

A.P.M.E.P. LORRAINE

François DROUIN

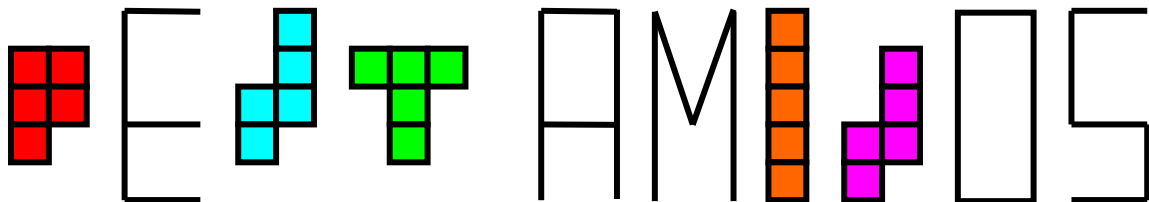
AVEC DES





François DROUIN

AVEC DES



Une publication de la régionale APMEP LORRAINE

PRÉSENTATION DE LA BROCHURE « AVEC DES PENTAMINOS »



Résumé

Des utilisations de pièces choisies parmi les douze pentaminos, en classe, en club, ou à la maison...

Depuis de nombreuses années, j'ai tenté d'utiliser en classe et en club mathématiques ces pièces formées de cinq carrés accolés par un côté entier.

Faire des recherches avec les douze pièces n'est pas aisé, surtout pour les élèves. Cependant on rencontre des mathématiques bien intéressantes en ne manipulant que 1, 2, 3, 4, 5... pièces : aire, périmètres, symétries orthogonales, symétries centrales, rotations, translations, frises, pavages.

Par des détours on rencontre aussi les multiples de 5, les décompositions d'un entier sous la forme « $\dots \times \dots + \dots \times \dots$ » ou « $\dots \times \dots - \dots \times \dots$ », des phrases mathématiques à retrouver ou des activités relevant de l'énumération.

Les travaux présentés concernent des élèves de collège. Cependant un très grand nombre d'entre eux trouveront leur place dans les classes de cycle III, de SEGPA ou de tout dispositif mis en place pour aider des élèves en difficulté.

François DROUIN

Couverture et illustrations de Pol LE GALL

© Édité par APMEP. – Régionale Lorraine

Première parution en juillet 2007

Imprimé par l'atelier central de reprographie de l'Université Henri Poincaré (Nancy)

I.S.B.N. 2-906476-08-0

Rédition sous forme de document électronique en 2017

(avec table des matières interactive).

Des erreurs ont été constatées lors du passage en Pdf de la version de 2007. Des dessins de pavage étaient en particulier non satisfaisants.

Je dis un grand merci à Pierre-Yves Brégeault pour ses remarques confiées fin 2022. Il fallait revoir le document initial : il est maintenant présenté en plusieurs parties.

Ressources complémentaires

Sur le site APMEP

<https://www.apmep.fr/Nos-collegues-et-nos-eleves-jouent>

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/FD_Penta_Cycle_1.pdf

https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Pentaminos_Cycle2.pdf

Dans l'espace « Nos collègues et leurs élèves jouent », des propositions destinées à des élèves de cycle 1 et cycle 2 proposent l'utilisation de quelques pièces parmi les 12.

Sur le site APMEP Lorraine

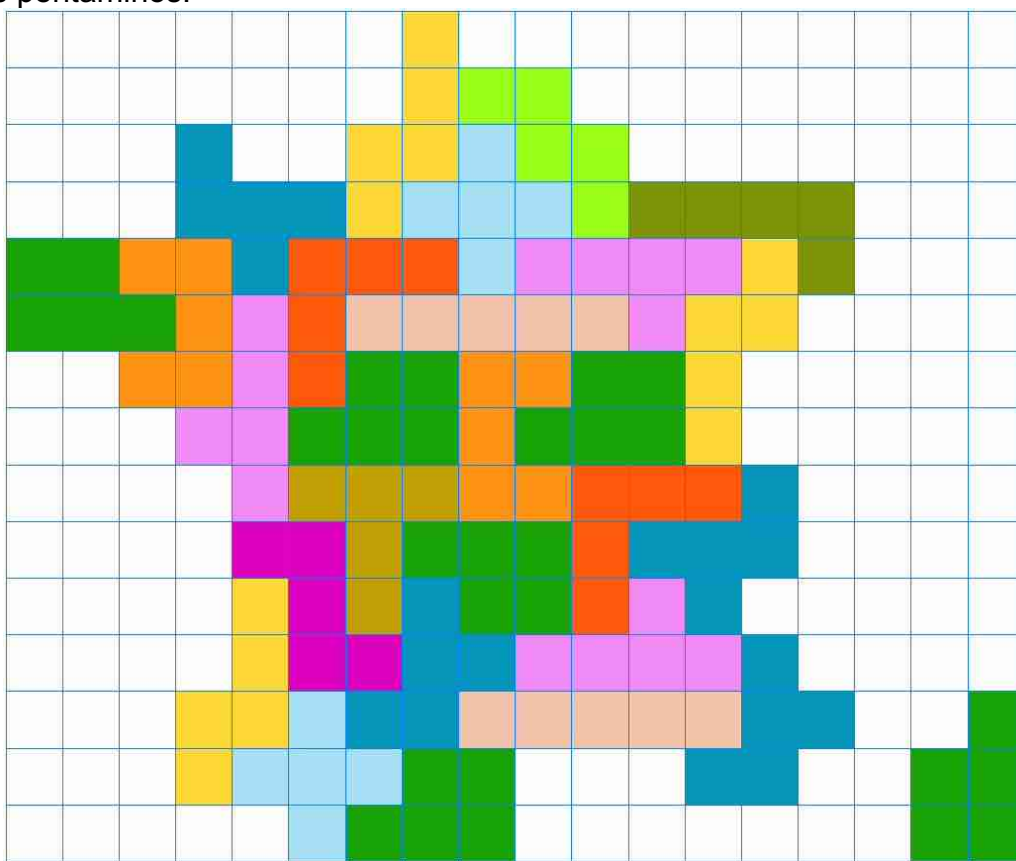
<http://apmeplorraine.fr/spip.php?article1021>

En 2022, des documents papier fournis par Claude Pagano ont été informatisés. Ils contiennent en particulier de nombreux motifs de pavage réalisés avec les 12 pièces.

<http://apmeplorraine.fr/spip.php?article881>

http://apmeplorraine.fr/IMG/pdf/2021_liens_ressources_pentaminos.pdf

Pour retrouver les ressources mises à disposition des joueurs et joueuses intéressés par les pentaminos.



Dessin de Pol le Gall

Préface

Jeux et enseignement

Il est admis que le jeu est une pratique qui remonte aux temps les plus anciens. De très nombreux textes, dans différents domaines, et parfois aussi des découvertes récentes concernant le passé de notre monde, nous en donnent régulièrement une preuve écrite ou le témoignage matériel.

Sur le plan de l'histoire des jeux, il existe une abondante littérature. Des références à son sujet peuvent être trouvées sur des sites Web grâce à l'utilisation d'un moteur de recherche.

Il n'est certainement pas étonnant de constater que cette existence se perpétue de nos jours et que des nouveautés dans le domaine du jeu apparaissent régulièrement.

Si de nombreux jeux ne font appel qu'à la virtuosité, aux réflexes ou au hasard, il en existe beaucoup d'autres dont la valeur éducative est évidente. Ceux-là peuvent et doivent trouver une place dans l'enseignement en général et dans celui des mathématiques en particulier.

La pratique d'un jeu, bien choisi, donne l'occasion aux participants de développer de nombreuses facultés telle que celles de l'imagination, du raisonnement, de la recherche de stratégies, de l'esprit critique, du respect strict de consignes, du passage du concret à l'abstrait, ... et de bien d'autres encore.

De ce fait le jeu dans l'enseignement voit son seul aspect ludique s'effacer devant la motivation qu'il suscite et surtout devant le fait que les essais et les tentatives, les réussites ou les échecs qui résultent d'une telle activité, concourent à favoriser l'acquisition de connaissances et de comportements propres à favoriser la "construction" d'une intelligence.

La brochure qui vous est présentée ici, illustre parfaitement l'intérêt de proposer aux élèves, dans le cadre de consignes bien établies, des pistes de recherches personnelles en s'appuyant sur un jeu dont la simplicité initiale permet d'autant plus des développements dans de nombreuses directions.

Le jeu de pentaminos ne consiste pas seulement en la reconstitution d'un rectangle à l'aide de 12 pièces. Se limiter à cet objectif serait passer à côté de ressources cachées et qui méritent d'être mises au jour. Ce jeu ouvre en effet des perspectives diverses dans de nombreuses directions. Il donne l'occasion, comme vous pourrez le constater, de percevoir comment les mathématiques trouvent un champ d'applications de notions qui ont été enseignées et, surtout, de se rendre compte qu'une activité consacrée à un jeu, peut être analysée sous différents aspects et dans divers domaines. Cette activité mentale ou de manipulation induit bien souvent la découverte et l'émergence de notions mathématiques ce qui justifie leur explicitation.

Une caractéristique de ce travail est qu'il invite, sans l'exprimer peut-être, chacun à explorer d'autres voies d'exploitation des pentaminos et à ainsi se rendre compte de la richesse de la situation. Dans ce domaine, la vision personnelle est alors de rigueur.

Nous ne doutons pas un instant que la lecture attentive du texte qui est présenté, incitera le lecteur-enseignant à se lancer, avec la classe, dans une telle pratique et à lui accorder certainement une place non négligeable.

Claude Villers,

Professeur honoraire à l'Athénée Royal de Mons (Belgique),
responsable d'activités à la S.B.P.M.e.f. jusqu'il y a peu,
auteur de nombreux articles à caractère pédagogique dans des revues destinées
aux enseignants ainsi qu'aux élèves de l'enseignement secondaire
(Maths-Jeunes et Maths-Jeunes Junior).

Introduction

Nous utilisons divers outils pour nous aider à faire des mathématiques : « papier crayon », « règle équerre compas », « calculatrice et ordinateur ».

En complément, nous utilisons divers objets à toucher et à manipuler :

Les puzzles géométriques tels le « Tangram » présents dès l'école élémentaire permettent de faire vivre les notions d'aire, d'écriture fractionnaire ainsi que la géométrie des transformations.

Les polycubes tels que le « cube Soma » permettent de travailler la vision en perspective et les dénombrements de cubes

Les brochures « Objets mathématiques » et « D'autres objets mathématiques » éditées par l'APMEP Lorraine ainsi que les brochures « Jeux 5 », « Jeux 6 » et « Jeux 7 » éditées l'APMEP fournissent bien d'autres idées...

Dans les années 80, Claude PAGANO († 2005) venait nous voir depuis sa retraite de La Seyne-sur-Mer et nous faisait chercher de bien intéressants problèmes liés à des jeux mathématiques.

Un de ces jeux retenait depuis longtemps toute son attention (il a servi d'élément de décor dans sa maison...). Ce jeu était formé des 12 assemblages de 5 carrés adjacents par des côtés entiers... Et c'est ainsi que Claude a introduit au sein de l'APMEP Lorraine le virus des pentaminos, virus qu'il a lui-même gardé toute sa vie.

Les recherches qu'il nous proposait nous semblaient très intéressantes mais difficiles à mettre en œuvre avec nos élèves. Jusqu'à la fin de sa vie, il nous a envoyé ses trouvailles que nous aurons, je l'espère, le temps de publier...

Devant tant de passion, nous avons tout de même tenté leur introduction dans nos classes. La partie « découverte des pièces » (**première partie** de cette brochure) faisait

vivre des mathématiques bien intéressantes, et mettait les élèves en situation de recherche et de validation (des pièces « grand modèle » sont proposées en fin de cette partie : elles sont plus faciles à manipuler pour de jeunes élèves ou des élèves en très grande difficulté. Par collage, les 5 carrés qui les composent sont visibles sur les deux faces.).

Il a donc été tentant de voir ce qui pouvait être fait pour introduire la manipulation des pièces du jeu. Ainsi l'usage des pentaminos prendrait tout son sens.

Claude avait commencé à nous faire chercher des polygones symétriques formés de 2 ou 3 pentaminos. L'idée est venue de poursuivre dans cette voie et de travailler avec des « sous jeux » formés de quelques pièces. Les activités se sont petit à petit accumulées dans un classeur et l'envie est venue de les faire partager.

Le travail avec 5 pentaminos apparaît souvent dans cette brochure, particulièrement dans la **deuxième partie** consacrée à des rencontres avec « aire et périmètre ». Ce travail avec 5 pièces choisies parmi les 12 laisse un temps de recherche suffisant aux élèves et rend le recouvrement abordable par des élèves en difficulté.

Une autre piste de travail également présente dans cette deuxième partie de la brochure est de travailler avec un nombre croissant de pièces : le but est d'inciter l'élève à aller le plus loin possible, sans pour autant mettre en avant ceux qui ont plus réussi. Ce temps de diversification est intéressant à mettre en œuvre dans nos classes à l'hétérogénéité croissante...

Les élèves ont à leur disposition des pentaminos à l'échelle des polygones à recouvrir. Les 12 pièces assemblées à photocopier, à coller sur du carton puis à faire découper figurent en divers endroits de la brochure. Elles pourront paraître petites, mais pentaminos et polygones à recouvrir peuvent être agrandis en utilisant la photocopieuse.

La **troisième partie** de la brochure fait vivre les différentes transformations du plan rencontrées en collège. Dans bien des cas, l'élève pourra poser la pièce et lui faire subir le déplacement proposé.

À la suite de propositions concernant les symétries orthogonale et centrale, nous retrouvons les polygones symétriques formés de 2 ou 3 pentaminos. La recherche n'est pas exhaustive et pourra être complétée.

Cette dernière partie s'achève par l'état des recherches actuelles de l'auteur concernant les assemblages de 2 pentaminos formant des motifs de pavage.

Cette idée de ne travailler qu'avec quelques pentaminos se retrouve dans d'autres écrits :

« Maths-Jeunes-Junior n°106, novembre 2003 » : Des animaux et des pentaminos (pages 4 à 7)

« D'autres objets mathématiques, APMEP Lorraine, 2001 » : Les 12 pentaminos (pages 75 à 91)

« Jeux .6 APMEP n° 144, 2002 » Pentamilletrés (pages 3 et 4 pour les solutions).

« Jeux 7 APMEP n° 169, 2005 » Pentadallages (pages 39, 40 et 41 pour les premiers modèles).

Par ailleurs, le jeu « KATAMINOS® JEUX JPM » demande la recherche de rectangles formés de 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 pièces.

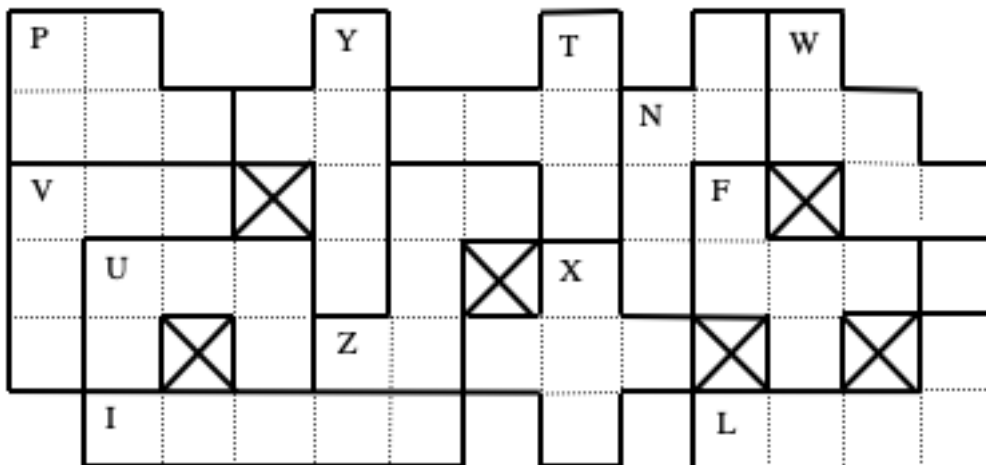
Pour finir, je voudrais remercier :

- Pol Le Gall qui a trouvé l'inspiration (et du temps...) pour illustrer cette brochure,
- Élise Vagost, jeune Professeure des Écoles dont le thème de mémoire professionnel portait sur l'utilisation des pentaminos lors de l'étude des notions d'aire et de périmètre : elle m'a donné l'envie d'informatiser ce qui était dans un classeur,
- Monique Gaidry qui a retapé les activités concernant les frises et les rotations,
- Joëlle Agamis qui a vérifié et corrigé les Pentatextes,
- Jacques Verdier qui fait la mise en page définitive,
- Odile Backscheider qui a traqué les fautes de frappe.

François DROUIN

L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.

Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



I E C O W V E R T E

I E S I O W T E

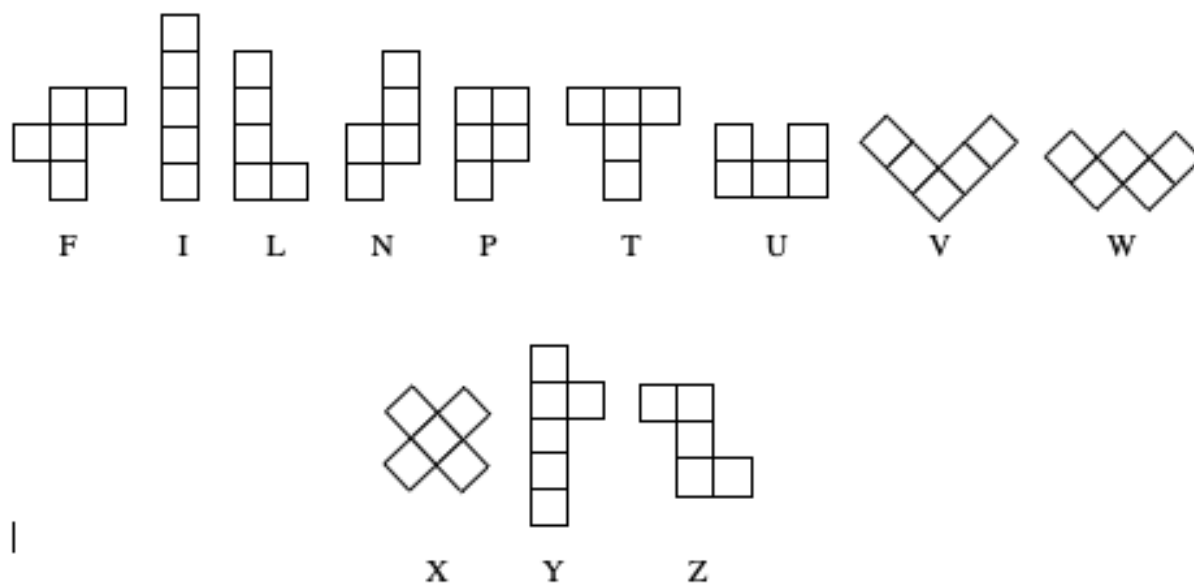
E T A M I O S



Les pentaminos

Dès 1907, Henry Ernest Dudeney avait repéré ces figures formées de 5 carrés accolés par au moins un côté.

En 1953, Solomon Golomb les a présentées lors d'une conférence. On lui doit en particulier le nom des 12 pièces, en référence avec leur ressemblance avec des lettres de l'alphabet.



En 1957, Martin Gardner les a diffusés dans un de ses articles du « Scientific American ».

Les enseignants de mathématiques se sont rapidement appropriés ces douze pièces et ont trouvé des utilisations possibles avec nos élèves : un compte rendu d'atelier des Journées nationales APMEP (bulletin n° 424) en est un exemple.

<https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/AAA/AAA99220/AAA99220.pdf>

Les douze pièces forment un ensemble de 60 carreaux qu'il est tentant d'assembler en un rectangle :

2338 solutions pour le rectangle 6×10 .

1010 solutions pour le rectangle 5×12 .

368 solutions pour le rectangle 4×15 .

2 solutions pour le rectangle 3×20 .

Dans tous les cas, trouver une solution n'est pas quelque chose d'immédiat.

La brochure « D'autres objets mathématiques » éditée par la Régionale Lorraine de l'APMEP aborde des possibilités de travail n'utilisant pas nécessairement toutes les pièces.

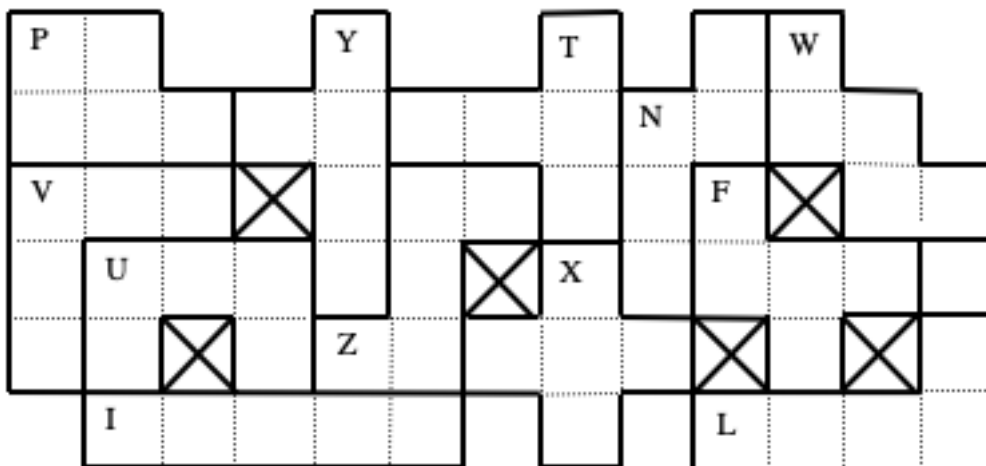
Cette brochure reprend le même principe : les activités proposées n'utilisent pour la plupart que quelques pièces choisies parmi les douze pentaminos. La recherche des solutions est plus abordable. Par ailleurs certaines activités utilisent un nombre croissant de pièces, l'usage de toutes n'est qu'un but à éventuellement atteindre par les plus rapides ou les plus motivés...

De très nombreuses activités utilisent des pentaminos formés d'assemblages de cinq carrés de 1 cm de côté. Cette dimension a été choisie pour permettre facilement l'utilisation du papier à petits carreaux

Des jeux prêts à découper sont fournis dans cette brochure.

L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.

Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



Cet assemblage fourni par Claude Pagano propose un ordre de découpage facilitant l'obtention des pièces. Seul l'intérieur du « U » aura besoin d'être redécoupé (les carreaux marqués d'une croix sont des « chutes » à jeter par la suite).

Découverte possible des pièces en classe :

Chaque groupe dispose de cinq carrés en papier ou en carton, semblables à ceux ci-dessous.



Consigne

Vous allez trouver les pièces d'un jeu. Elles sont toutes formées de cinq carrés. Les carrés doivent se toucher par au moins un carreau entier.

Les assemblages trouvés seront découpés.

Un premier groupe vient présenter le résultat de ses recherches en posant ses assemblages découpés sur la vitre d'un rétroprojecteur.

Question à la classe

Ce groupe a-t-il trouvé tous les assemblages possibles ?

À tour de rôle, les autres groupes viennent compléter les propositions et s'amorce le débat à propos d'« assemblages identiques ». Deux assemblages seront considérés identiques lorsqu'on peut les superposer, après éventuellement un retournement.

Généralement après ces temps d'échanges, douze pièces sont trouvées.

Question

Sommes-nous certains d'avoir obtenu tous les assemblages possibles ?

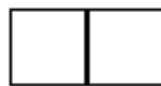
Pour cela, nous allons entrer dans la famille des polyminos.

Le nom « polymino » a été créé en relation avec le « domino », formé de deux carrés assemblés par un côté entier.

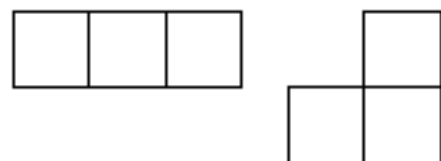
Il existe un « mino ».



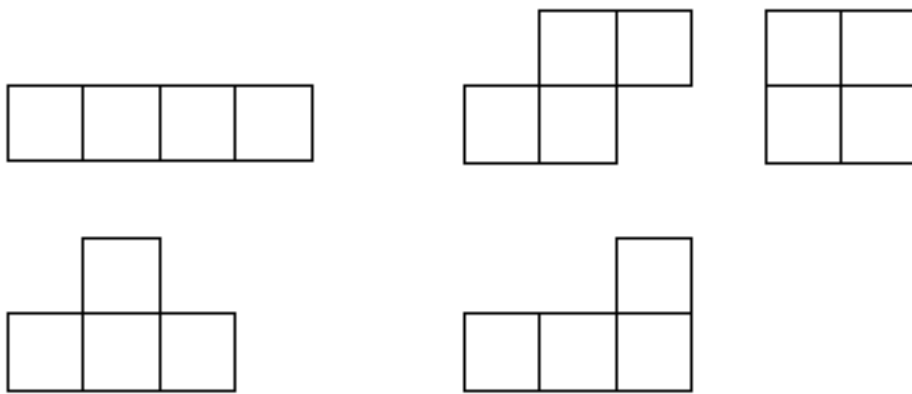
Il n'existe qu'un seul « domino »



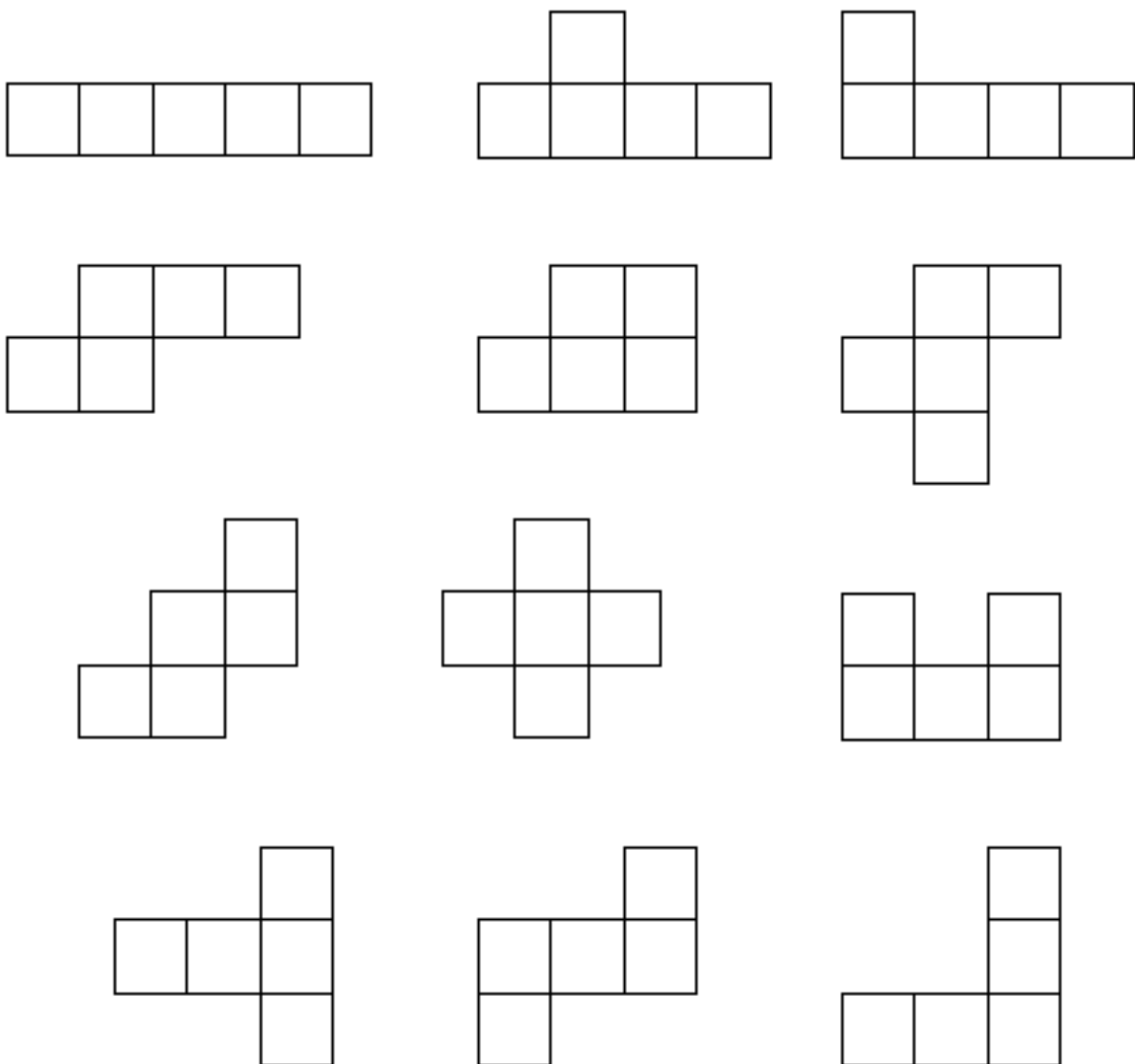
En cherchant toutes les places possibles du troisième carré autour du domino, nous prouvons qu'il n'existe que deux « triminos ».



En cherchant toutes les places possibles du quatrième carré autour des deux triminos, nous prouvons qu'il n'existe que cinq « tétraminos »



En cherchant toutes les places possibles du cinquième carré autour des cinq triminos, nous prouvons qu'il n'existe que douze « pentaminos ».



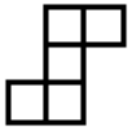
Cette recherche et cette justification peuvent être faites avec de jeunes élèves.

Les différentes positions d'une même pièce prennent toute leur importance : les pièces ont 1, 2, 4 ou 8 positions possibles.

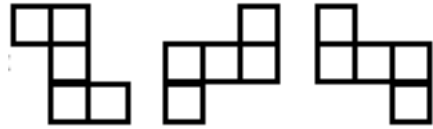
Dans le recueil de l'ensemble des positions des pièces, l'exemple proposé est celui faisant intervenir un centre de symétrie, rencontré à partir de la classe de cinquième. Le nombre de positions des autres pièces pourra être mis en parallèle avec le nombre d'axes de symétrie des pièces.

Il pourra être temps de faire remplir le tableau qui suit : cela donnera l'occasion d'un premier travail concernant « aire et périmètre » à partir de l'examen des pièces.

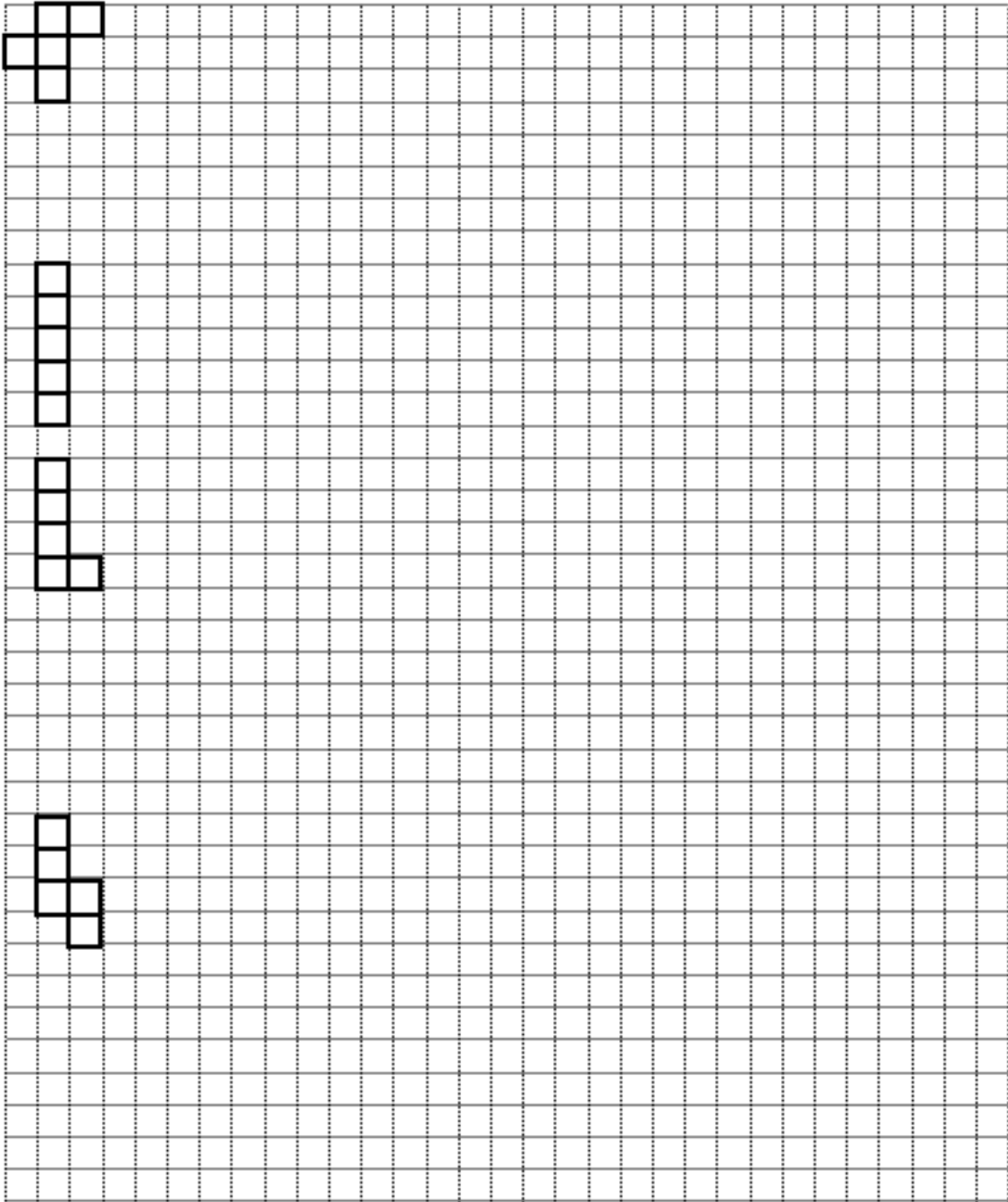
Les 12 pentaminos dans différentes positions

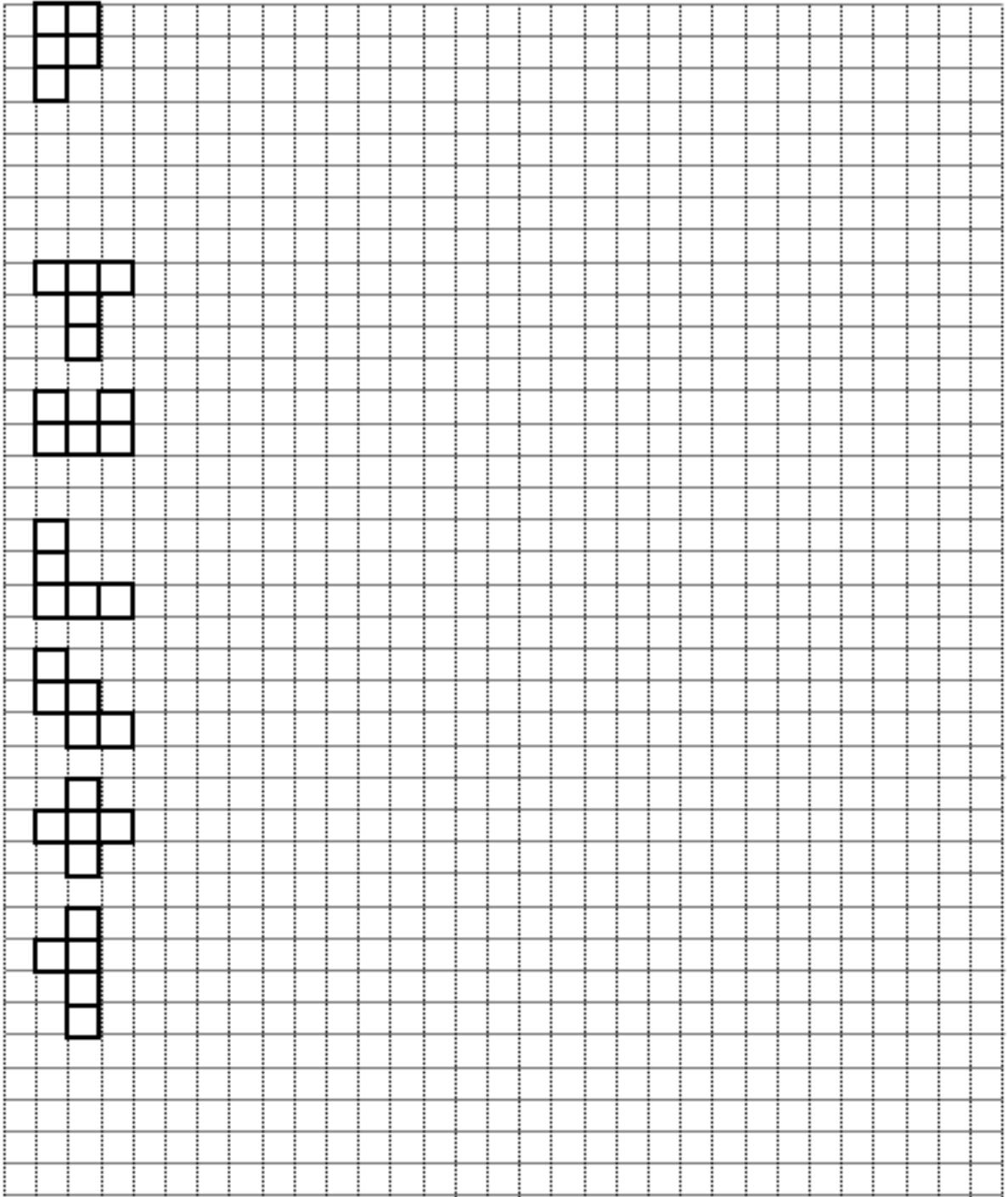


Cette pièce peut être vue dans trois autres positions.

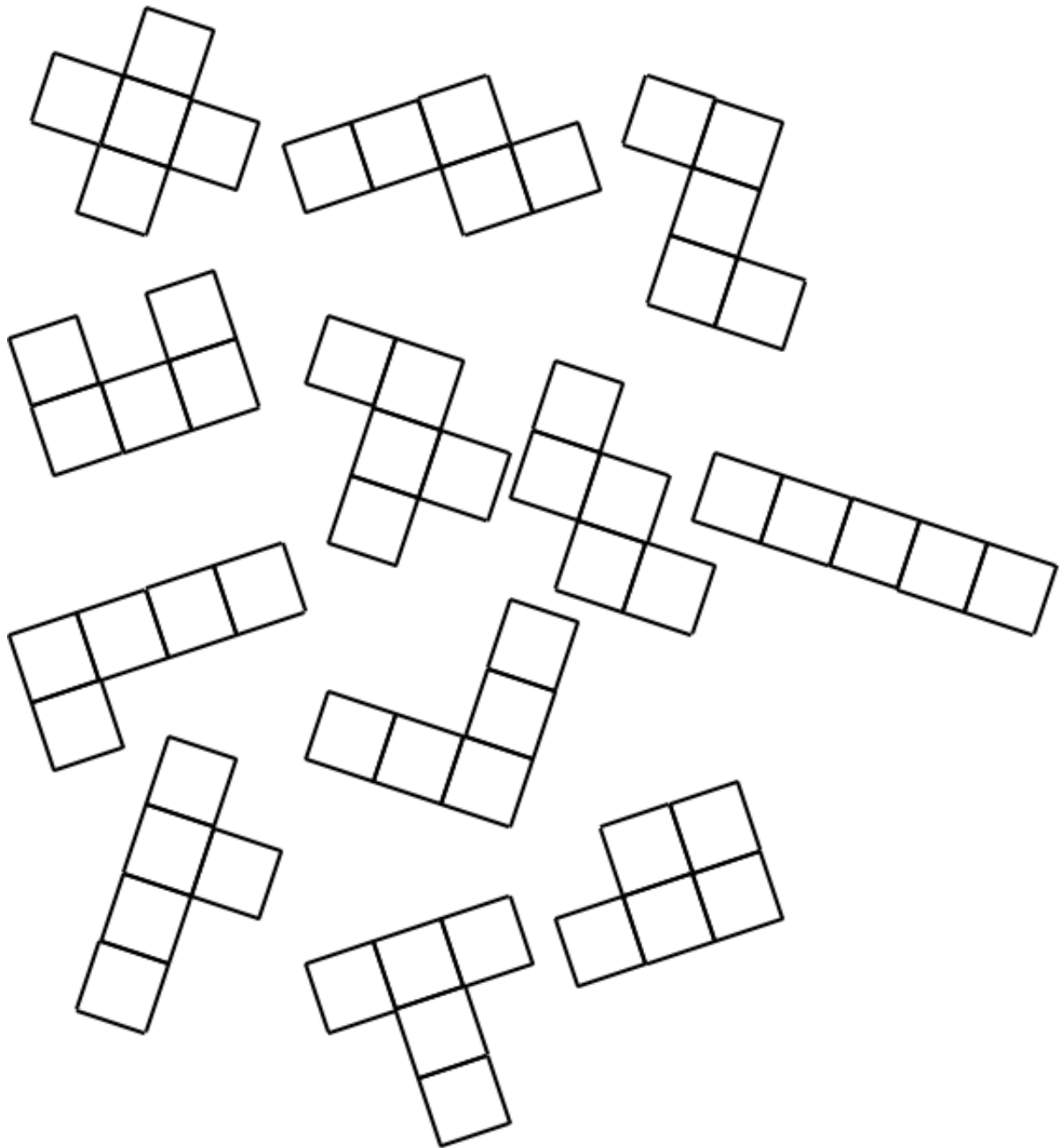


Dessine toutes les positions possibles des onze autres pentaminos.





Les 12 pentaminos à dessiner



Sur du papier non quadrillé, dessine ces 12 assemblages de 12 carrés.

Chacun de tes carrés aura 3 cm de côté.

Essaie d'utiliser le moins de feuilles « 21×29,7 » possible.

Remarques pour l'enseignant

L'activité précédente est une activité de dessin : de nombreux carrés seront dessinés.

Des stratégies de prolongements de côté sont possibles. Il y a occasion de travailler sur la caractérisation de deux droites parallèles comme étant deux droites ayant même écartement.

La remarque « Essaie d'utiliser le moins de feuilles « 21×29,7 » possible.... » doit amener l'élève à optimiser les placements des pièces sur les feuilles.

Certains élèves auront envie d'accoler certaines pièces. Ils prendront petit à petit conscience que ces douze pièces peuvent être considérées comme les pièces d'un puzzle.

Les deux pages suivantes présentent une collection de pentaminos. Les deux pages sont à coller recto verso.

Les pièces sont plus « grosses » et donc plus faciles à manier. De plus, la collection laisse apparente les carrés formant les pentaminos. Ceci est une aide pour des élèves ayant du mal à reproduire des pentaminos sur un quadrillage.

Cependant, la majorité des activités proposées utilise des pentaminos construits à partir de cinq carrés de 1 cm de côté. L'enseignant trouvant trop petites les pièces à manipuler par les élèves pourra photocopier en agrandissant les pièces du jeu et les feuilles d'activité proposées.

Les douze pentaminos (recto verso)

Les deux assemblages suivants sont à coller recto verso sur du carton, et découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.

