ÉCHANGES MATHÉMATIQUES

École du Pont des Arts à Sampigny

Collège Jean d'Allamont à Montmédy

Collège Les Avrils à Saint-Mihiel

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Régionale de Lorraine

DES ÉLÈVES CRÉENT POUR D'AUTRES ÉLÈVES

1 – Neuf cases, des sommes et des produits

Les grilles échangées entre les élèves de Sampigny et de Saint-Mihiel sont accessibles dans la rubrique « Nos collègues et leurs élèves jouent » du site national de l'APMEP. Elles ont été remises dans ce document.

Sommaire

Neuf cases, des sommes

Création d'une grille

20	17	8	
9	2	1	12
5	8	3	16
6	7	4	17

20	17	8	
			12
			16
			17

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9 sont placés dans la grille, les sommes des nombres formant chaque colonne et chaque ligne sont indiquées. Les nombres placés dans la grille sont effacés, reste ce qui sera proposé à d'autres élèves.
Des erreurs de calcul ou de recopiage sont malgré tout constatées. Voici un moyen de vérifier ce qui circulera pour d'autres élèves.
1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45
La somme des trois résultats proposés pour les lignes et colonnes doit donc également être égale à 45. Dans la grille ci-dessus, 12+16+17 = 45 et 20+17+8 = 45.

Lors de la réalisation de ces grilles, des défis peuvent être proposés : obtenir les mêmes sommes pour les lignes et les colonnes, obtenir le plus possible de sommes identiques pour les lignes et les colonnes.

12	17	16	
1	2	9	12
5	8	3	16
6	7	4	17

15	15	15	
6	7	2	15
1	5	9	15
8	3	4	15

Exemple de résolution

14	24	7	
			14
			15
			16

Une première étape serait de rechercher toutes les décompositions possibles des sommes proposées : interviennent trois nombres non répétés choisis parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

Pour les lecteurs de ce document voici l'ensemble des décompositions de toutes les sommes pouvant être obtenues pour ces grilles.

6	1+2+3							
7	1+2+4							
8	1+2+5	1+3+4						
9	1+2+6	1+3+5	2+3+4					
10	1+2+7	1+3+6	1+4+5	2+3+5				
11	1+2+8	1+3+7	1+4+6	2+3+6	2+4+5			
12	1+2+9	1+3+8	1+4+7	1+5+6	2+3+7	2+4+6	3+4+5	
13	1+3+9	1+4+8	1+5+7	2+3+8	2+4+7	2+5+6	3+4+6	
14	1+4+9	1+5+8	1+6+7	2+3+9	2+4+8	2+5+7	3+4+7	3+5+6
15	1+5+9	1+6+8	2+4+9	2+5+8	2+6+7	3+4+8	3+5+7	4+5+6
16	1+6+9	1+7+8	2+5+9	2+6+8	3+4+9	3+5+8	3+6+7	5+4+7
17	1+7+9	2+6+9	2+7+8	3+5+9	3+6+8	4+5+8	4+6+7	
18	1+8+9	2+7+9	3+6+9	3+7+8	4+5+9	4+6+8	5+6+7	
19	2+8+9	3+7+9	4+6+9	4+7+8	5+6+8			
20	3+8+9	4+7+9	5+6+9	5+7+8				
21	4+8+9	5+7+9	6+7+8					
22	5+8+9	6+7+9						
23	6+8+9							
24	7+8+9							

Nous remarquons que 24 et 7 n'ont qu'une seule décomposition possible.
24 =7+8+9 et 7 = 1+2+4. Nous connaissons les colonnes où sont les nombres 7, 8 ,9 et 1, 2 ,4 et donc la colonne où sont les trois nombres restants 3, 5, 6. Cela pourra être une aide à la recherche car celle-ci se fera par tâtonnements.

Les solutions proposées ne sont pas nécessairement uniques.

14	19	12	
			9
			16
			20

14	19	12	
6	2	1	9
3	9	4	16
5	8	7	20

14	19	12	
1	6	2	9
5	4	7	16
8	9	3	20

14	19	12	
3	2	4	9
6	9	1	16
5	8	7	20

La première solution est celle proposée dans ce document et celui accessible sur le site APMEP national. Les deux autres ont été proposées par Jean Fromentin (APMEP Groupe Jeux) suite à des échanges avec une utilisatrice enseignant en CM1. La dernière solution est très voisine de la première : échanges des 6 et 3 ($1^{ère}$ colonne) et des 1 et 4 ($3^{ème}$ colonne).

Ces grilles à compléter sont à mettre en parallèle avec celles proposées dans le Petit Vert n°132 dans l'article « En somme, je complète ». S'y trouvent des grilles accessibles à des élèves de cycle 2.

Neuf cases, des produits

Création d'une grille

270	112	12	
9	2	1	18
5	8	3	120
6	7	4	168

270	112	12	
			18
			120
			168

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, et 9 sont placés dans la grille, les produits des nombres formant chaque colonne et chaque ligne sont indiqués. Les nombres placés dans la grille sont effacés, reste ce qui sera proposé à d'autres élèves.

Des erreurs de calcul ou de recopiage sont malgré tout constatées. Voici un moyen de vérifier ce qui circulera pour d'autres élèves.
1x2x3x4x5x6x7x8x9 = 362 880
Le produit des trois résultats proposés pour les lignes et colonnes doit donc également être égale à 362 880. Dans la grille ci-dessus, 180x112x12 = 362 880 et 20+17+8 = 362 880.

Exemple de résolution

8	216	210	
			30
			63
			192

Une première étape pourra être la recherche de toutes les décompositions possibles des produits proposés : interviennent trois nombres non répétés choisis parmi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

30 = 1x5x6 et 30 = 2x3x6
63 = 1x7x9
192 = 1x2x96 (ceci n'est pas utilisable ici). 192 = 3x64 (ceci n'est pas utilisable car 64 = 8x8)
192 = 4x48 donc 192 = 4x6x8. Pendant la recherche se résous la « multiplication à trou » 192 = 4x… .
8 = 1x2x4
216 = 2x108 = 2x3x36 n'est pas utilisable. Mais 216 = 6x36 donc 216 = 6x4x9. Je peux aussi écrire 216 = 3x8x9
210 = 2x105 = 2x3x35 n'est pas utilisable mais 35 = 5x7 donc 210 = 6x5x7
Les nombres5, 7, 8, et 9 n'ont qu'une position possible dans la grille. Celle-ci se complète alors aisément.

8	216	210	
		5	30
	9	7	63
	8		192

La résolution de ces grilles se fera aussi en cherchant directement les places possibles des nombres en faisant la recherche dans l'ordre décroissant : 9, 8, 9 etc.

Remarque pour l'enseignant : 7 et 5 sont des nombres premiers et ont toujours des places uniques dans les grilles.

Neuf cases, des sommes ou des produits
Jeux créés en 2004 - 2005 par les élèves de CM1 CM2 de l'école de Sampigny

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les sommes de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

24	13	8	
			18
			12
			15

15	18	12	
			20
			13
			12

6	21	18	
			10
			18
			17

14	24	7	
			14
			15
			16

19	14	12	
			22
			11
			12

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les produits de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

8	216	210	
			30
			63
			192

280	216	6	
			216
			20
			84

270	16	84	
			504
			30
			24

432	70	12	
			126
			18
			160

18	315	64	
			216
			120
			14

16	252	90	
			24
			45
			336

36	144	70	
			378
			64
			15

Neuf cases, des sommes ou des produits
Des solutions aux jeux créés en 2004 - 2005 par les élèves de CM1 CM2 de l’école de Sampigny

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les sommes de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

24	13	8	
8	4	6	18
7	2	3	12
9	5	1	15

15	18	12	
5	9	6	20
3	8	2	13
7	1	4	12

6	21	18	
1	4	5	10
2	9	7	18
3	8	6	17

14	24	7	
3	7	4	14
5	8	2	15
6	9	1	16

19	14	12	
9	7	6	22
2	4	5	11
8	3	1	12

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les produits de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

8	216	210	
2	3	5	30
1	9	7	63
4	8	6	192

280	216	6	
8	9	3	216
5	4	1	20
7	6	2	84

270	16	84	
9	8	7	504
5	2	3	30
6	1	4	24

432	70	12	
6	7	3	126
9	2	1	18
8	5	4	160

18	315	64	
3	9	8	216
6	5	4	120
1	7	2	14

16	252	90	
2	4	3	24
1	9	5	45
8	7	6	336

36	144	70	
9	6	7	378
4	8	2	64
1	3	5	15

Neuf cases, des sommes ou des produits
Jeux créés en 2004 - 2005 par les élèves de sixième du collège de Saint-Mihiel (Meuse)

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les sommes de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

14	19	12	
			9
			16
			20

18	11	16	
			16
			14
			15

11	20	14	
			17
			15
			13

13	18	14	
			17
			14
			14

15	17	13	
			13
			13
			19

12	15	18	
			6
			15
			24

18	15	12	
			24
			15
			6

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les produits de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

105	36	96	
			56
			40
			162

6	270	224	
			40
			189
			48

14	360	72	
			36
			210
			48

72	168	30	
			16
			162
			140

270	12	112	
			36
			35
			288

90	42	96	
			162
			112
			20

6	192	315	
			20
			84
			216

Neuf cases, des sommes ou des produits
Des solutions aux jeux créés en 2004 - 2005 par les élèves de Sixième du collège de Saint-Mihiel

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les sommes de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

14	19	12	
6	2	1	9
3	9	4	16
5	8	7	20

18	11	16	
6	2	8	16
3	4	7	14
9	5	1	15

11	20	14	
2	8	7	17
5	9	1	15
4	3	6	13

13	18	14	
5	9	3	17
2	8	4	14
6	1	7	14

15	17	13	
2	8	3	13
7	5	1	13
6	4	9	19

12	15	18	
1	2	3	6
4	5	6	15
7	8	9	24

18	15	12	
9	8	7	24
6	5	4	15
3	2	1	6

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les élèves ont placé les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les produits de la ligne ou de la colonne. Ils ont ensuite retiré les nombres de départ, nous laissant retrouver leur place.

105	36	96	
7	4	2	56
5	1	8	40
3	9	6	162

6	270	224	
2	5	4	40
3	9	7	189
1	6	8	48

14	360	72	
1	9	4	36
7	5	6	210
2	8	3	48

72	168	30	
2	8	1	16
9	3	6	162
4	7	5	140

270	12	112	
6	3	2	36
5	1	7	35
9	4	8	288

90	42	96	
9	6	3	162
2	7	8	112
5	1	4	20

6	192	315	
1	4	5	20
2	6	7	84
3	8	9	216

Annexe 1 : un extrait du Petit Vert n°77 (Mars 2004)

GAND MINI PETIT MAXI
Utilisation en classe d'une activité suggérée par le problème n°75 du Petit Vert

François Drouin
Groupe Jeux de la régionale

En classe de sixième, cinq ou dix minutes avant la fin de l'heure, je place les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 dans une grille 3×3. En bout de ligne, j'indique les produits des nombres de chaque colonne et de chaque ligne. Je m'assure que tous les élèves ont parfaitement compris comment mes calculs ont été faits.

			6
			160
			378
72	56	90	

Je leur propose ensuite une grille comme celle ci-dessus en leur précisant que je ne leur dis pas où sont les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Je leur demande de rechercher pour la fois suivante où étaient mis ces nombres. L'usage de la calculatrice est autorisé et même conseillé (comment l'interdire pour une recherche à la maison ???). De plus, je leur précise que nous verrons ensemble les méthodes explorées par chacun.

La fois suivante, peu d'élèves ont réussi la grille. L'examen des méthodes essayées est alors d'un grand intérêt. Dans la plus-part des cas, les élèves ont fait leurs essais au hasard, certains montrent des solutions fausses présentant plusieurs fois le même nombre, d'autres, enfin, présentent une solution correcte, mais ne peuvent expliciter leur démarche (aide extérieure qui s'est limitée à chercher et à trouver à la place de l'élève ?).
Si aucune solution correcte n'est proposée, je relance la recherche sur la grille proposée la fois précédente. Sinon je propose une nouvelle grille...

Grande question : en observant les 6 produits proposés, peut-on à coup sûr trouver la place de certains de ces nombres ? Selon les souvenirs de choses vues les classes précédentes, la place du nombre 5 est souvent trouvée. Il est temps de voir ou revoir les classiques critères de divisibilité par 2, 3, 4, 5, 9. Il est aussi intéressant de faire comprendre que pour qu'un nombre soit divisible par 6, il faut qu'il soit divisible par 2 et par 3 et que si le nombre est pair et divisible par 9, il est divisible par 2×9, c'est à dire par 18 donc par 6 et par 3.
Après ces précisions, le placement du nombre 5 est immédiat. Pour le nombre 9 les placements possibles sur la grille proposée ci-dessus deux placements sont possibles pour le nombre 9 dans la ligne inferieure...). Par la suite la grille se complète assez vite.

			6
		5	160
(9)		(9)	378
72	56	90	

L'examen de la troisième colonne nous fait aborder l'opération à trous **...**$\times 5 \times 9 = 90$ et le sens de la division. Le nombre 7 pourrait être rapidement placé. Cependant le rôle des nombres premiers ne sera rencontré qu'en classe de seconde et aucun critère simple de divisibilité par 7 n'est présenté aux élèves.
Les élèves ayant compris qu'avec l'étude des placements des nombres 5 et 9, la recherche était facilitée, je leur propose une nouvelle grille. Celle-ci est résolue sans trop de problème par un grand nombre d'élèves. Ceux-ci vont à la rescousse des élèves encore en difficulté.
Je leur propose ensuite de créer une nouvelle grille et de la proposer comme nouvelle recherche à leur voisin de table. Cette activité les motive beaucoup : ils ont peut-être peiné pour résoudre la grille que je leur avais proposée, mais ils réussissent tous à en concevoir une nouvelle. Je suis bien conscient que dans ces deux phases, le niveau de difficulté est diffèrent, mais cette mise en situation de réussite des élèves ayant dû être aidés leur permet d'accepter d'aller plus loin dans l'exploitation de ce ‟ jeu ”.

Ces nouvelles grilles créées par les élèves vont me permettre d'introduire un défi à l'intérieur de la classe.

Chaque élève a devant lui la grille qu'il a construit. Je lui précise qu'il a obtenu six produits. Parmi ces six nombres, l'un est le plus grand et sera entouré en rouge. L'autre est le plus petit est sera entouré en vert. Parmi les grilles construites, j'aimerais connaitre le nombre entouré en rouge le plus petit possible et le nombre entouré en vert le plus grand possible. Cela revient à chercher le plus petit des maximums et le plus grand des minimums (formulation perturbant quelque peu les élèves...). Nous affichons au tableau les différents records pour le nombre ‟ rouge ” et pour le nombre ‟ vert ”. En fin d'heure, ces résultats sont affiches dans la salle de classe et constituent les records actuels de la classe.

Il est à noter que les records évoluent petit à petit et sont améliorés les fois suivantes. Cette activité proposée régulièrement en classe et lors de stages de formation nous laissait apparaitre 90 comme ‟ petit maximum ” et 56 comme ‟ grand minimum ”. La question s'est évidemment posée de savoir si ces records sont les bons et si nous pouvons le prouver...D'autres questions annexes pouvaient surgir : les deux records font ils nécessairement partie de la même grille (lors de l'évolution en classe des records partiels, cela n'est pas le cas …).

La solution au problème n° 75 proposé dans le Petit Vert n°76 nous apporte une preuve qu'empiriquement nous étions sur la bonne voie. André Stef nous montre que le plus petit maximum ne peut pas dépasser 92. Nous avons trouvé 90, or 91 et 92 ne peuvent pas être obtenus comme produits de trois entiers différents inférieurs à 10. 90 est donc le nombre cherché. Comme l'écart minimum entre les nombres est 36 (voir Petit Vert n° 76), le travail d'André Stef valide également les conjectures faites par les élèves.

Je pense vous avoir convaincu de l'intérêt de proposer ces grilles et le défi annexe en classe de sixième. J'aimerais que nos collègues enseignant en classe de seconde n'hésitent pas à les utiliser eux aussi : l'apport supplémentaire des nombres premiers facilite le placement du nombre ‟ 7 ”. La décomposition en produit de facteurs premiers des produits proposés n'est pas à négliger...

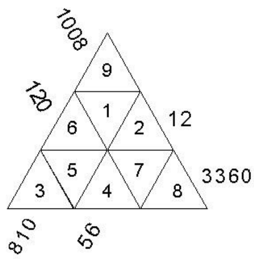
Des prolongements de cette activité sont possibles. Nous avons multiplié, nous pourrions additionner. Les nombres indiqués seront les sommes des trois nombres de chaque ligne ou de chaque colonne (voir grille ci-dessous).

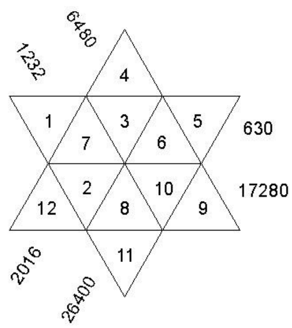
			6
		5	160
(9)		(9)	378
72	56	90	

Les élèves pensent que ces grilles sont plus faciles à remplir. Ils se trompent, il n’y a plus de nombre pouvant se placer rapidement...
Le défi de l’écart minimal entre le maximum et le minimum peut aussi être proposé. Nous connaissons tous cependant le carré magique formé des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 et nous savons que grâce à la caractérisation de ces carrés magiques, nous obtiendrons six sommes égales à 15. Parvenir à ces sommes égales est à chaque fois un étonnement pour les élèves.

Ces grilles utilisant les produits et les sommes sont présentées dans la brochure ‟ JEUX 2 ″ de l’APMEP. Les deux grilles présentées dans cet article en sont d’ailleurs extraites.

Quelque temps auparavant, la revue ‟ Le Petit Archimède ″, éditée par l’A.D.C.S avait également évoqué ces grilles. Les triangles équilatéraux utilisaient également les entiers de 1 à 9 et les hexagones réguliers les entiers de 1 à 12 (voir haut de la page suivante).





Les thèmes de recherche proposés avec les carrés restent valables. Cependant les produits de cinq nombres qui apparaissent m’incitent à ne pas proposer ces configurations à mes élèves de sixième. Les collègues enseignant en classe de seconde auront sans doute un autre regard que moi...

Parmi les lecteurs du Petit Vert, il y en a sans doute qui ont des élèves susceptibles de résoudre cette variante. Dans le cas d’une grille multiplicatrice triangulaire, les nombres formant les ‟ pointes ″ peuvent être trouvés rapidement en divisant 9! par le produit des deux nombres formant les lignes sous la pointe (dans l’exemple ci-contre, 9 est égal à 9! divisé par 12× 3360). Une grille ayant les nombres 5 et 7 dans ses pointes est donc plus facile qu’une grille ayant ces nombres dans sa zone centrale.
La même méthode appliquée aux grilles multiplicatives hexagonales ne fait pas connaitre aussi rapidement les nombres contenus dans les pointes.

J’ai voulu dans ces quelques lignes montrer l’intérêt de l’introduction de ces grilles (et des défis associes) dans nos classes, de la sixième aux différentes classes de lycée. J’ai voulu aussi montrer que ce jeu d’apparence simple peut révéler quelques contenus mathématiques moins immédiats (la solution proposée par André Stef au problème 75 me conforte dans cette idée).

Annexe 2 : deux extraits du Petit Vert n°76 (décembre 2003)

Énoncé du problème n°75 (sur un énoncé de F. Drouin)

On considère une grille constituée par un tableau de 3x3 cases dont les cases sont occupées par les nombres 1, 2, 3, …, 9. Par exemple :

1	6	3
5	8	2
4	7	9

Calculons ensuite les produits des trois nombres pour chaque ligne et chaque colonne.

1	6	3	18
5	8	2	80
4	7	9	252
20	336	54	

Nous obtenons six nombres. Considérons enfin la différence D entre le plus grand et le plus petit de ces six produits (ici, D = 336-18 = 318. Déterminer les grilles qui permettent d'obtenir une valeur minimale pour D.

Extraits des solutions proposées

Renaud Dehaye utilise le logiciel Maple et aboutit à la solution D = 36 obtenue pour la grille ci-dessous .

9	2	4
1	8	7
6	5	3

André Stef découvre également cette solution par tâtonnements et établit qu'on ne peut pas faire mieux.

Remarque

En 2019, ce qui se fait en classe de sixième et en classe de seconde est différent de ce qui se faisait en 2004 à l'époque des échanges entre élèves évoqués dans ce document. Quinze années ont passé, le texte paru dans ce Petit Vert ne doit être considéré que comme un témoignage et non comme une liste d'injonctions à mettre en œuvre.

Des jeux pour 2019 et 2020

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont placés dans les 9 cases du carré. En suivant les directions des côtés du carré, ils ont indiqué les sommes de la ligne ou de la colonne. Les nombres de départ ont été retirés, nous laissant retrouver leur place.

12	13	**20**	
			19
			10
			16

6	**20**	**19**	
			14
			17
			14

20	**19**	6	
			18
			15
			12

11	**20**	14	
			14
			19
			12

20	14	11	
			14
			12
			19

Pour réaliser des grilles pour 2020

		20	
			20

	20	**20**	

20	**20**		

Des jeux pour 2019 et 2020

Pour chacun des jeux ci-dessous

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ont été placés dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, les sommes de la ligne ou de la colonne sont indiquées. Voici les placements des nombres imaginés au départ.

12	13	**20**	
6	4	9	**19**
5	2	3	10
1	7	8	16

6	**20**	**19**	
2	8	4	14
1	7	9	17
3	5	6	14

20	**19**	6	
9	8	1	18
6	7	2	15
5	4	3	12

11	**20**	14	
3	7	4	14
2	8	9	**19**
6	5	1	12

20	14	11	
7	1	6	14
4	5	3	12
9	8	2	**19**