# Jeux, manipulation et raisonnement

Julien Bernat

Université de Lorraine

mercredi 12 avril 2023

# Mise en activité : les carrés colorés

On dispose de carrés, tous superposables, avec 4 couleurs différentes (toujours les mêmes) sur leurs côtés.
On les place côte-à-côte pour former des grands rectangles (carrés), de sorte que :

- deux côtés peuvent être en contact seulement s'ils sont de la même couleur,
- dans le grand rectangle, les côtés sont d'une couleur,
- et les quatre couleurs apparaissent.

Essayer de construire : (a) avec 9 carrés, un carré 3x3, puis (b) avec 16 carrés, un carré 4x4, puis (c) avec 12 carrés, un rectangle 4x3.

# Activité de raisonnement et enseignement

Le raisonnement mathématique est formalisable. Cette formalisation est-elle appropriée en contexte scolaire (collège, lycée) ?

$\rightarrow$ problème de la double tâche : travail parallèle sur l'objet et l'outil (géométrie, arithmétique), en plus du conflit crée par la langue (logique naturelle et logique mathématique).

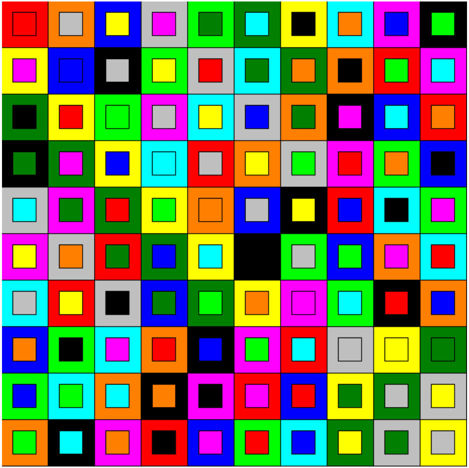
On peut réduire la charge cognitive en proposant des activités "ludifiées". Exemple de situations : les cosmonautes, le labyrinthe qui font apparaître des problématiques supplémentaires (quantification).

# Le raisonnement : motivation

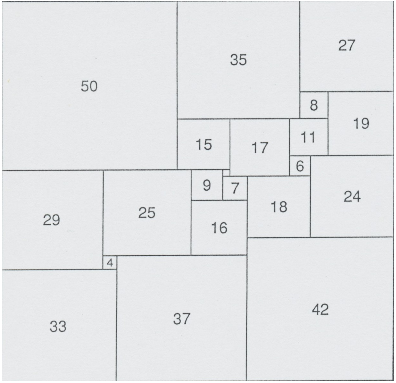
De nombreux contre-exemples permettent de comprendre que l'intuition peut fausser notre perception du vrai (10 officiers, pavage de carré par des carrés différents).

$\rightarrow$ le raisonnement permet d'accéder à un statut de vérité par l'usage de modèles appropriés.

# Problème d'Euler, solution avec dix officiers



# Paver des carrés avec des carrés tous différents



# Raisonner ?

(Rappel utile : cette compétence n'est pas spécifique au domaine mathématique !).
De nombreux types de raisonnement existent (exhaustif, contraposée, absurde,...).

À partir du primaire, "la méthode de Singapour" : on expérimente, on constate, on exprime, on conceptualise (cadre particulier : mathématiques constructives).

# Construire un objet mathématique ... ou pas

L'enseignement des mathématiques au primaire et dans la quasi-totalité du secondaire s'appuie sur la possibilité d'expliciter un objet : si P(x) est vraie, alors je sais qui est x.
Premier résultat non-constructif : le théorème de la valeur intermédiaire.
Problème : que signifie exactement "P(x) n'est jamais vrai" ? Hors de question de tester toutes les valeurs possibles de x ...

Pour faire comprendre cela, on peut utiliser des situations mettant en jeu une impossibilité.

## Les "problèmes impossibles"

(En fait, cela s'appelle les situations à invariant).

Bonnes propriétés attendues (cf situation-problème de Brousseau)

- entrée dans l'activité rapide avec pas ou peu de prérequis,
- présence d'un ou plusieurs paramètres permettant de rejouer la situation "semblable, mais pas identique"
- progressivité dans les situations exposées, on vérifie d'abord que le principe de la situation est accepté et les règles comprises,
- à un certain moment, le phénomène d'impossibilité apparaît.

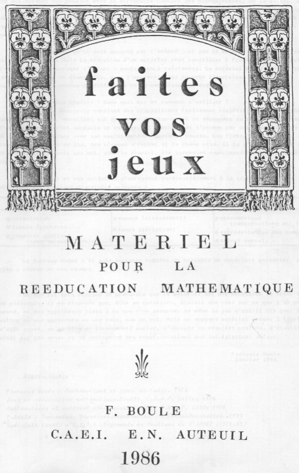
# Quelques exemples historiques

- Les ponts de Kœnigsberg (Euler ; les récréations mathématiques de Lucas : les ponts de Paris en 1880),
- les 3 maisons et les 3 usines (a.k.a. "three utilities problem"),
- le taquin de Noyes Palmer Chapman (et non Sam Loyd ...),
- troisième problème de Hilbert (le cube et le tétraèdre).

## Quelques exemples pédagogiques

- les circuits de François Boule (PV 129),
- les actions maths à modeler (dont : la roue aux couleurs, Godot),
- d'autres animations (le saute-mouton ; les particules).

# La rééducation mathématique !



faites
vos
jeux

MATERIEL
POUR LA
REEDUCATION MATHEMATIQUE

F. BOULE
C.A.E.I. E.N. AUTEUIL
1986

## Considérations pédagogiques supplémentaires

- l'objectif pédagogique ne passe pas forcément par une résolution complète de l'activité : formulation d'hypothèse(s), exhibition de contre-exemple(s),
- la démarche d'attaque de problème est un objectif suffisant (stratégie d'attaque du problème selon Pólya),
- plusieurs niveaux de preuve ; le formalisme n'est pas nécessaire (mais il peut être mis en oeuvre).

# Autres illustrations, variantes et applications

Invariant majoritairement utilisé : la parité (mais pas seulement).

Des problèmes de pavages : l'échiquier mutilé ; A Pedestrian Approach to a Method of Conway or a Tale of Two Cities (Propp).

D'autres puzzles : le rubik's cube démonté et reconstitué ; des solitaires (tarqui).

Autres références : les math circles ; les livres de Gardner, Smullyan ; de préparation aux olympiades (Engel).