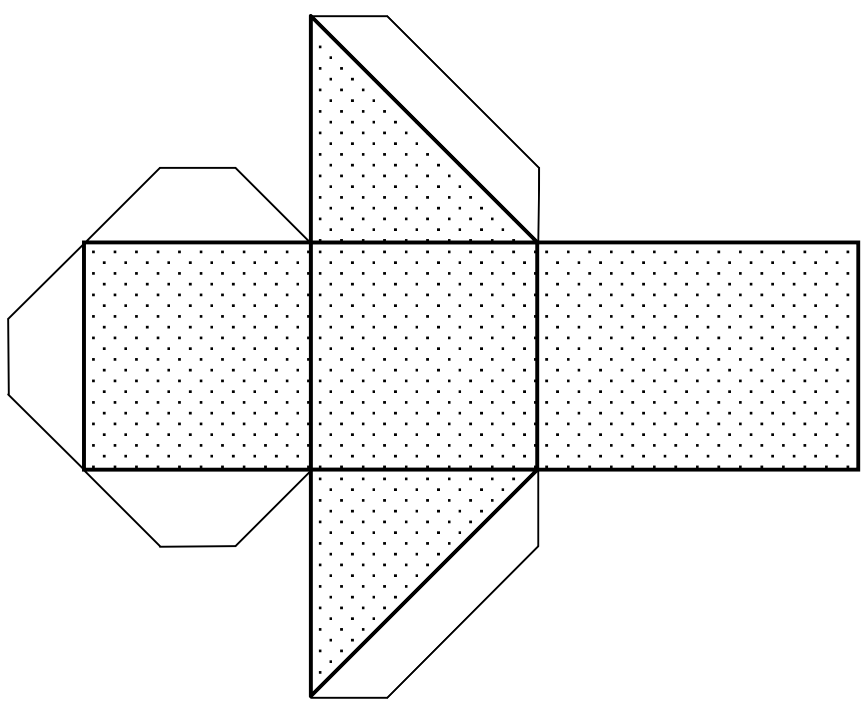


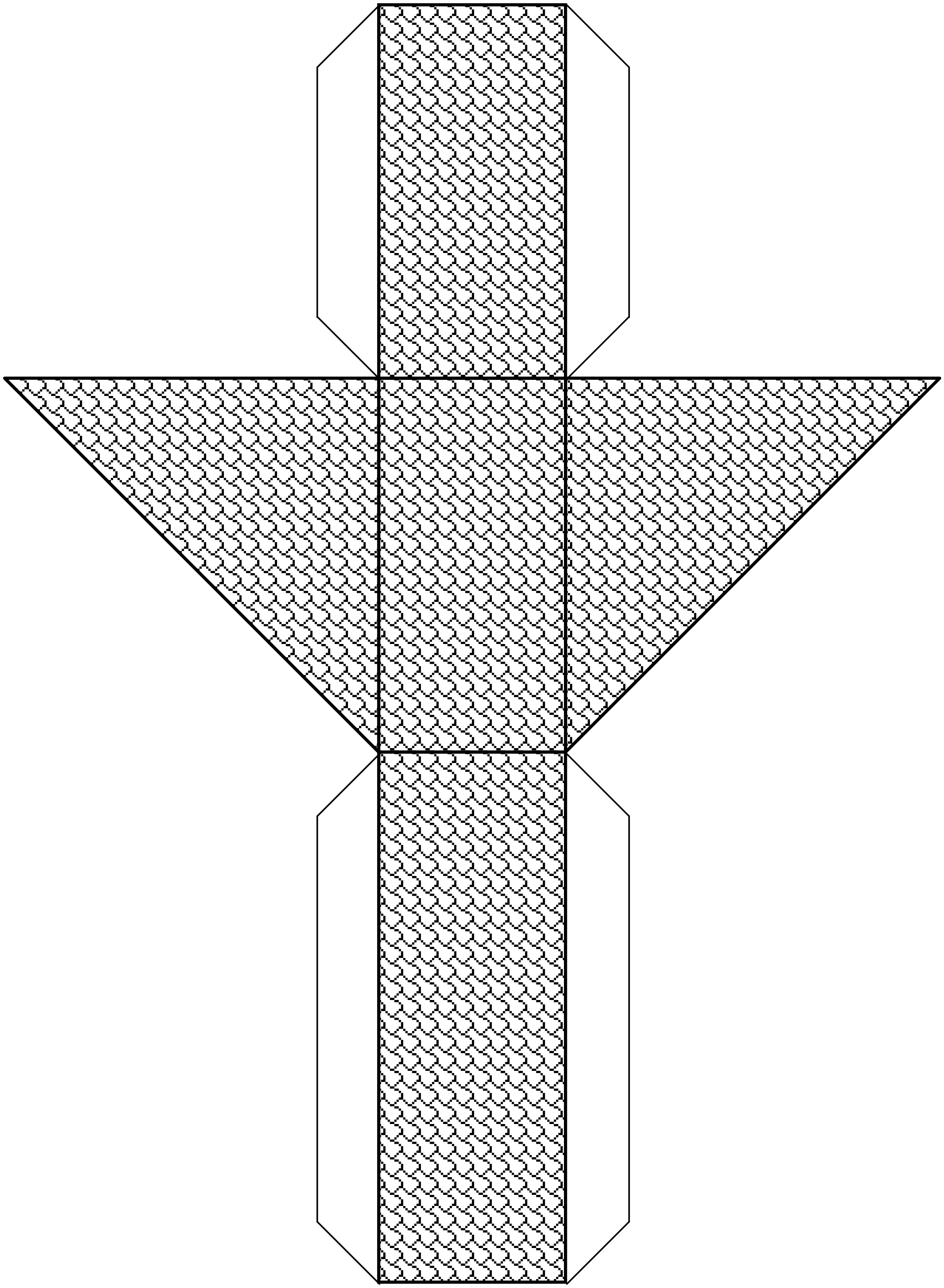




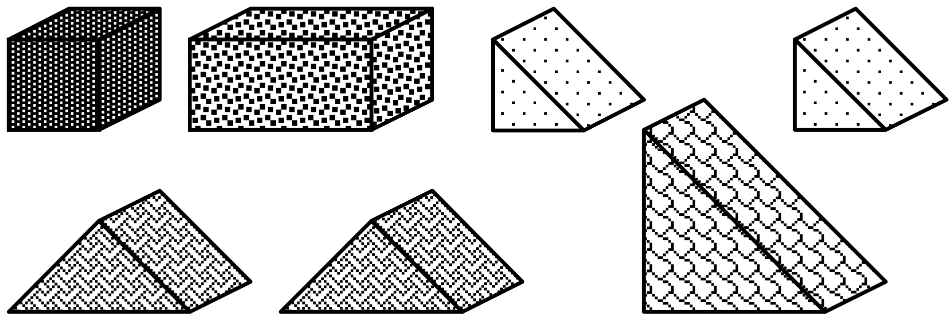




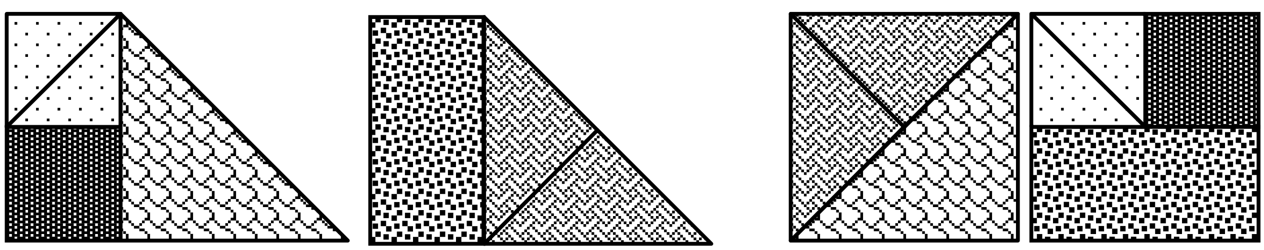




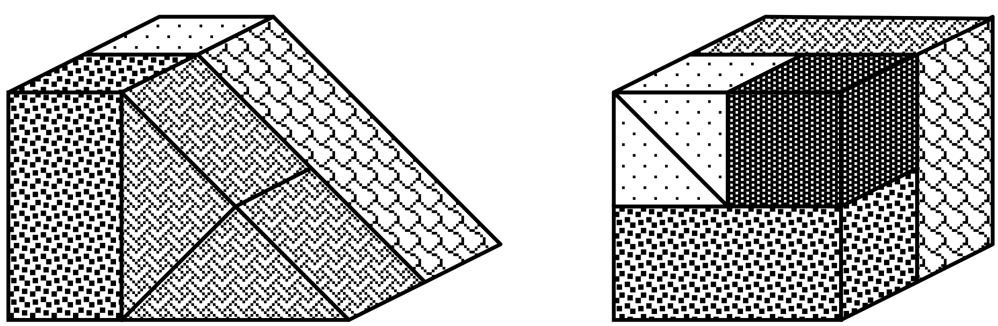
Le Pavé de Metz est formé de sept pièces : un cube, un pavé droit et cinq prismes à bases triangulaires : deux « petits », deux « moyens » et un « grand ».



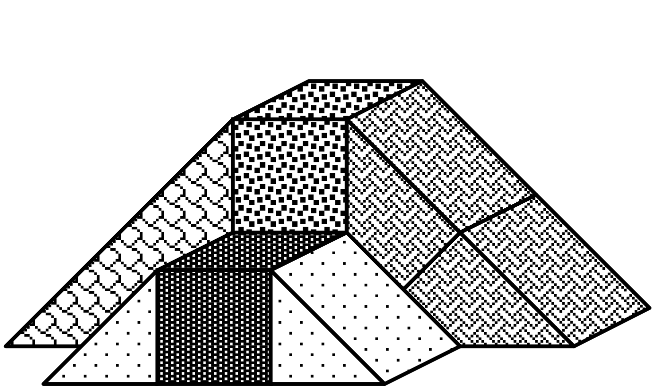
Des patrons sont proposés pages précédentes. Photocopiés sur du papier épais puis collés, ils permettent la réalisation des sept pièces du jeu.
Des prismes ayant pour bases les polygones obtenus avec le Carré de Metz sont réalisables.
De plus, lors de la recherche avec les pièces du Carré de Metz, deux trapèzes superposables et deux carrés superposables ont été obtenus.

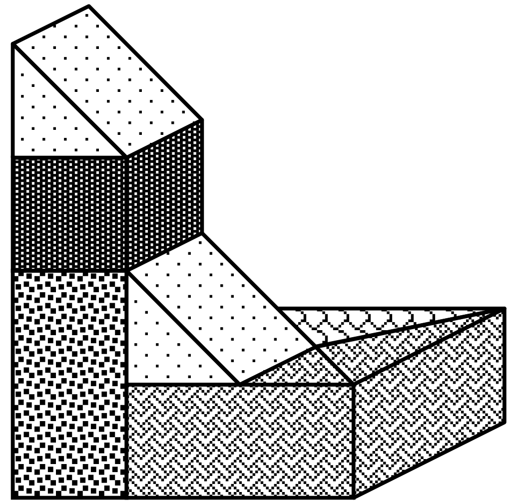


Ils permettent la réalisation d'un prisme à base « trapèze rectangle » et d'un cube.

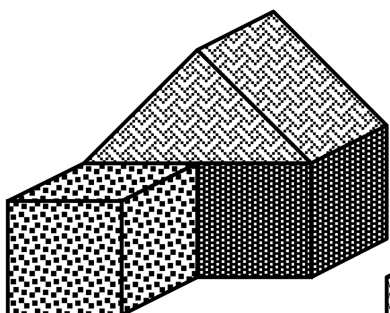


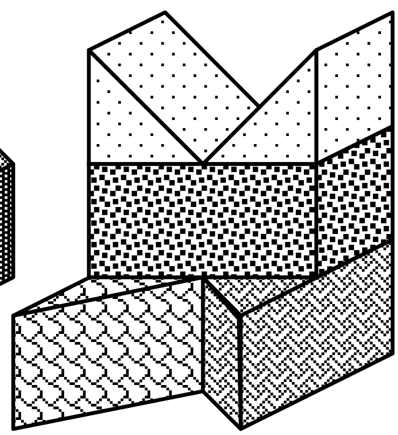
D'autres solides pourront être construits ou imaginés.

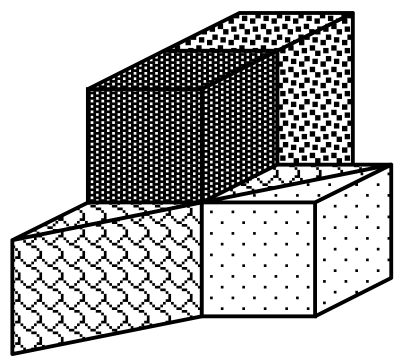


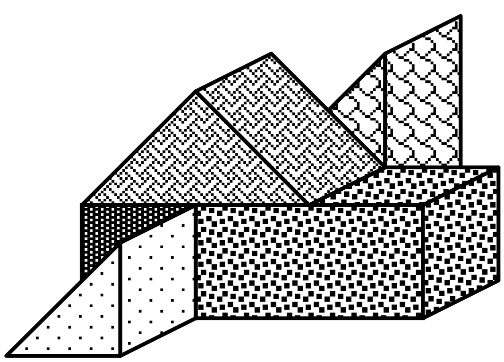


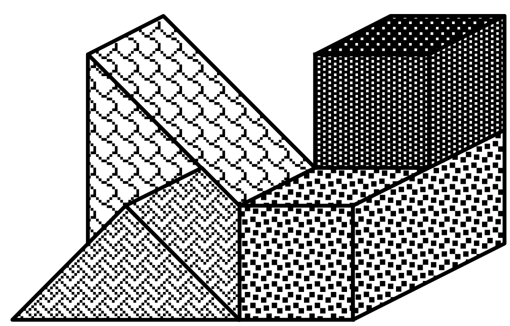
En n'utilisant que certaines pièces de Pavé de Metz











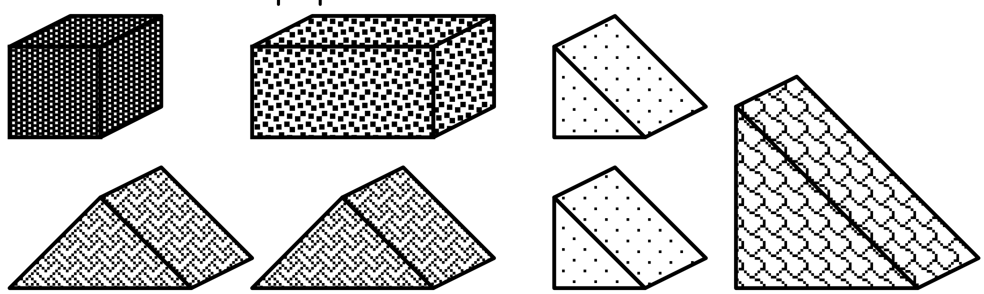
Cette collection de dessins permet de faire des liens entre les solides manipulés, ce que l'œil voit et ce qui est dessiné. Elle peut être complétée par des photos de vos propres assemblages.

Volume et Pavé de Metz

Les programmes 2008 de l'Ecole élémentaire précisent que l'élève doit connaître la « formule du volume du pavé droit », mais il ne lui est pas demandé de savoir ce que signifie le mot « volume ».

L'activité « Monte le volume » de la brochure « Jeux Ecole 2 » (APMEP 2013) a été créée pour des objectifs similaires. Cinq des pièces formant le Pavé de Metz sont des prismes, la notion de volume pourra être travaillée sans tentation de recours à des formules (la formule du volume du prisme ne sera rencontrée qu'en classe de cinquième).

Voici des dessins des sept pièces du Pavé de Metz.



Des assemblages à retrouver

Avec trois pièces, réaliser deux prismes à base triangulaire identiques et de même volume.

Avec les sept pièces, réaliser deux pavés identiques (et donc de même volume).

Avec six pièces, réaliser trois prismes à base triangulaire identiques et de même volume.

Avec six pièces, réaliser deux prismes à base triangulaire dont le volume de l'un est le double du volume de l'autre.

Avec quatre pièces réalise un prisme à base triangulaire de même volume que le pavé.

Quelles sont les pièces qui ont même volume ?

Existe-t-il des pièces dont le volume est le double de celui d'une des pièces ?

Existe-t-il des pièces dont le volume est égal à quatre fois celui de celui d'une des pièces ?

Des mesures de volume :

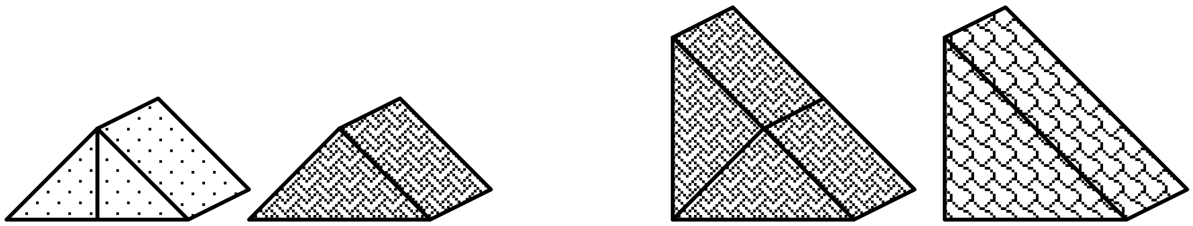
Si le volume d'un « petit » prisme est pris comme unité, quel sera le volume des autres pièces ?

Si le volume du cube est pris comme unité, quel sera le volume des autres pièces ?

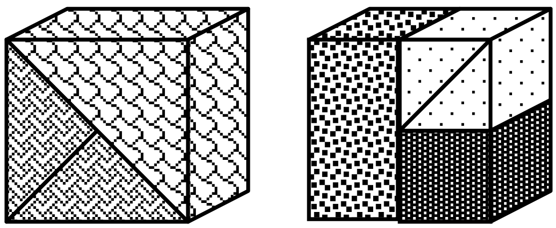
Si le volume du pavé est pris comme unité, quel sera le volume des autres pièces ?

Des éléments de solution

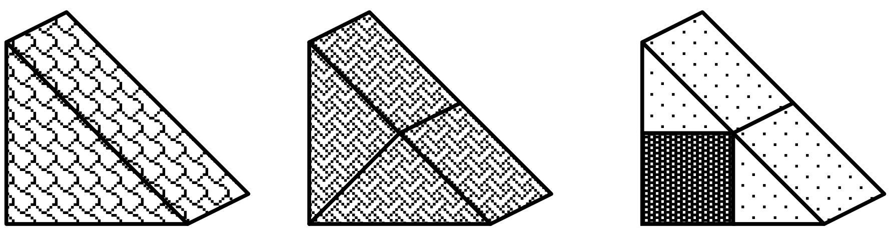
Dans les deux cas, les trois pièces utilisées forment deux prismes de même volume.



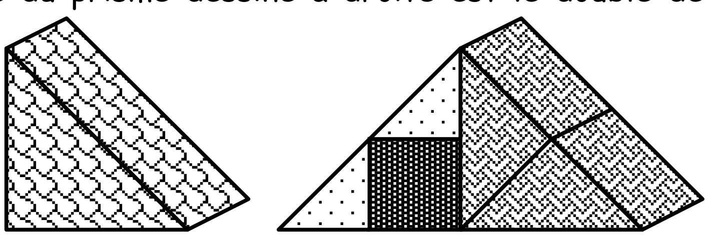
Les deux pavés dessinés ont même volume.



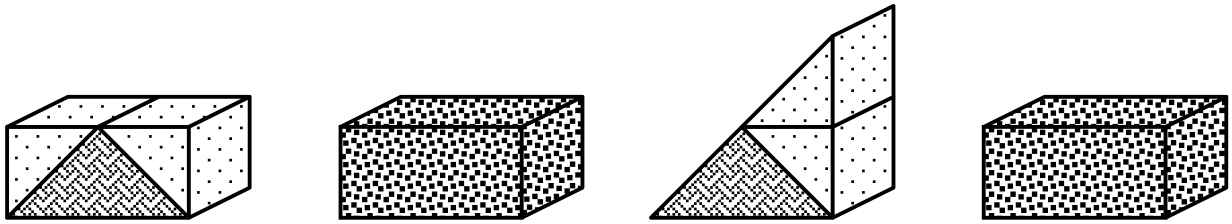
Les trois prismes dessinés ont même volume.



Le volume du prisme dessiné à droite est le double de celui du prisme dessiné à gauche.

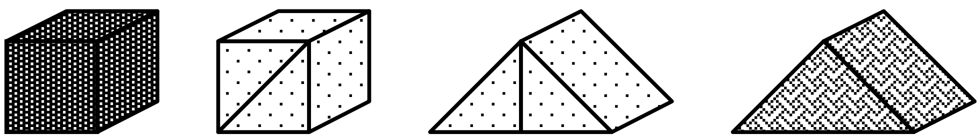


Les deux pavés dessinés ont même volume. Le prisme dessiné à même volume que le pavé dessiné.

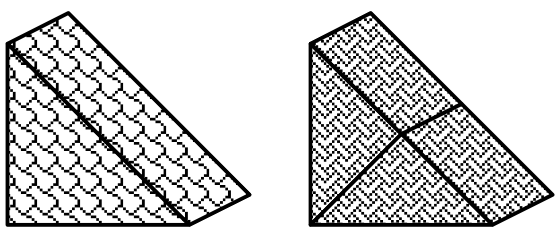


Les deux « petits » prismes ont même volume. Les deux « moyens » prismes ont même volume.

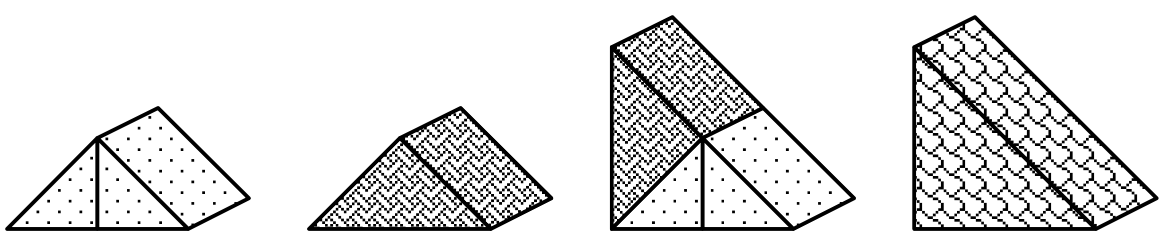
Le cube et le « moyen » prisme ont même volume. Le cube et le « moyen » prisme ont un volume double de celui du « petit » prisme.



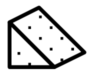
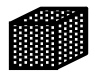
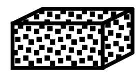
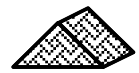
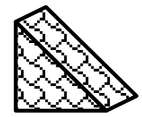
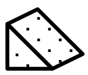
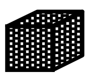
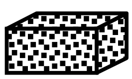
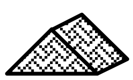
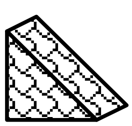
Le cube et le « moyen » prisme ont même volume. Le « grand prisme » a donc un volume double de celui du cube ou du « moyen » prisme.



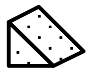
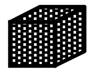
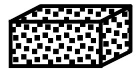
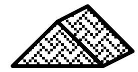
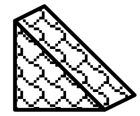
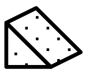
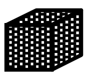
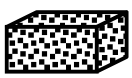
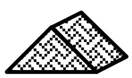
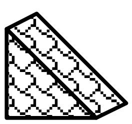
Le « moyen » prisme a un volume double de celui du « petit » prisme. Le « grand » prisme a un volume double de celui du « moyen » prisme. Le « grand » prisme a donc un volume égal à quatre fois celui du « petit » prisme.



Un tableau à compléter

Unité de volume	Volume de 	Volume de 	Volume de 	Volume de 	Volume de 
					
					
					
					
					

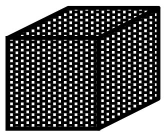
Le tableau complété

Unité de volume	Volume de 	Volume de 	Volume de 	Volume de 	Volume de 
	1	2	4	2	4
	0,5	1	2	1	2
	0,25	0,5	1	0,5	1
	0,5	1	2	1	2
	0,25	0,5	1	0,5	1

Qui suis-je ?

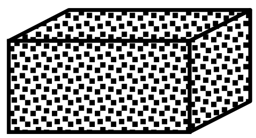
Je suis une pièce du Pavé de Metz. Toutes mes faces sont des carrés. Qui suis-je ?

Réponse



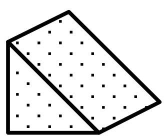
Je suis une pièce du Pavé de Metz. Quatre de mes faces sont des rectangles non carrés. Qui suis-je ?

Réponse



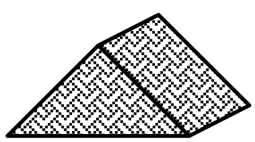
Je suis une pièce du Pavé de Metz. Deux de mes faces sont des carrés. Une seule de mes faces est un rectangle. Qui suis-je ?

Réponse



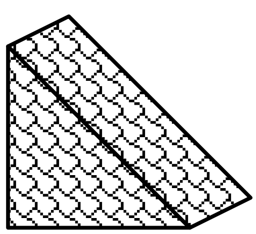
Je suis une pièce du Pavé de Metz. Seules trois de mes faces sont des rectangles non carrés. Pour l'une d'entre elle, la longueur est le double de la largeur. Qui suis-je ?

Réponse



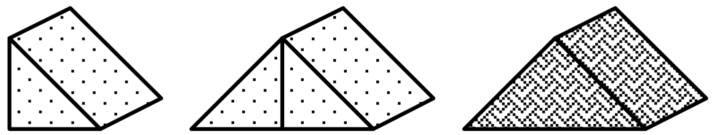
Je suis une pièce du Pavé de Metz. Seules trois de mes faces sont des rectangles non carrés. Pour deux d'entre elles, la longueur est le double de la largeur. Qui suis-je ?

Réponse

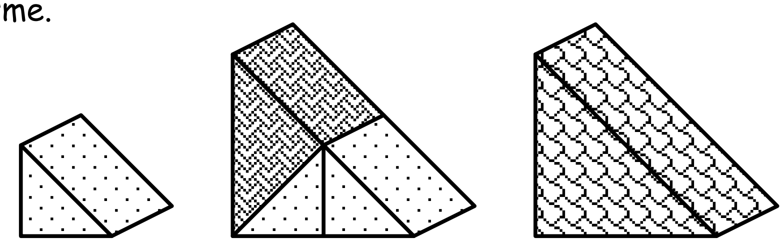


D'autres « Qui suis-je » pourront être réalisés à partir de listes des propriétés des cinq types de solides formant le Pavé de Metz. Restera ensuite à en proposer le moins possible pour que la pièce puisse être devinée.

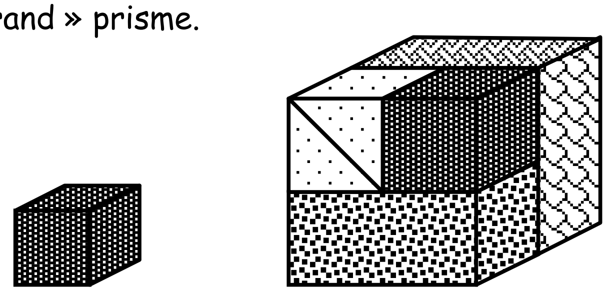
Agrandissements et réductions



Le « moyen » prisme a un volume double de celui du « petit » prisme, mais les arrêtes du « moyen » prisme n'ont pas une longueur double de celle du « petit » prisme.
Le « petit » prisme a un volume moitié de celui du « moyen » prisme, mais les arrêtes du « moyen » prisme n'ont pas une longueur moitié de celle du « moyen » prisme.



Le « grand » prisme a un volume quatre fois plus grand que celui du « petit » prisme, mais les arêtes du « grand » prisme n'ont pas une longueur quatre fois plus grand que de celle du « petit » prisme.
Le « petit » prisme a un volume quatre fois plus petit que celui du « grand » prisme, mais les arêtes du « petit » prisme n'ont pas une longueur quatre fois plus petite que celle du « grand » prisme.



Le volume du cube réalisé avec les sept pièces est huit fois plus grand que le volume de la pièce cubique. Les arêtes du cube réalisé sont deux fois plus grandes que celles de la pièce cubique. Le cube réalisé est un agrandissement du petit cube à l'échelle 2.
Le volume de la pièce cubique est huit fois plus petit que le volume du cube réalisé avec les sept pièces. Les arêtes du petit cube sont deux fois plus petites que celles du cube réalisé avec les sept pièces. Le petit cube est une réduction à l'échelle $\frac{1}{2}$ du cube réalisé avec les sept pièces.

Table des matières

LE CARRÉ DE METZ

ET

LE PAVÉ DE METZ

Des puzzles géométriques tels le Tangram sont utilisés dès l'École Maternelle. A l'École Elémentaire, les dessins des pièces sont parfois sollicités, mais la manipulation des pièces est rare, pour ne pas dire inexistante.

Cette brochure voudrait montrer que l'usage de pièces garde tout son intérêt jusqu'à la fin du Cycle 3 et dans les premières années du collège. Le puzzle utilisé a été créé en 2010, utilisé dans des classes et avec des étudiants désirant devenir Professeurs des Ecoles. Il a été présenté lors d'un atelier aux journées A.P.M.E.P. de Metz en 2012 : le thème « Partageons les mathématiques » s'y prêtait parfaitement.

Le choix a été pris de rendre visibles un quadrillage sur les pièces. Cela facilite certaines recherches, cela incite à utiliser le papier quadrillé pour le dessin de nouvelles configurations, cela facilite le travail à propos des aires des pièces. Par ailleurs, les symétries ne sont pas sollicitées que comme propriétés de certaines configurations, mais aussi comme outil pour créer de nouveaux assemblages.

Depuis les journées de Metz, la réflexion a été complétée par l'usage des dessins des pièces et la création du Pavé de Metz, utilisant les pièces du Carré de Metz ayant pris de l'épaisseur. Sont évoqués les rapports entre le solide, ce qui est vu, ce qui peut se toucher et ce qui est représenté. Sont aussi présentes des activités à propos d'agrandissement ou de réductions de solides, à propos de propriétés pouvant caractériser les pièces. La notion de volume est présente sans avoir recours à des formules.

Même si certaines activités peuvent être mises en œuvre par photocopie de certaines pages, cette brochure n'est pas un fichier pour la classe mais plutôt un recueil d'idées pour l'enseignant (École Élémentaire et premières années de collège).

Edité par l'APMEP-LORRAINE, réf. L14
I.S.B.N. 978-2-906476-13-4
Mars 2014

9 782906 476134

Prix de vente : 7 €