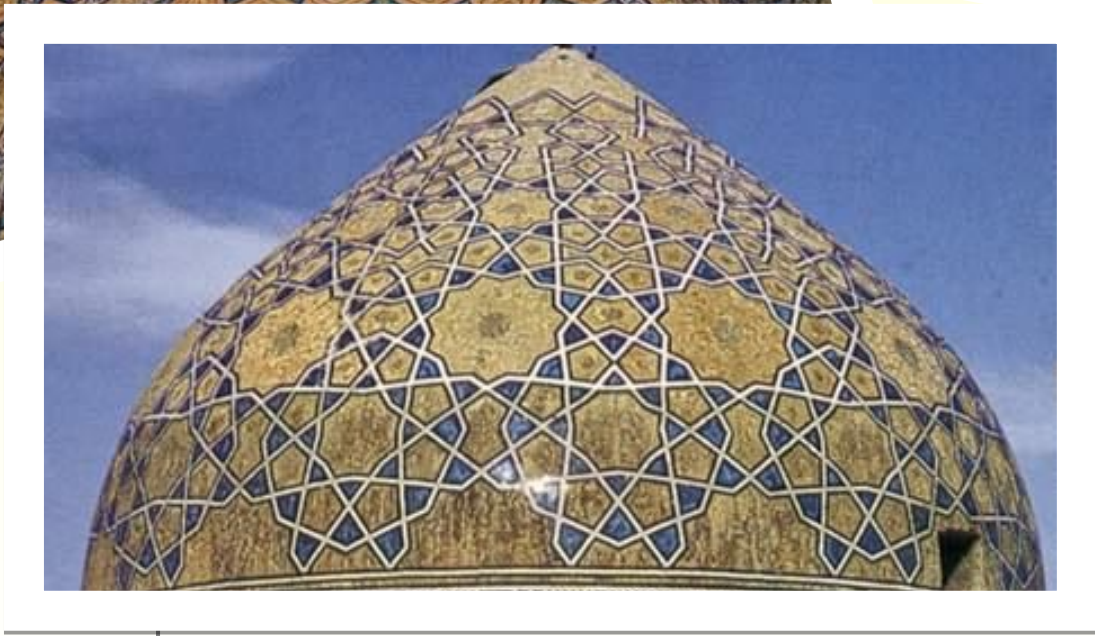
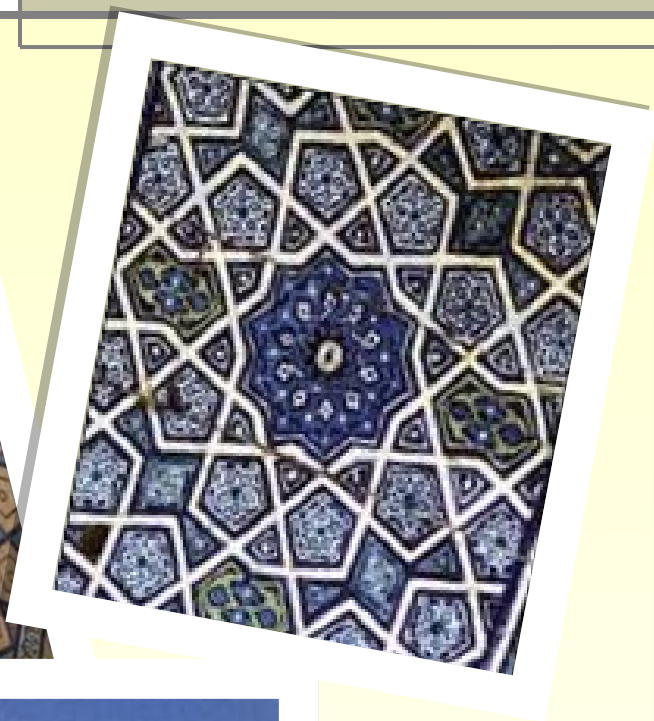
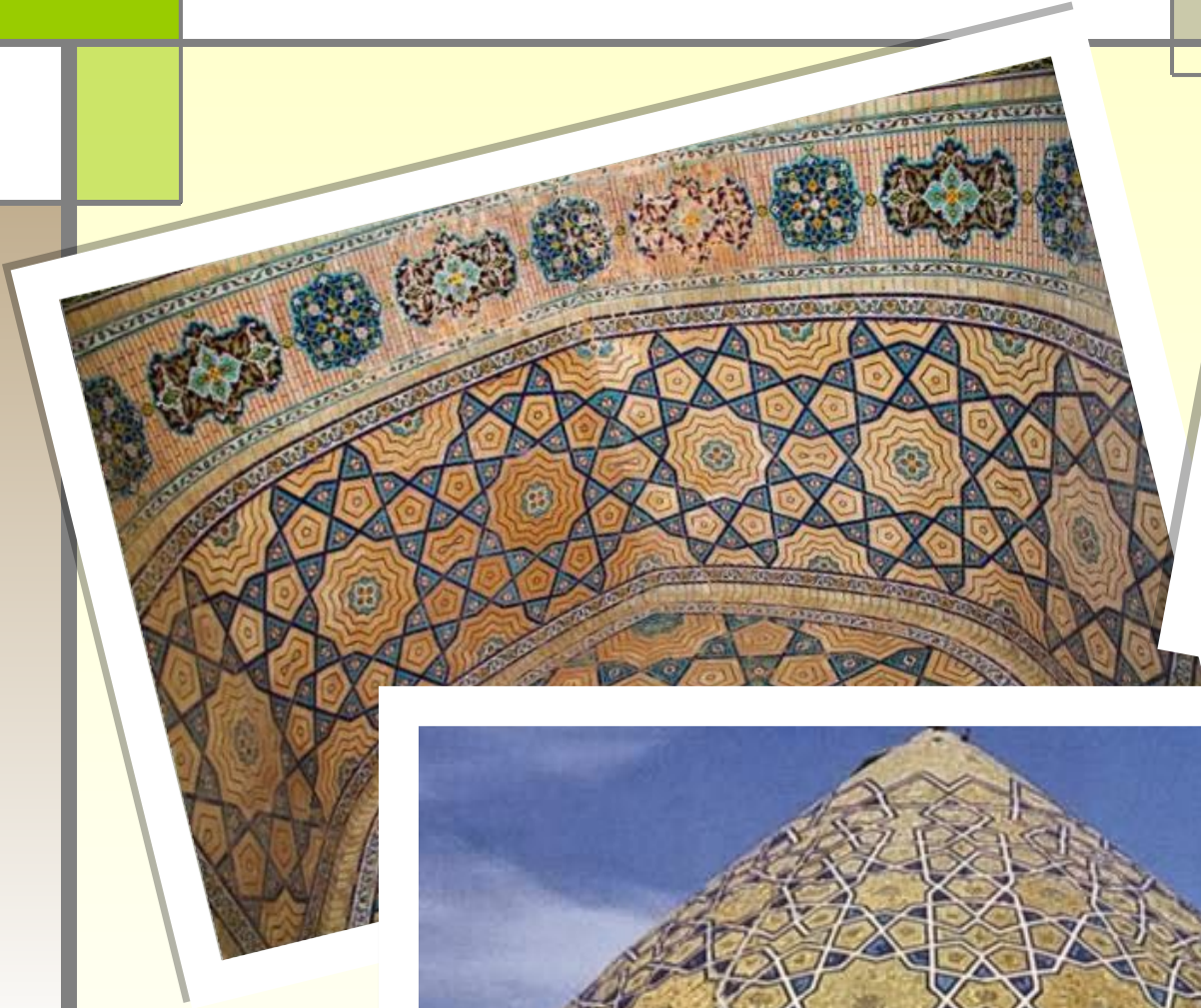


A decorative border composed of various colored rectangles and lines in shades of green, brown, blue, and grey, framing the central text area.

L'art arabo-musulman

au service de l'apprentissage de la
notion d'angle et de sa mesure

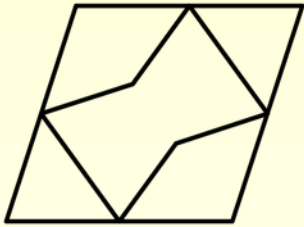


Introduction

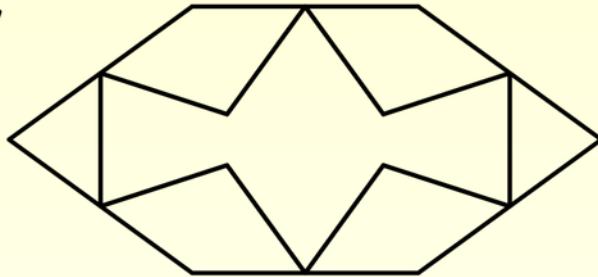
Le physicien **Peter J. Lu**, passionné d'histoire de l'art, a découvert en 2007 que certains décors géométriques de l'architecture arabo-musulmane médiévale, que l'on croyait jusqu'à lors conçus en tant que réseaux de lignes en zigzag et dessinés directement à la règle et au compas, n'étaient en réalité que des pavages réalisés à l'aide de cinq polygones décorés de quelques lignes, qu'on appelle **polygones** ou **tuiles "Girih"**. Le mot **Girih** signifie "tuile" en Persan.

Les cinq polygones « Girih »

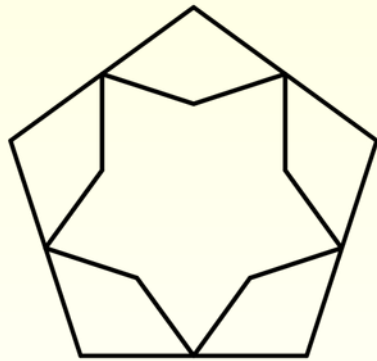
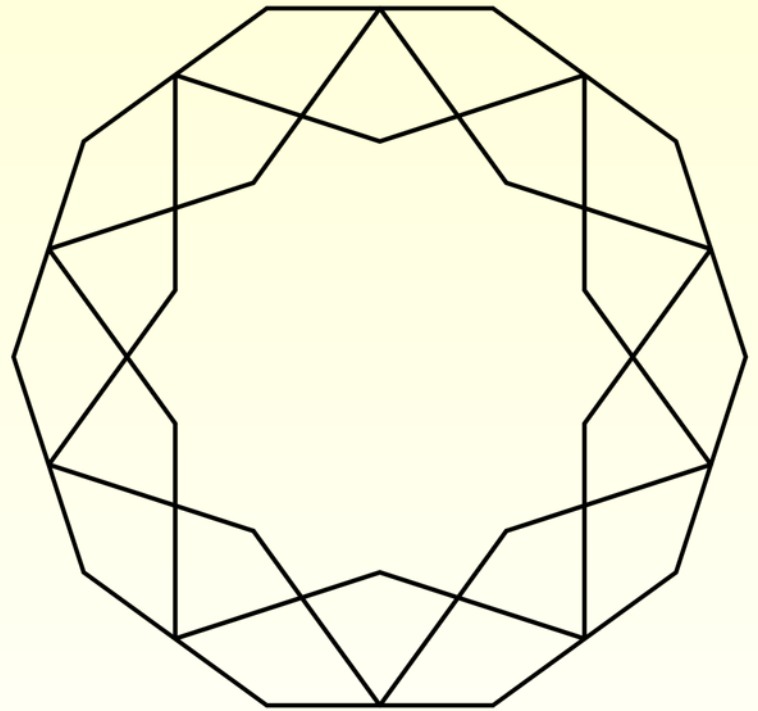
Le losange



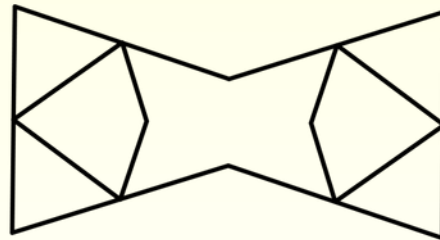
La navette



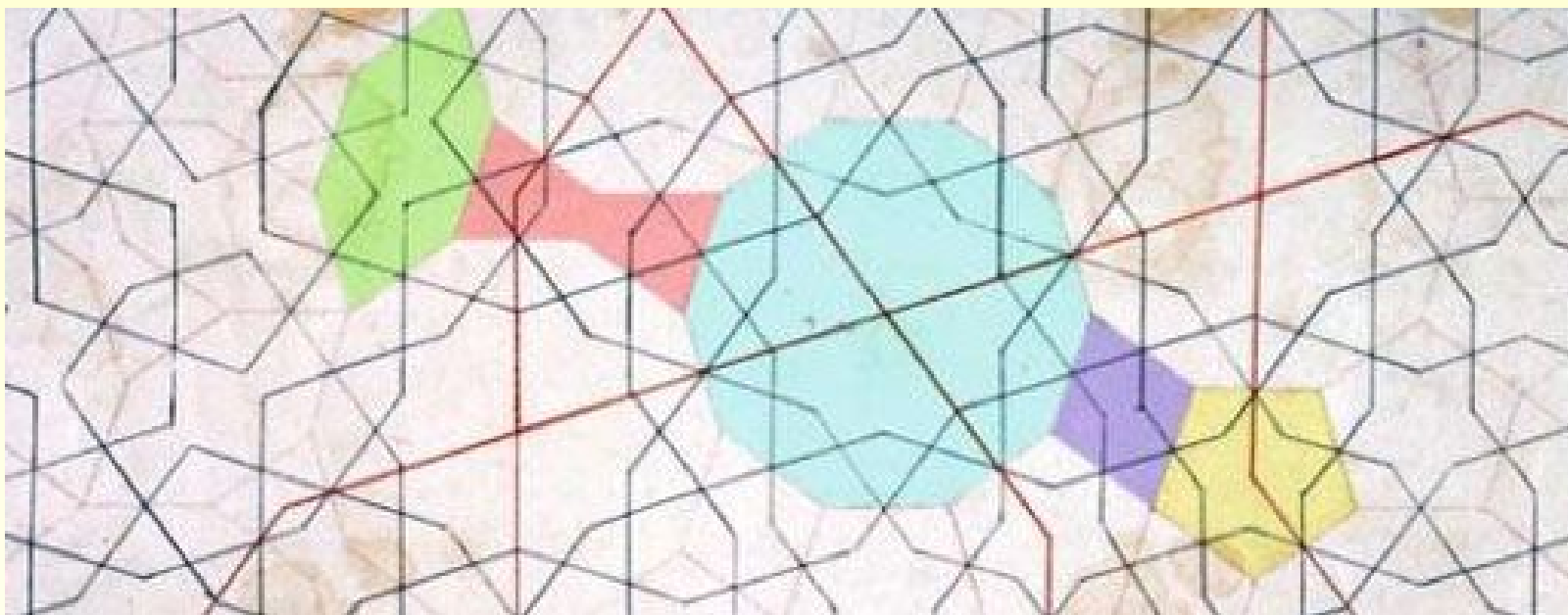
Le décagone



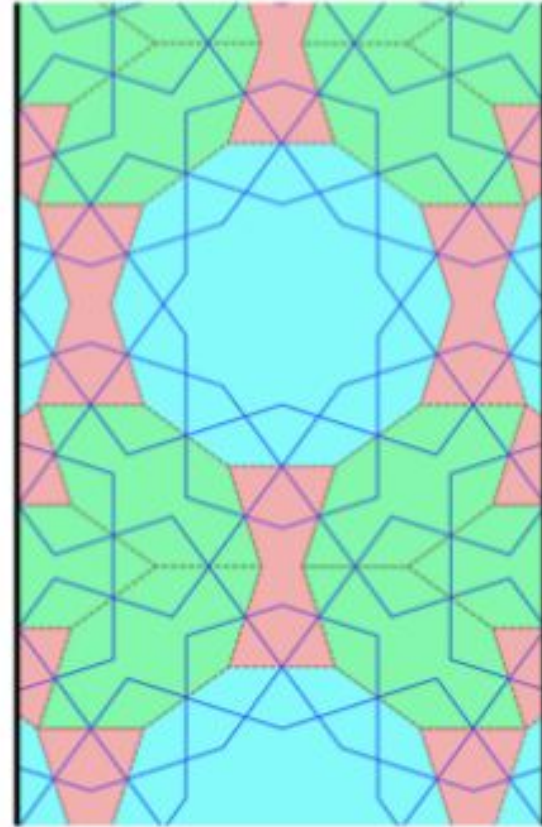
Le pentagone



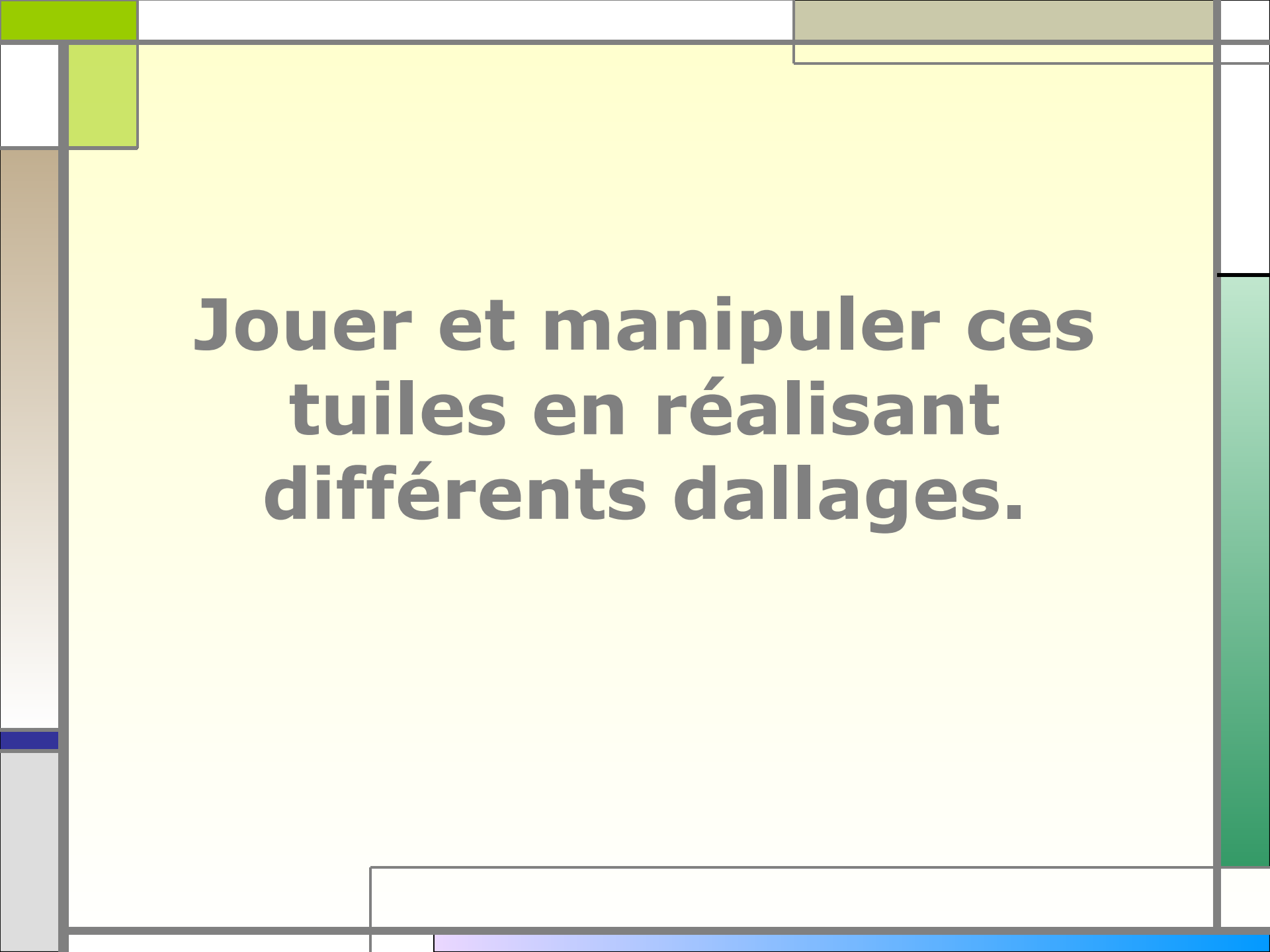
Le nœud-papillon



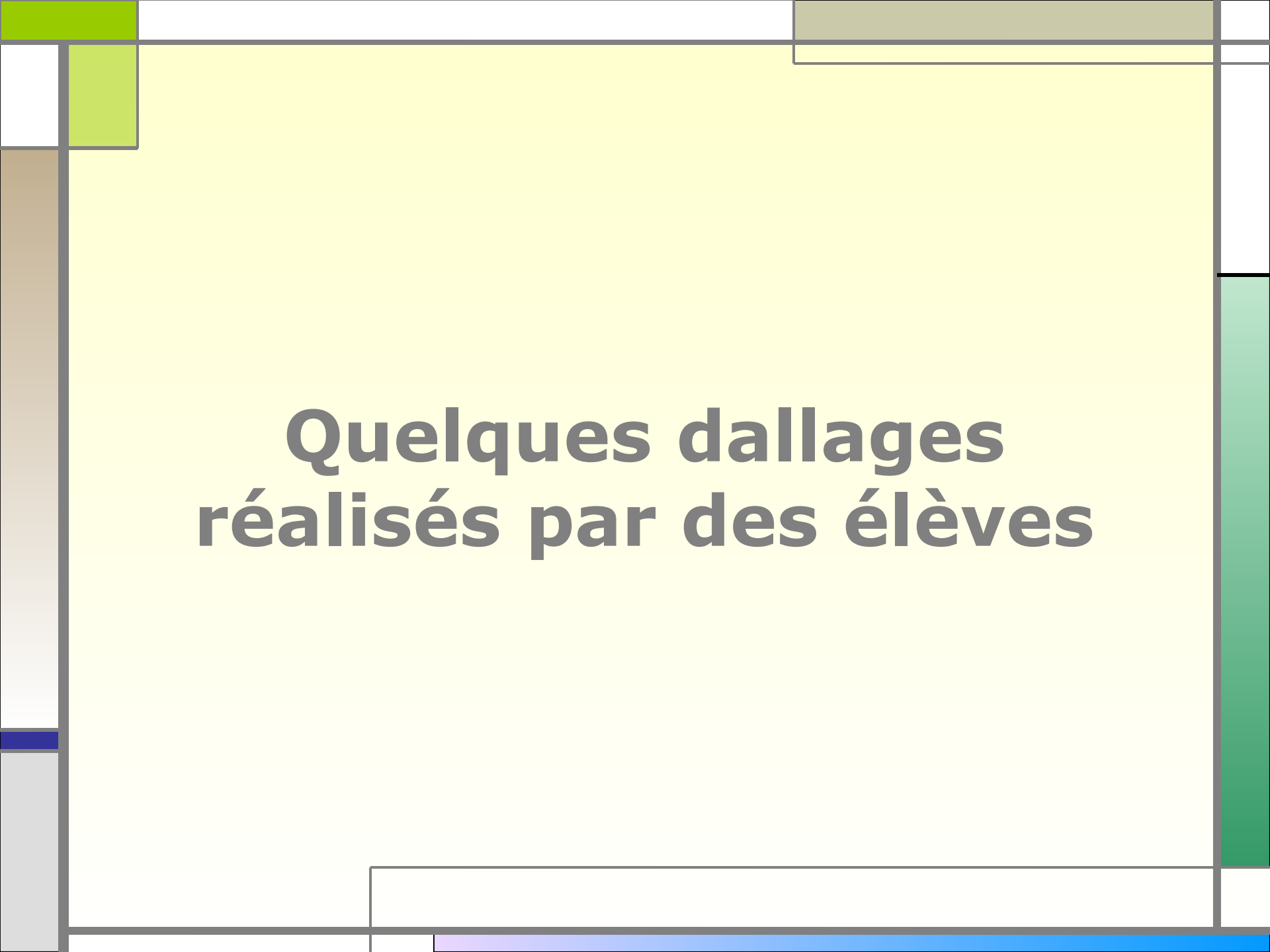
Extrait d'un rouleau du XVème siècle conservé au musée de Topkapi, avec mise en évidence des tuiles (Peter Lu)



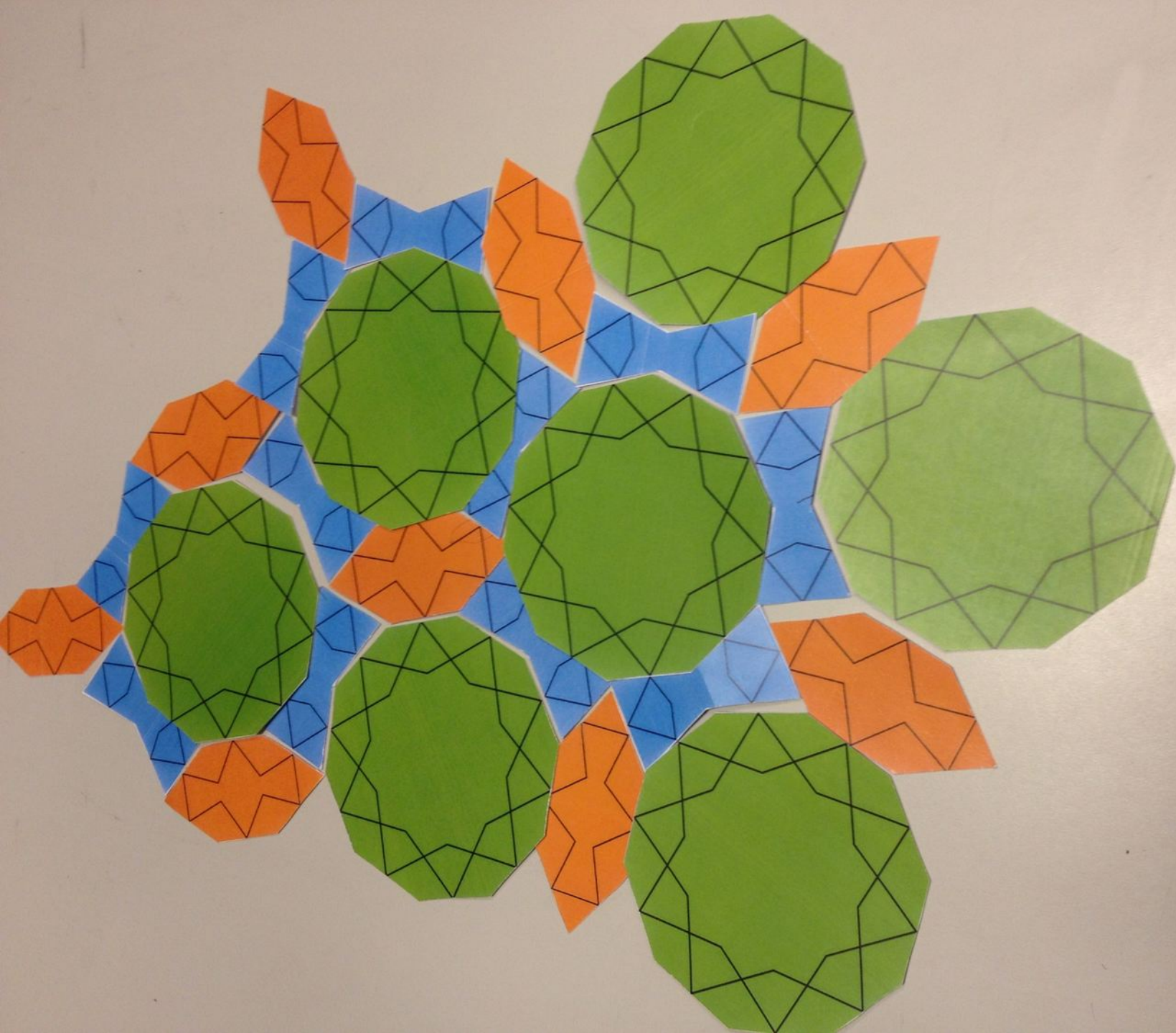
Loge du sultan à la Mosquée verte ottomane de Bursa (Turquie), avec mise en évidence des tuiles (Peter Lu).

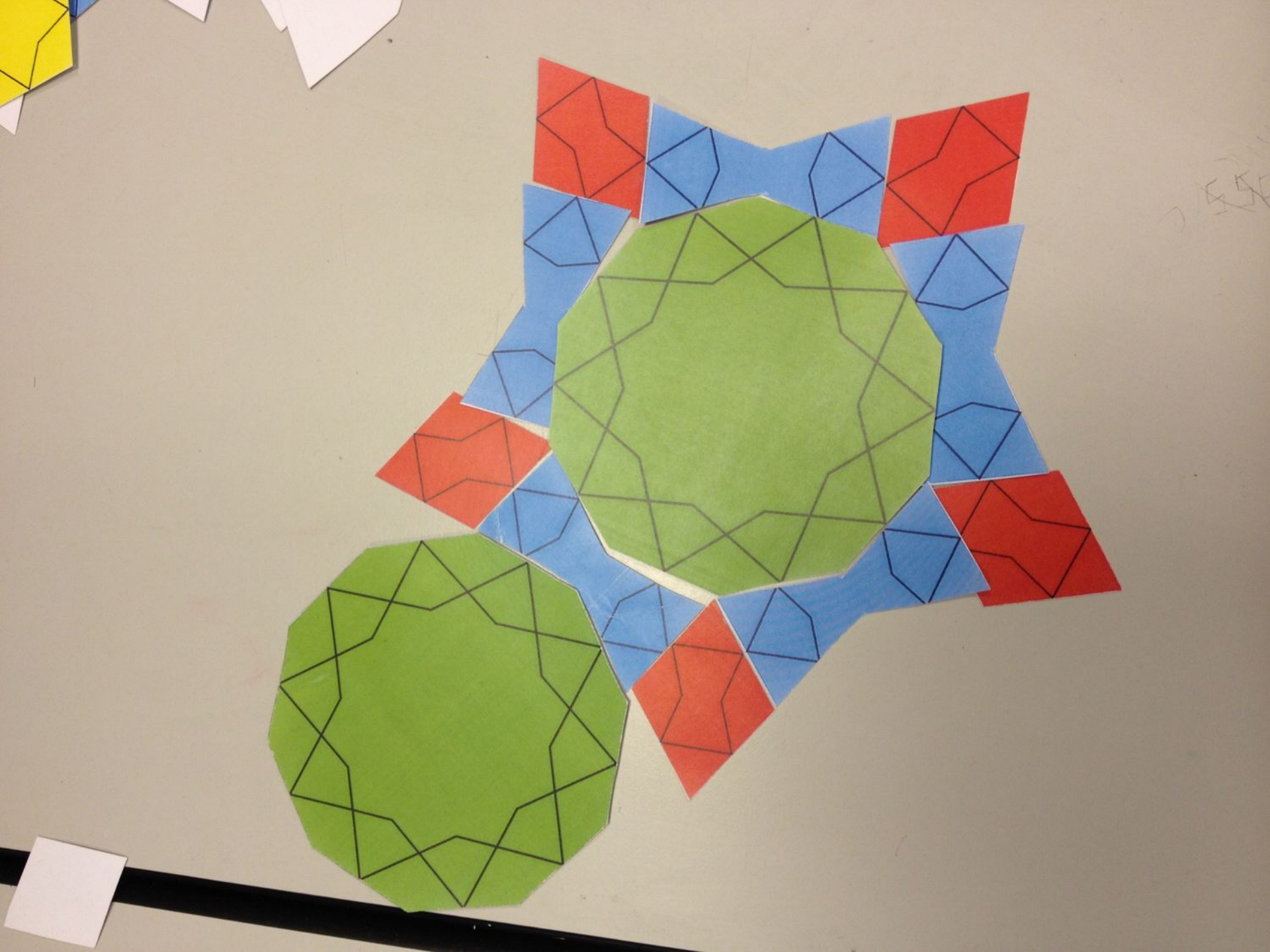


**Jouer et manipuler ces
tuiles en réalisant
différents dallages.**

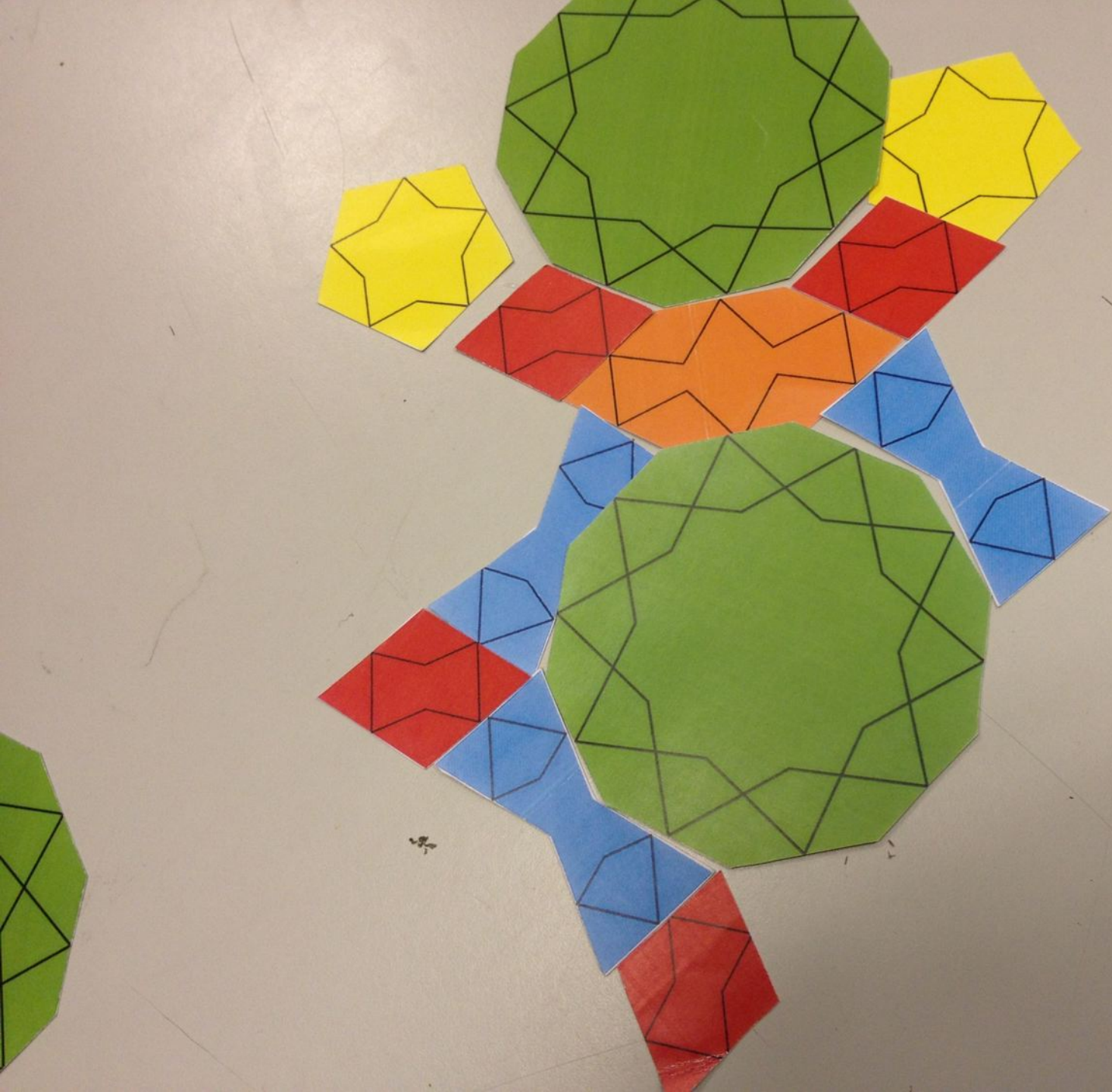
A decorative border surrounds the central text area. It consists of various colored rectangles and lines in shades of green, brown, blue, and grey, arranged in a geometric, abstract pattern.

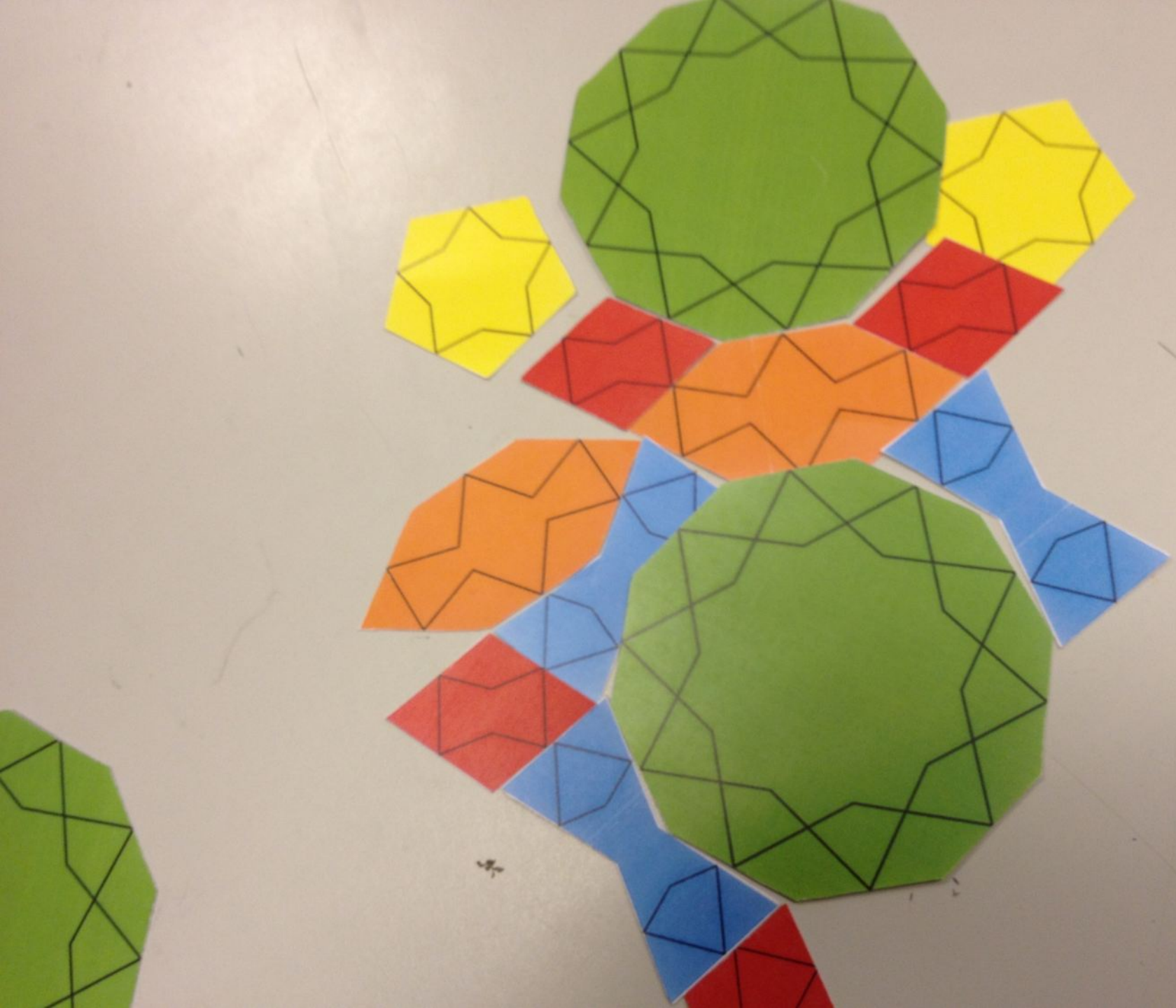
**Quelques dallages
réalisés par des élèves**

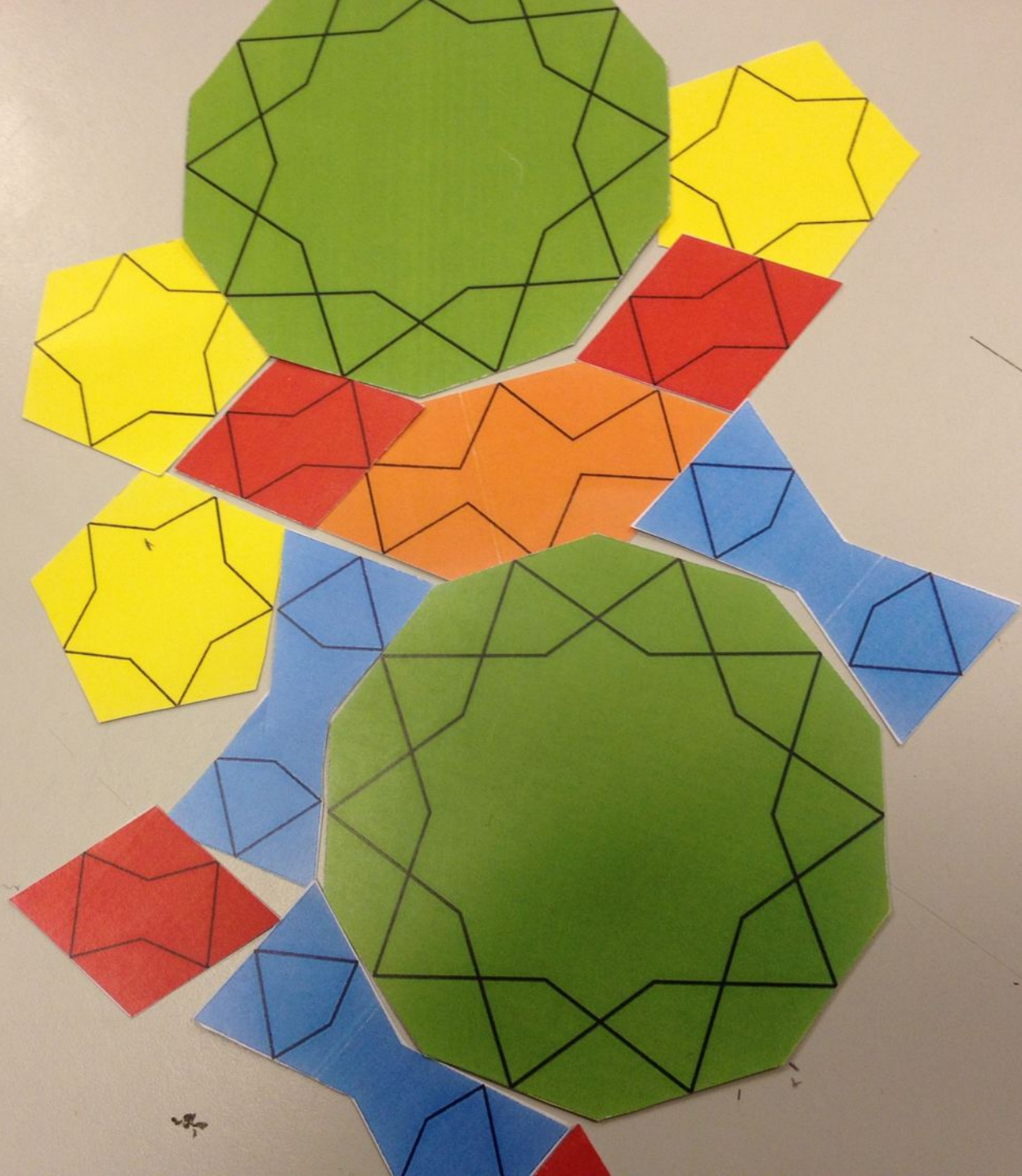


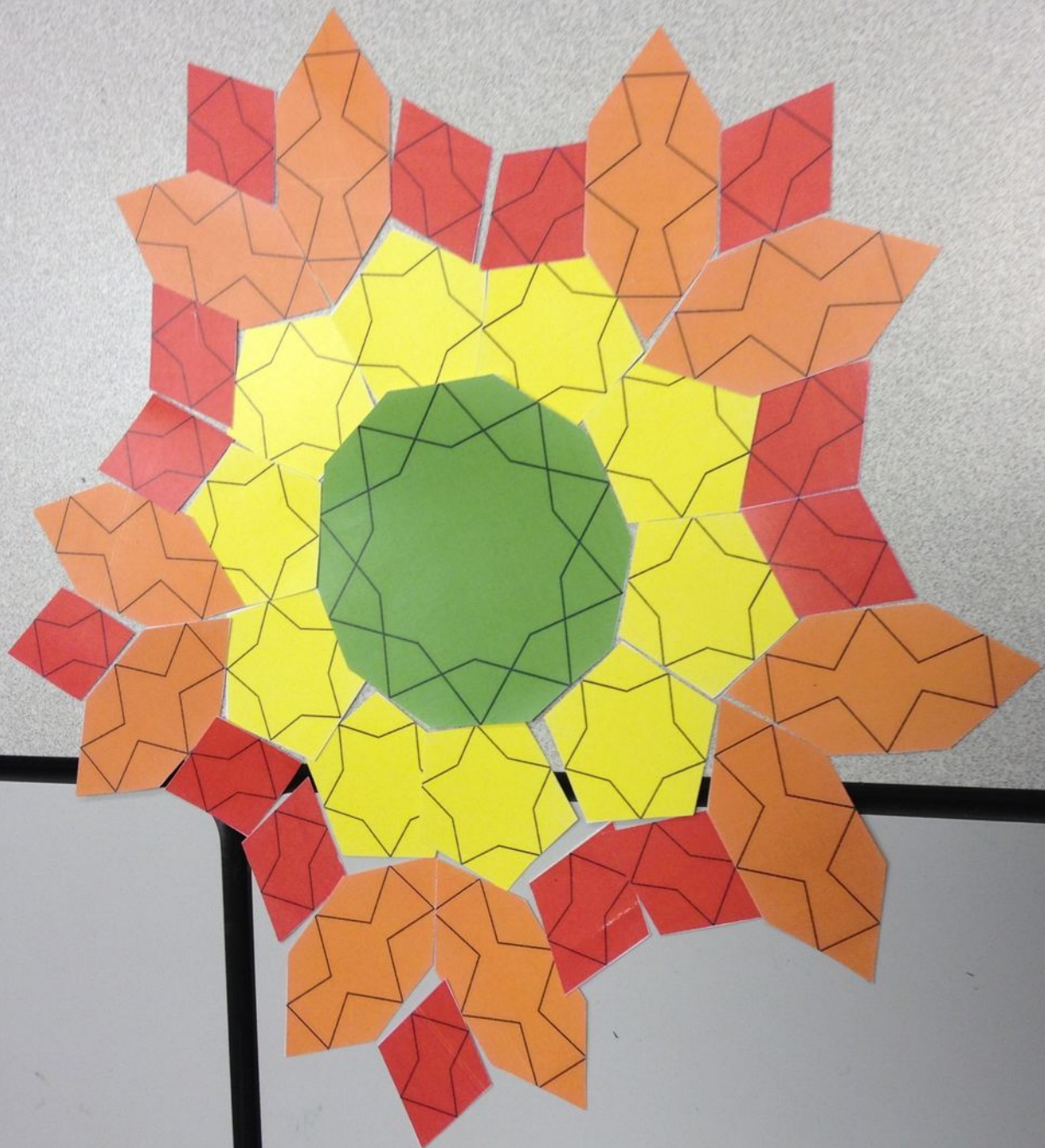


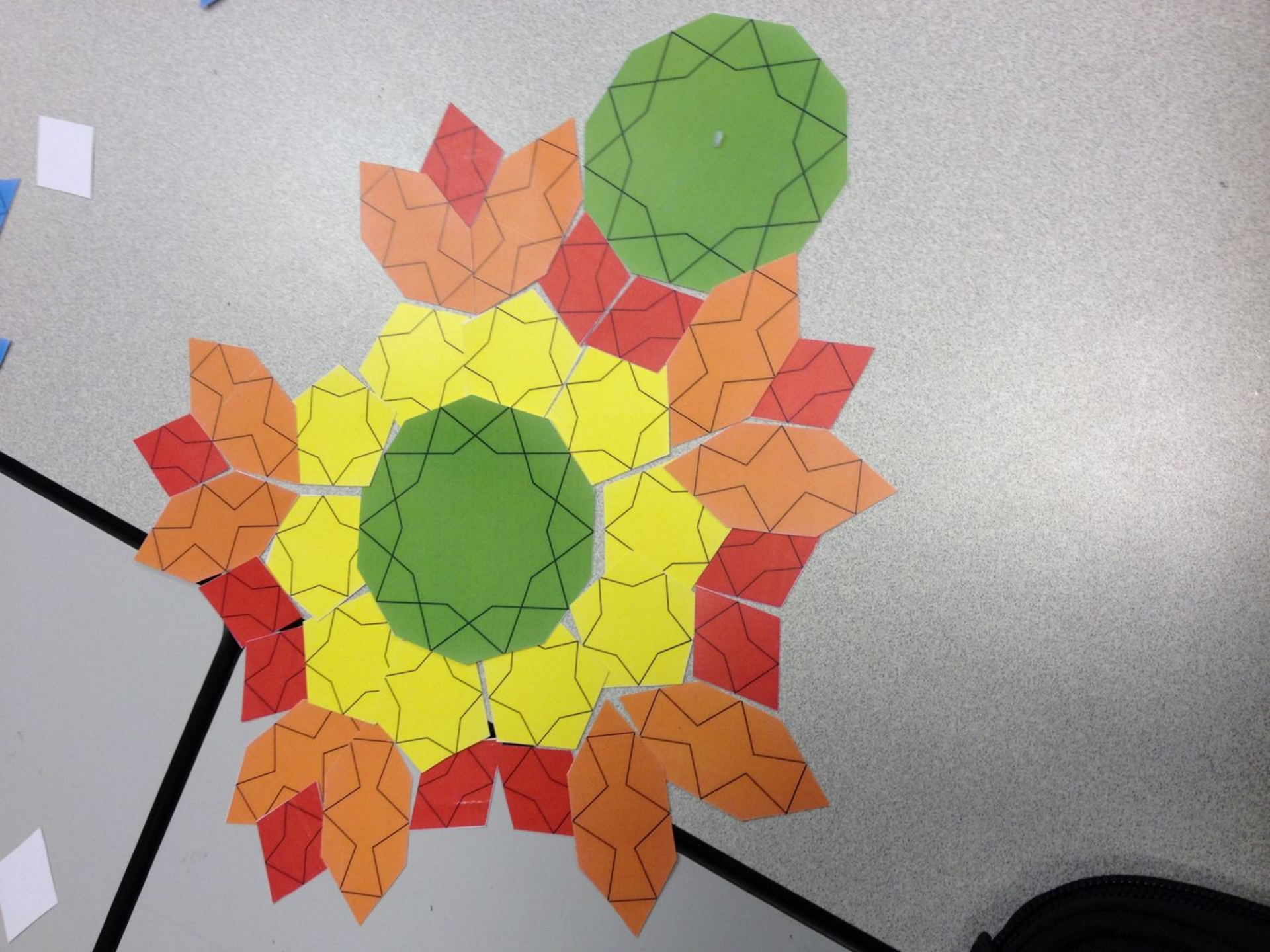


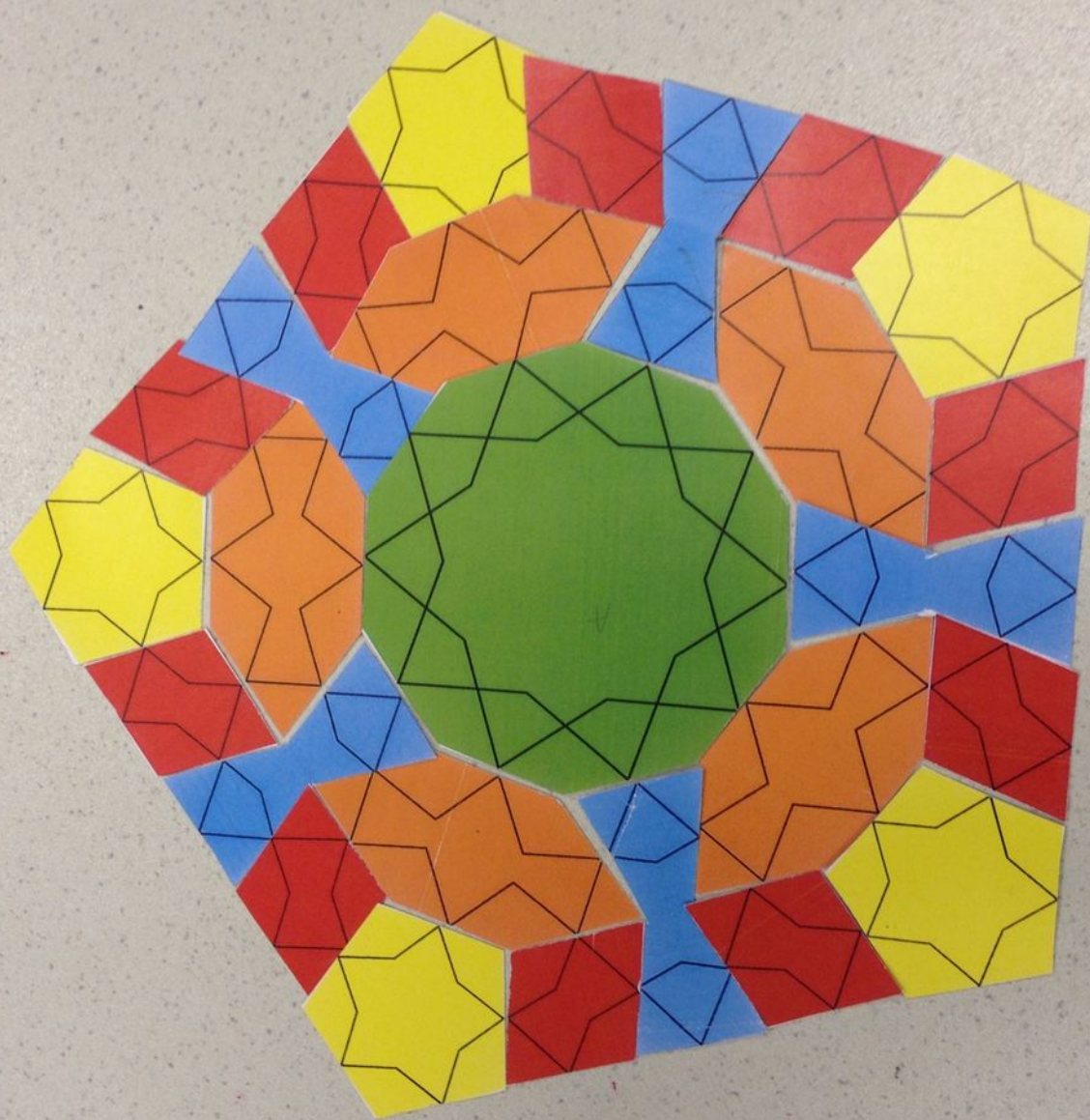


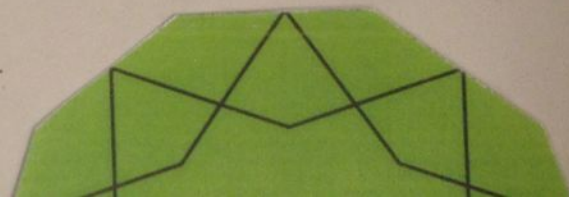
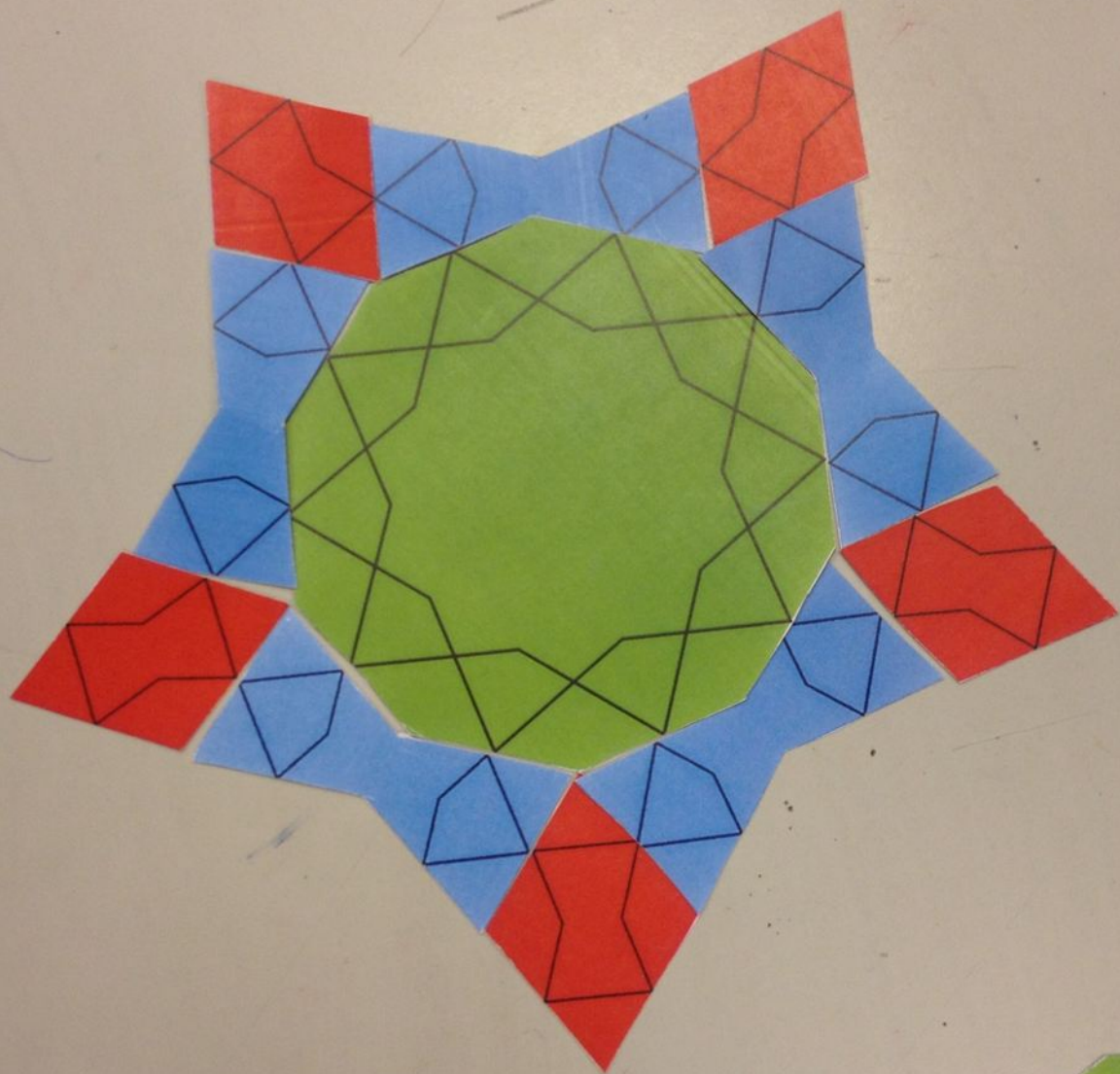


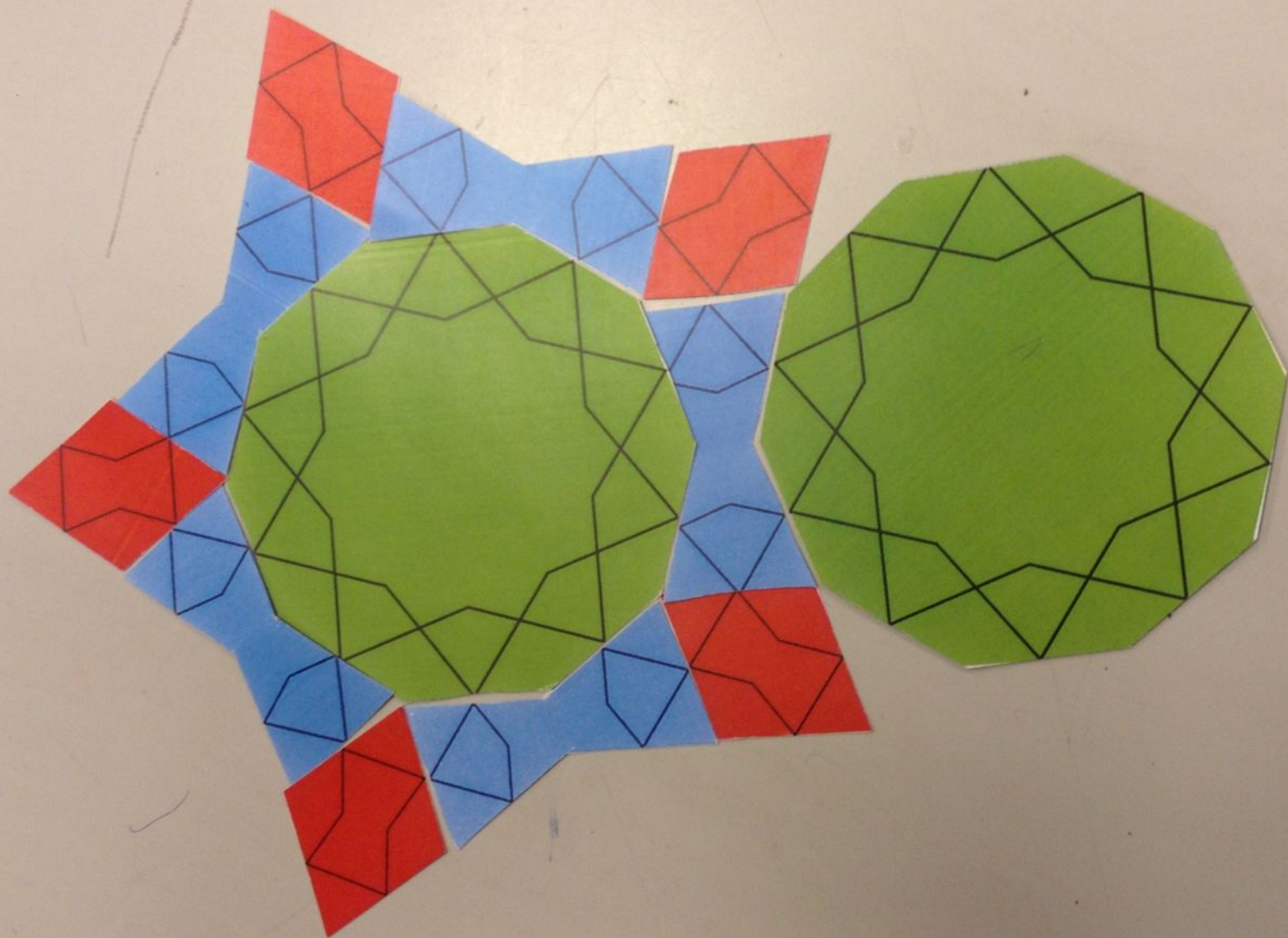


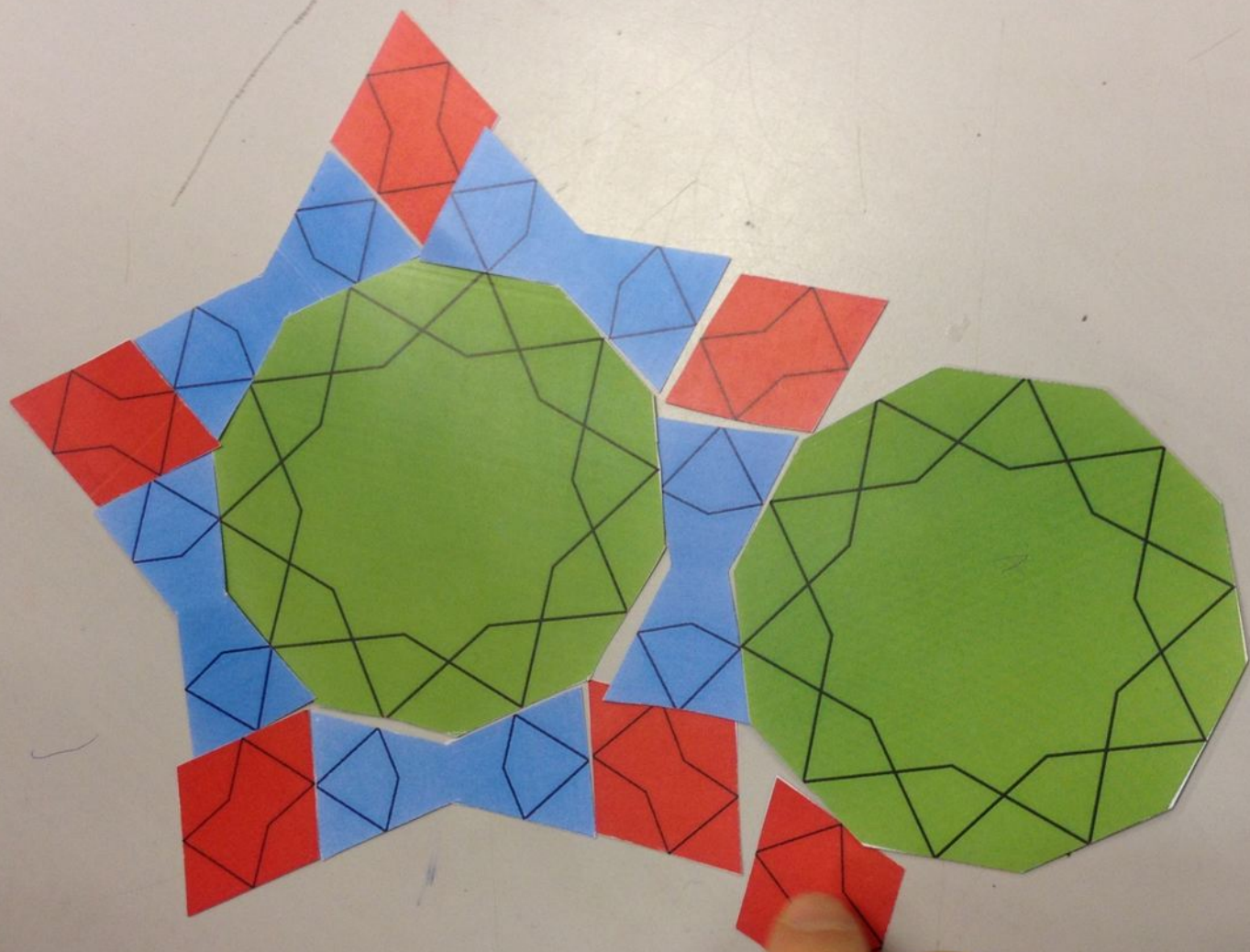


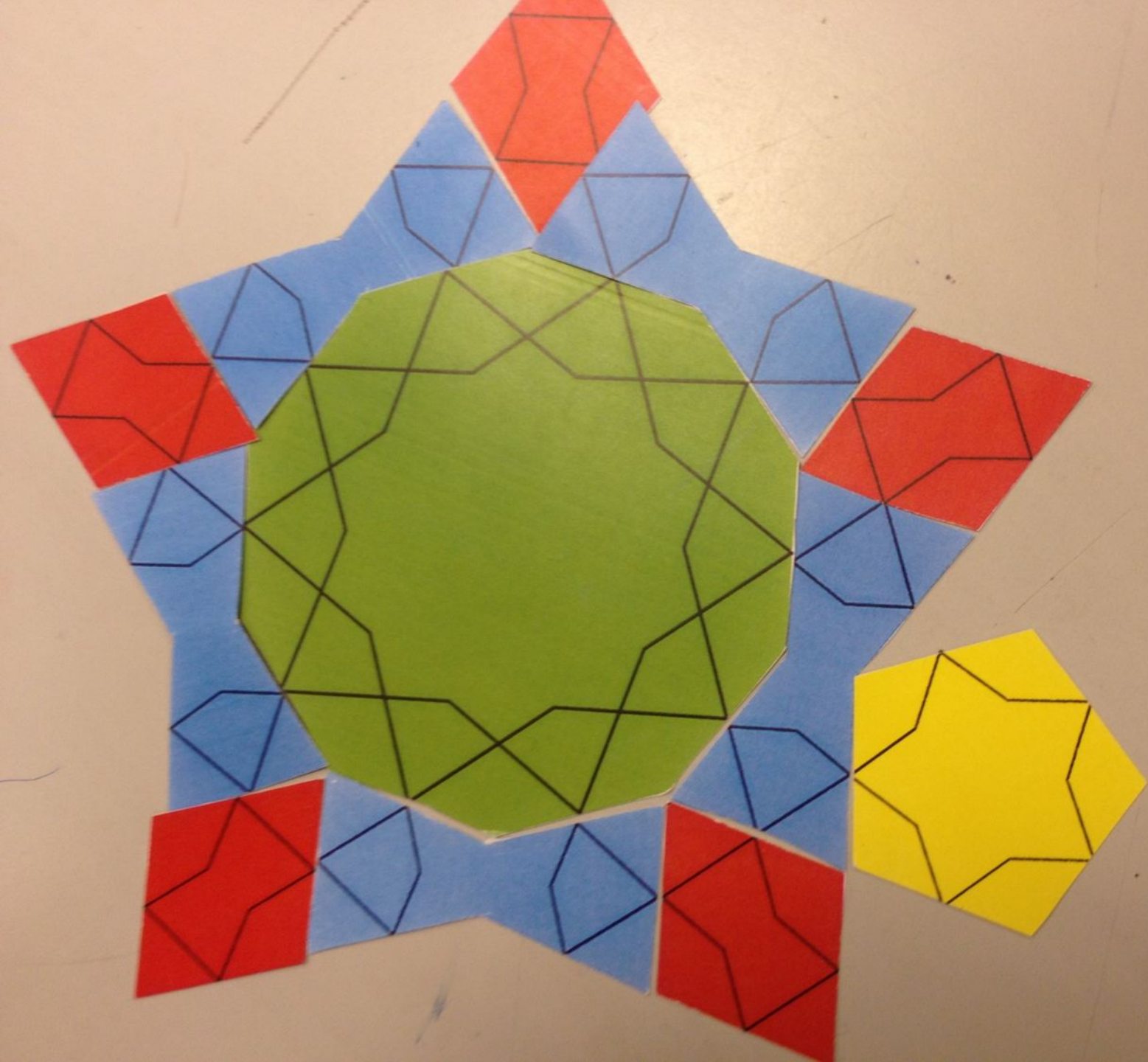


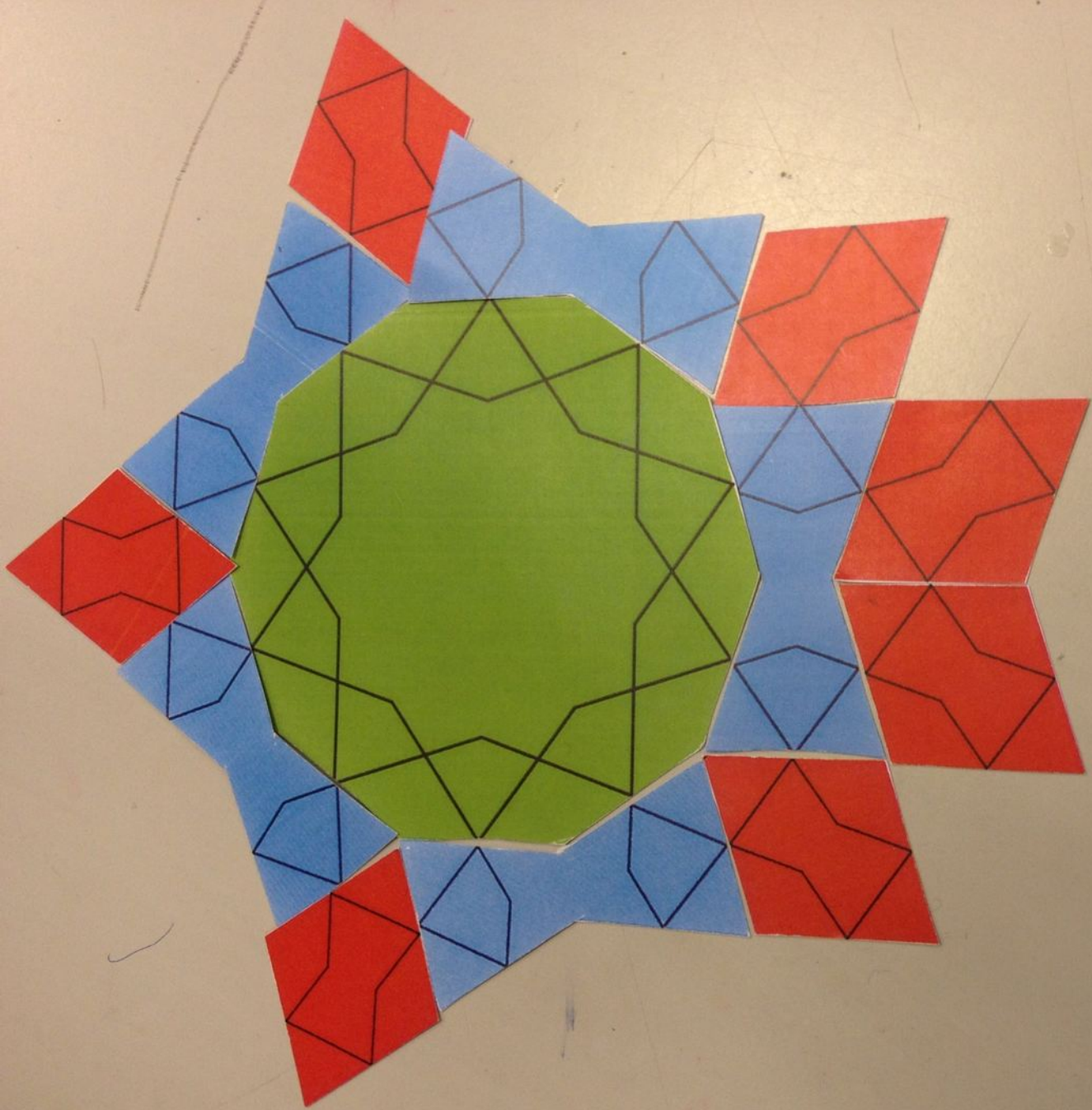


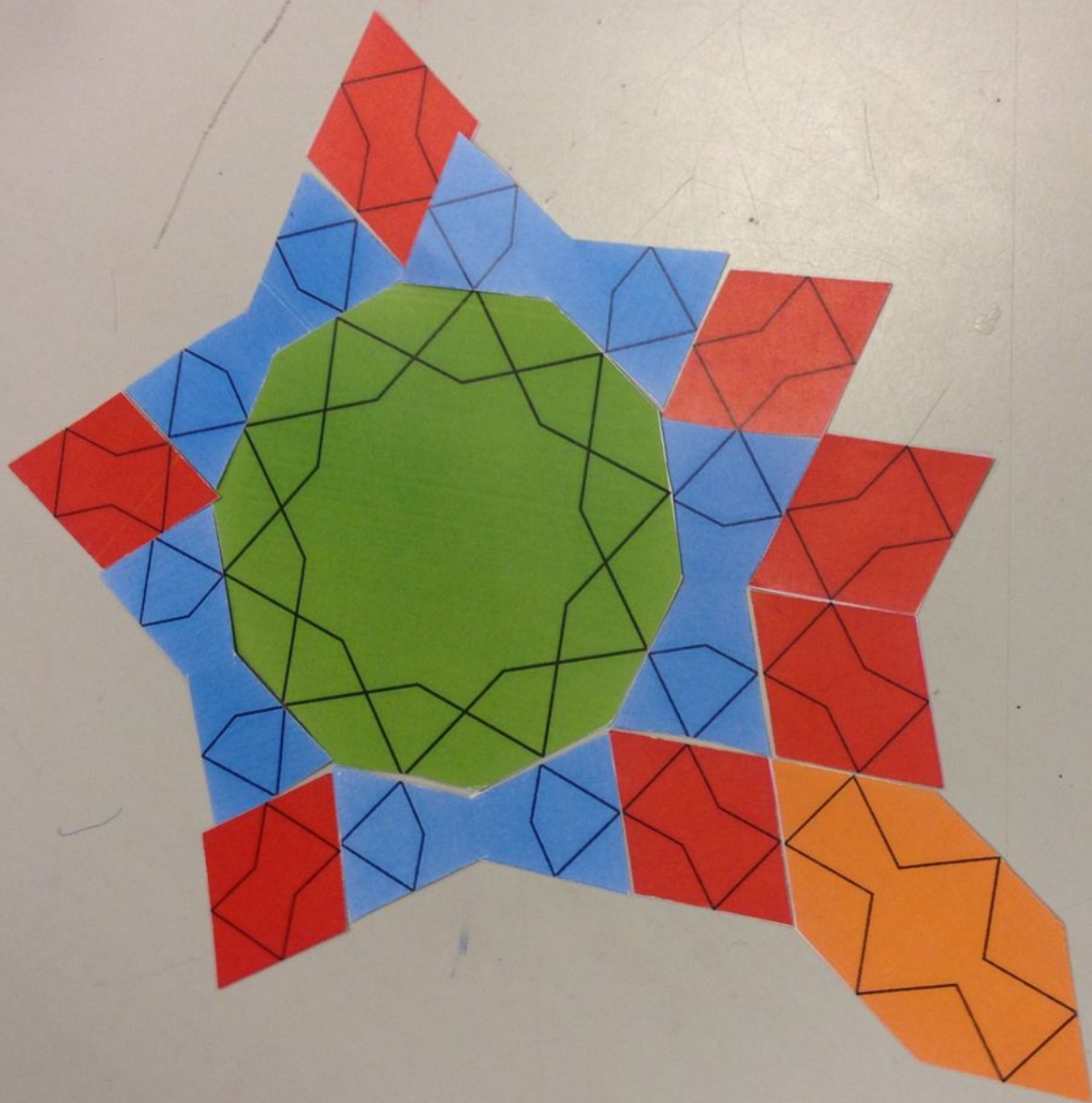


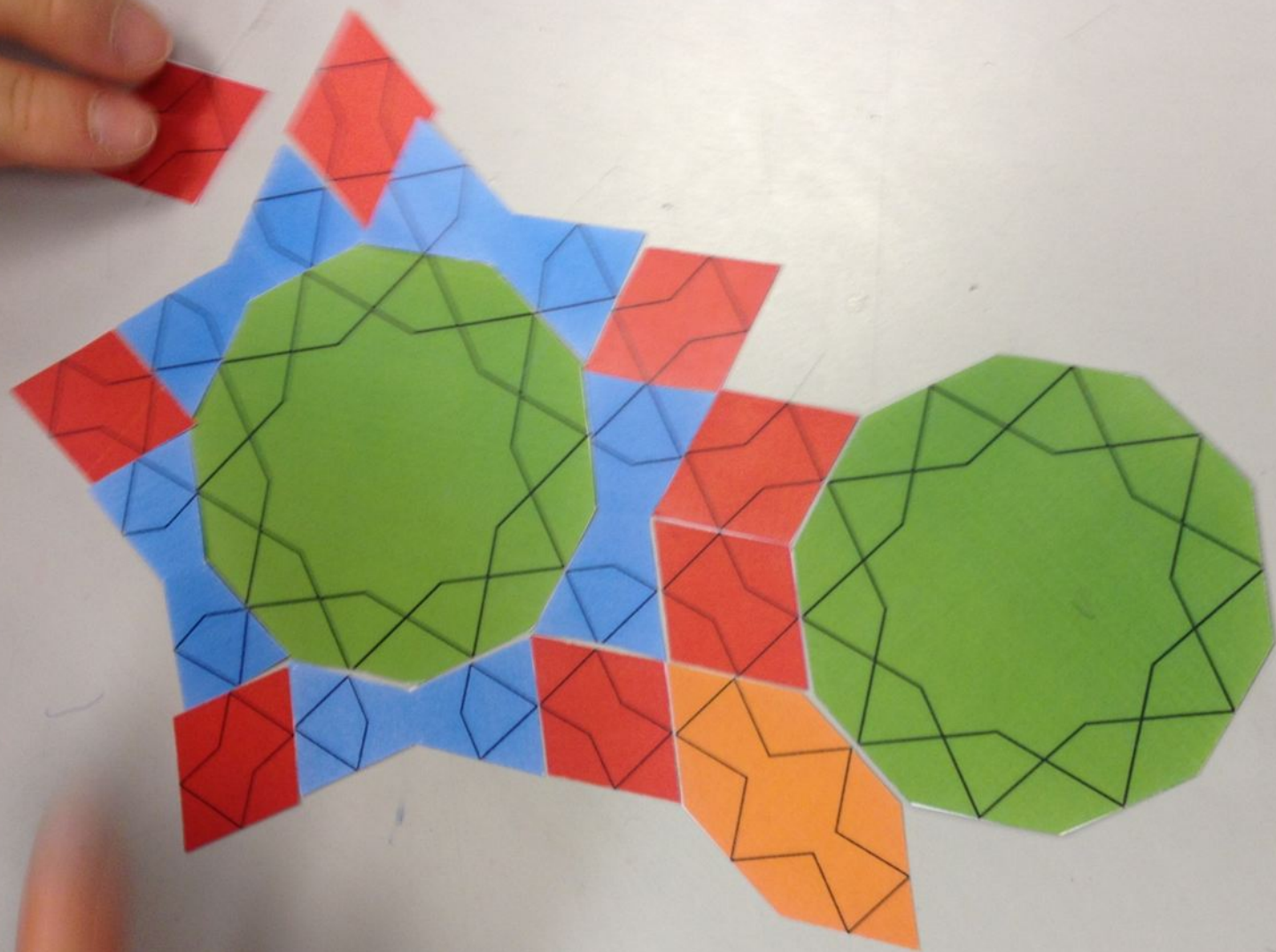


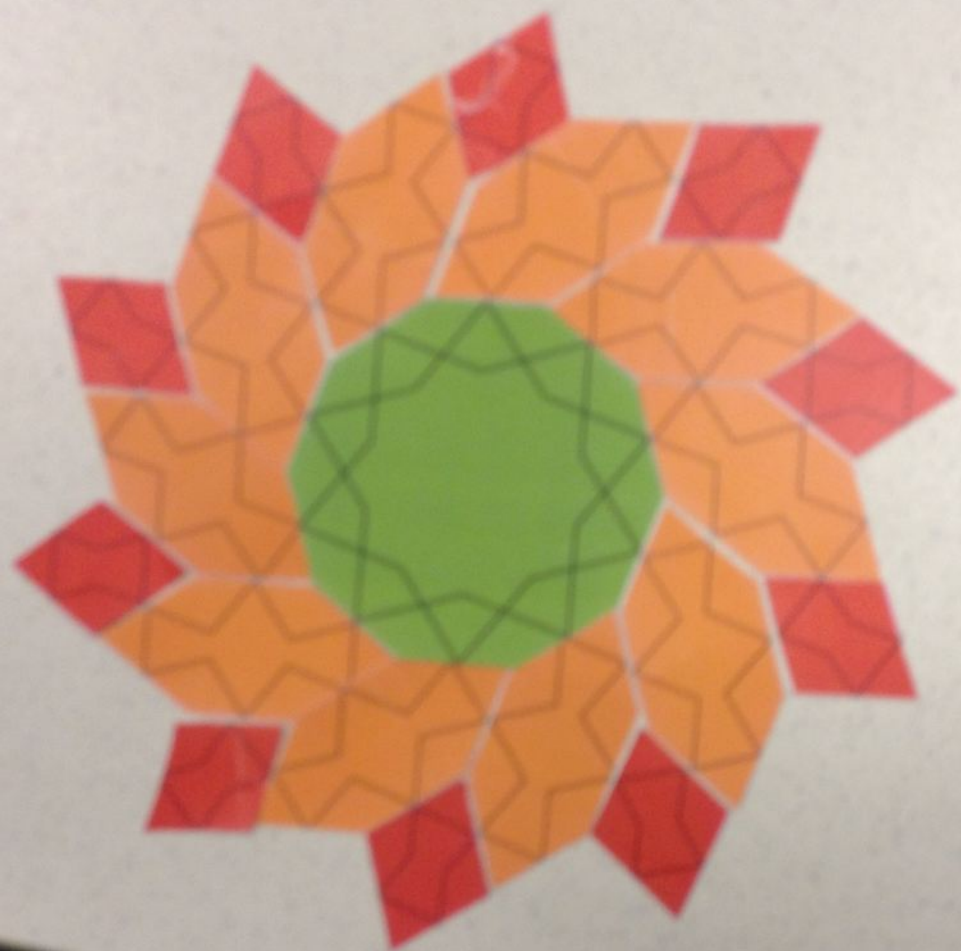


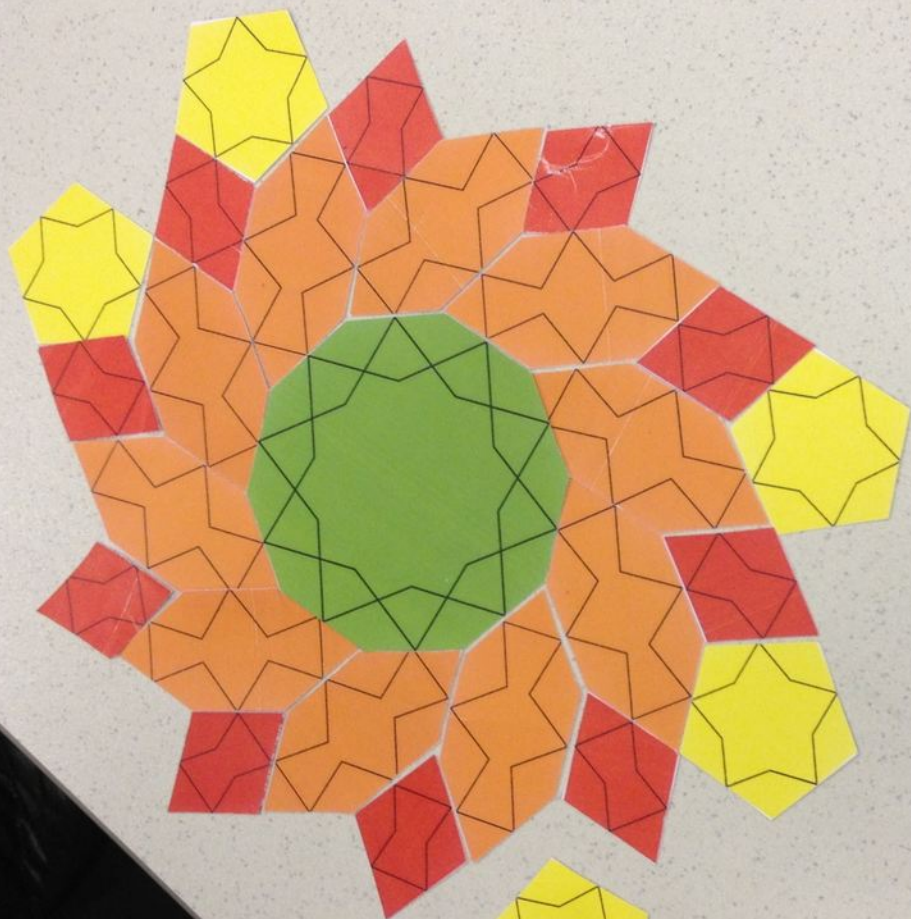


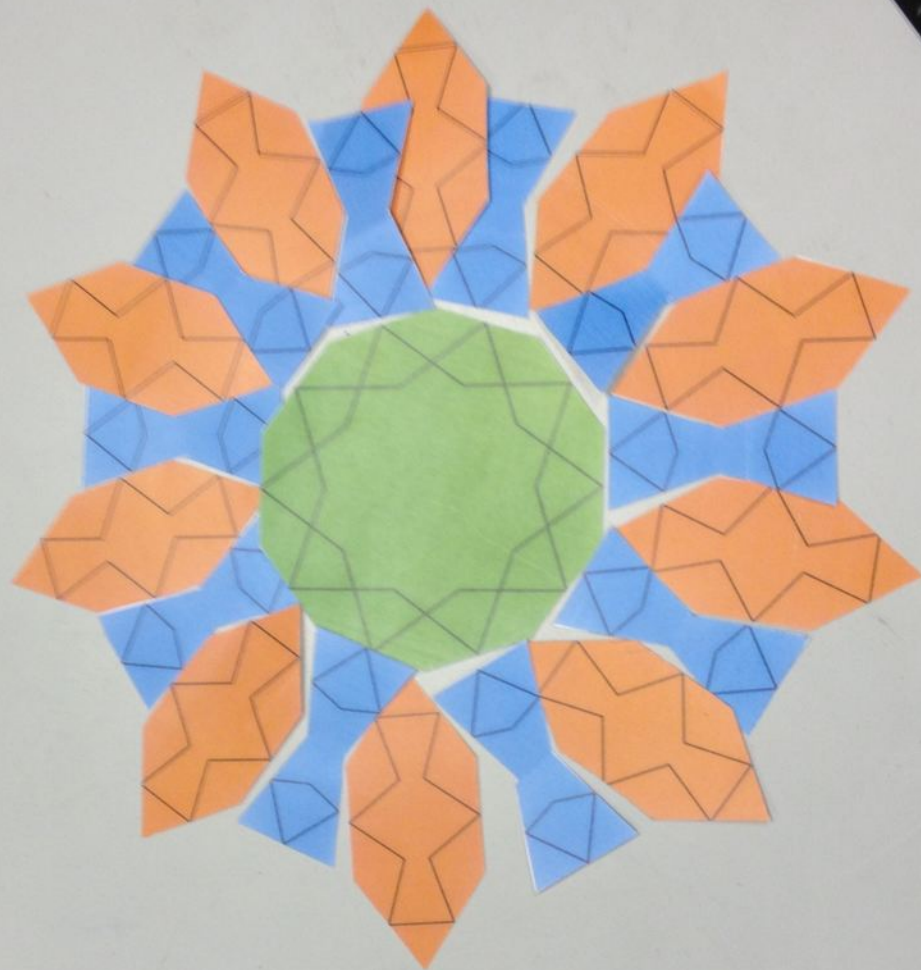


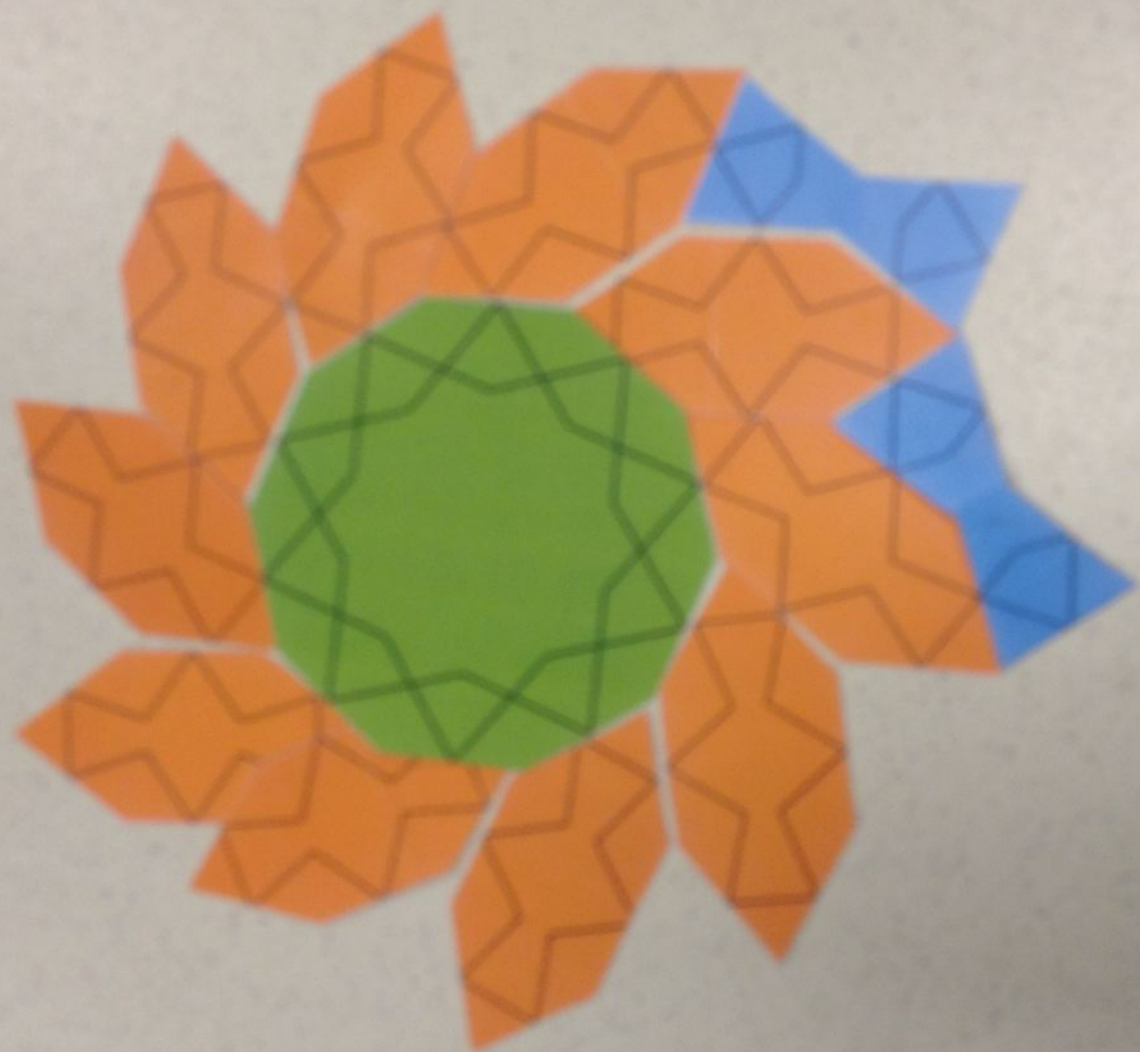


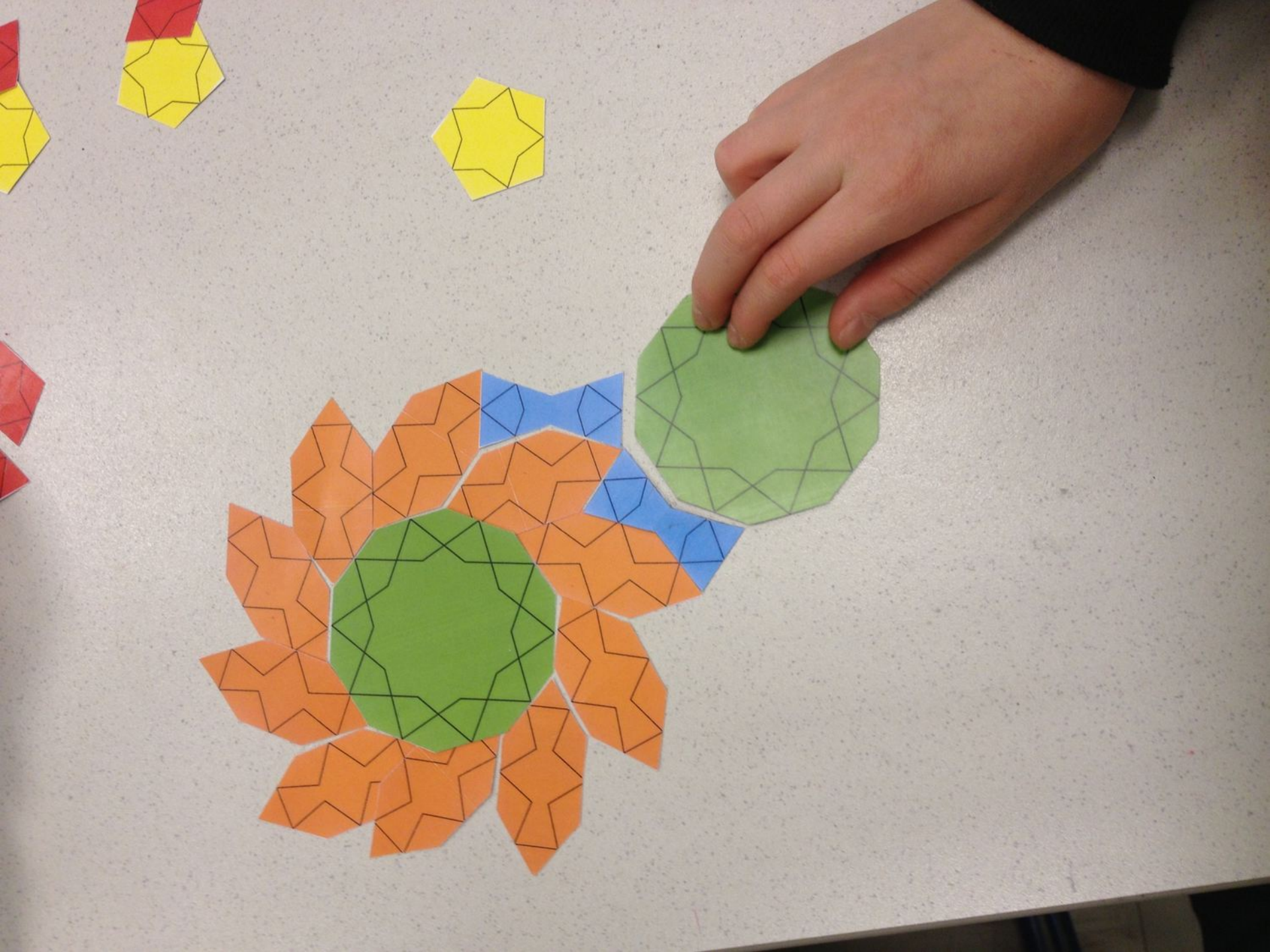


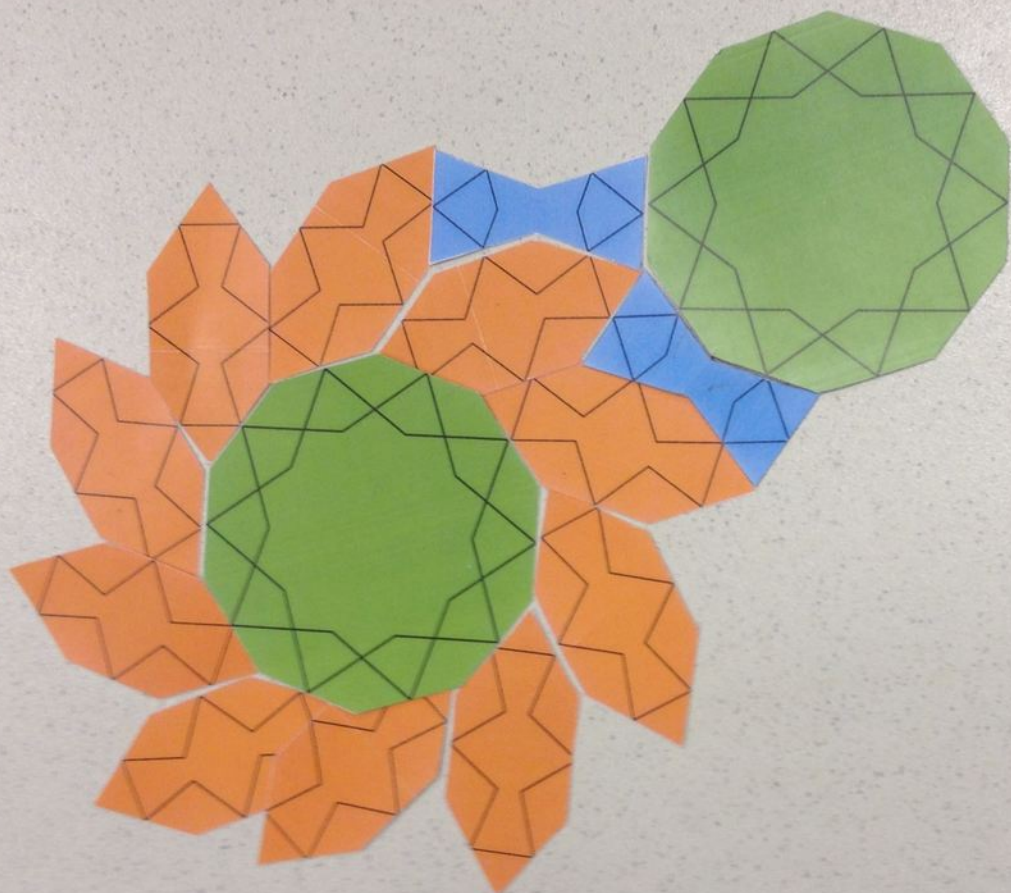


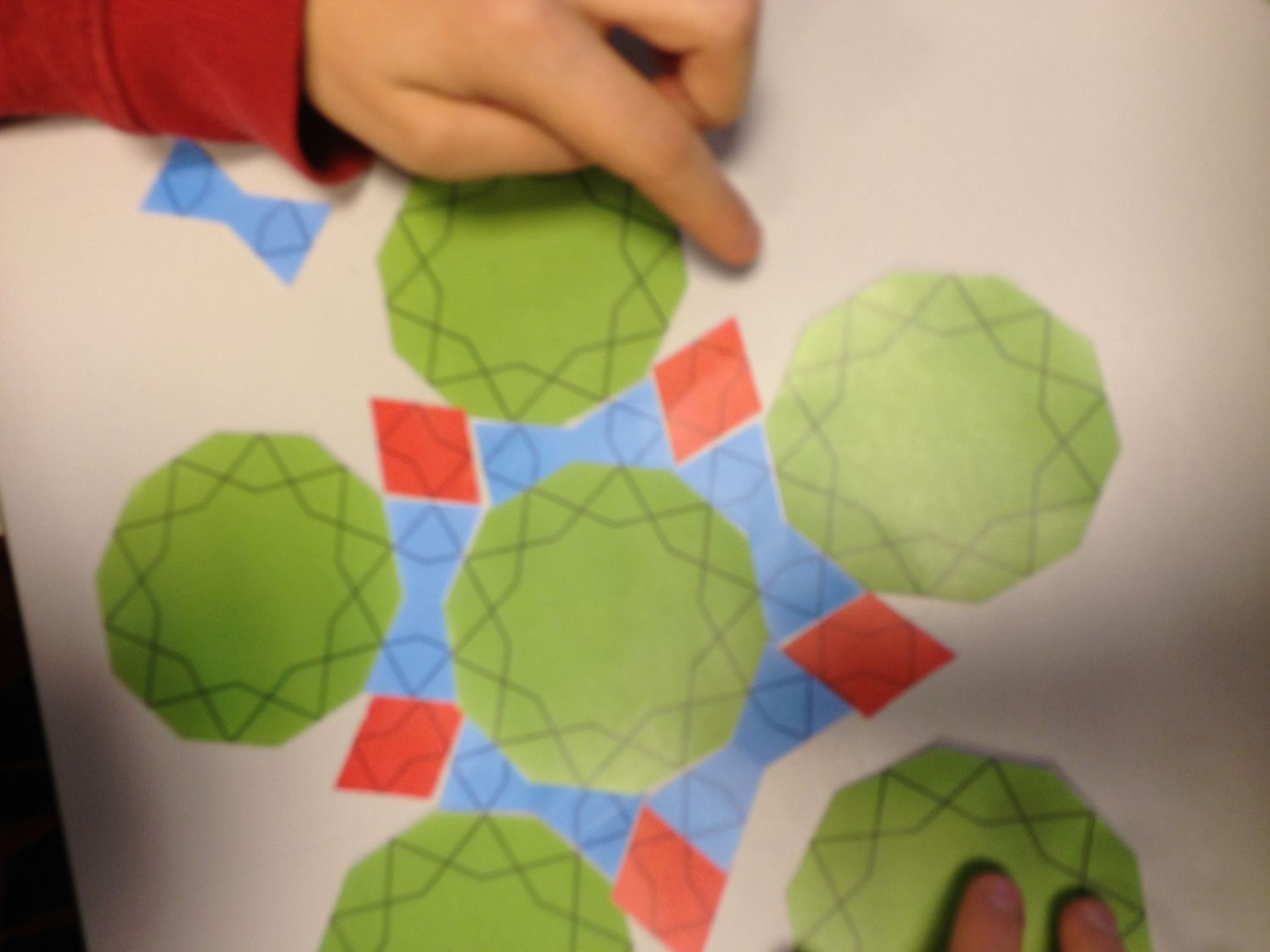


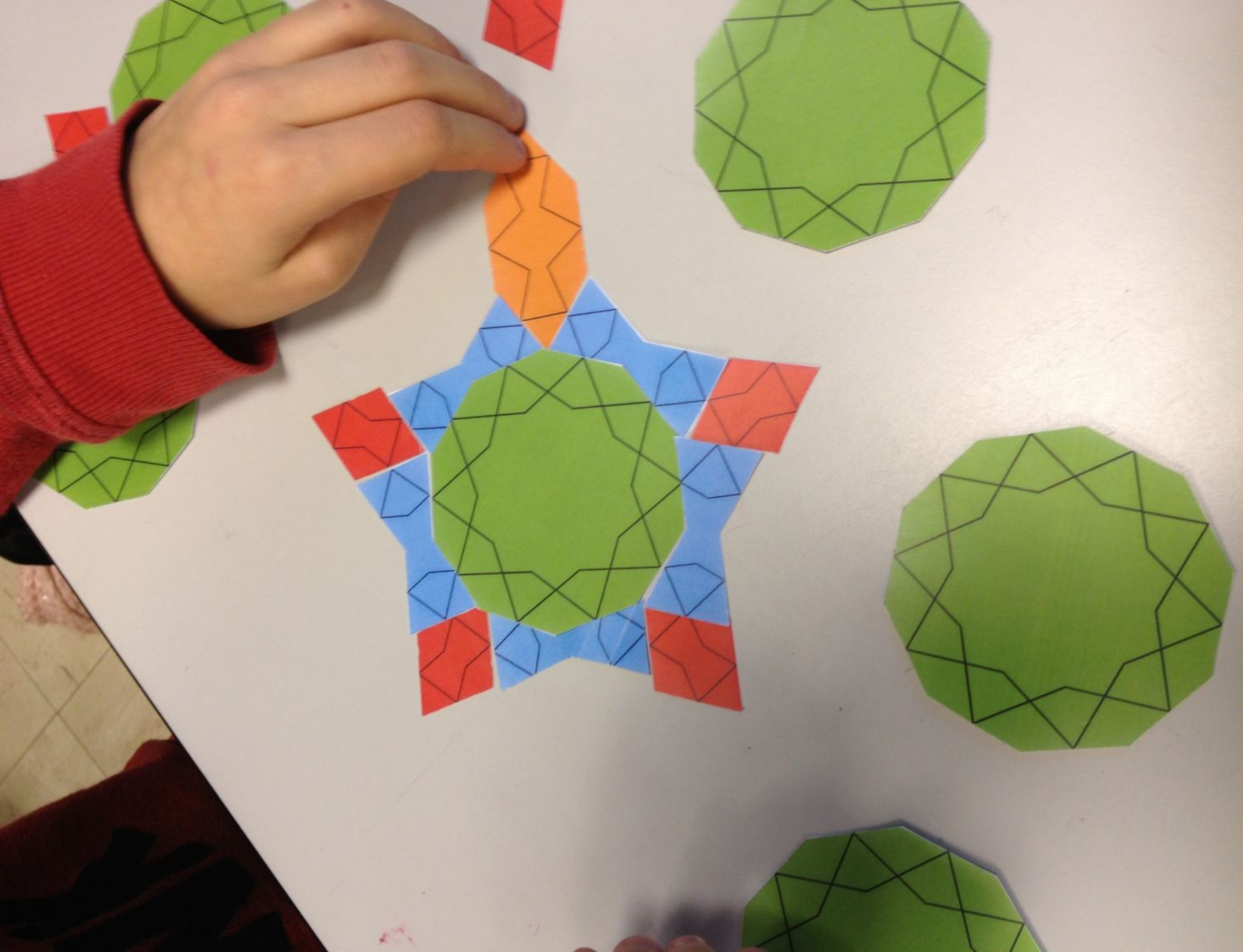


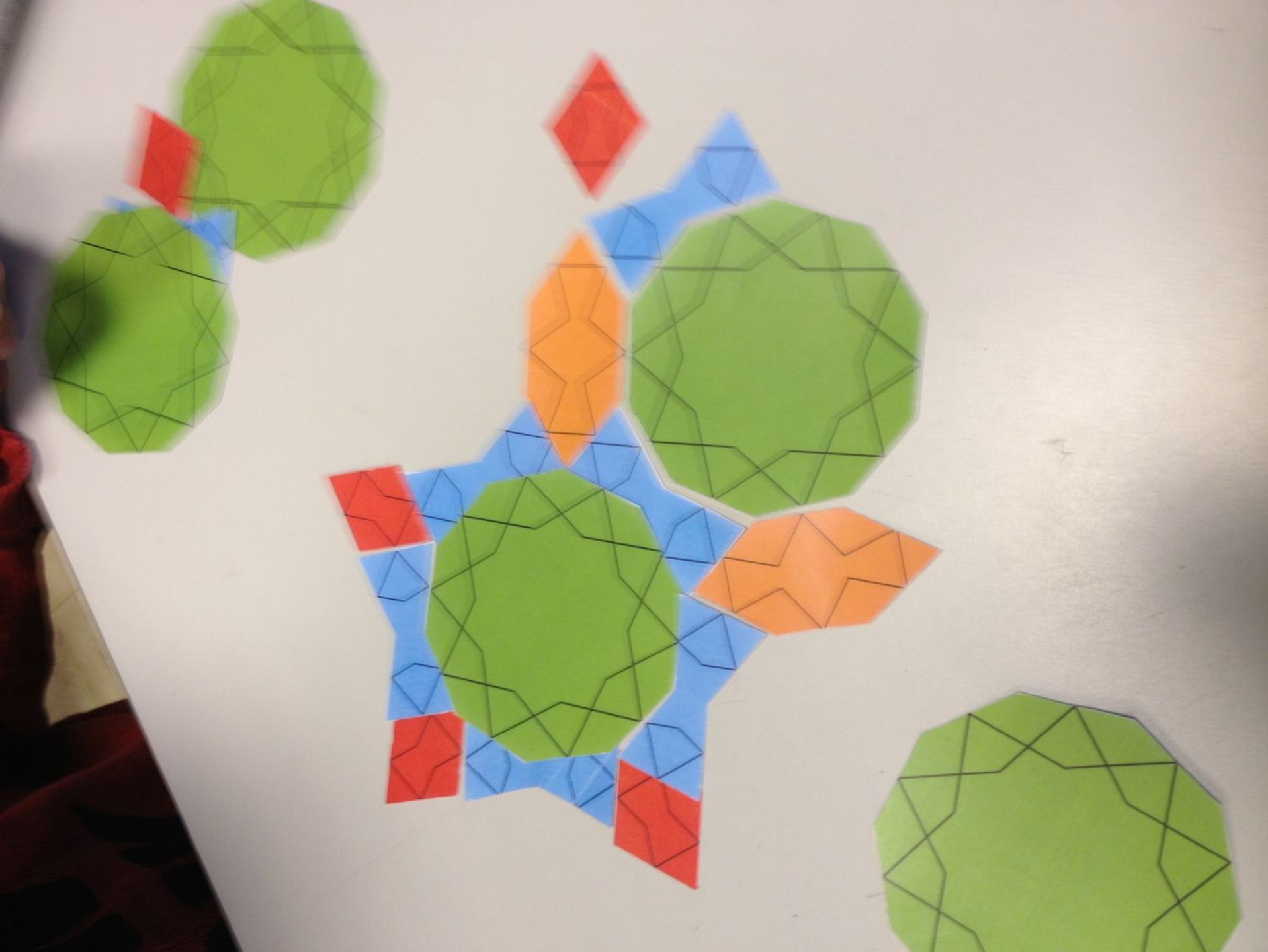


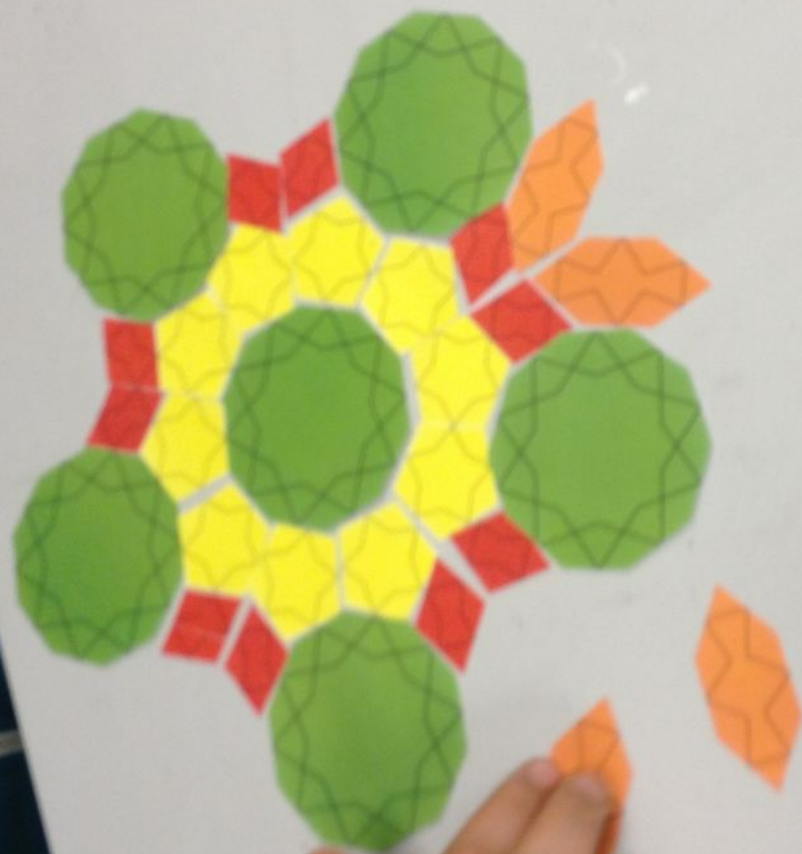


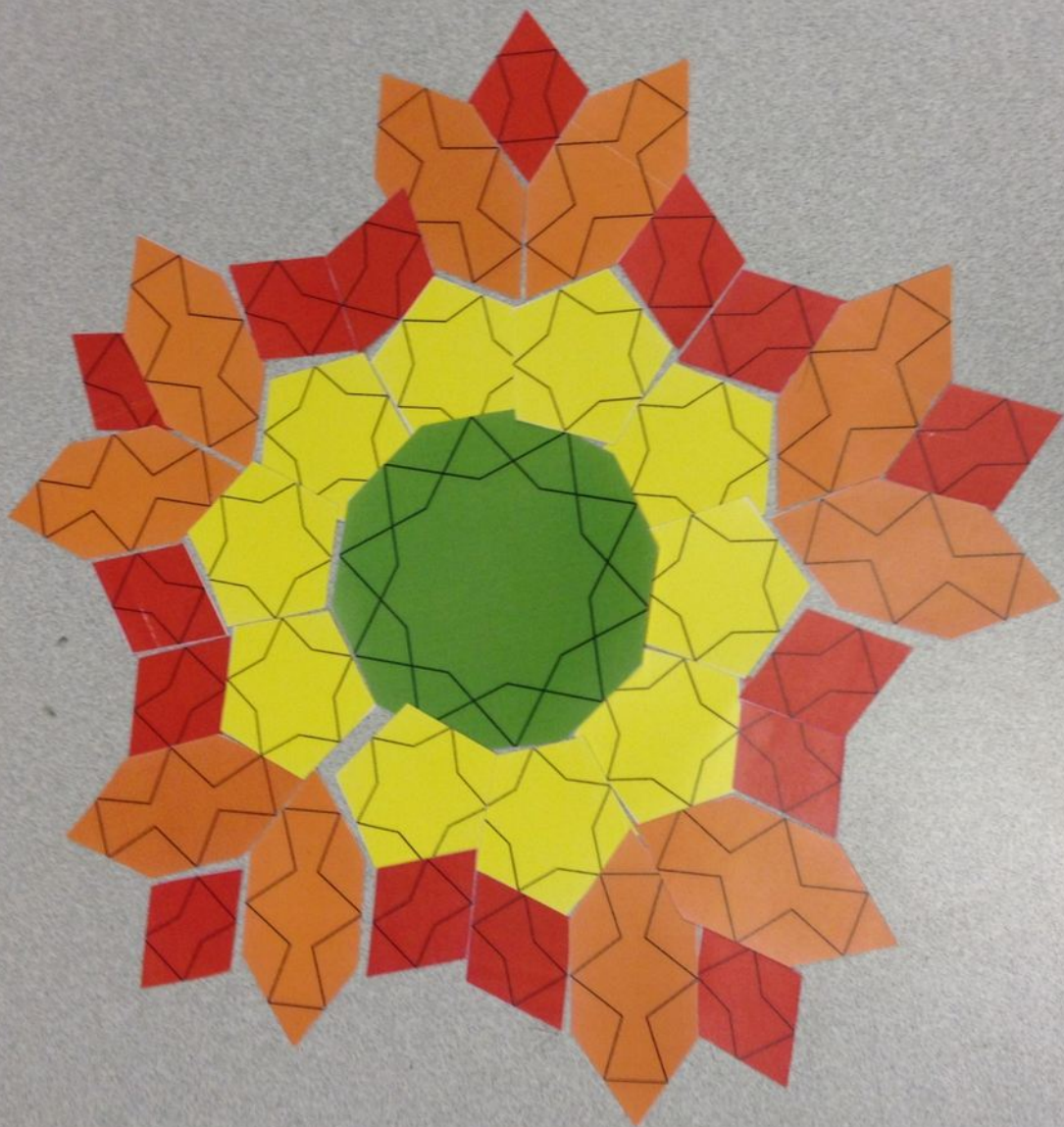












Assemblages imposés

Un exemple

Peter aimerait compléter l'assemblage de tuiles "GIRIH", relevé sur un morceau de parchemin d'origine, qui permet d'obtenir le décor de la photo ci-dessous.

L'observation de la photo a permis à Peter de savoir que ce décor possède des axes de symétrie et de trouver l'assemblage qui permet de l'obtenir. Il doit maintenant réaliser un plan du décor.

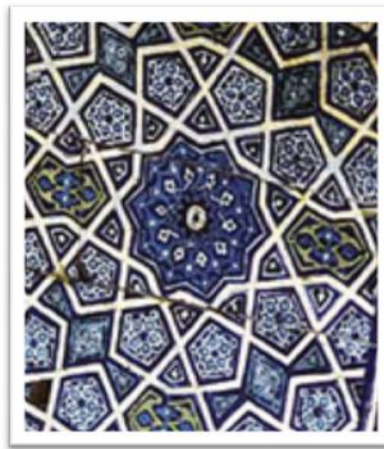


Photo du décor

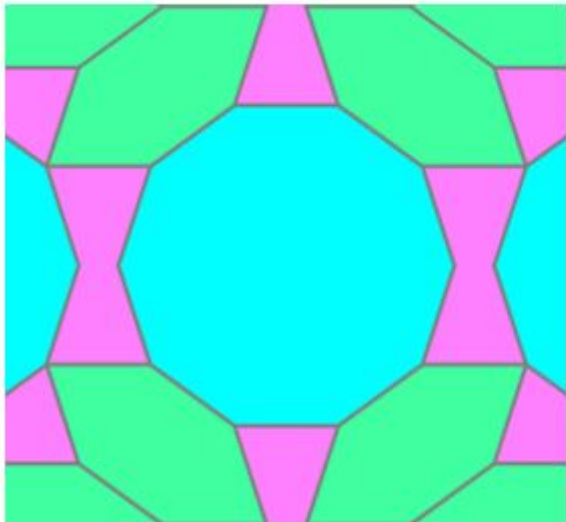
Morceau du parchemin



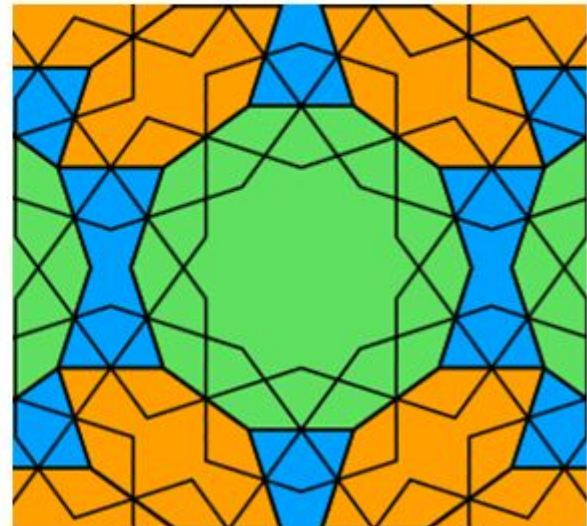
Un exemple

Solution

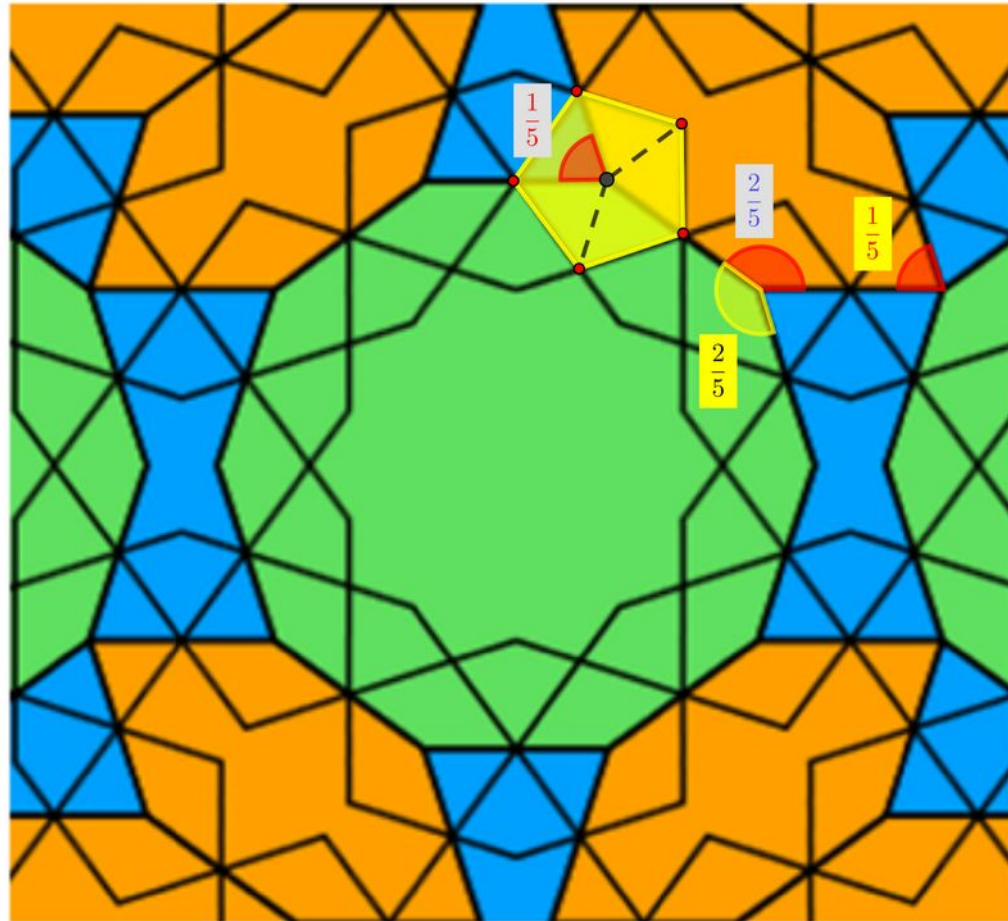
Le plan du décor



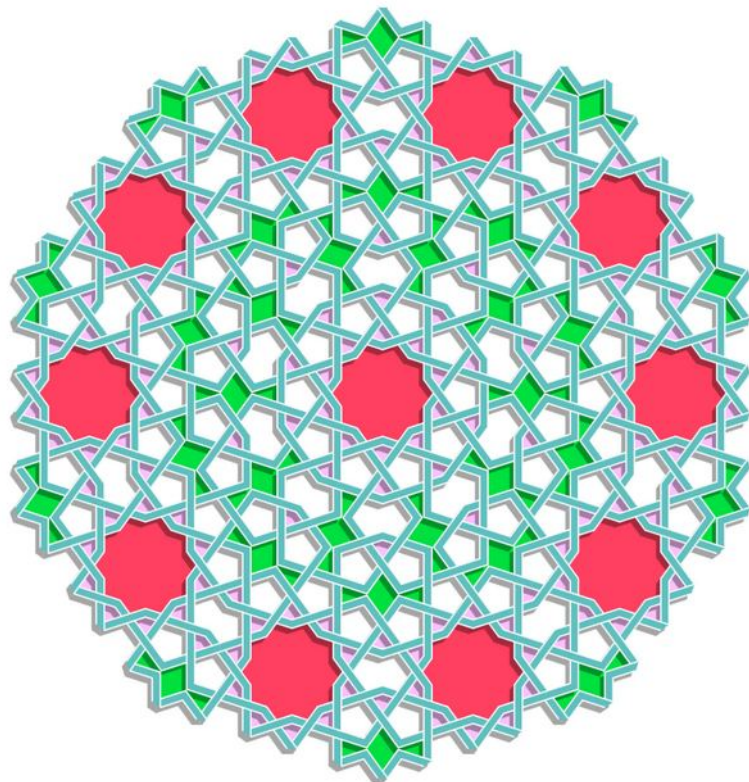
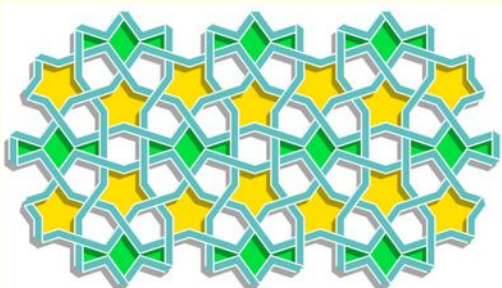
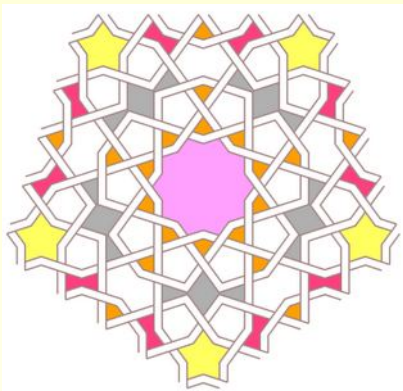
L'assemblage



Des fractions de l'angle plein



Sous forme de puzzle



Apprentissage de la notion d'angle au cycle 3

Les angles à l'école primaire sont d'abord objets de manipulations et d'observations, et reconnus en tant que secteurs angulaires (gabarits).

Apprentissage de la notion d'angle au cycle 3

Les pavages "Girih" offrent des situations pédagogiques très riches assurant une continuité de ces apprentissages et permettant de relier différents domaines du programme de mathématiques.

Apprentissage de la notion d'angle au cycle 3

Ils sont aussi un contexte particulièrement intéressant pour étudier l'angle comme fraction de l'angle plein, premier apprentissage vers la mesure des angles et la construction du rapporteur.

Apprentissage de la notion d'angle au cycle 3

L'exploration des polygones "Girih" permet de se poser deux grandes questions génératrices et motivant un ensemble d'études et de recherches géométriques :

1. Qu'est-ce qui, dans les polygones "Girih", permet une telle variété de dallages ?
2. De quelles informations a-t-on besoin pour construire ces polygones ?

Qu'est-ce qui, dans ces tuiles, permet une telle variété de dallages ?

Les tuiles s'agencent entre elles grâce aux relations entre les angles des tuiles et au fait que leurs côtés soient tous de même longueur.

De quelles informations a-t-on besoin pour construire ces tuiles ?

Pour reproduire ces tuiles qui sont des polygones, on a besoin d'avoir des informations sur leurs angles et leurs côtés (les angles donnent la forme de la figure et les côtés sa dimension).

Des activités pour la classe de 6ème

On invitera d'abord les élèves à observer les cinq polygones, de façon à leur faire constater que tous leurs côtés sont de même longueur et qu'ils ont au moins deux axes de symétrie.

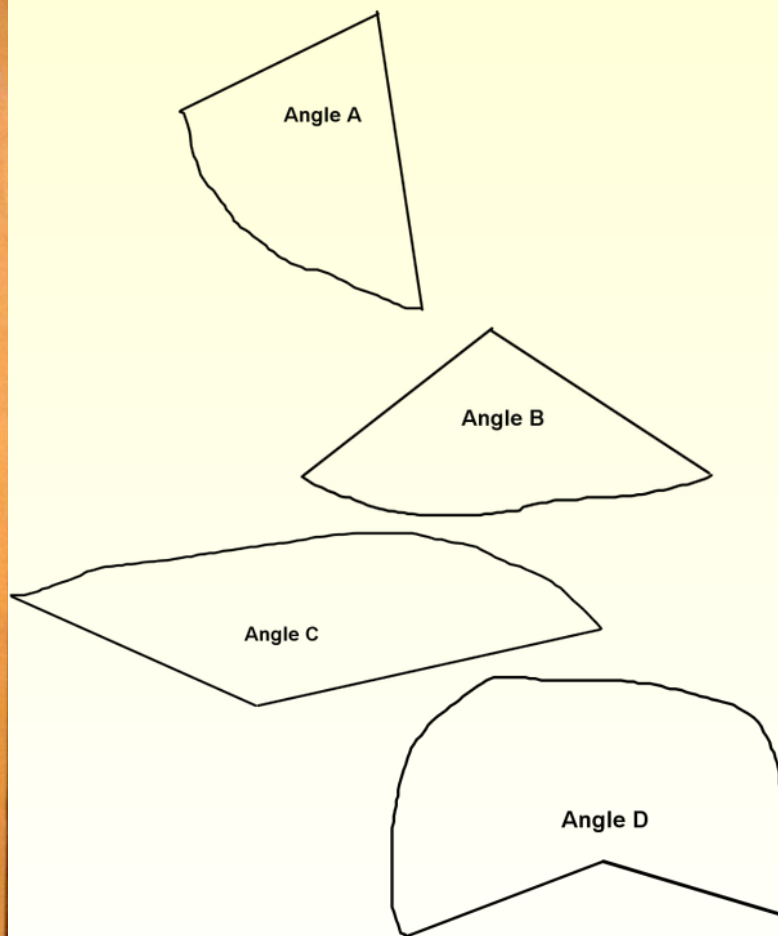
On leur proposera ensuite de relever les angles des tuiles en vue de construire des gabarits d'angles.

Des activités pour la classe de 6^{ème}

1. Pour chaque tuile :
 - Tracer en rouge les axes de symétrie ;
 - Trouver les angles qui ont la même mesure (ils se superposent) puis déterminer le nombre de gabarits à fabriquer.
2. Relever les angles de chacune des tuiles puis construire des gabarits d'angles.
3. Classer ensuite ces gabarits par superposition et mettre les angles qui se superposent dans une même enveloppe.



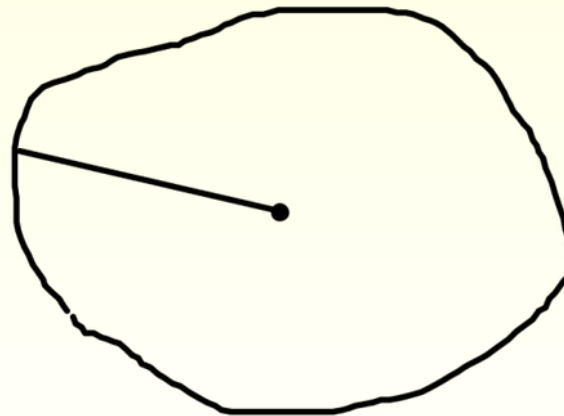
On obtient 4 angles différents :

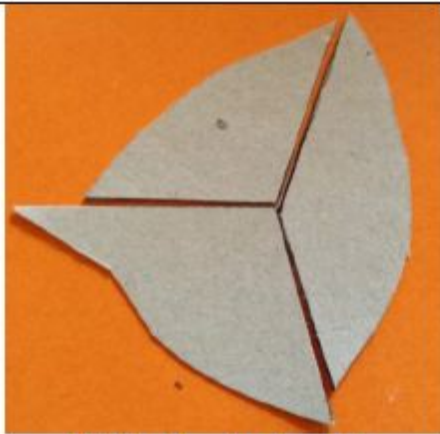


Situation 1

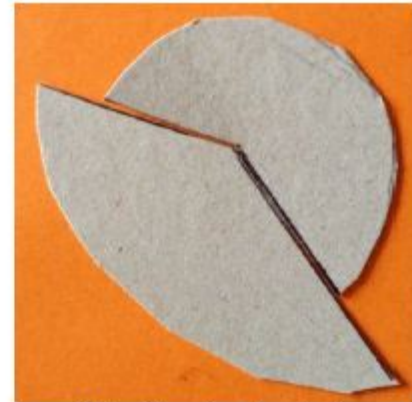
En prenant des angles parmi ceux que vous avez réalisés, recouvrir l'angle plein ci-dessous.

Est-ce possible avec des angles superposables ?





$$2 \times B + C = \text{Angle plein}$$



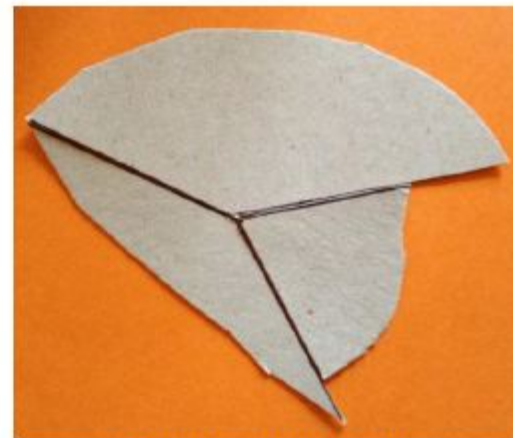
$$D + C = \text{Angle plein}$$



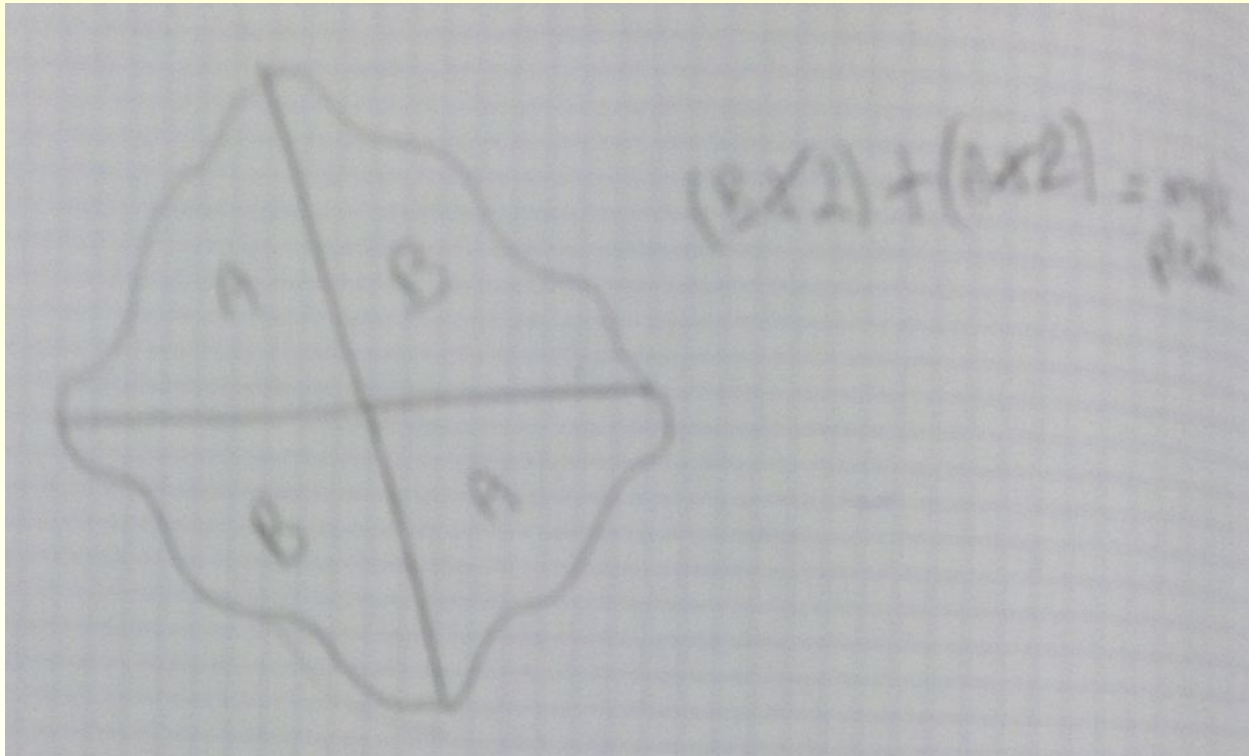
$$5 \times A = \text{Angle plein}$$

Avec 5 angles A on peut recouvrir l'angle plein.

Ainsi, l'angle A représente $\frac{1}{5}$ de l'angle plein.



$$2 \times C + A = \text{Angle plein}$$



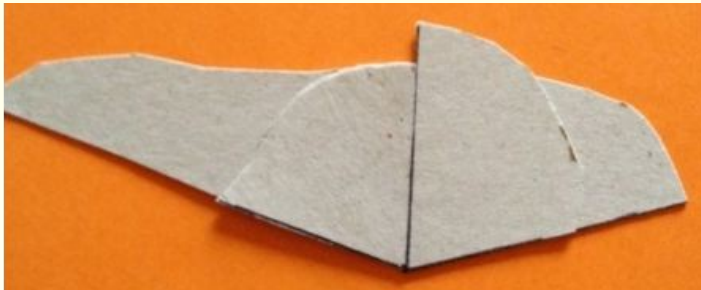
Situation 2

On choisit l'angle A comme unité pour mesurer les angles.

Détermine la mesure de chacun des angles B, C et D. Si tu ne parviens pas à le faire, donne un encadrement, en unités, de sa mesure.

Situation 2

L'angle C mesure 2 unités et l'angle D mesure 3 unités.



$$C=2\times A$$

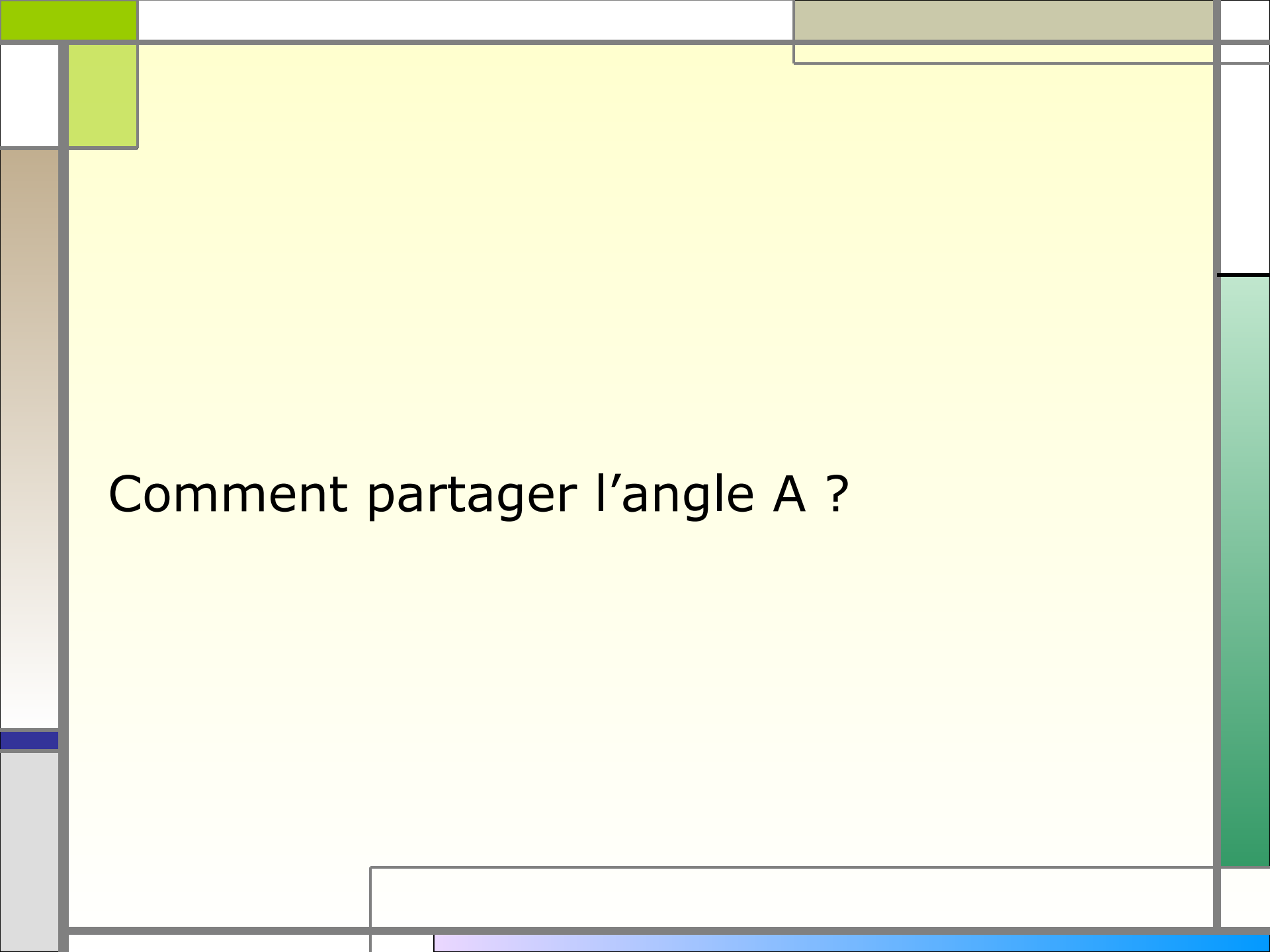


$$D=3\times A$$

Situation 2

Avec un angle A ce n'est pas assez et deux de ces angles c'est trop pour recouvrir l'angle B.

Il nous faut donc partager l'angle A pour pouvoir mesurer l'angle B.



Comment partager l'angle A ?

Comment partager l'angle A ?

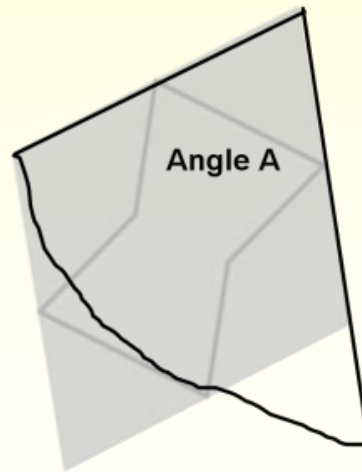
*Proposition souvent faite par les élèves :
partager l'angle A en 2 parties égales.*

Comment peut-on partager l'angle A en 2 parties égales ?

- En repliant l'angle sur lui-même ;
- En traçant son axe de symétrie.

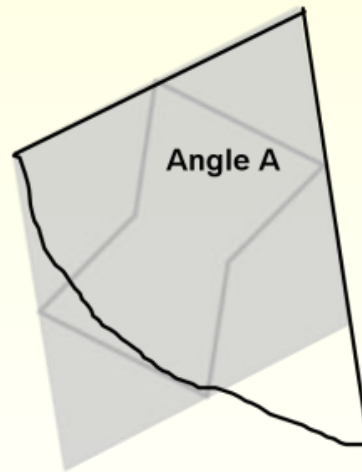
Situation 3

En utilisant ce que tu sais à propos des losanges et sans plier la feuille, partage l'angle A en deux angles superposables.

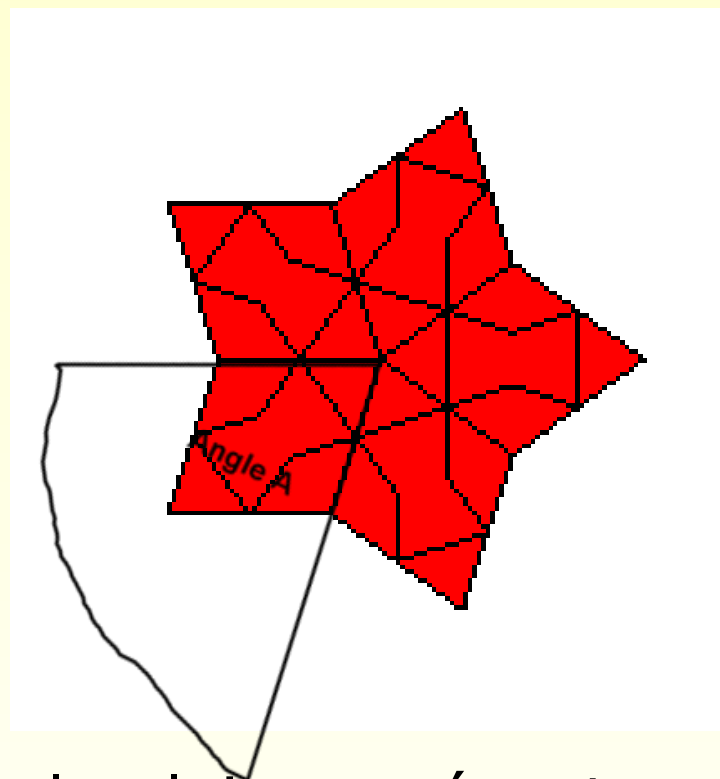
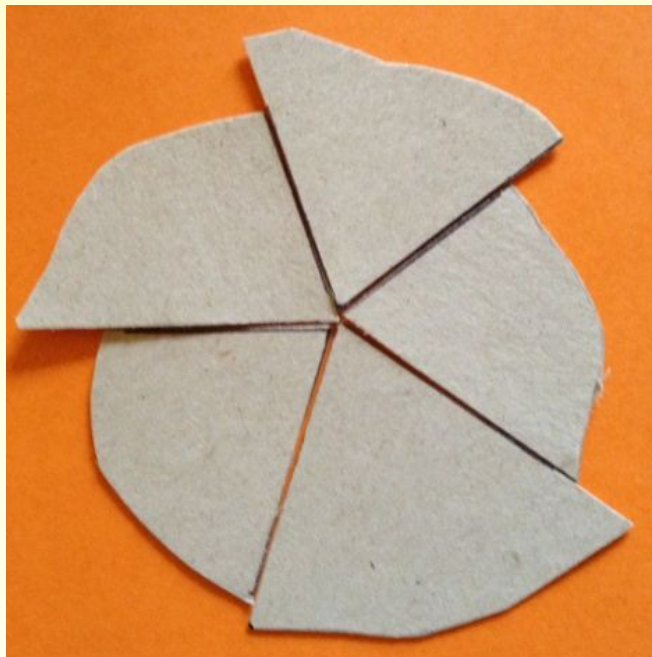


Situation 3

En utilisant ce que tu sais à propos des losanges et sans plier la feuille, partage l'angle A en deux angles superposables.

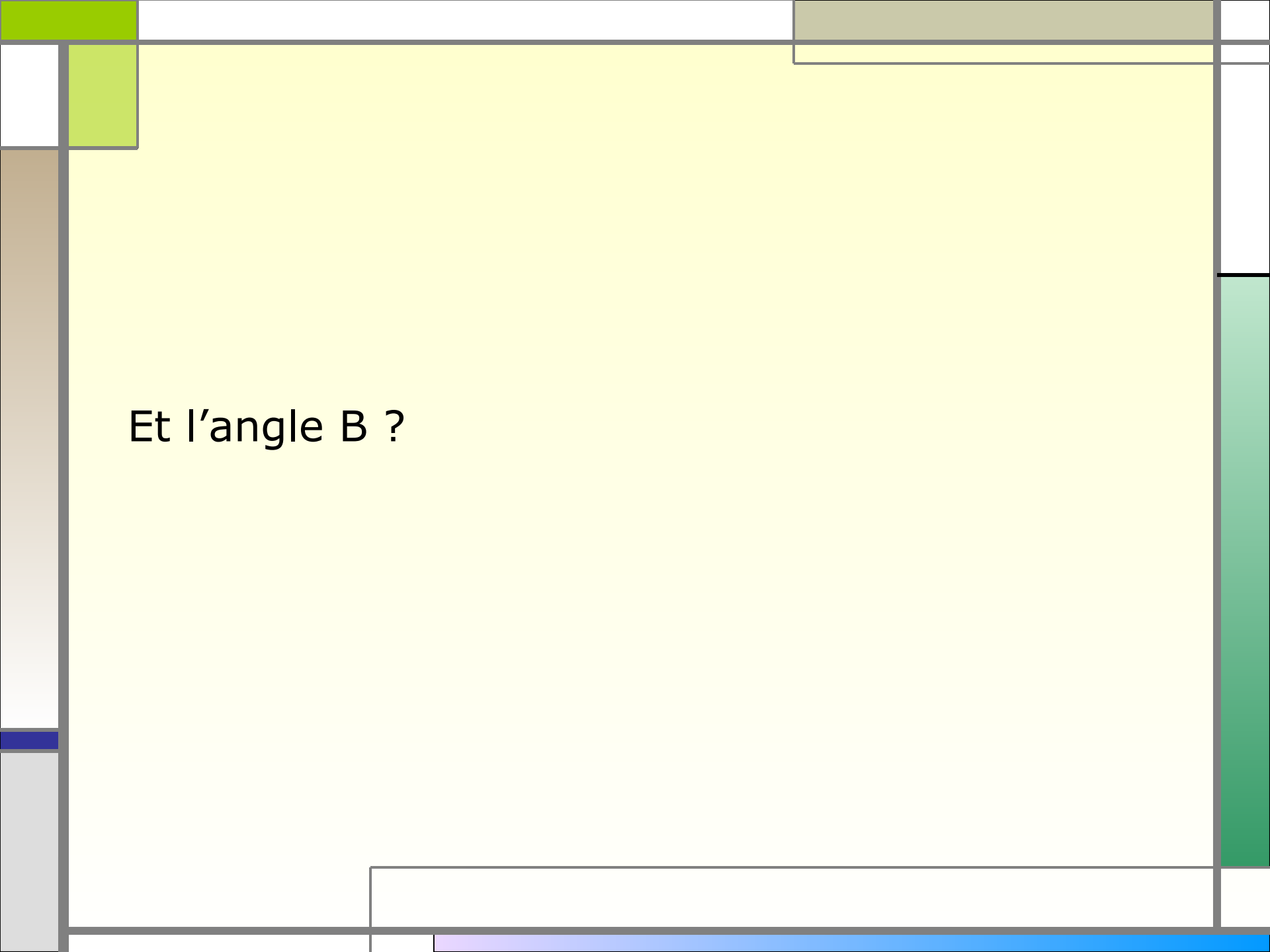


Un losange possède deux axes de symétrie : ses deux diagonales.



Quelle fraction de l'angle plein représente l'angle A ?

Sachant que l'angle A représente $\frac{1}{5}$ de l'angle plein, quelle fraction de l'angle plein représente chacun des angles C et D ?

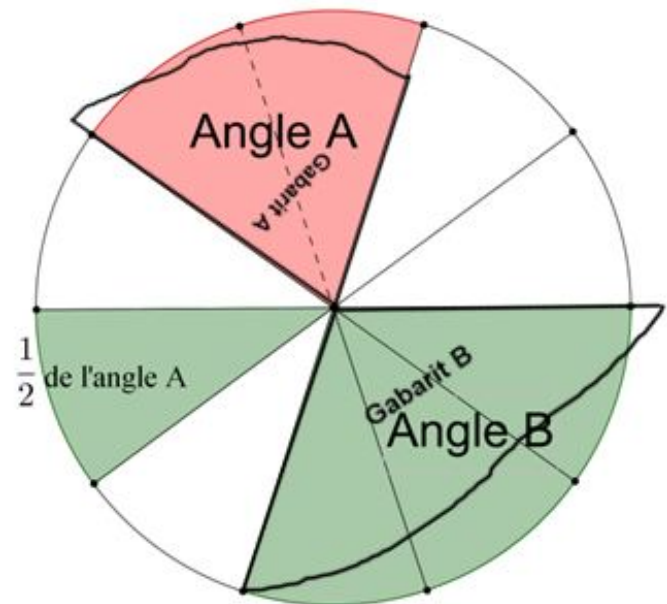
The diagram features a large yellow rectangle with a black border. To the left of the rectangle is a vertical strip composed of several colored segments: a brown segment at the top, a white segment, a dark blue segment, and a light gray segment at the bottom. Above the rectangle, there is a green segment on the left and a tan segment on the right. To the right of the rectangle is a vertical green segment. Below the rectangle, there is a white segment on the left and a blue segment on the right. The text "Et l'angle B ?" is positioned to the left of the yellow rectangle.

Et l'angle B ?

L'angle B est égal à 1,5 fois l'angle A.

L'angle B représente $\frac{3}{2}$ de l'angle A.

L'angle B représente $\frac{3}{10}$ de l'angle plein.



Chacun des angles intérieurs des tuiles Girih a pour mesure l'une des quatre fractions décimales suivantes de l'angle plein : $2/10$, $3/10$, $4/10$, ou $6/10$.

En choisissant un dixième de l'angle plein comme unité pour mesurer les angles, chacun des angles intérieurs des tuiles Girih a pour mesure 2, 3, 4 ou 6 unités.

La variété des dallages possibles avec ces tuiles vient un peu de cette simplicité, car plusieurs combinaisons de ces valeurs (et donc des angles qui leur sont associés) donnent une somme de 10.

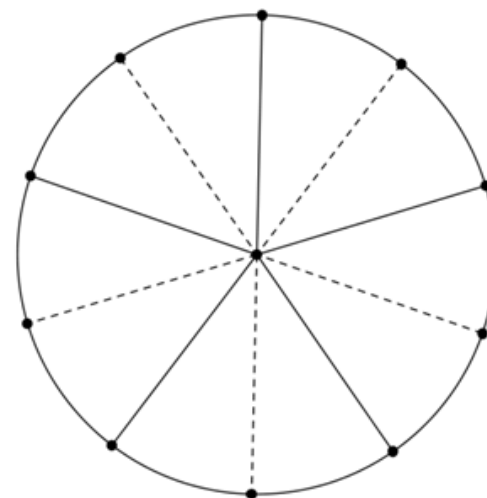


Vers un instrument pratique

Situation 4

Le disque ci-contre est partagé en dix parties superposables.
En utilisant ce que tu sais maintenant à propos des angles, partage ce disque en vingt parts égales.

En choisissant un vingtième de l'angle plein comme unité pour mesurer les angles, donne la mesure des angles A, B, C et D.

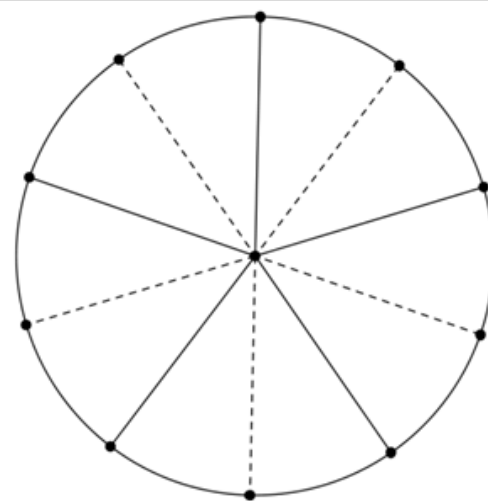


Vers un instrument pratique

Situation 5

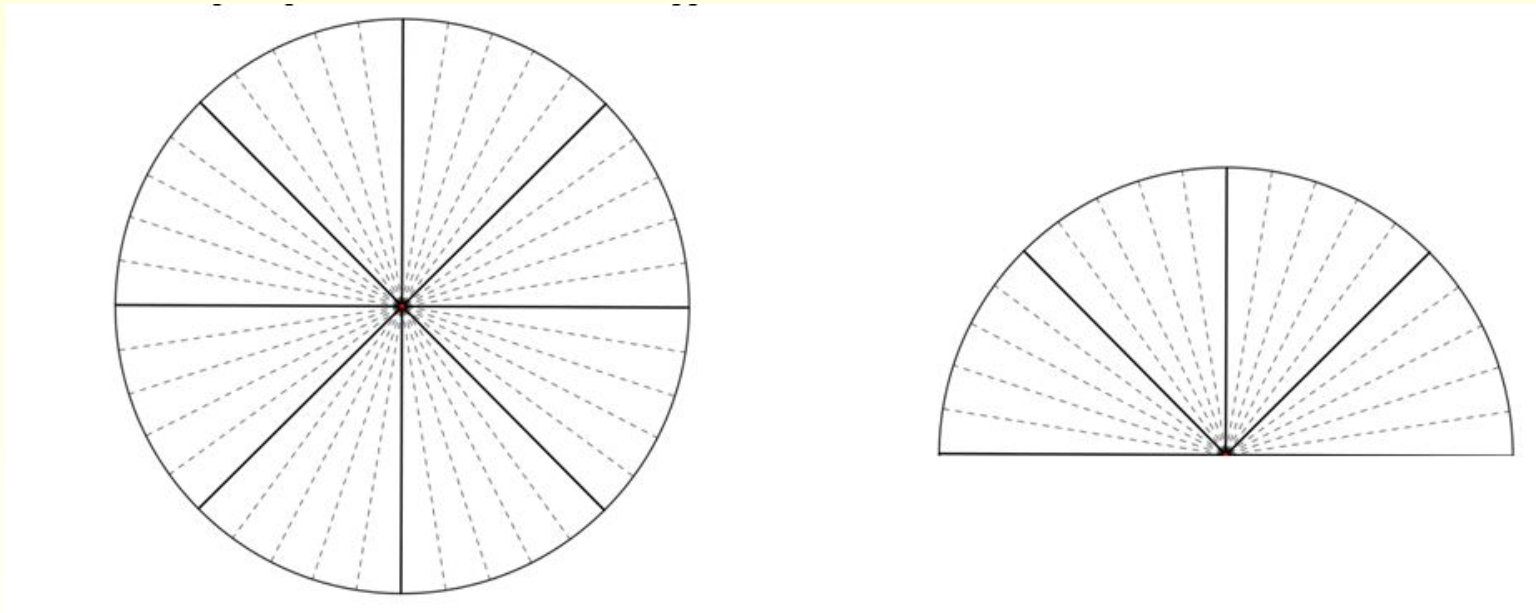
Voici un 2^{ème} disque partagé en dix parties superposables.
Partage ce disque en quarante parts égales.

En choisissant un quarantième de l'angle plein comme unité pour mesurer les angles, donne la mesure des angles A, B, C et D.

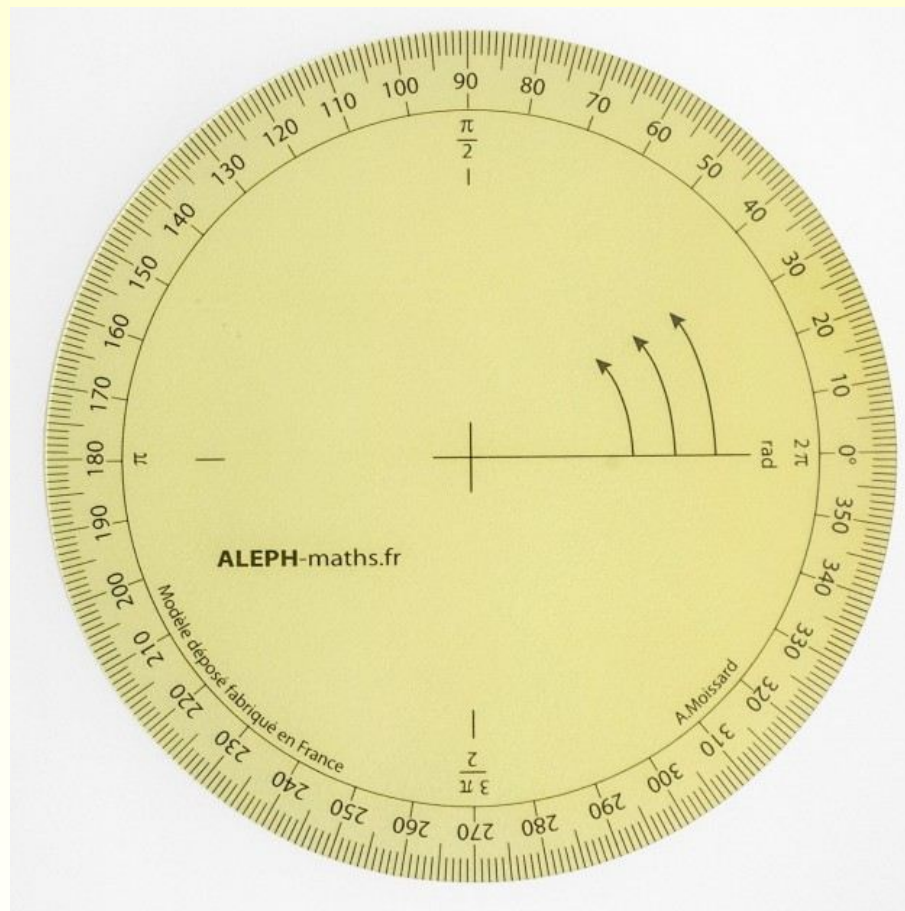
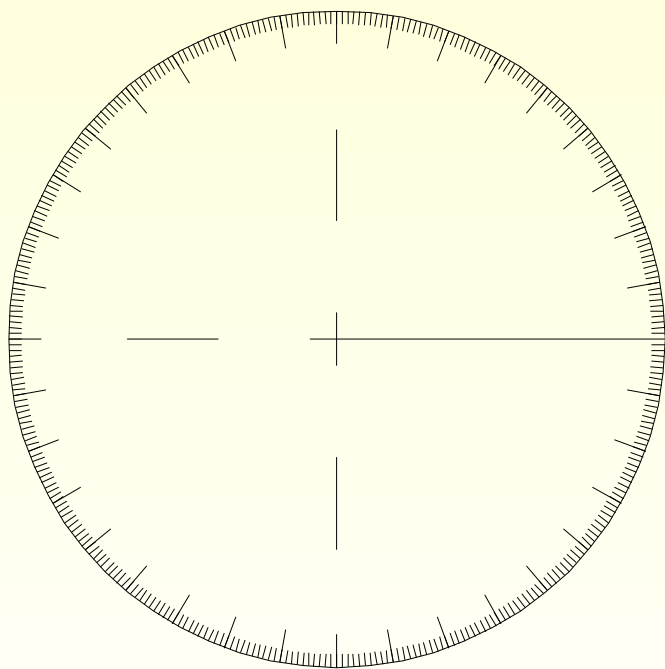


Vers un instrument pratique

Première ébauche du rapporteur :



Vers le degré comme unité pour mesurer les angles



Le Petit Vert

Vous trouverez l'ensemble des activités expérimentées en classe de sixième dans [le Petit Vert n° 126](#)

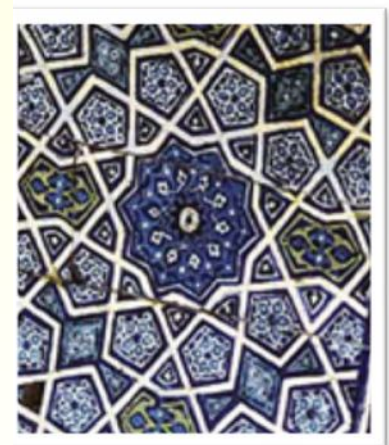
Une activité pour la classe de 5ème

Les élèves observent les cinq polygones, constatent que tous leurs côtés sont de même longueur et que les lignes décoratives passent toutes par le milieu d'un côté, ce qui permet à la ligne brisée de ne jamais s'arrêter.



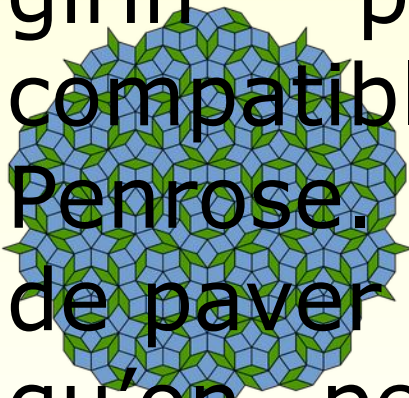
Une activité pour la classe de 5ème

Les élèves tentent de reproduire le motif de la mosquée verte de Bursa, puis imaginent comment le motif peut se poursuivre. On peut alors expliquer les règles du pavage : revêtement du plan par des formes sans lacunes ni chevauchements.



Des pavages apériodiques ?

En 2007, Peter J. Lu et Paul J. Steinhardt suggèrent que les pavages girih possèdent des propriétés compatibles avec les pavages de Penrose. On peut proposer aux élèves de paver le plan et de vérifier qu'on peut éviter de reproduire le même motif par translation.



Exprimer les angles en fonction de l'angle plein

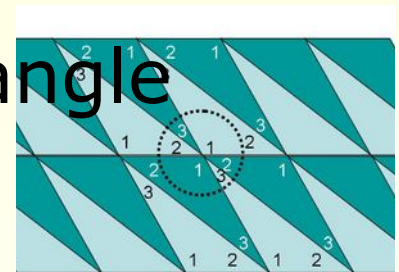
Le choix de l'angle plein comme unité naturelle de mesure des angles permet de travailler conjointement angles et fractions.

Les angles dans les dallages

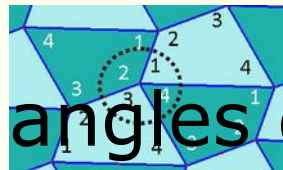
France Caron (univ. de Montréal)

propose d'utiliser les dallages pour déterminer les mesures suivantes :

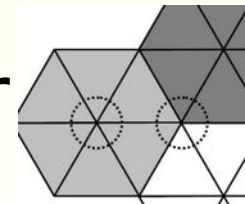
- La somme des angles d'un triangle



- La somme des angles d'un quadrilatère

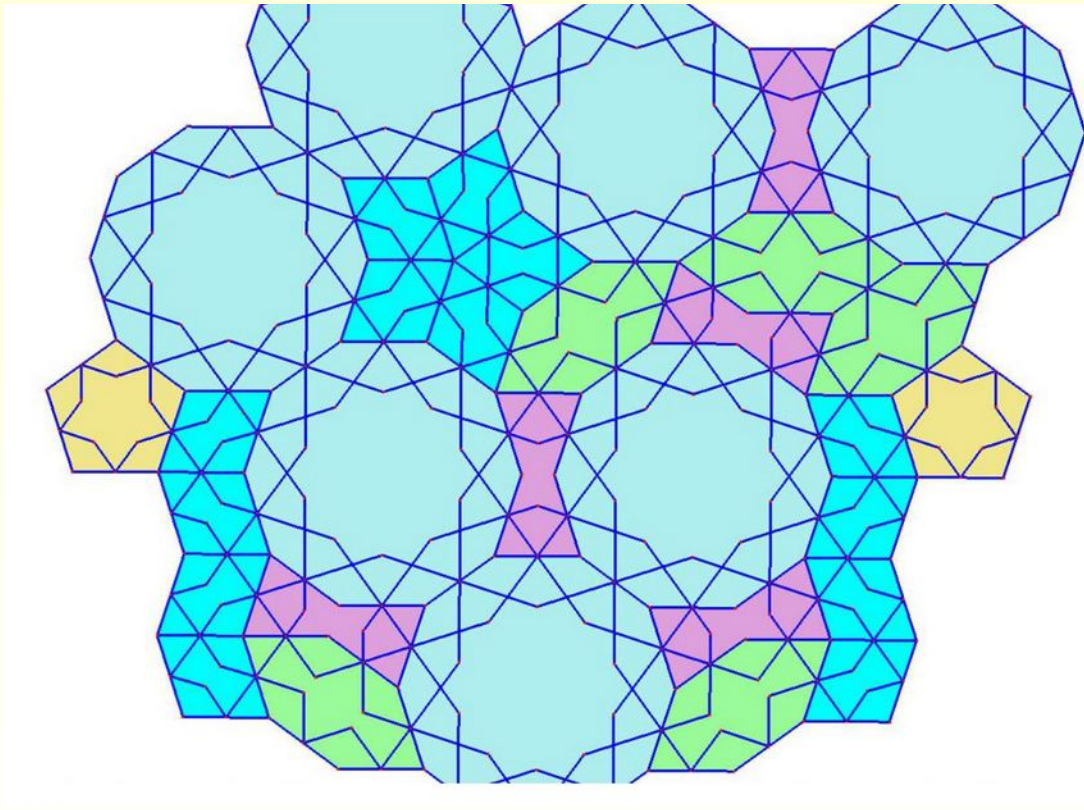


- Les angles d'un polygone régulier

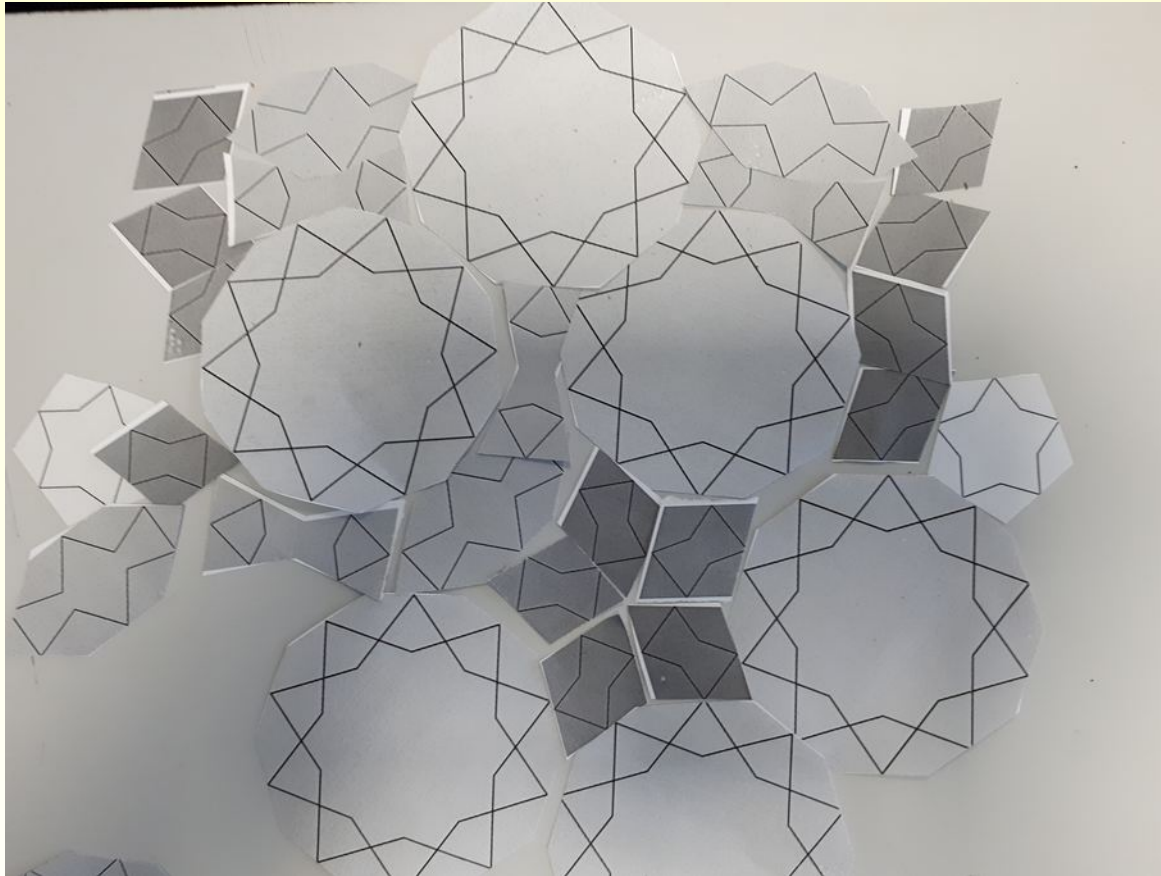


Déterminer les angles des Girih

https://archimede.mat.ulaval.ca/amq/bulletins/mar09/Article_Caron.pdf



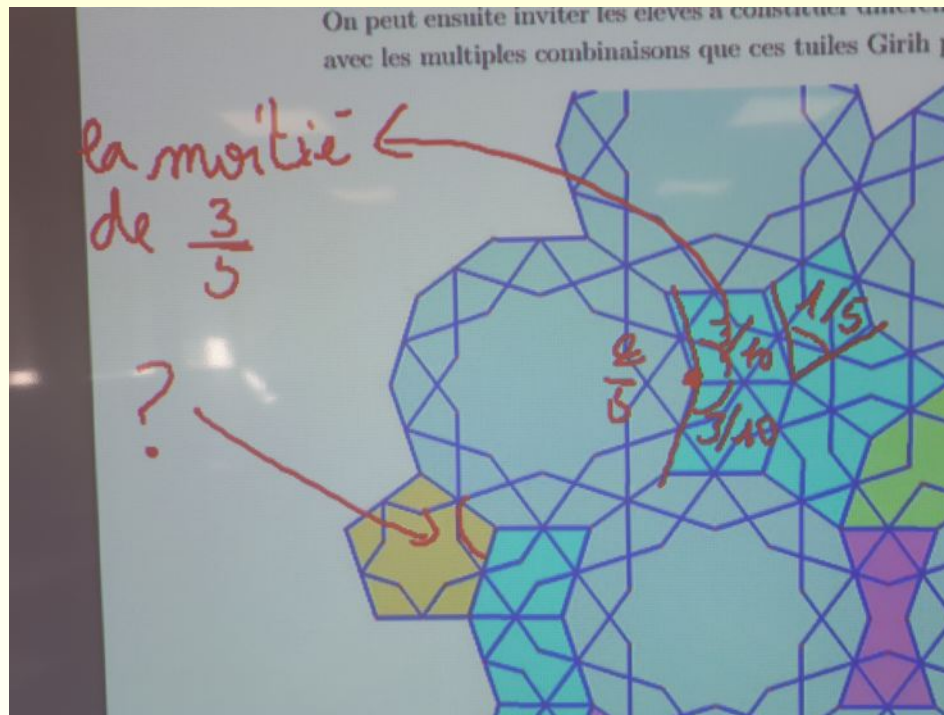
Déterminer les angles des Girih



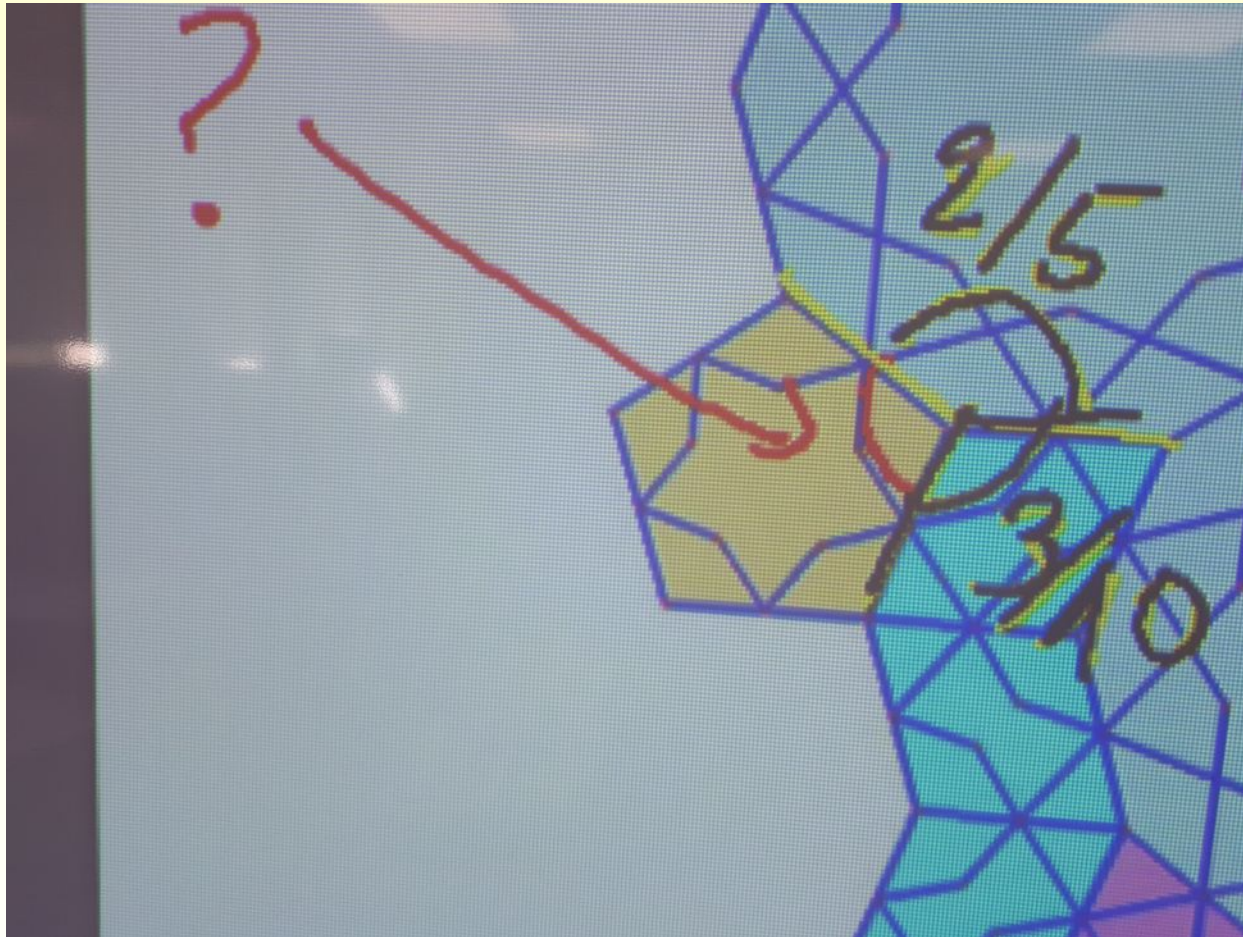
Déterminer les angles des Girih



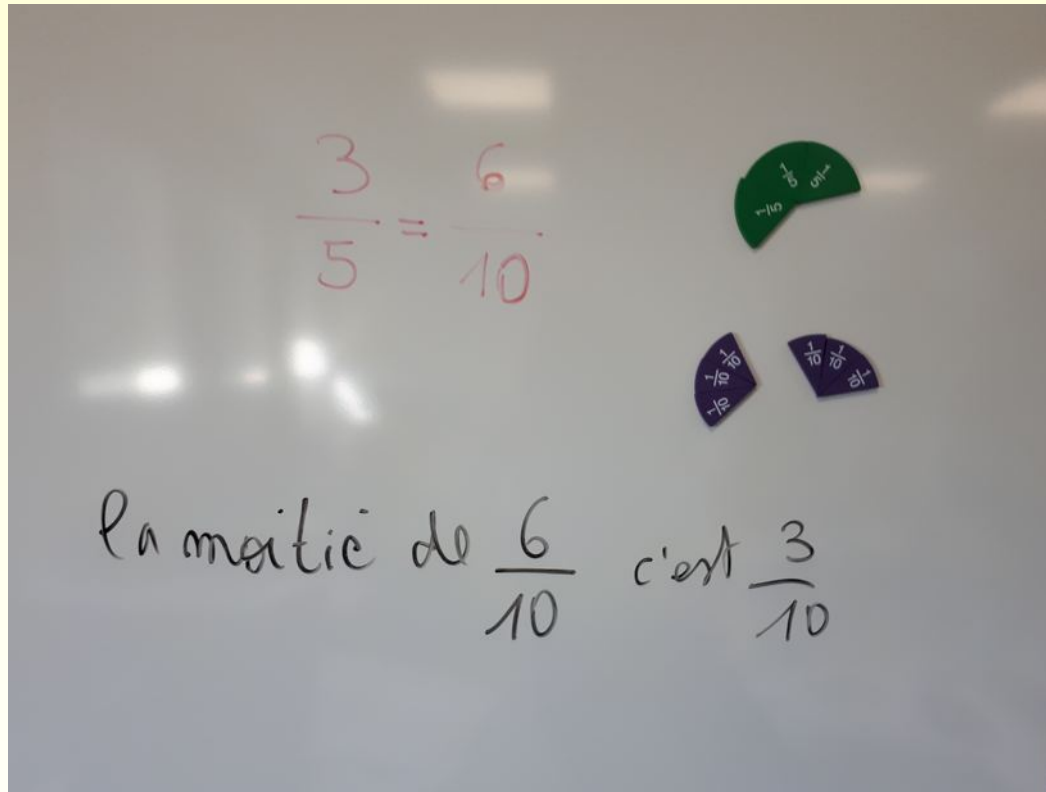
Déterminer les angles des Girih



Déterminer les angles des Girih



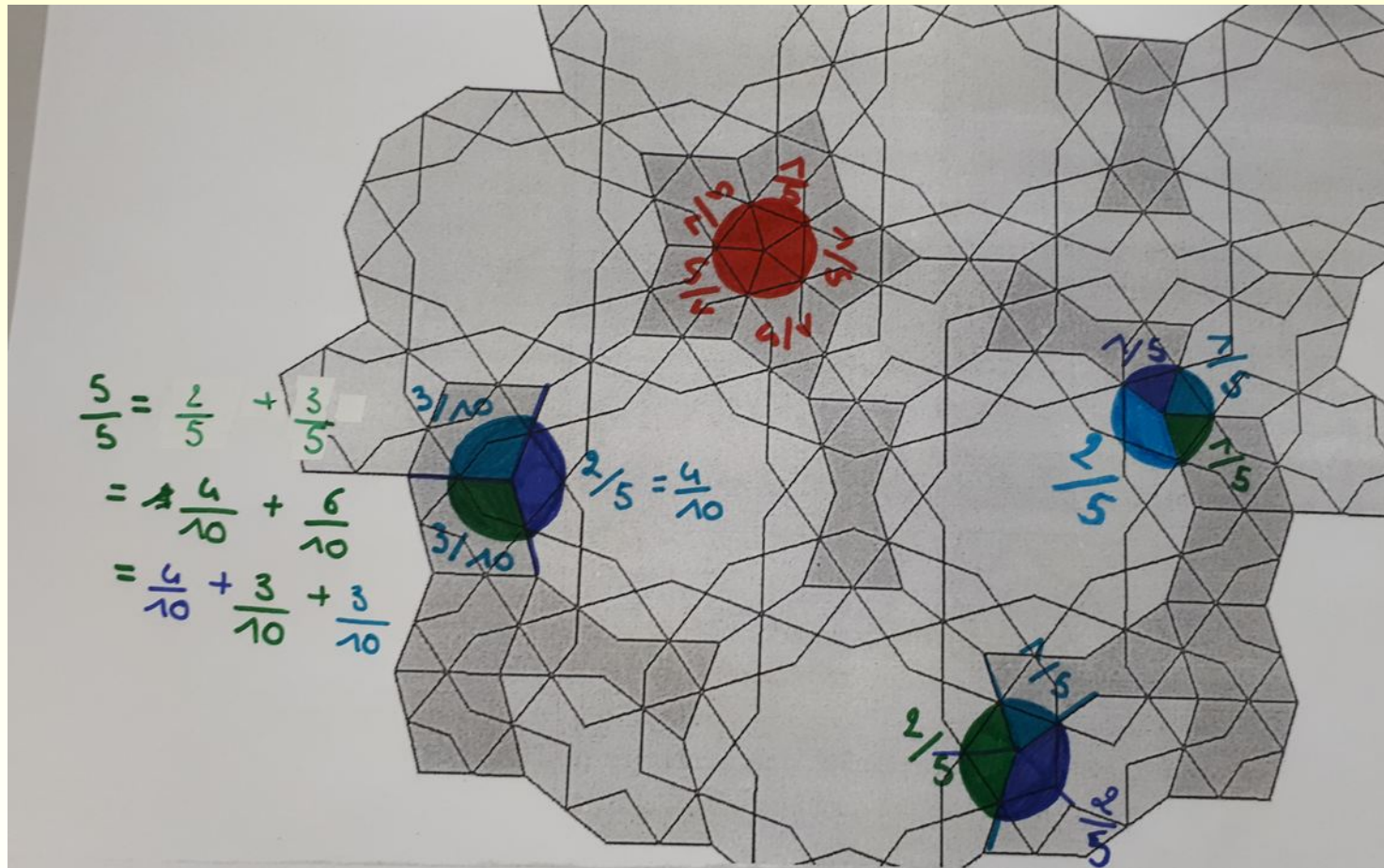
Déterminer les angles des Girih

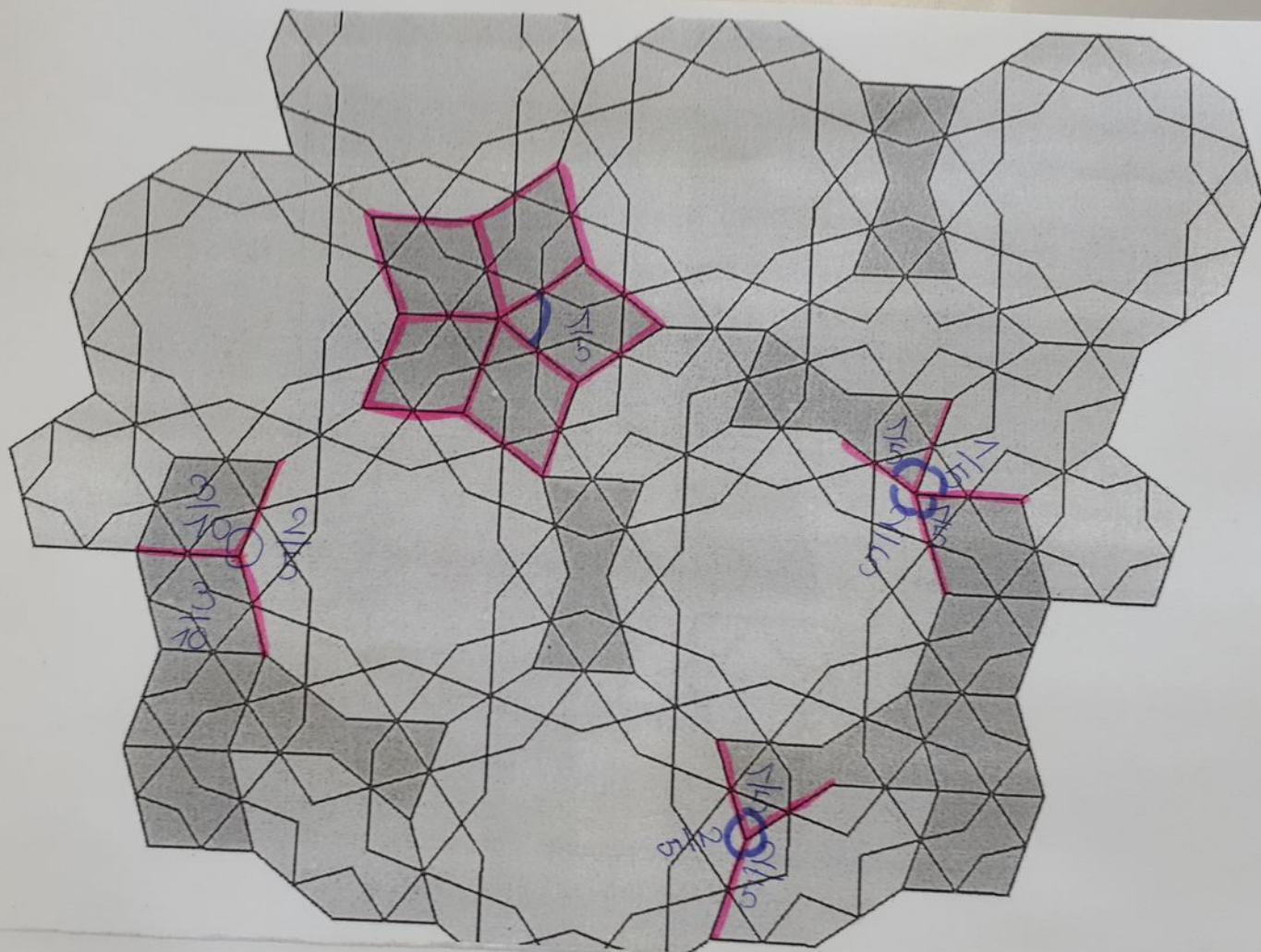



$$\frac{10}{10} - \frac{3}{10} - \frac{2}{5}$$

$$= \frac{10}{10} - \frac{3}{10} - \frac{4}{10} = \frac{3}{10}$$

Déterminer les angles des Girih





$$\frac{5}{5} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{6}{10}$$

$$= \frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10}$$

Déterminer les angles des Girih

« Il est fort probable que dans ce contexte, l'emploi explicite de l'angle plein comme unité de mesure se révèle plus parlant pour l'élève que le recours aux degrés. D'une part, il peut avoir plus de facilité à visualiser la taille des angles en jeu, car le recours aux fractions simples favorise un retour aux images mentales développées avec les pointes de pizza. D'autre part, l'emploi de ces fractions simples (plus simples que les trois cent soixantièmes auxquels renvoie implicitement l'emploi du degré) conduit à jouer avec de plus petits nombres qui permettent d'anticiper plus aisément les combinaisons qui permettront de recouvrir le plan autour d'un sommet. La fraction a donc un caractère économique dans cette tâche, ce qui pourrait aider à la rendre plus sympathique aux yeux de l'élève . . »

Déterminer les angles des Girih

En proposant une tâche qui demande de retrouver des mesures sans mesurer , nous avons cherché à mettre en valeur

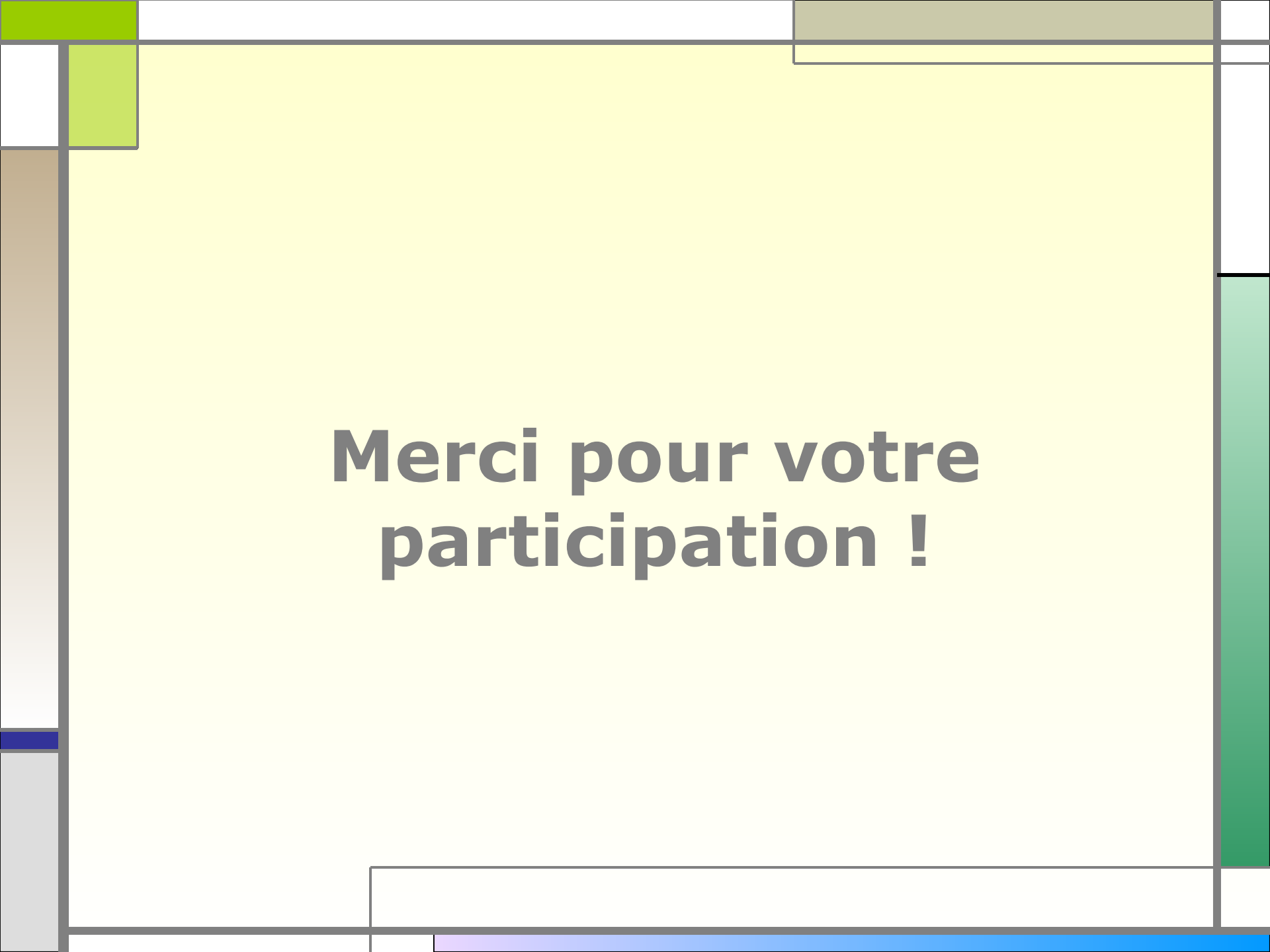
la puissance du raisonnement mathématique et l'utilité des fractions simples, tout en laissant un certain espace pour la créativité des élèves, tant artistique que mathématique.

Si un regard mathématique contemporain a permis d'élucider le mystère des motifs Girih, et de révéler `a travers eux tout un pan de l'art et des connaissances mathématiques du moyen-âge islamique, l'occasion semble trop belle pour ne pas convier les élèves à y faire leurs propres explorations et à vivre à leur tour le plaisir de la découverte. »

Les tuiles Girih : de l'art islamique aux fractions

France Caron,

Université de Montréal



**Merci pour votre
participation !**