A.P.M.E.P. LORRAINE

François DROUIN

AVEC DES PENTAMINOS

François DROUIN

AVEC DES

PENTAMINOS

Une publication de la régionale A.P.M.E.P. LORRAINE

Vers le sommaire

PRÉSENTATION DE LA BROCHURE « AVEC DES PENTAMINOS »

Résumé

Des utilisations de pièces choisies parmi les douze pentaminos, en classe, en club, ou à la maison…

Depuis de nombreuses années, j'ai tenté d'utiliser en classe et en club mathématiques ces pièces formées de cinq carrés accolés par un côté entier.
Faire des recherches avec les douze pièces n'est pas aisé, surtout pour les élèves. Cependant on rencontre des mathématiques bien intéressantes en ne manipulant que 1, 2, 3, 4, 5… pièces : aire, périmètres, symétries orthogonales, symétries centrales, rotations, translations, frises, pavages.
Par des détours on rencontre aussi les multiples de 5, les décompositions d'un entier sous la forme « …×… + …×… » ou « …×… - …×… », des phrases mathématiques à retrouver ou des activités relevant de l'énumération.
Les travaux présentés concernent des élèves de collège. Cependant un très grand nombre d'entre eux trouveront leur place dans les classes de cycle III, de SEGPA ou de tout dispositif mis en place pour aider des élèves en difficulté.

François DROUIN

Couverture et illustrations de Pol **LE GALL**

Première parution en juillet 2007
Imprimé par l'atelier central de reprographie de l'Université Henri Poincaré (Nancy)
I.S.B.N. 2-906476-08-0

Réédition sous forme de document électronique en 2017
(avec table des matières interactive).

Vers le sommaire

Préface

Jeux et enseignement

Il est admis que le jeu est une pratique qui remonte aux temps les plus anciens. De très nombreux textes, dans différents domaines, et parfois aussi des découvertes récentes concernant le passé de notre monde, nous en donnent régulièrement une preuve écrite ou le témoignage matériel.
Sur le plan de l'histoire des jeux, il existe une abondante littérature. Des références à son sujet peuvent être trouvées sur des sites Web grâce à l'utilisation d'un moteur de recherche.

Il n'est certainement pas étonnant de constater que cette existence se perpétue de nos jours et que des nouveautés dans le domaine du jeu apparaissent régulièrement.
Si de nombreux jeux ne font appel qu'à la virtuosité, aux réflexes ou au hasard, il en existe beaucoup d'autres dont la valeur éducative est évidente. Ceux là peuvent et doivent trouver une place dans l'enseignement en général et dans celui des mathématiques en particulier.

La pratique d'un jeu, bien choisi, donne l'occasion aux participants de développer de nombreuses facultés telle que celles de l'imagination, du raisonnement, de la recherche de stratégies, de l'esprit critique, du respect strict de consignes, du passage du concret à l'abstrait, … et de bien d'autres encore.
De ce fait le jeu dans l'enseignement voit son seul aspect ludique s'effacer devant la motivation qu'il suscite et surtout devant le fait que les essais et les tentatives, les réussites ou les échecs qui résultent d'une telle activité, concourent à favoriser l'acquisition de connaissances et de comportements propres à favoriser la "construction" d'une intelligence.

La brochure qui vous est présentée ici, illustre parfaitement l'intérêt de proposer aux élèves, dans le cadre de consignes bien établies, des pistes de recherches

personnelles en s'appuyant sur un jeu dont la simplicité initiale permet d'autant plus des développements dans de nombreuses directions.
Le jeu de pentaminos ne consiste pas seulement en la reconstitution d'un rectangle à l'aide de 12 pièces. Se limiter à cet objectif serait passer à côté de ressources cachées et qui méritent d'être mises au jour. Ce jeu ouvre en effet des perspectives diverses dans de nombreuses directions. Il donne l'occasion, comme vous pourrez le constater, de percevoir comment les mathématiques trouvent un champ d'applications de notions qui ont été enseignées et, surtout, de se rendre compte qu'une activité consacrée à un jeu, peut être analysée sous différents aspects et dans divers domaines. Cette activité mentale ou de manipulation induit bien souvent la découverte et l'émergence de notions mathématiques ce qui justifie leur explicitation.

Une caractéristique de ce travail est qu'il invite, sans l'exprimer peut-être, chacun à explorer d'autres voies d'exploitation des pentaminos et à ainsi se rendre compte de la richesse de la situation. Dans ce domaine, la vision personnelle est alors de rigueur.

Nous ne doutons pas un instant que le lecture attentive du texte qui est présenté, incitera le lecteur-enseignant à se lancer, avec la classe, dans une telle pratique et à lui accorder certainement une place non négligeable.

Claude Villers,

Professeur honoraire à l'Athénée Royal de Mons (Belgique),
responsable d'activités à la S.B.P.M.e.f. jusqu'il y a peu,
auteur de nombreux articles à caractère pédagogique dans des revues destinées
aux enseignants ainsi qu'aux élèves de l'enseignement secondaire
(Maths-Jeunes et Maths-Jeunes Junior).

Introduction

Nous utilisons divers outils pour nous aider à faire des mathématiques : « papier crayon », « règle équerre compas », « calculatrice et ordinateur ».
En complément, nous utilisons divers objets à toucher et à manipuler :

Les puzzles géométriques tels le « Tangram » présents dès l'école élémentaire permettent de faire vivre les notions d'aire, d'écriture fractionnaire ainsi que la géométrie des transformations.
Les polycubes tels que le « cube Soma » permettent de travailler la vision en perspective et les dénombrements de cubes
Les brochures « Objets mathématiques » et « D'autres objets mathématiques » éditées par l'A.P.M.E.P. Lorraine ainsi que les brochures « Jeux 5 », « Jeux 6 » et « Jeux 7 » éditées l'A.P.M.E.P. fournissent bien d'autres idées…

Dans les années 80, Claude PAGANO († 2005) venait nous voir depuis sa retraite de La Seyne-sur-Mer et nous faisait chercher de bien intéressants problèmes liés à des jeux mathématiques.
Un de ces jeux retenait depuis longtemps toute son attention (il a servi d'élément de décor dans sa maison…). Ce jeu était formé des 12 assemblages de 5 carrés adjacents par des côtés entiers… Et c'est ainsi que Claude a introduit au sein de l'A.P.M.E.P. Lorraine le virus des pentaminos, virus qu'il a lui-même gardé toute sa vie.
Les recherches qu'il nous proposait nous semblaient très intéressantes mais difficiles à mettre en œuvre avec nos élèves. Jusqu'à la fin de sa vie, il nous a envoyé ses trouvailles que nous aurons, je l'espère, le temps de publier…

Devant tant de passion, nous avons tout de même tenté leur introduction dans nos classes. La partie « découverte des pièces » (**première partie** de cette brochure) faisait vivre des mathématiques bien intéressantes, et mettait les élèves en situation de recherche et de validation (des pièces « grand modèle » sont proposées en fin de cette partie : elles sont plus faciles à manipuler pour de jeunes élèves ou des élèves en très grande difficulté. Par collage, les 5 carrés qui les composent sont visibles sur les deux faces.).
Il a donc été tentant de voir ce qui pouvait être fait pour introduire la manipulation des pièces du jeu. Ainsi l'usage des pentaminos prendrait tout son sens.

Claude avait commencé à nous faire chercher des polygones symétriques formés de 2 ou 3 pentaminos. L'idée est venue de poursuivre dans cette voie et de travailler avec des « sous jeux » formés de quelques pièces. Les activités se sont petit à petit accumulées dans un classeur et l'envie est venue de les faire partager.
Le travail avec 5 pentaminos apparaît souvent dans cette brochure, particulièrement dans la **deuxième partie** consacrée à des rencontres avec « aire et périmètre ». Ce travail avec 5 pièces choisies parmi les 12 laisse un temps de recherche suffisant aux élèves et rend le recouvrement abordable par des élèves en difficulté.
Une autre piste de travail également présente dans cette deuxième partie de la brochure est de travailler avec un nombre croissant de pièces : le but est d'inciter l'élève à aller le plus loin possible, sans pour autant mettre en avant ceux qui ont plus réussi. Ce temps de diversification est intéressant à mettre en œuvre dans nos classes à l'hétérogénéité croissante…
Les élèves ont à leur disposition des pentaminos à l'échelle des polygones à recouvrir. Les 12 pièces assemblées à photocopier, à coller sur du carton puis à faire découper figurent en divers endroits de la brochure. Elles pourront paraître petites, mais pentaminos et polygones à recouvrir peuvent être agrandis en utilisant la photocopieuse.

Vers le sommaire

La **troisième partie** de la brochure fait vivre les différentes transformations du plan rencontrées en collège. Dans bien des cas, l'élève pourra poser la pièce et lui faire subir le déplacement proposé.
A la suite de propositions concernant les symétries orthogonale et centrale, nous retrouvons les polygones symétriques formés de 2 ou 3 pentaminos. La recherche n'est pas exhaustive et pourra être complétée.
Cette dernière partie s'achève par l'état des recherches actuelles de l'auteur concernant les assemblages de 2 pentaminos formant des motifs de pavage.

Cette idée de ne travailler qu'avec quelques pentaminos se retrouve dans d'autres écrits :

> « Maths Jeunes Junior n°106, novembre 2003 » : Des animaux et des pentaminos (pages 4 à 7):
> « D'autres objets mathématiques, A.P.M.E.P. Lorraine, 2001 » : Les 12 pentaminos (pages 75 à 91)
> « Jeux .6 A.P.M.E.P. n° 144, 2002 » Pentamilettres (pages 3 et 4 pour les solutions).
> « Jeux 7 A.P.M.E.P. n° 169, 2005 » Pentadallages (pages 39, 40 et 41 pour les premiers modèles).

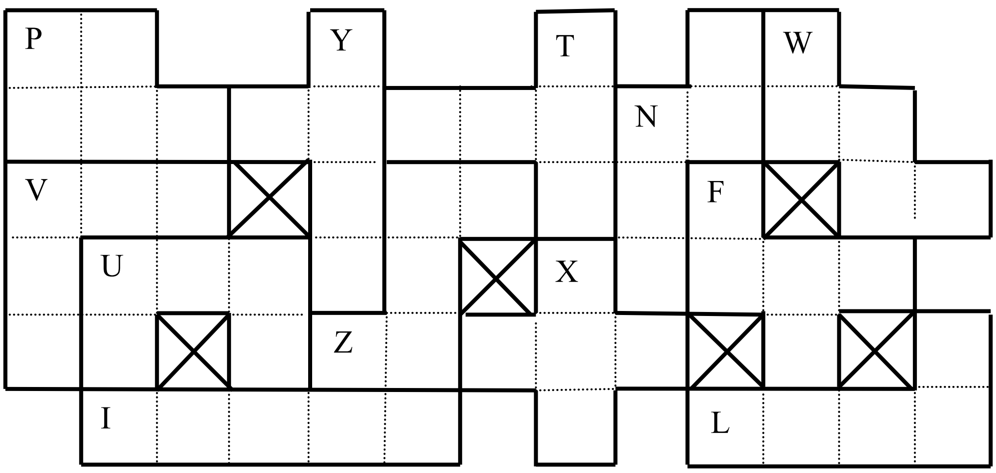
Par ailleurs, le jeu « KATAMINOS® JEUX JPM » demande la recherche de rectangles formés de 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et 11 pièces.

Pour finir, je voudrais remercier :

- Pol Le Gall qui a trouvé l'inspiration (et du temps…) pour illustrer cette brochure,
- Elise Vagost, jeune Professeure des Ecoles dont le thème de mémoire professionnel portait sur l'utilisation des pentaminos lors de l'étude des notions d'aire et de périmètre : elle m'a donné l'envie d'informatiser ce qui était dans un classeur,
- Monique Gaildry qui a retapé les activités concernant les frises et les rotations,
- Joëlle Agamis qui a vérifié et corrigé les Pentatextes,
- Jacques Verdier qui fait la mise en page définitive,
- Odile Backscheider qui a traqué les fautes de frappe.

François DROUIN

L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.
Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



Vers le sommaire

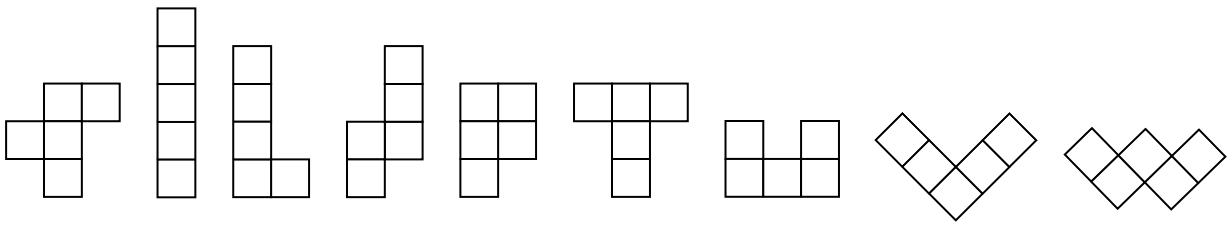
DECOUVERTE DES DOUZE PENTAMINOS

Vers le sommaire

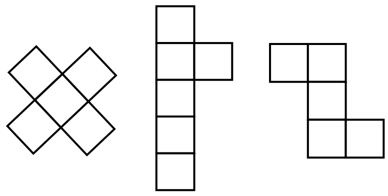
Vers le sommaire

Les pentaminos

Dès 1907, Henry Ernest Dudeney avait repéré ces figures formées de 5 carrés accolés par au moins un côté.
En 1953, Solomon Golomb les a présentées lors d'une conférence. On lui doit en particulier le nom des 12 pièces, en référence avec leur ressemblance avec des lettres de l'alphabet.



F I L N P T U V W



X Y Z

En 1957, Martin Gardner les a diffusés dans un de ses articles du « Scientific American ».

Les enseignants de mathématiques se sont rapidement approprié ces douze pièces et ont trouvé des utilisations possibles avec nos élèves : un compte rendu d'atelier des Journées nationales A.P.M.E.P. (bulletin n° 424) en est un exemple.

Les douze pièces forment un ensemble de 60 carreaux qu'il est tentant d'assembler en un rectangle :

2338 solutions pour le rectangle 6×10.
1010 solutions pour le rectangle 5×12.
368 solutions pour le rectangle 4×15.
2 solutions pour le rectangle 3×20.

Dans tous les cas, trouver une solution n'est pas quelque chose d'immédiat.

La brochure « D'autres objets mathématiques » éditée par la Régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P. aborde des possibilités de travail n'utilisant pas nécessairement toutes les pièces.

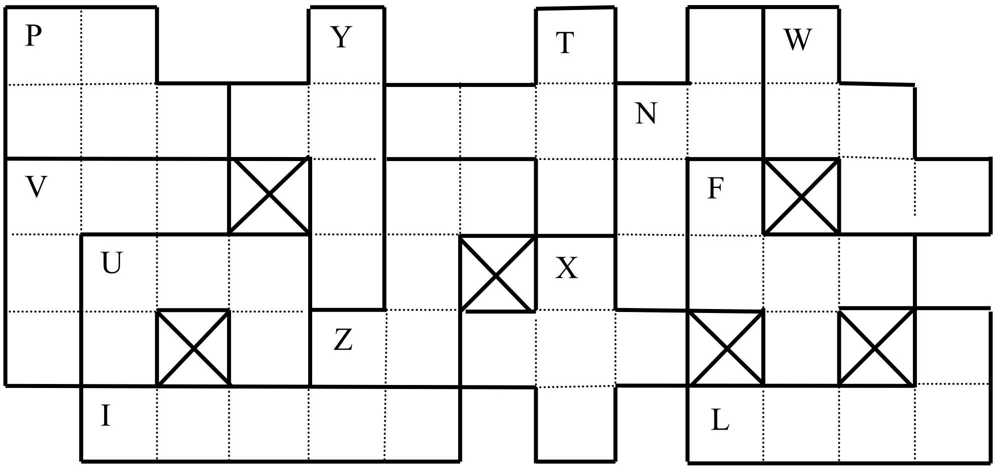
Cette brochure reprend le même principe : les activités proposées n'utilisent pour la plupart que quelques pièces choisies parmi les douze pentaminos. La recherche des solutions est plus abordable. Par ailleurs certaines activités utilisent un nombre croissant de pièces, l'usage de toutes n'est qu'un but à éventuellement atteindre par les plus rapides ou les plus motivés…

De très nombreuses activités utilisent des pentaminos formés d'assemblages de cinq carrés de 1 cm de côté. Cette dimension a été choisie pour permettre facilement l'utilisation du papier à petits carreaux

Vers le sommaire

Des jeux prêts à découper sont fournis dans cette brochure.

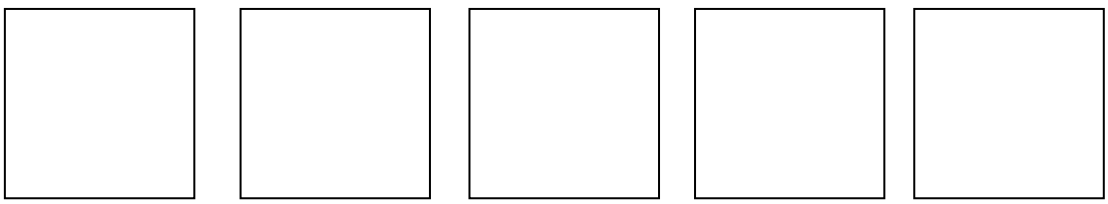
L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.
Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



Cet assemblage fourni par Claude Pagano propose un ordre de découpage facilitant l'obtention des pièces. Seul l'intérieur du « U » aura besoin d'être redécoupé (les carreaux marqués d'une croix sont des « chutes » à jeter par la suite).

Découverte possible des pièces en classe :

Chaque groupe dispose de cinq carrés en papier ou en carton, semblables à ceux ci-dessous :



Consigne :
Vous aller trouver les pièces d'un jeu. Elles sont toutes formées de cinq carrés. Les carrés doivent se toucher par au moins un carreau entier.

Les assemblages trouvés seront découpés.

Un premier groupe vient présenter le résultat de ses recherches en posant ses assemblages découpés sur la vitre d'un rétroprojecteur.

Question à la classe :
Ce groupe a-t-il trouvé tous les assemblages possibles ?

A tour de rôle, les autres groupes viennent compléter les propositions et s'amorce le débat à propos d' « assemblages identiques ». Deux assemblages seront considérés identiques lorsqu'on peut les superposer, après éventuellement un retournement.

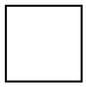
Vers le sommaire

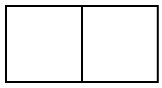
Généralement après ces temps d'échanges, douze pièces sont trouvées.

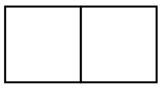
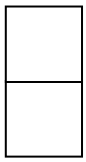
<u>Question :</u>
Sommes-nous certains d'avoir obtenu tous les assemblages possibles ?

Pour cela, nous allons entrer dans la famille des polyminos.

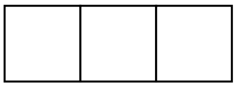
Le nom « polymino » a été créé en relation avec le « domino », formé de deux carrés assemblés par un côté entier.

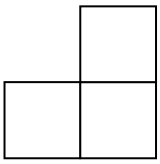
Il existe un « mino » 

Il n'existe qu'un seul « domino » 

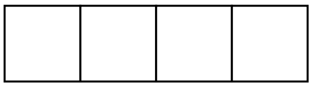
Les deux dessins  et  représentent le même assemblage.

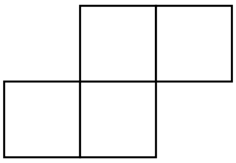
En cherchant toutes les places possibles du troisième carré autour du domino, nous prouvons qu'il n'existe que deux « triminos ».

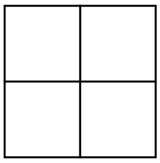


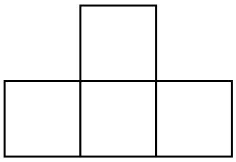


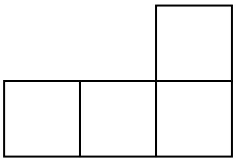
En cherchant toutes les places possibles du quatrième carré autour du trimino, nous prouvons qu'il n'existe que cinq « tétraminos »





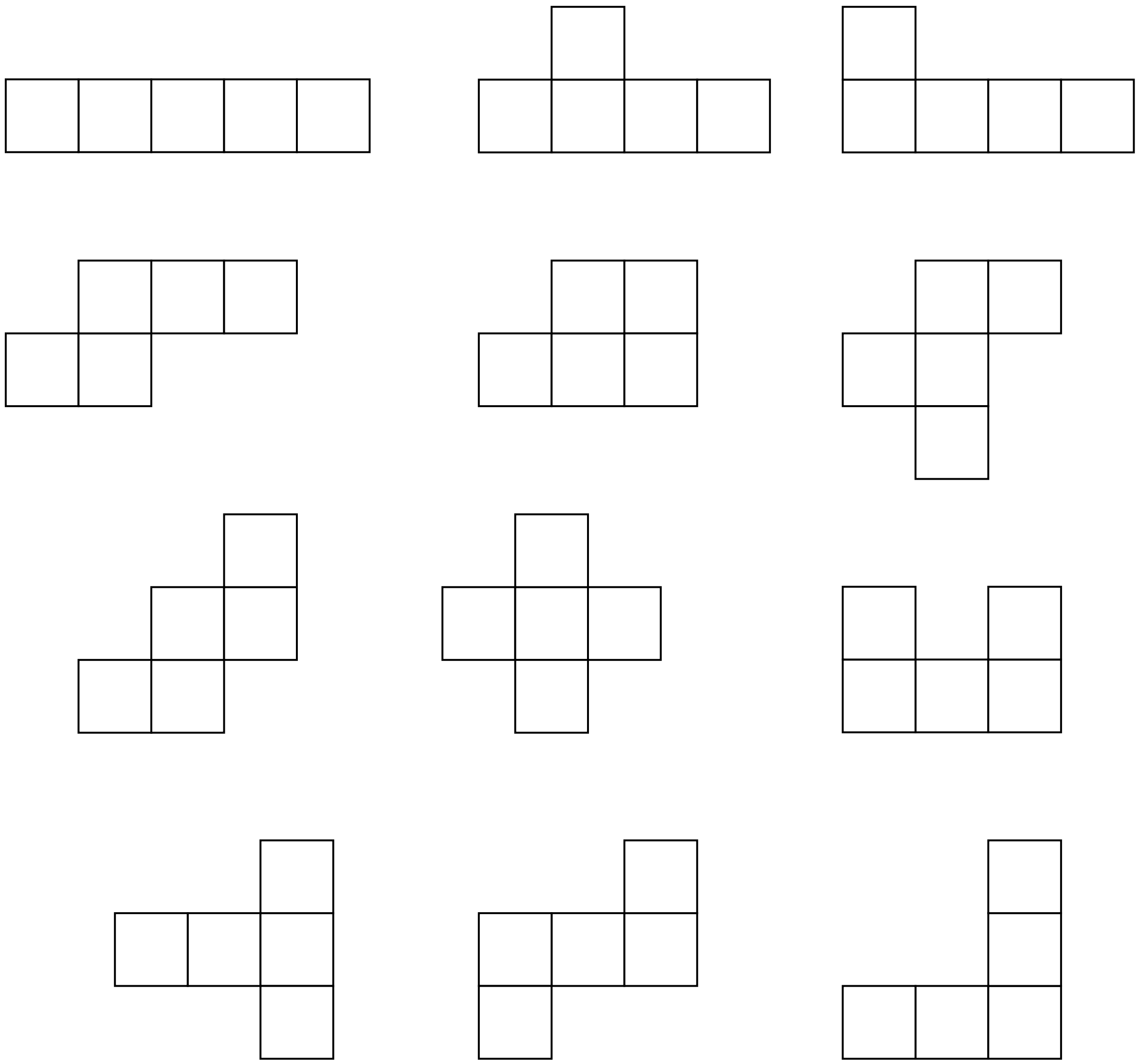






En cherchant toutes les places possibles du cinquième carré autour du domino, nous prouvons qu'il n'existe que douze « pentaminos ».

Vers le sommaire



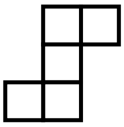
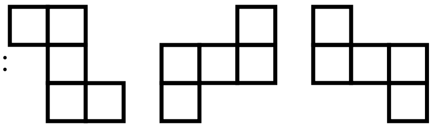
Cette recherche et cette justification peuvent être faites avec de jeunes élèves.
Les différentes positions d'une même pièce prennent toute leur importance : les pièces ont 1, 2, 4 ou 8 positions possibles.

Dans le recueil de l'ensemble des positions des pièces, l'exemple proposé est celui faisant intervenir un centre de symétrie, rencontré à partir de la classe de cinquième. Le nombre de positions des autres pièces pourra être mis en parallèle avec le nombre d'axes de symétrie des pièces.

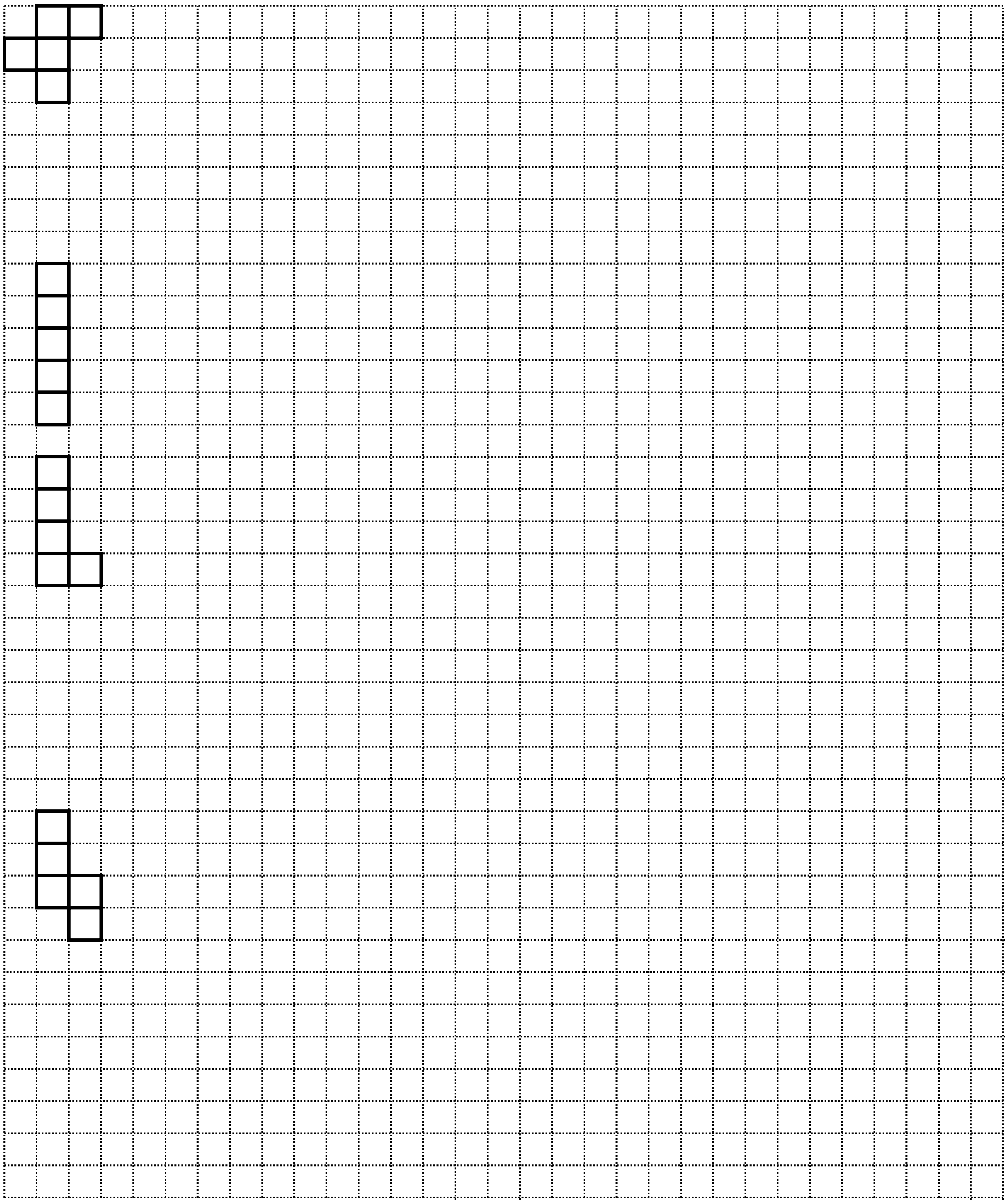
Il pourra être temps de faire remplir le tableau qui suit : cela donnera l'occasion d'un premier travail concernant « aire et périmètre » à partir de l'examen des pièces.

Vers le sommaire

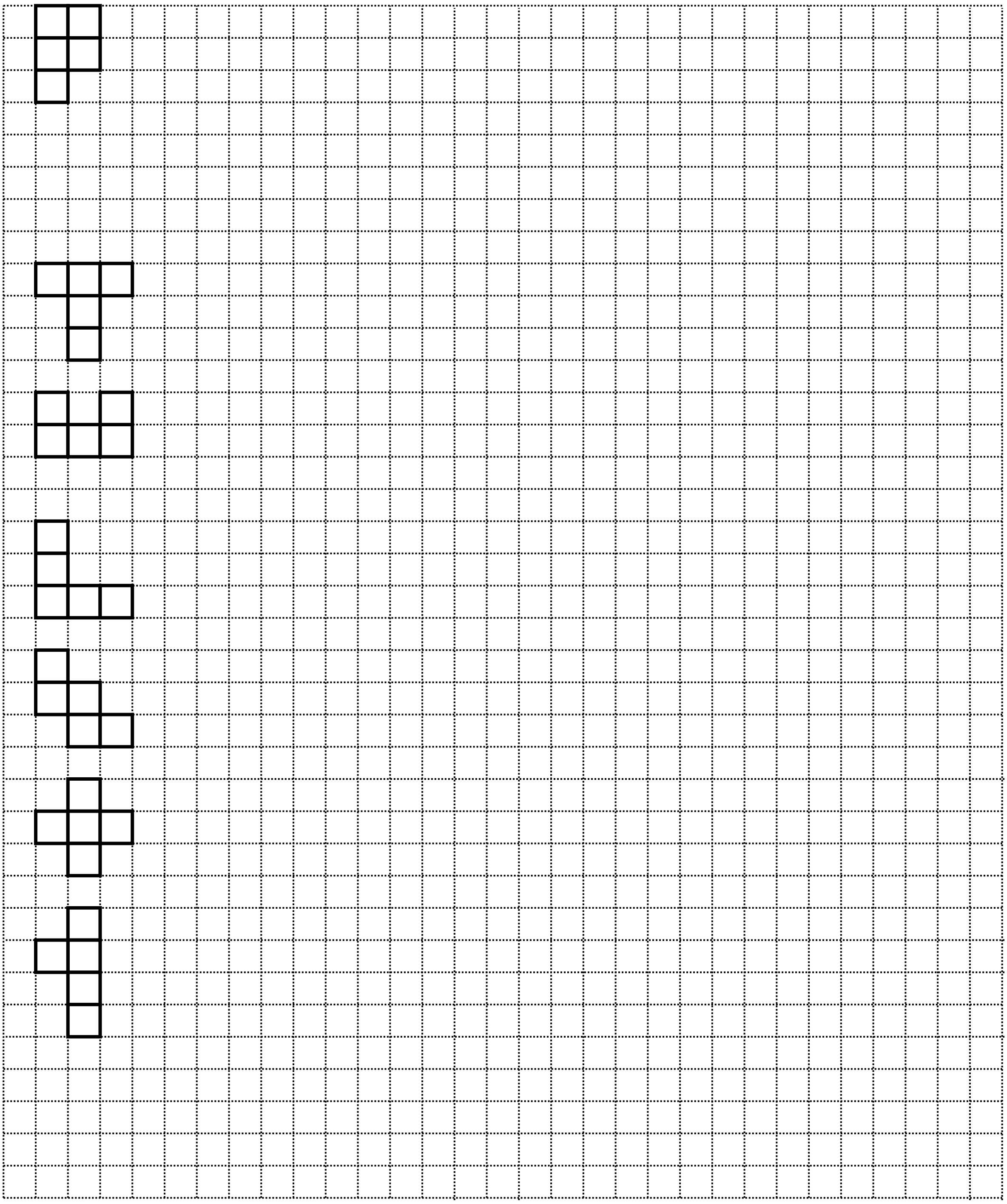
Les 12 pentaminos dans différentes positions

La pièce  peut être vue dans trois autres positions : 

Dessine toutes les positions possibles des onze autres pentaminos.

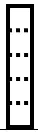


Vers le sommaire



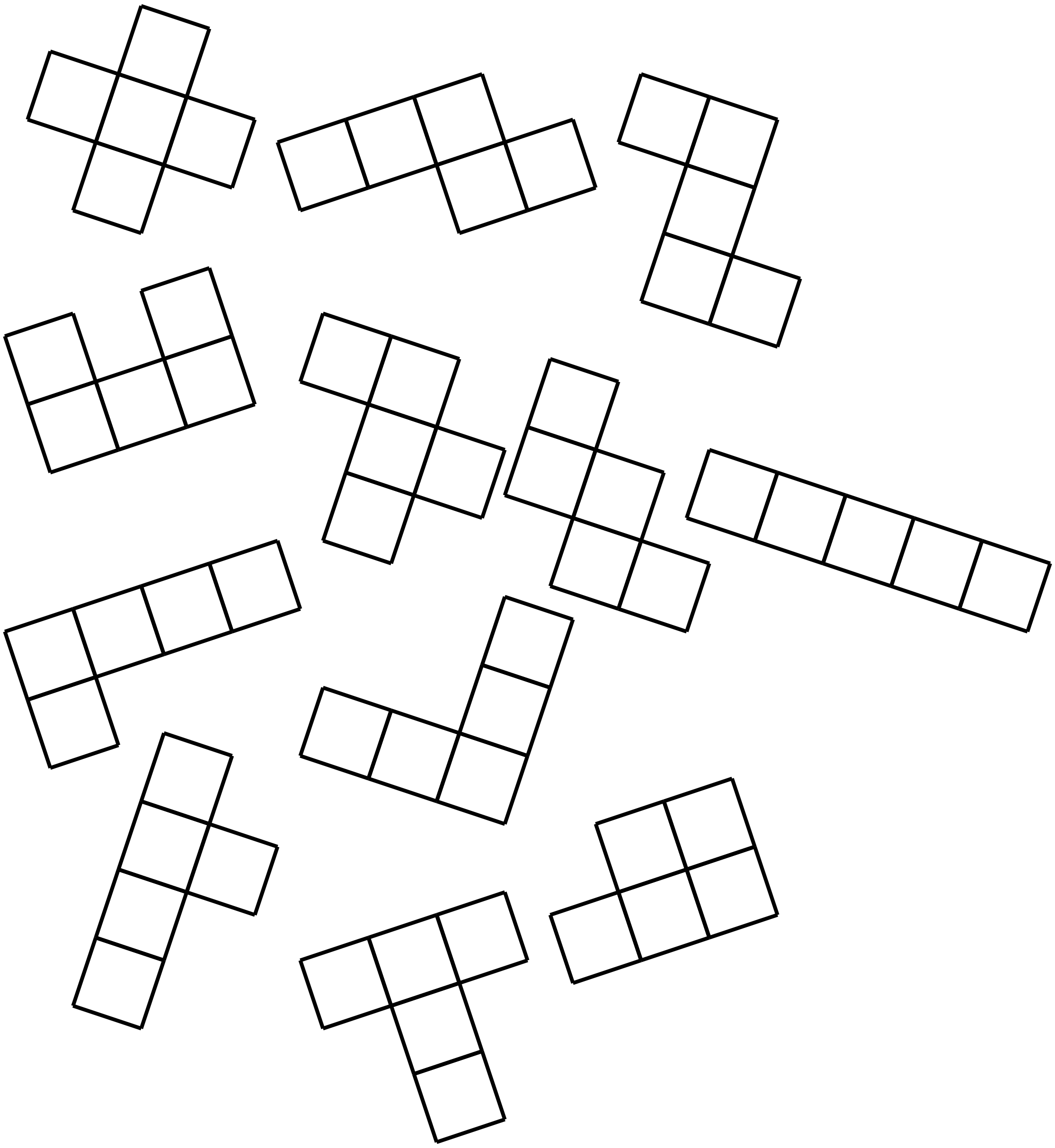
Vers le sommaire

Un tableau à compléter

	Nombre de carreaux	Nombre de côtés	Nombre de segments — pour faire le tour
			

Vers le sommaire

Les 12 pentaminos à dessiner



Sur du papier non quadrillé, dessine ces 12 assemblages de 12 carrés.

Chacun de tes carrés aura 3 cm de côté.

Essaie d'utiliser le moins de feuilles « $21 \times 29{,}7$ » possible….

Vers le sommaire

Remarques pour l'enseignant :

L'activité précédente est une activité de dessin : de nombreux carrés seront dessinés.

Des stratégies de prolongements de côté sont possibles. Il y a occasion de travailler sur la caractérisation de deux droites parallèles comme étant deux droites ayant même écartement.

La remarque « Essaie d'utiliser le moins de feuilles « $21 \times 29{,}7$ » possible…. » doit amener l'élève à optimiser les placements des pièces sur les feuilles.

Certains élèves auront envie d'accoler certaines pièces. Ils pendront petit à petit conscience que ces douze pièces peuvent être considérées comme les pièces d'un puzzle.

Les deux pages suivantes présentent une collection de pentaminos. Les deux pages sont à coller recto verso.

Les pièces sont plus « grosses » et donc plus faciles à manier. De plus, la collection laisse apparente les carrés formant les pentaminos. Ceci est une aide pour des élèves ayant du mal à reproduire des pentaminos sur un quadrillage.

Cependant, la majorité des activités proposées utilise des pentaminos construits à partir de cinq carrés de 1 cm de côté. L'enseignant trouvant trop petites les pièces à manipuler par les élèves pourra photocopier en agrandissant les pièces du jeu et les feuilles d'activité proposées.

Vers le sommaire

Les douze pentaminos (recto verso)

Les deux assemblages suivants sont à coller recto verso sur du carton, et découper dans l’ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.

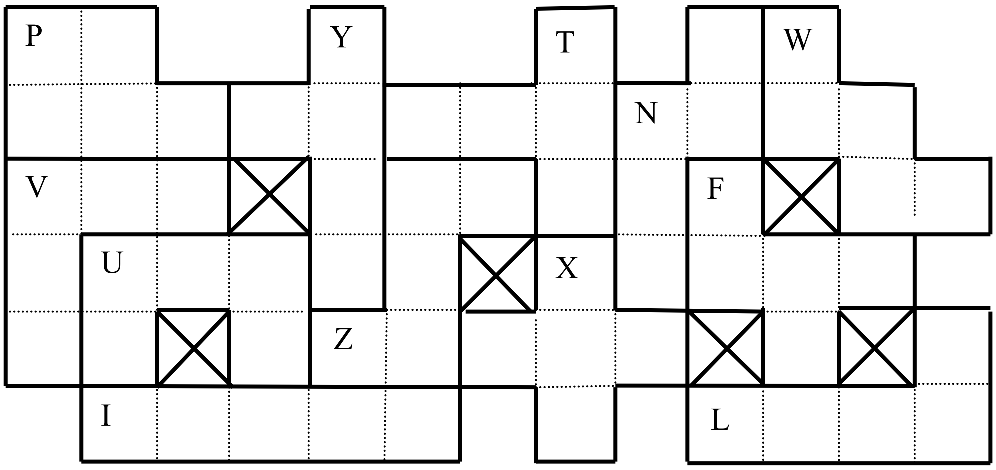
Vers le sommaire

AIRES PERIMETRES ET PENTAMINOS

Vers le sommaire

12 pentaminos à découper
(Ces pentaminos sont utilisables pour les activités présentées par la suite)

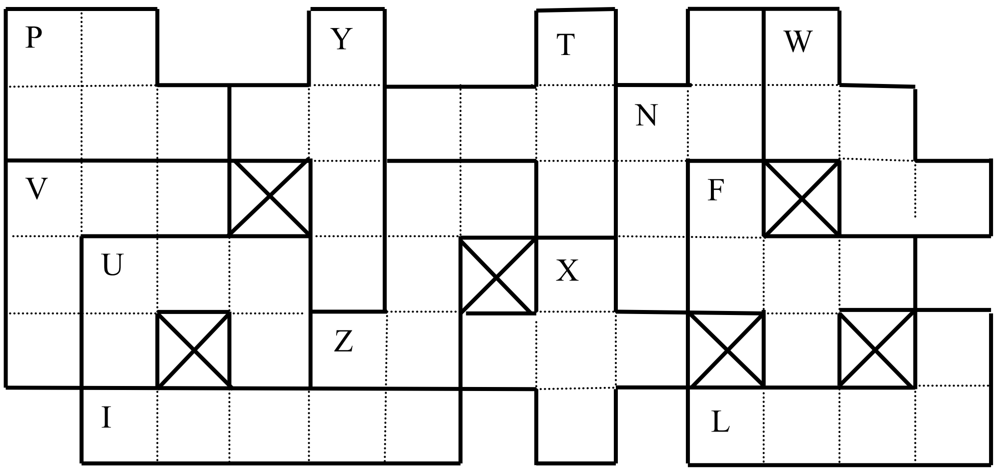
L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.
Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



---

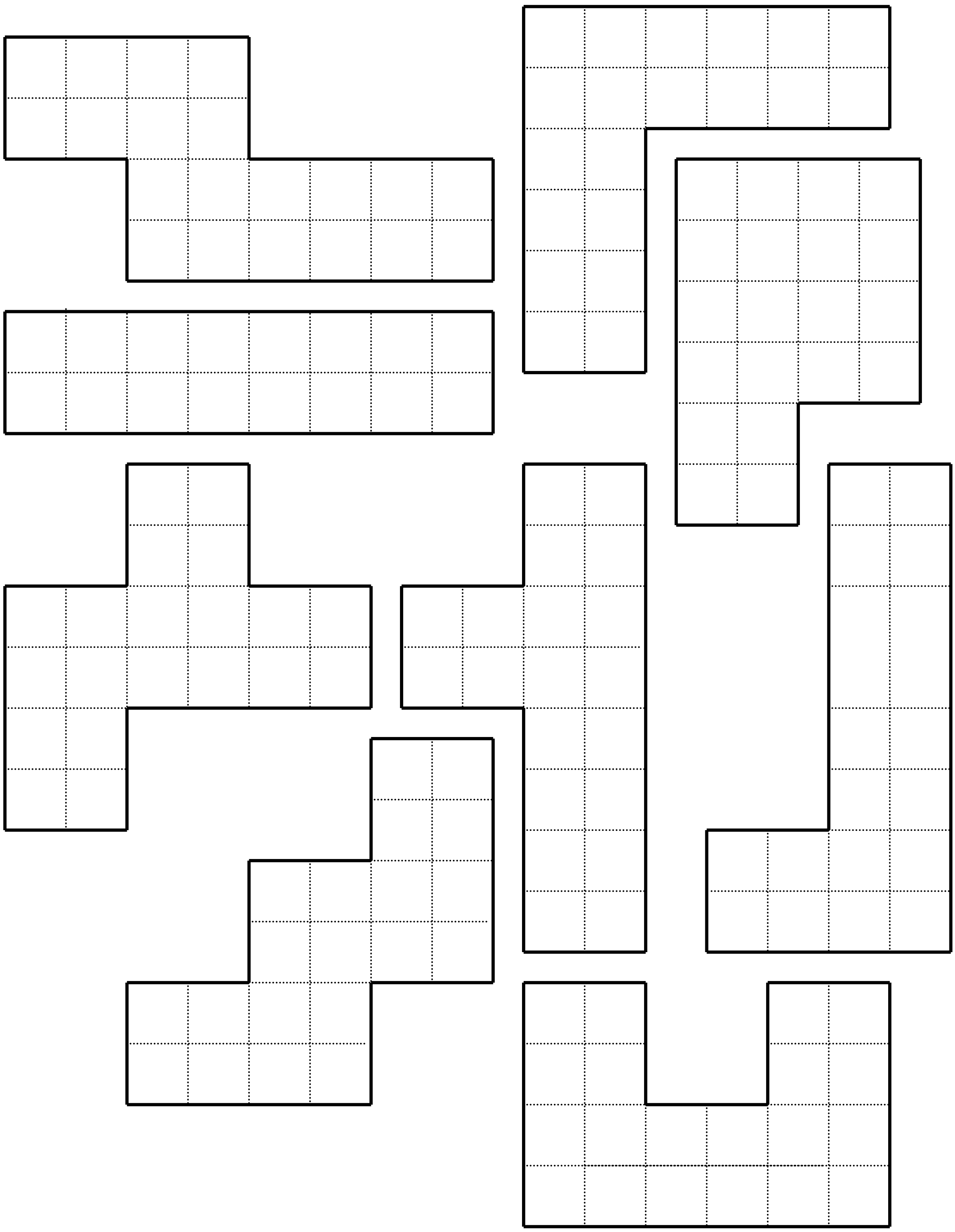
12 pentaminos à découper
(Ces pentaminos sont utilisables pour les activités présentées par la suite)

L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.
Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.

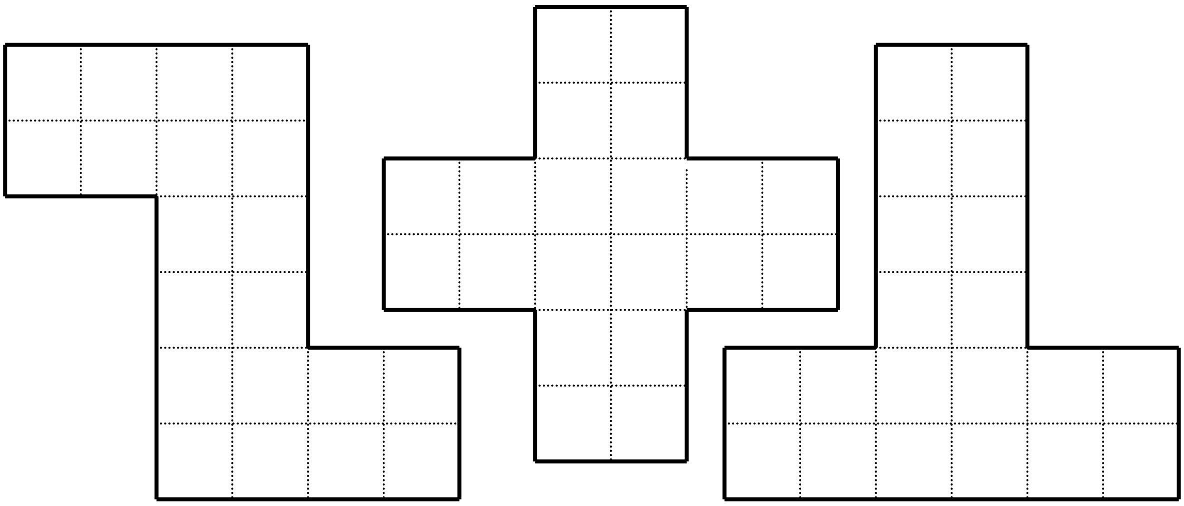


Pentaminos. Echelle 2

J’ai dessiné ci dessous les douze pentaminos à l’échelle2.
Sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les douze pentaminos à l’échelle 1 ? Pour chaque dessin, chaque pièce ne peut être utilisée qu’une seule fois.



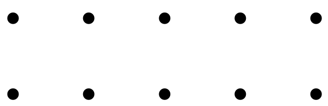
Vers le sommaire

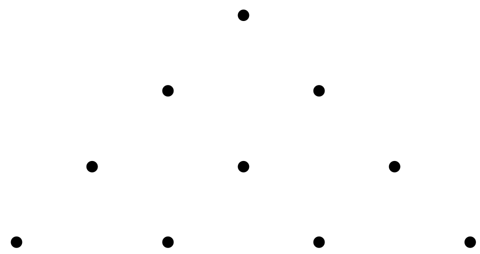


[Vers le sommaire]

Des polygones représentant le nombre 25

Les Grecs utilisaient différents types de représentations figurées des nombres entiers. En voici deux concernant le nombre 10 :

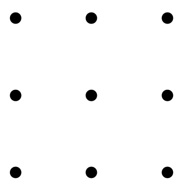


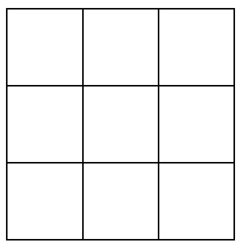


Ces deux visualisations sont différentes : la première considère l’entier 10 comme un produit de deux nombres entiers, la seconde le considère comme la somme des quatre premiers nombres entiers.
Dans ce qui suit, seule la première visualisation sera utilisée, à l’aide d’assemblages de carrés de mêmes dimensions.

Cette visualisation reste présente au vingt et unième siècle dans des expressions telles que « $21 \times 29{,}7$ » pour le format « A4 » du papier ou « 24×36 » pour le format des pellicules de photos argentiques.

Ce type de représentation donne également du sens à l’écriture « 3^2 » lue « 3 au carré ».





Des assemblages de deux rectangles permettent la visualisation de nombres entiers écrits sous forme d’une somme de deux produits comme « $25 = 4 \times 4 + 3 \times 3$ » :

Vers le sommaire

Travail possible à proposer aux élèves :

En utilisant les carreaux du quadrillage, dessiner des polygones représentant :

5×5
$3 \times 5 + 2 \times 5$
$4 \times 5 + 1 \times 5$
$1 \times 1 + 3 \times 8$
$6 \times 4 + 1 \times 1$

Rechercher toutes les solutions possibles pour compléter l'égalité :
$\ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots = 25$

Rechercher tous les polygones possibles représentant « $3 \times 5 + 2 \times 5$ ».

Suite du travail en classe :

Les cinq activités intitulées « aire, périmètre et pentaminos » sont distribuées dans la classe. Elles présentent des représentations de l'entier « 25 » sous la forme « $\ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$ ».

Ce type de représentation ayant déjà été rencontrée, les élèves constatent rapidement que l'aire ne varie pas (25 carreaux), mais que parfois le périmètre varie et parfois le périmètre ne varie pas…

Les pentaminos utilisés sont issus des photocopies des assemblages présentés en début du document, puis collés sur du carton et découpés.

La recherche du recouvrement des polygones proposés par des pièces choisies parmi les 12 s'est faite sans problème.

Les polygones représentant « $3 \times 5 + 2 \times 5$ » ont été évoqués dans le Petit Vert n°71 (bulletin de l'A.P.M.E.P. Lorraine de septembre 2002) dans l'article « Deux rectangles accolés et des polygones » mis en annexe.

Ne pourrait-on pas imaginer d'autres polygones formés de deux rectangles accolés recouvrables par plus de cinq pentaminos ?
L'étude de nombres (et de leur décomposition sous forme de somme de deux produits) représentant des assemblages de plus de cinq pentaminos plait beaucoup aux élèves : en témoignage est jointe une feuille d'activité présentant quelques créations d'élèves de sixième. Les nombres 30, 35, 40 furent abordés très vite et l'envie d'essayer le nombre 60 a laissé de belles pistes de recherche.

Pour les lecteurs n'ayant pas l'occasion de faire réaliser ce type de polygones par leurs élèves, deux progressions sont fournies pour les entiers multiples de 5 jusqu'à 60. La première reprend des décompositions additives « $\ldots \times \ldots + \ldots \times \ldots$ », la seconde envisage des décompositions soustractives « $\ldots \times \ldots - \ldots \times \ldots$ ».

D'autres pistes de travail sont fournies ensuite :

Recherche du recouvrement des rectangles représentant les nombres « $5 \times k$ » avec k variant de 1 à 12. Nous retrouvons là en partie ce qui est proposé par les créateurs du jeu KATAMINO.

Recherche de justifications du fait que certains polygones ne sont pas recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos.

Vers le sommaire

Elles ont été mises en route en classe, et poursuivies en temps libre à la maison. Des temps de synthèse ont permis de faire le bilan de la recherche pour les rectangles représentant les nombres « 5 × k ». Le rectangle utilisant les 12 pièces n'a pas été trouvé par mes élèves….
D'autres temps de synthèse a permis la critique des propositions des élèves à propos des impossibilités de recouvrement.

Remarques :

Le nombre 25 a été choisi comme point de départ, mais d'autres activités sont imaginables en utilisant les nombres 30, 35, 40…
Cependant, le nombre 25 présente de nombreux avantages :
Il peut s'écrire sous la forme « 5 × 5 ». Le carré est un rectangle particulier.
Le recouvrement des polygones proposés se fait aisément et donne l'envie à l'élève d'aller plus loin… Il aimerait bien réussir aussi facilement avec les 12 pentaminos.

Pour terminer :

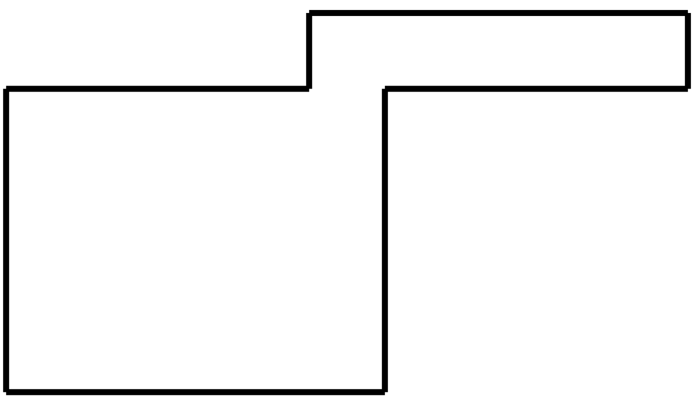
Avec les pentaminos, il est possible de réaliser autre chose que des rectangles. Des silhouettes d'animaux se trouvent dans diverses revues pédagogiques.
Voici en complément une progression d'utilisation de 1 à 12 pentaminos incitant à la recherche de silhouettes d'objets (actuellement, le profil des téléphones portables à évolué…), ainsi que des créations d'élèves très influencés par la guerre du golfe (c'était l'époque…). Ces travaux d'élèves devraient pouvoir donner envie de créer d'autres silhouettes à recouvrir par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos. La notion d'aire est toujours présente puisqu'il peut être intéressant de dessiner à l'avance les polygones représentant les nombres « 5 × k », puis de chercher ensuite un recouvrement possible. Les élèves ont plutôt tendant à assembler quelques pentaminos puis regarder si cela ressemble à quelque chose. Cette méthode est vite mise en défaut avec l'utilisation de plus de 5 pentaminos…

Vers le sommaire

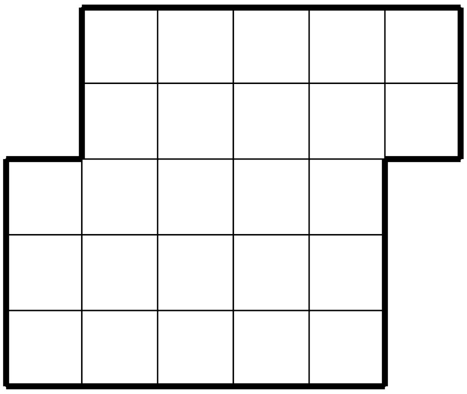
Aires, périmètres et pentaminos (1)

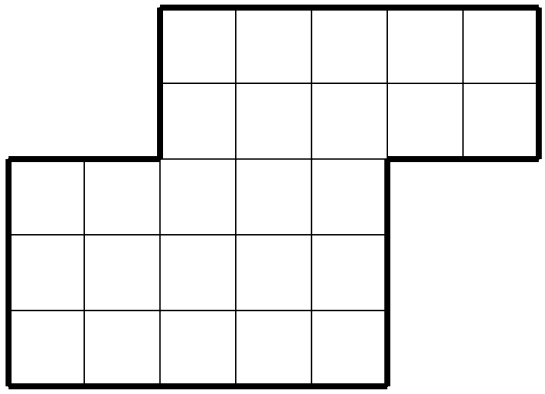
Sous chacun des dessins ci-dessous, indique en rouge le nombre de carrés contenus (l'aire)
et en vert le nombre de segments formant le pourtour (le périmètre).

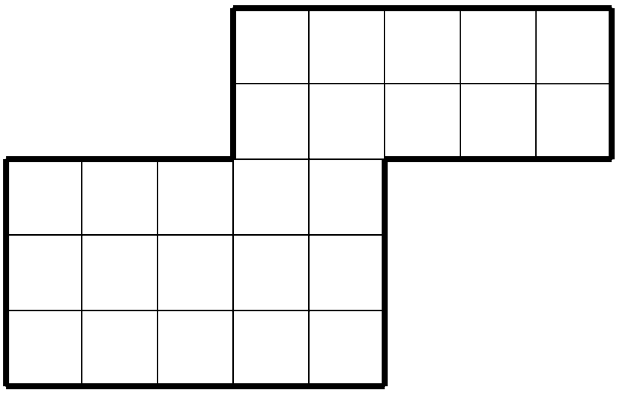
Chacun des dessins ci-dessous est-il recouvrable par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?
Dessine ta solution, lorsqu'elle existe.

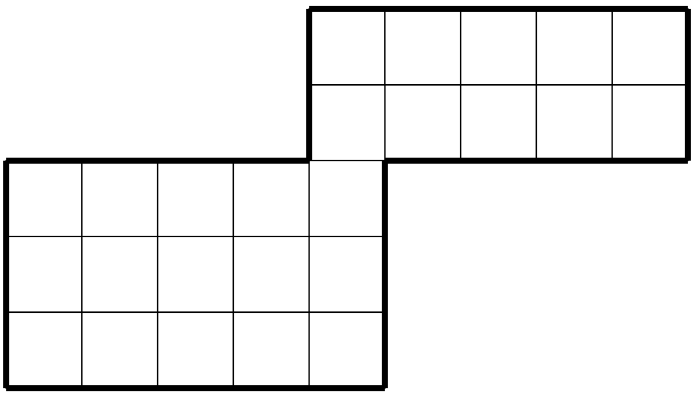


Vers le sommaire







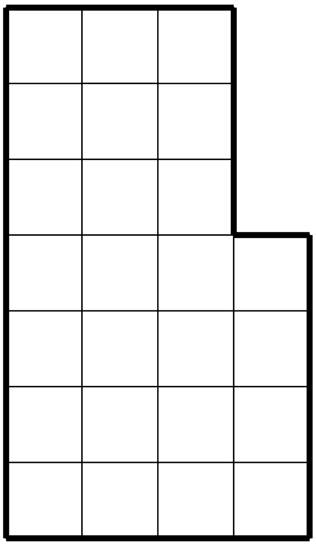
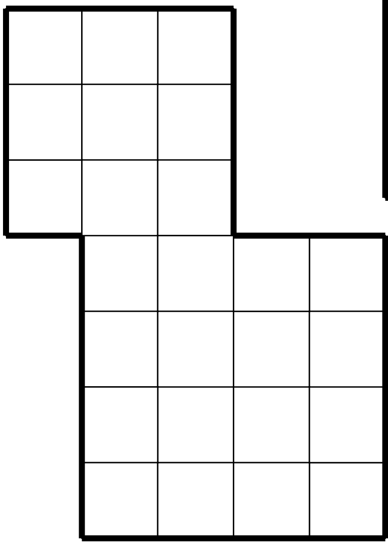
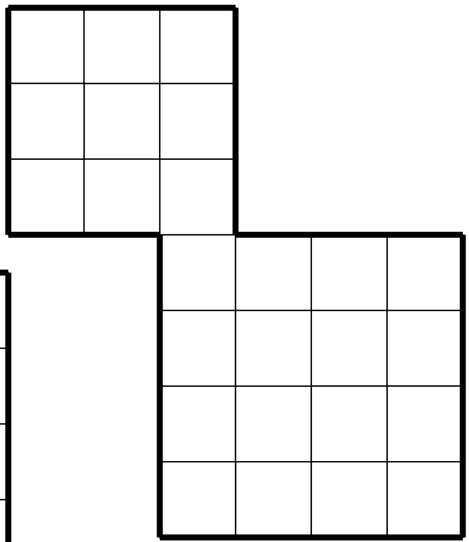
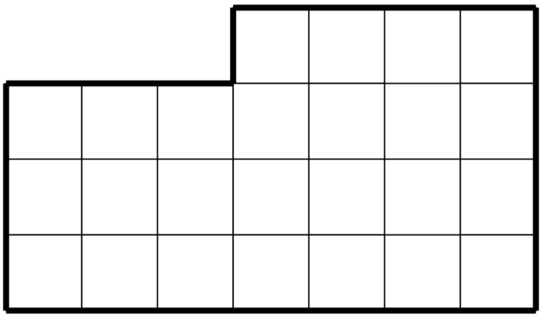
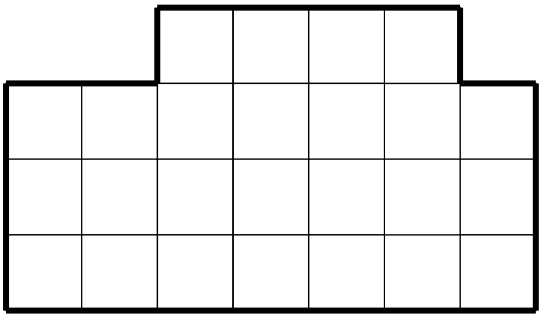
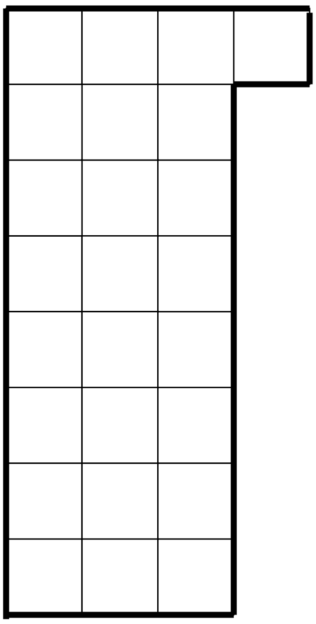
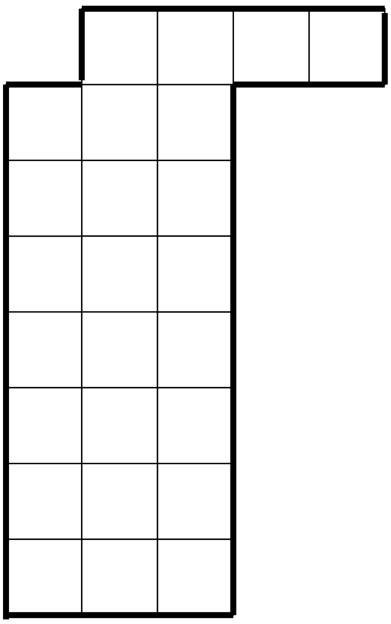
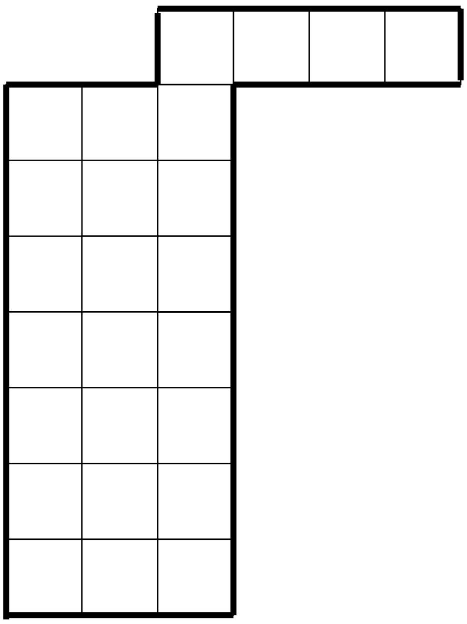


Vers le sommaire

Aires, périmètres et pentaminos (2)

Sous chacun des dessins ci-dessous, indique en rouge le nombre de carrés contenus (l’aire) et en vert le nombre de segments formant le pourtour (le périmètre).

Chacun des dessins ci-dessous est-il recouvrable par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?
Dessine ta solution, lorsqu’elle existe.

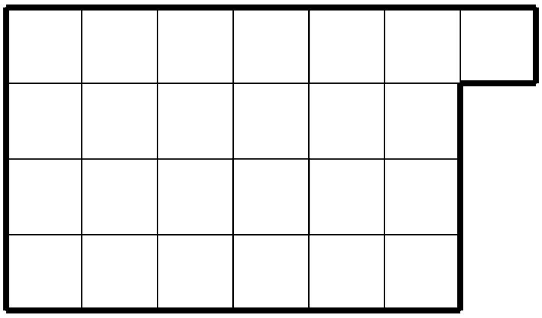









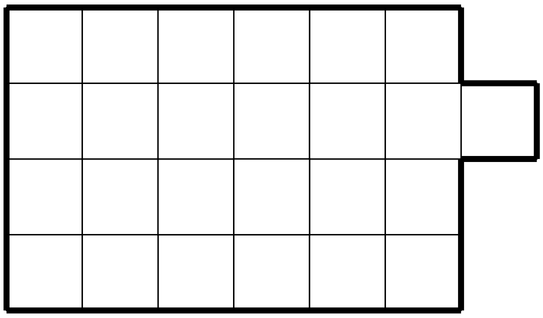
Vers le sommaire

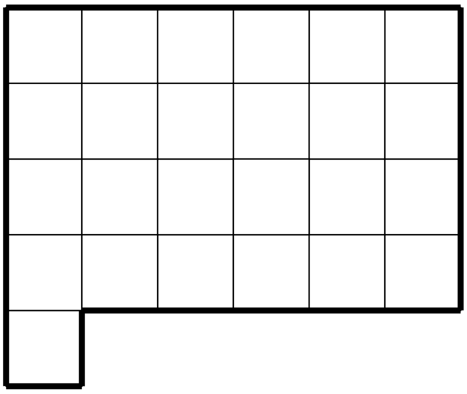
Aires, périmètres et pentaminos (3)

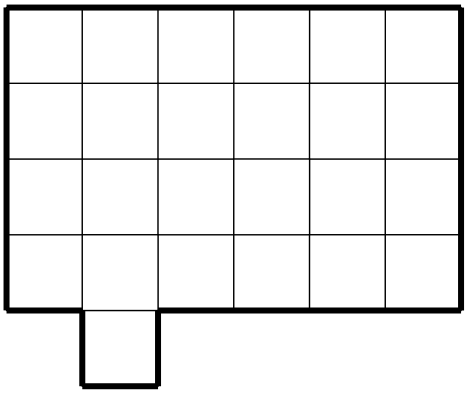
Sous chacun des dessins ci-dessous, indique en rouge le nombre de carrés contenus (l'aire) et en vert le nombre de segments formant le pourtour (le périmètre).

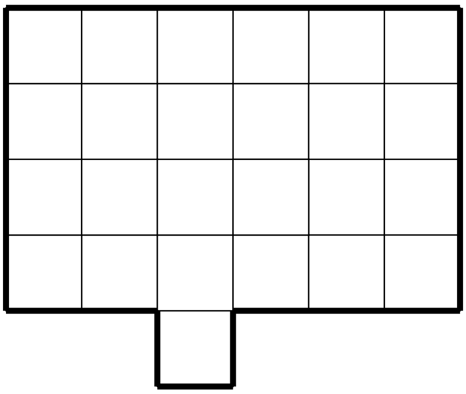
Chacun des dessins ci-dessous est-il recouvrable par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?
Dessine ta solution, lorsqu'elle existe.



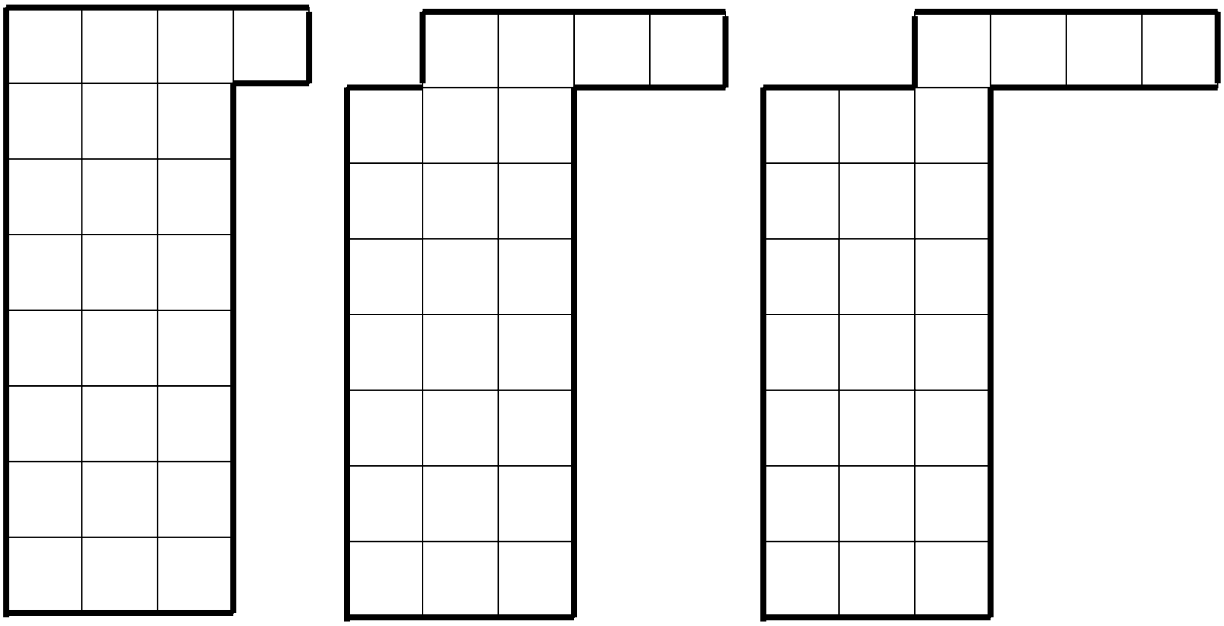








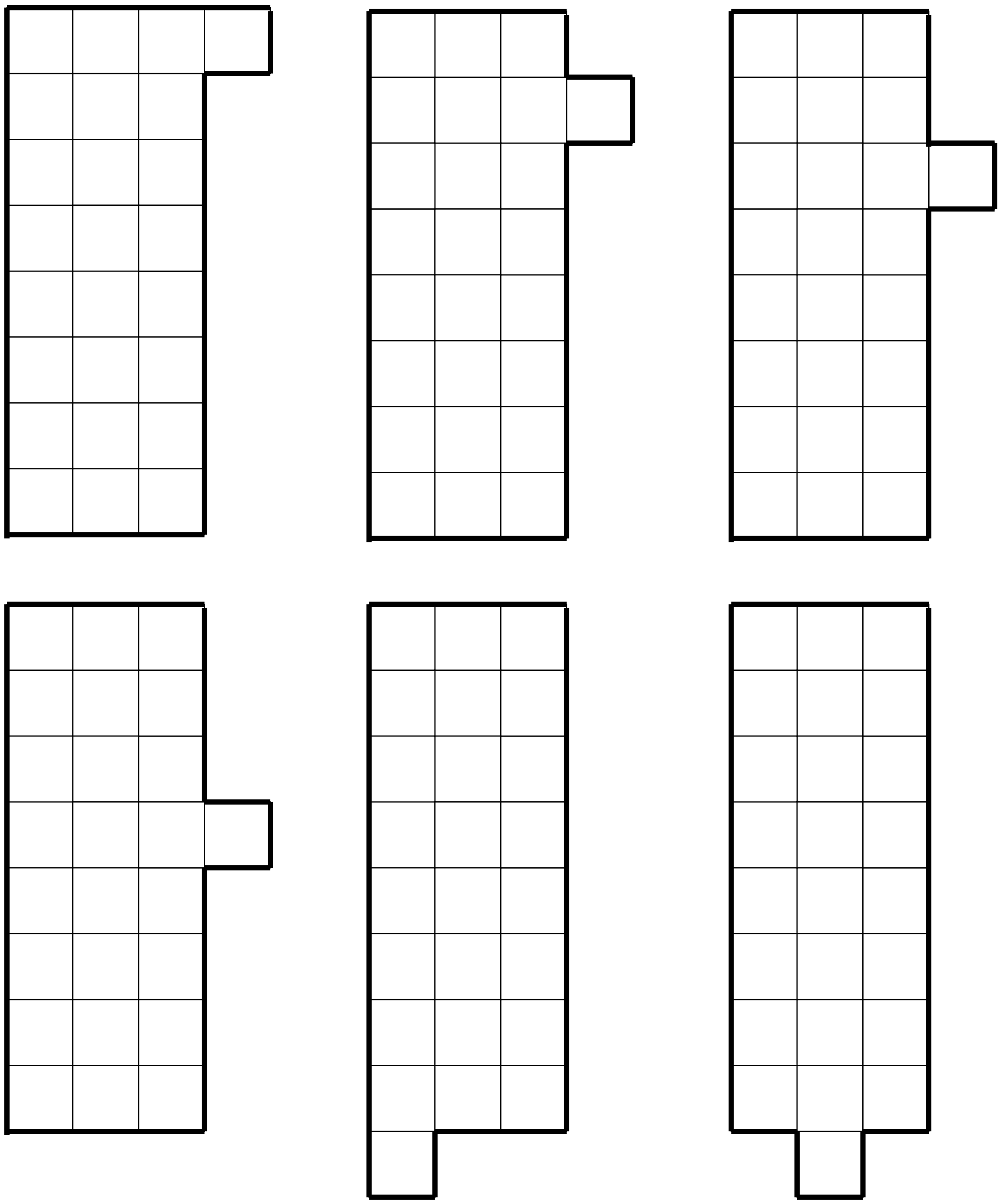
Vers le sommaire



Aires, périmètres et pentaminos (4)

Sous chacun des dessins ci-dessous, indique en rouge le nombre de carrés contenus (l'aire) et en vert le nombre de segments formant le pourtour (le périmètre).

Chacun des dessins ci-dessous est-il recouvrable par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?
Dessine ta solution, lorsqu'elle existe.

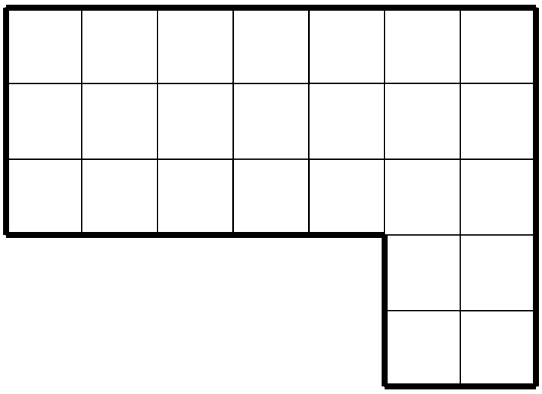


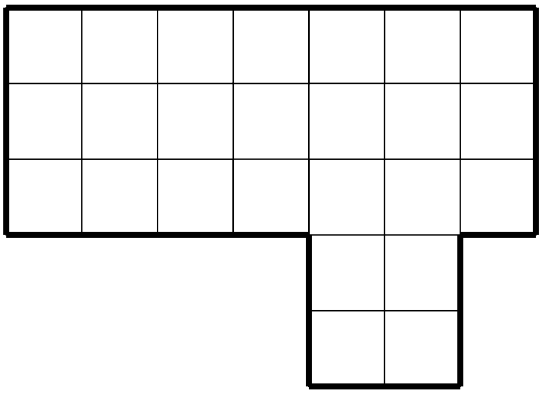
Vers le sommaire

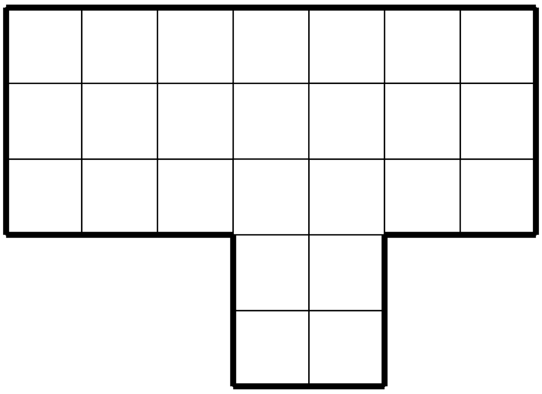
Aires, périmètres et pentaminos (5)

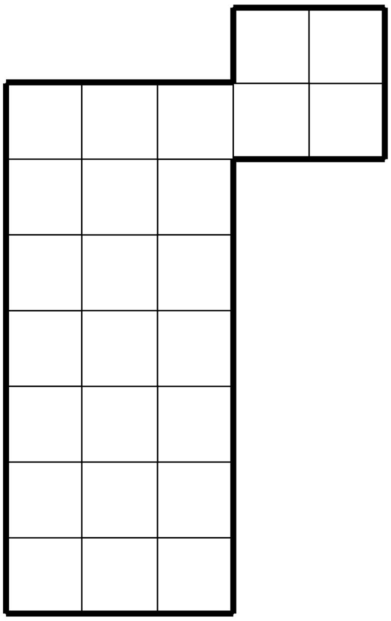
Sous chacun des dessins ci-dessous, indique en rouge le nombre de carrés contenus (l'aire) et en vert le nombre de segments formant le pourtour (le périmètre).

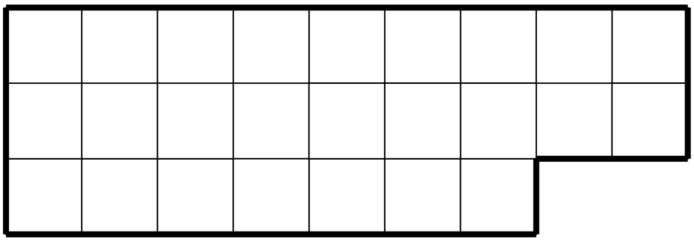
Chacun des dessins ci-dessous est-il recouvrable par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?
Dessine ta solution, lorsqu'elle existe.

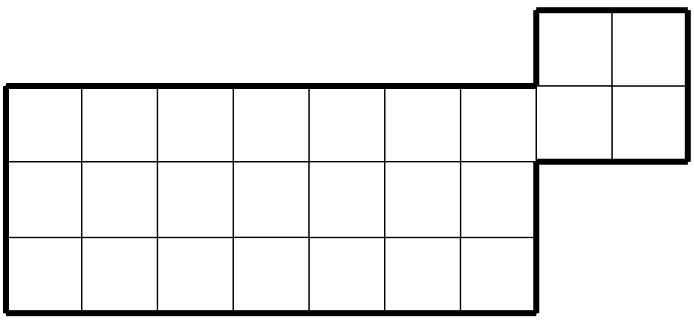








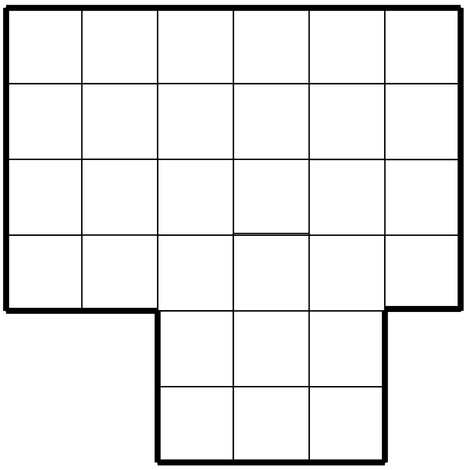




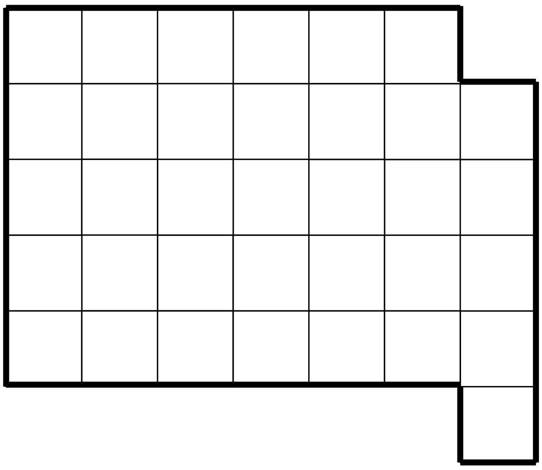
Vers le sommaire

Des polygones proposés par des élèves (1)
(6[e] B, collège de Saint-Mihiel, 1997)

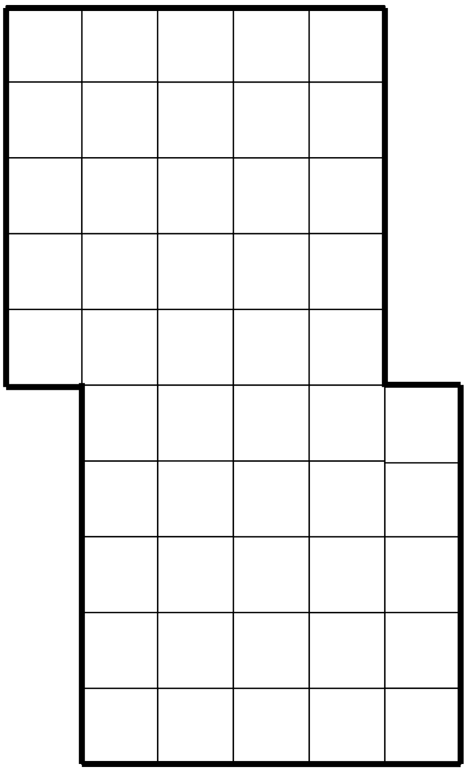
Sous chaque polygone de cette feuille, indique les calculs permettant de calculer le périmètre P et l'aire A (voir en exemple, le premier polygone).



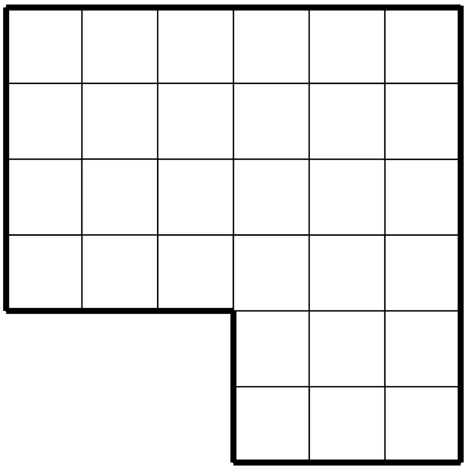
$P = 2 + 2 + 3 + 2 + 1 + 4 + 6 + 4$
$A = 4 \times 6 + 3 \times 2$



P = ………………………………..
A = ……………………………….

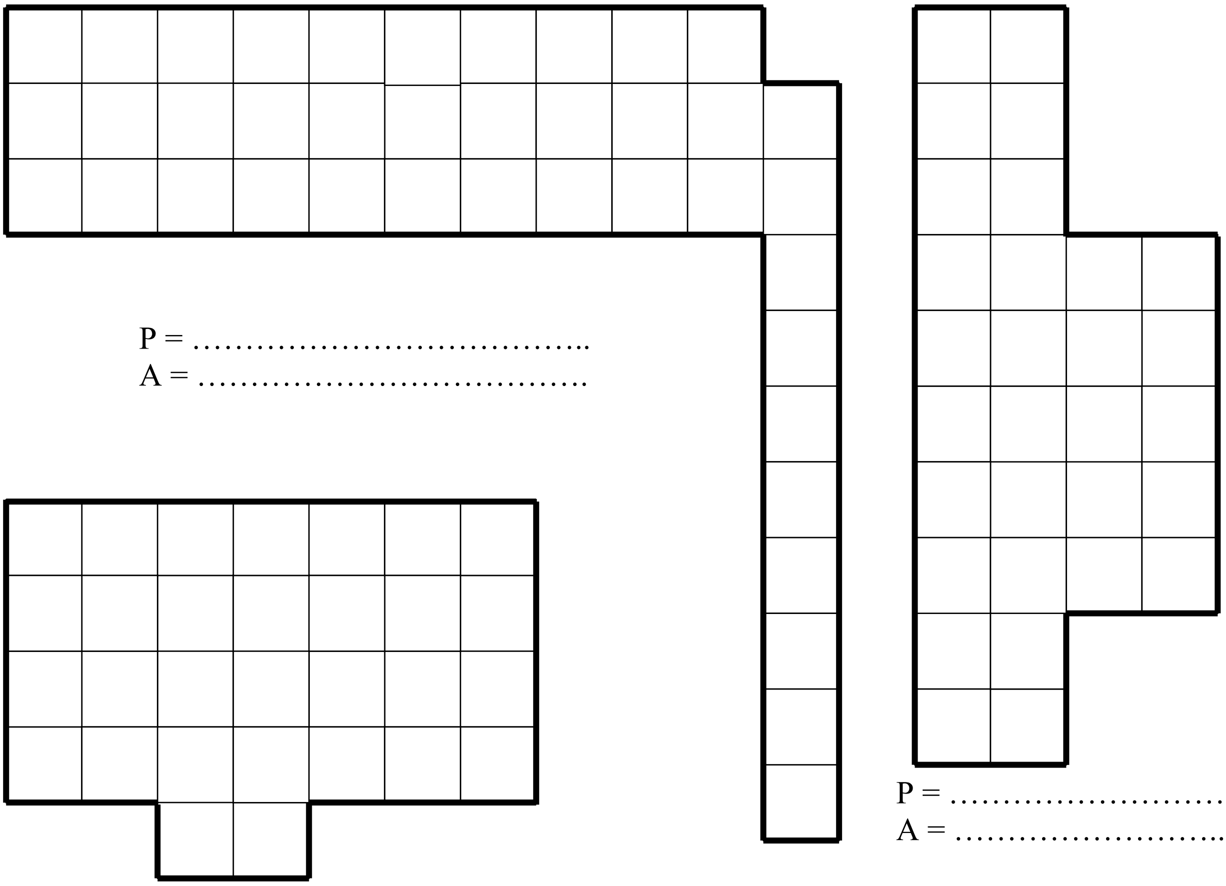


P = ………………………………..
A = ……………………………….



P = ………………………………..
A = ……………………………….

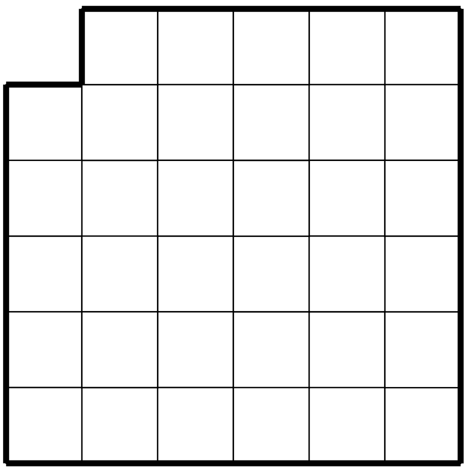
Vers le sommaire



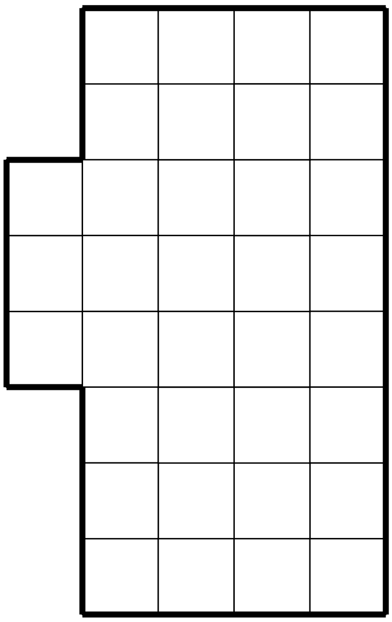
P = …………………………………..
A = …………………………………

P = …………………………...
A = ……………………..….

P = …………………………………..
A = …………………………………



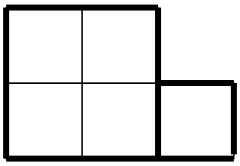
P = …………………………………..
A = …………………………………



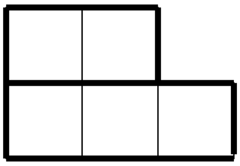
P = …………………………………..
A = …………………………………

Vers le sommaire

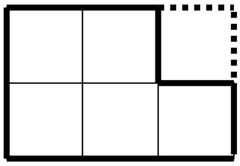
Des nombres, des polygones et des pentaminos



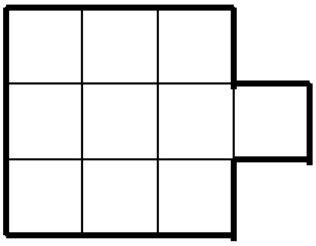
En découpant verticalement :
$5 = 2 \times 2 + 1 \times 1$



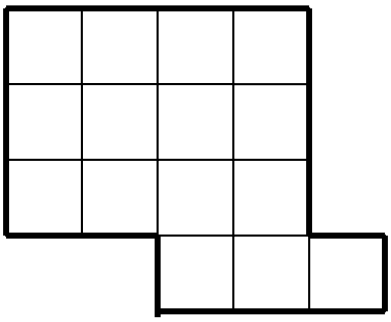
En découpant horizontalement :
$5 = 3 \times 1 + 2 \times 1$



En entourant le polygone :
$5 = 3 \times 2 - 1 \times 1$



En découpant verticalement : 10 =
En découpant horizontalement : 10 =
En entourant le polygone : 10 =



En découpant verticalement : 15 =
En découpant horizontalement : 15 =
En entourant le polygone : 15 =

D'autres nombres sont représentables par des polygones recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos.

Continue la recherche…

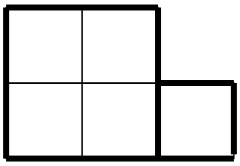
Vers le sommaire

Des rectangles accolés et des pentaminos

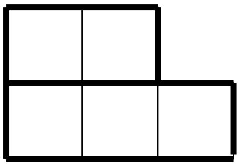
Les polygones dessinés représentent des nombres entiers.

Pour chacun d'entre eux, en observant l'exemple donné ci-dessous, il faudra écrire ces nombres sous la forme « …×…+…×… » de deux façons différentes.

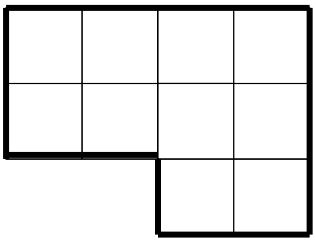
Ensuite en choisissant des pièces parmi les 12 pentaminos (chaque pièce ne peut être utilisée qu'une fois), il faudra tenter de recouvrir les polygones proposés.



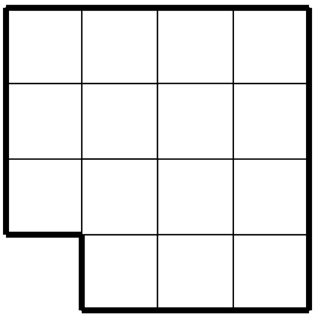
$5 = 2\times 2 + 1\times 1$



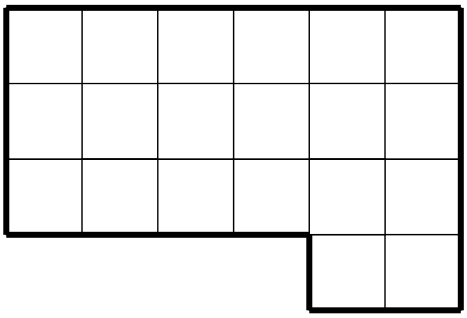
$5 = 3\times 1 + 2\times 1$



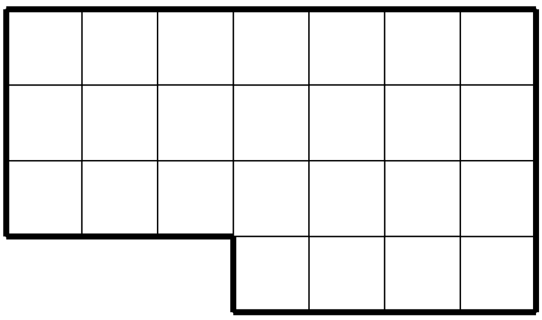
10 = …×… + …×…
10 = …×… + …×…



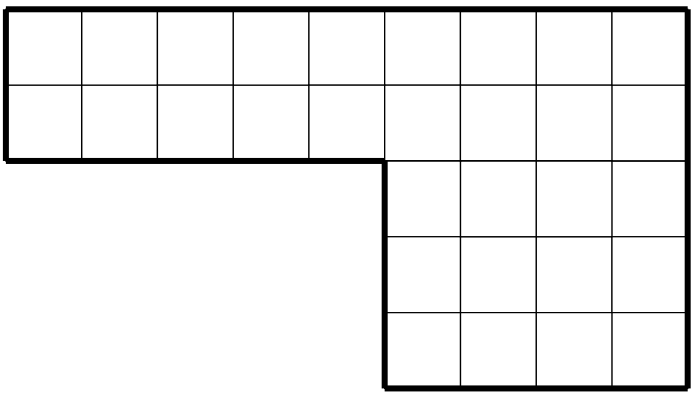
15 = …×… + …×…
15 = …×… + …×…



20 = …×… + …×…
20 = …×… + …×…

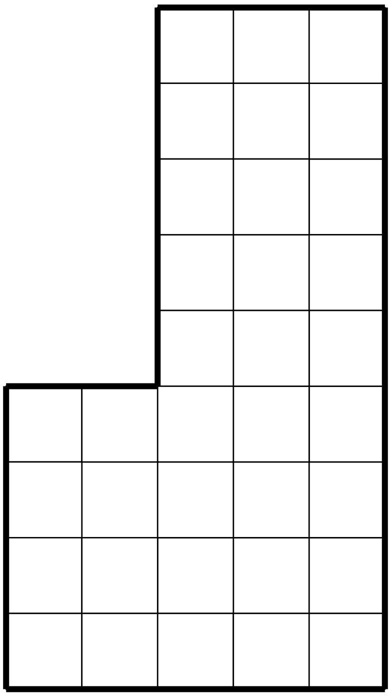


25 = …×… + …×…
25 = …×… + …×…

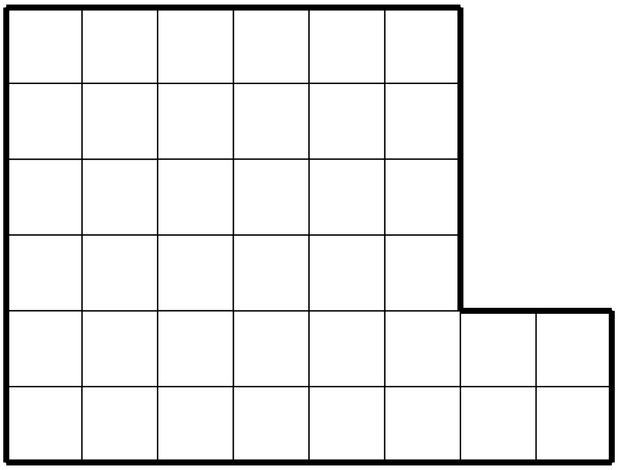


30 = …×… + …×…
30 = …×… + …×…

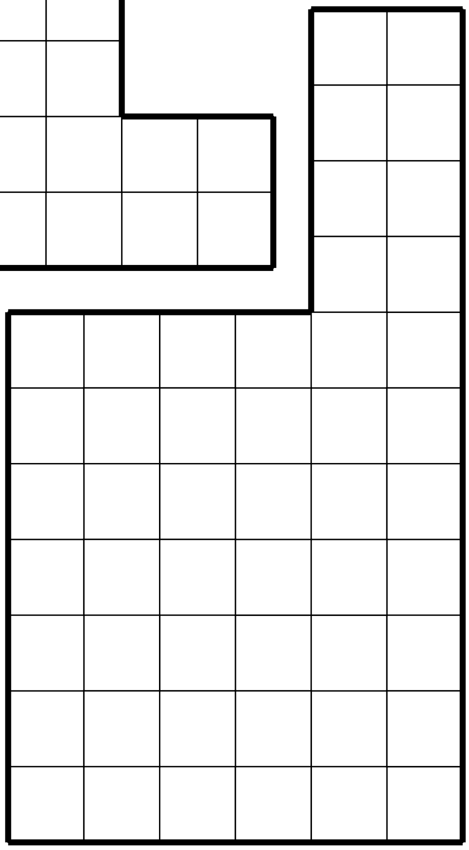
Vers le sommaire



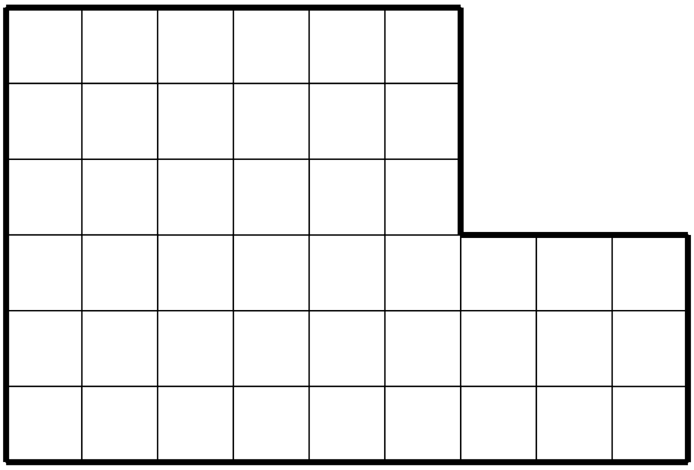
35 = …×… + …×…
35 = …×… + …×…



40 = …×… + …×…
40 = …×… + …×…

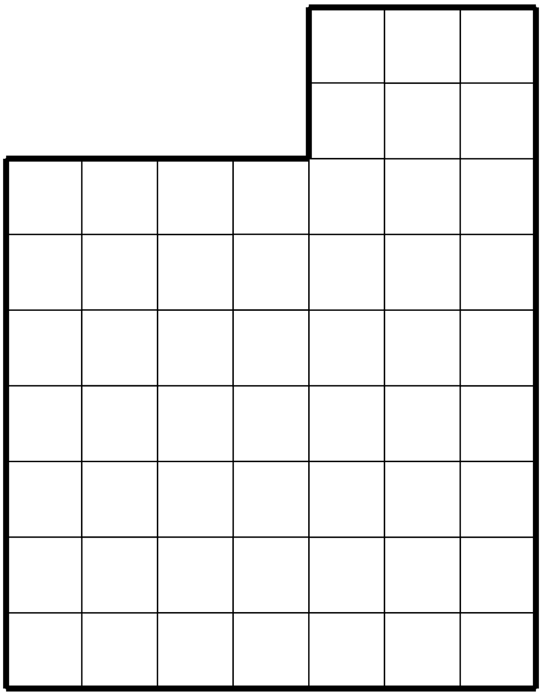


50 = …×… + …×…
50 = …×… + …×…

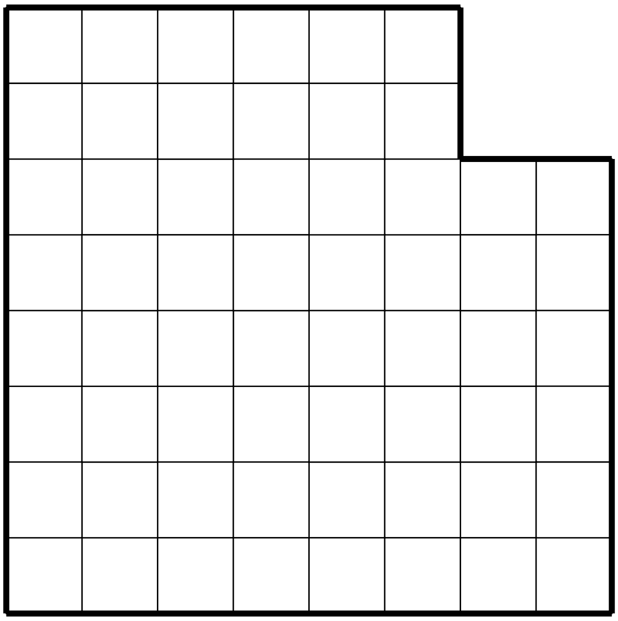


45 = …×… + …×…
45 = …×… + …×…

Vers le sommaire



55 = …×… + …×…
55 = …×… + …×…



60 = …×… + …×…
60 = …×… + …×…

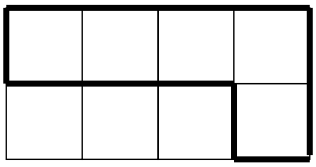
Vers le sommaire

Des rectangles écornés et des pentaminos

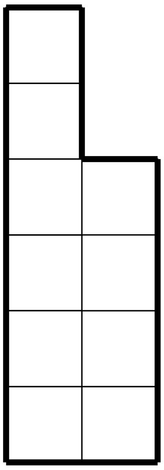
Les polygones dessinés représentent des nombres entiers.

Pour chacun d'entre eux, en observant l'exemple donné ci-dessous, il faudra écrire ces nombres sous la forme « $\ldots\times\ldots+\ldots\times\ldots$ ».

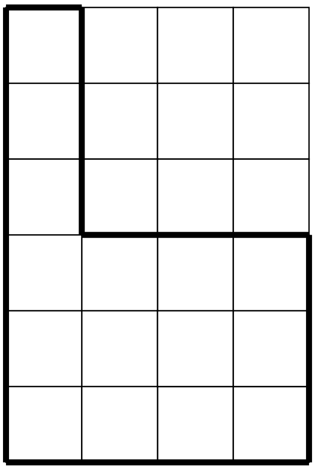
Ensuite en choisissant des pièces parmi les 12 pentaminos (chaque pièce ne peut être utilisée qu'une fois), il faudra tenter de recouvrir les polygones proposés.



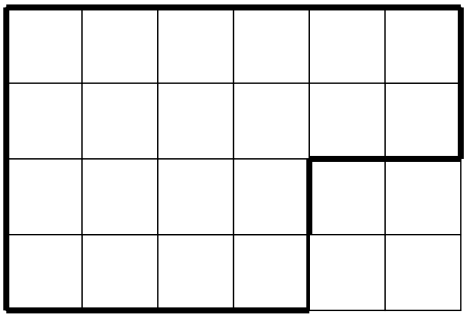
$5 = 4\times 2 - 3\times 1$



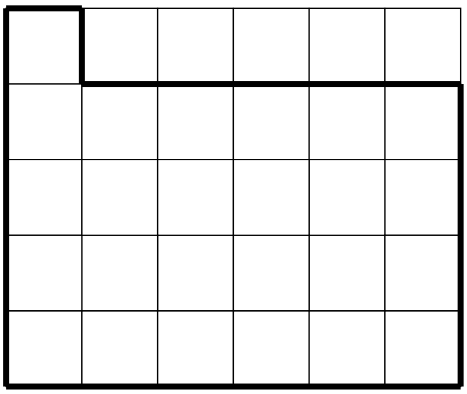
$10 = \ldots\times\ldots - \ldots\times\ldots$



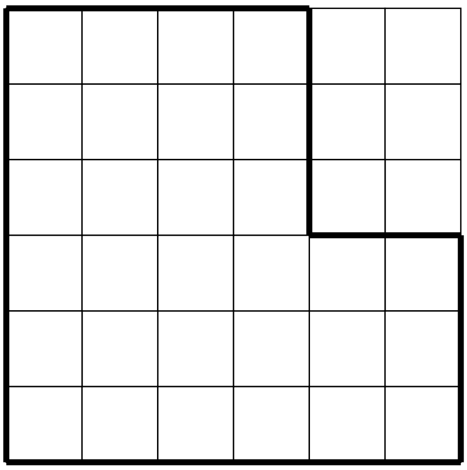
$15 = \ldots\times\ldots - \ldots\times\ldots$



$20 = \ldots\times\ldots - \ldots\times\ldots$

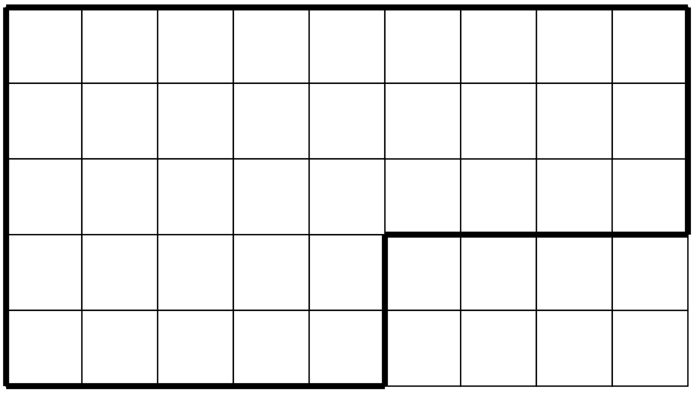


$25 = \ldots\times\ldots - \ldots\times\ldots$



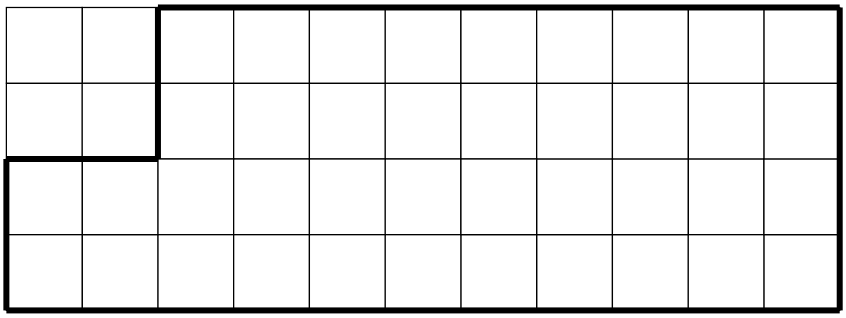
$30 = \ldots\times\ldots - \ldots\times\ldots$

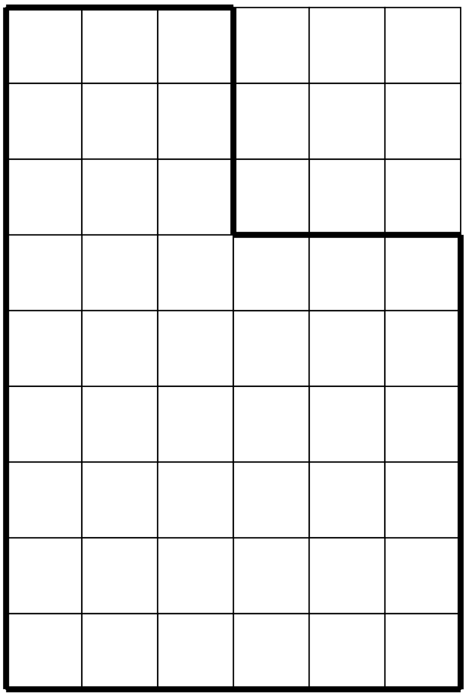
Vers le sommaire



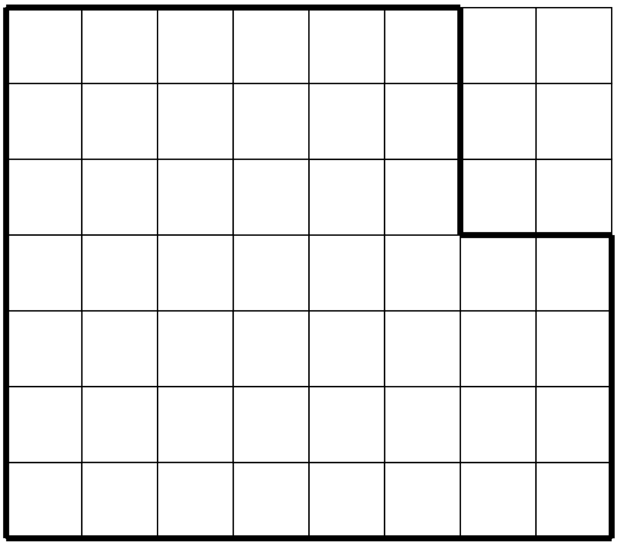
35 = …×… - …×…

40 = …×… - …×…



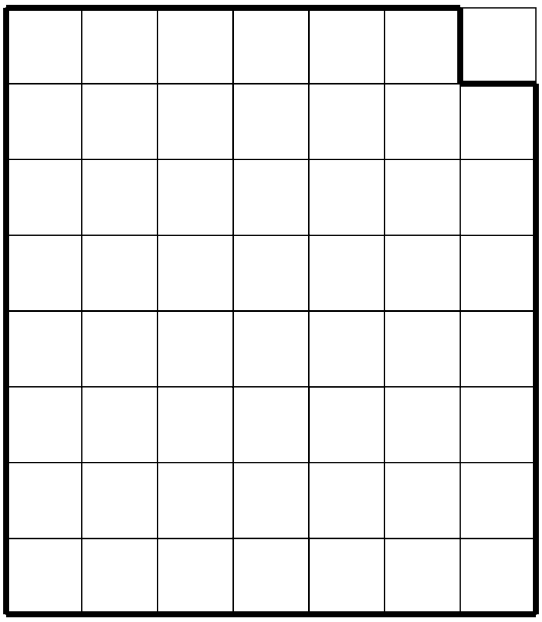


45 = …×… - …×…

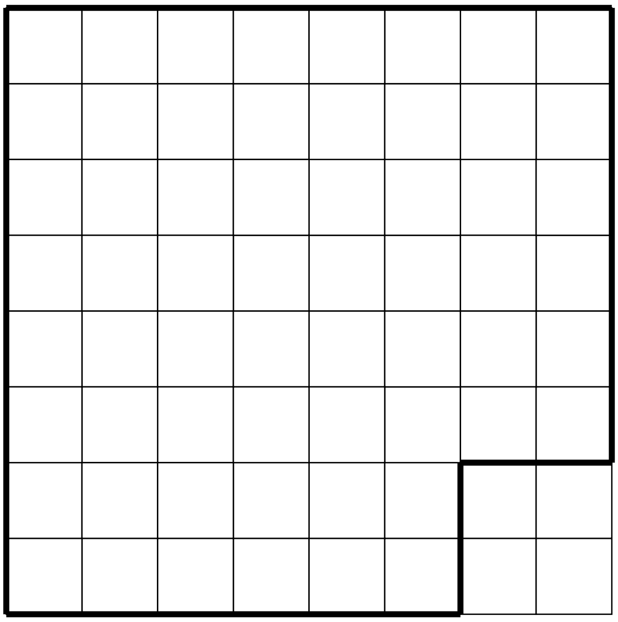


50 = …×… - …×…

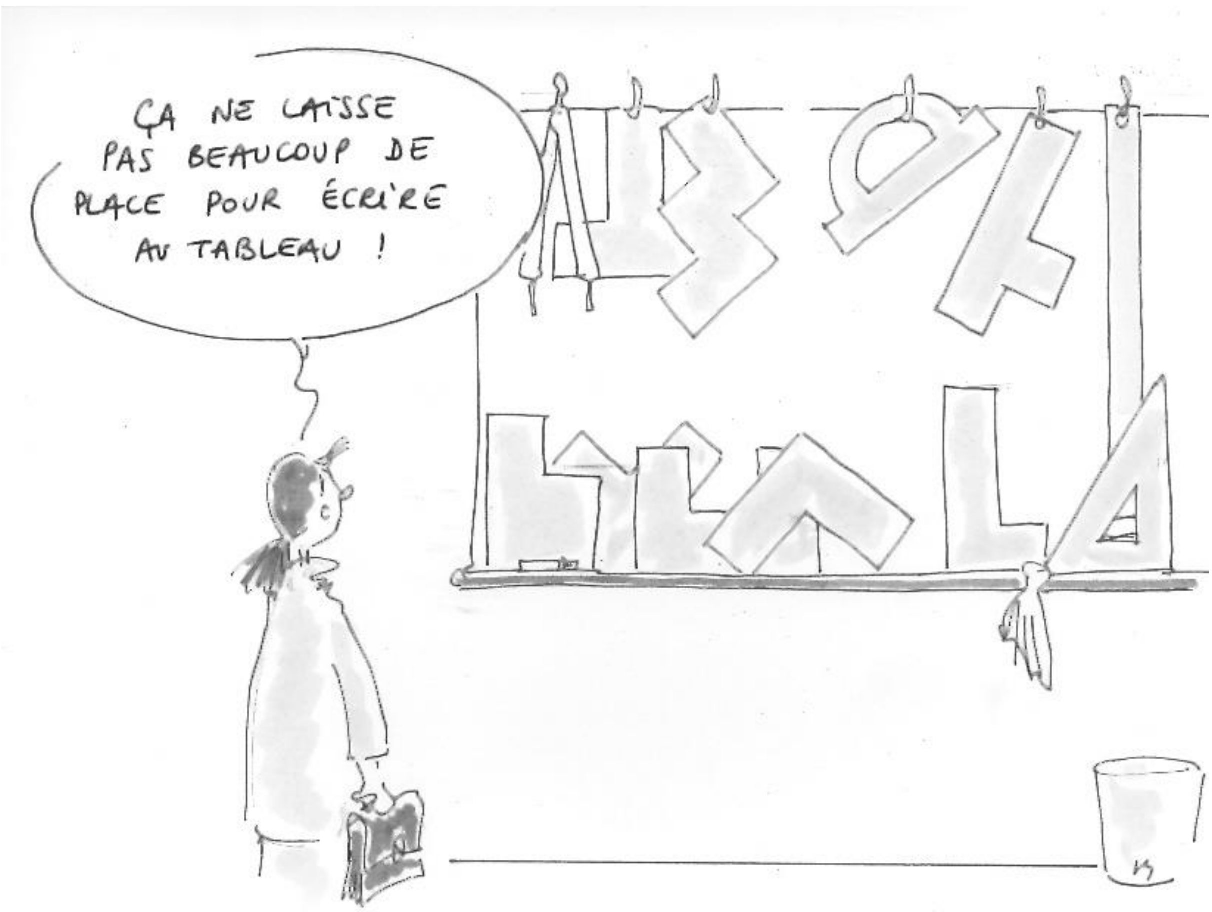
Vers le sommaire



55 = …×… - …×…



60 = …×… - …×…

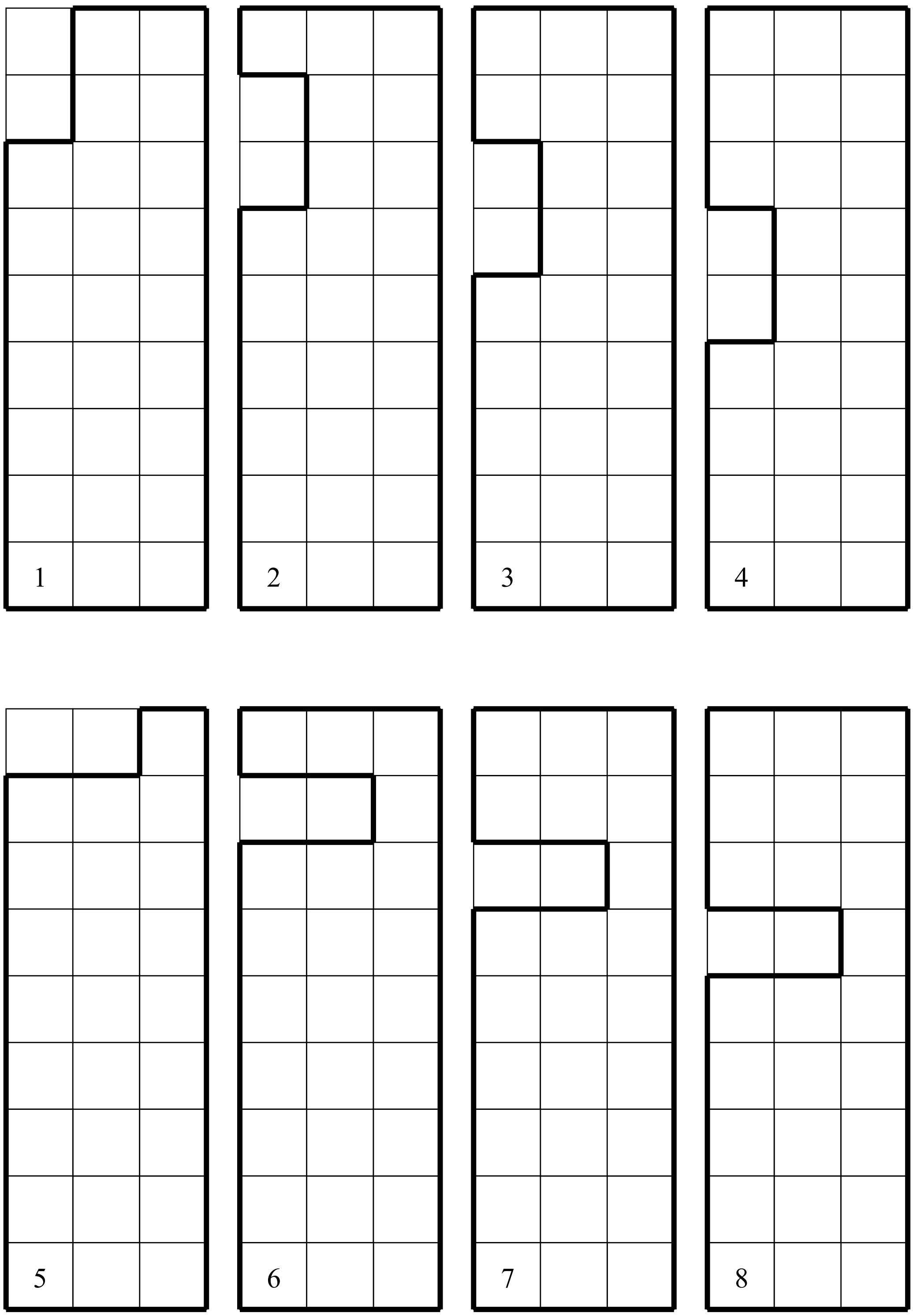


Vers le sommaire

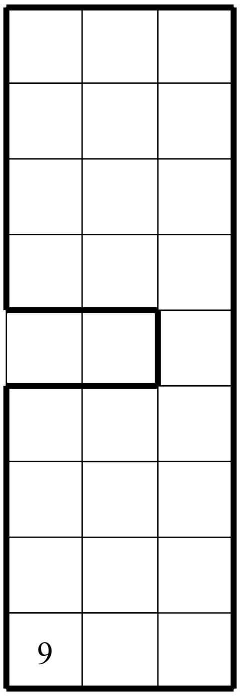
« 3×9 - 2×1 » et des pentaminos

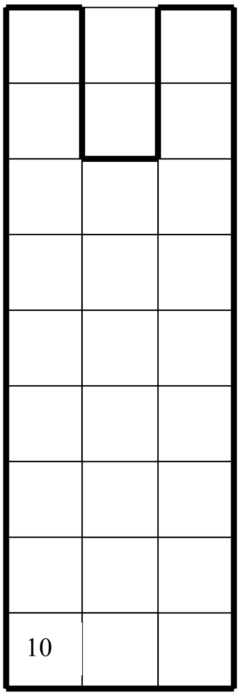
Voici des polygones représentant le nombre « 3×9 - 2×1 ».

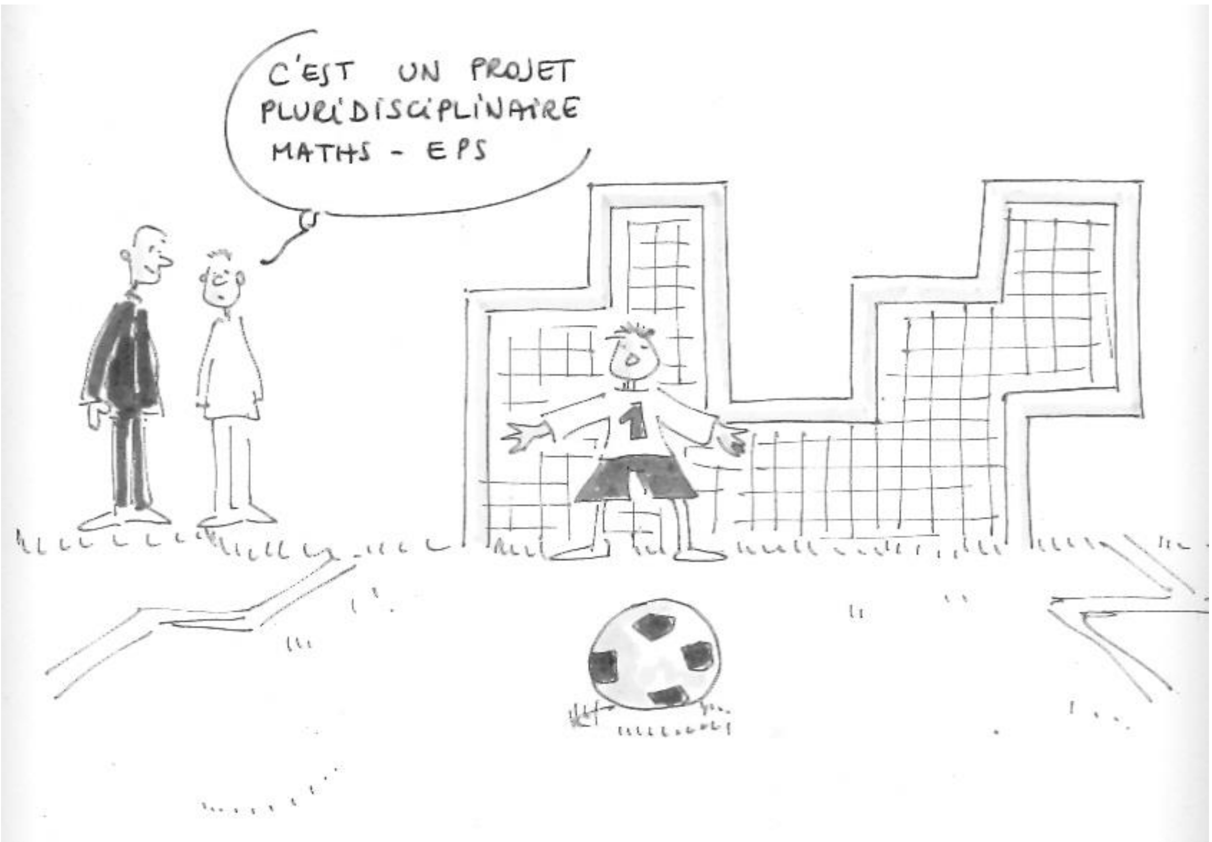
En choisissant des pièces parmi les 12 pentaminos (chaque pièce ne peut être utilisée qu'une fois), tente de recouvrir les polygones proposés.



Vers le sommaire



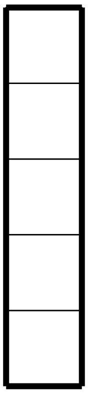




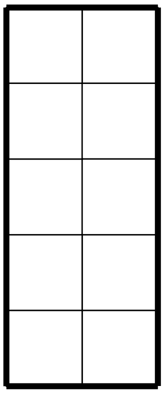
Vers le sommaire

Des rectangles et des pentaminos

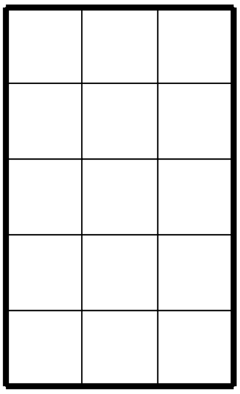
En utilisant une pièce, puis deux pièces, puis trois pièces, puis quatre pièces… esssaie de recouvrir les rectangles dessinés ci dessous :



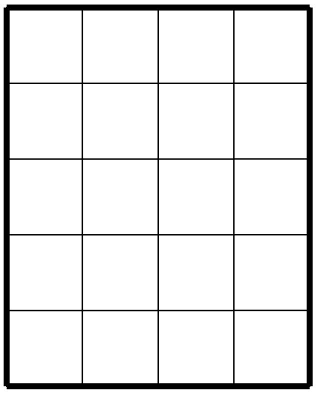
5 = …×…



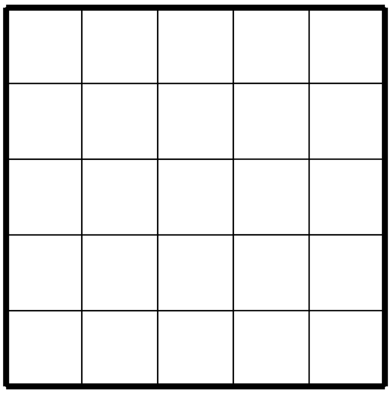
10= …×…



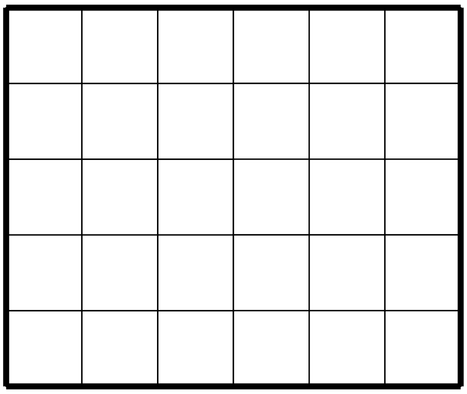
15 = …×…



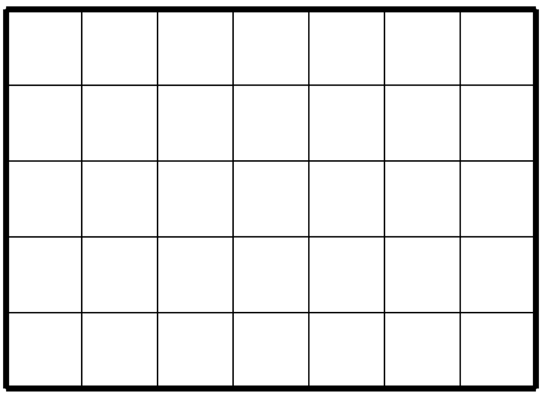
20 = …×…



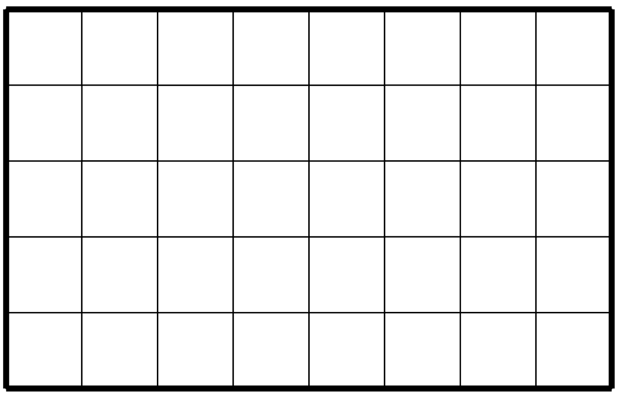
25 = …×…



30 = …×…

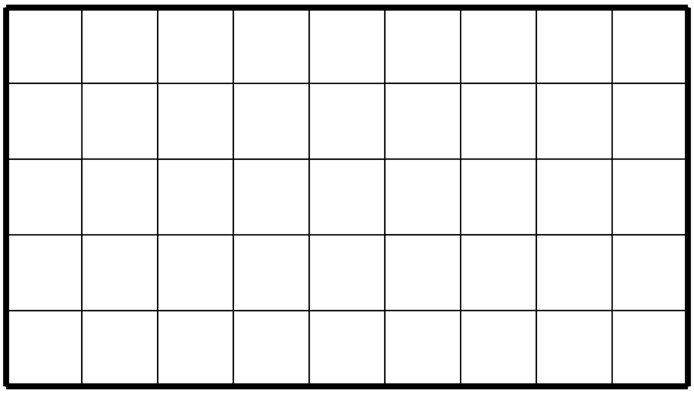


35 = …×…

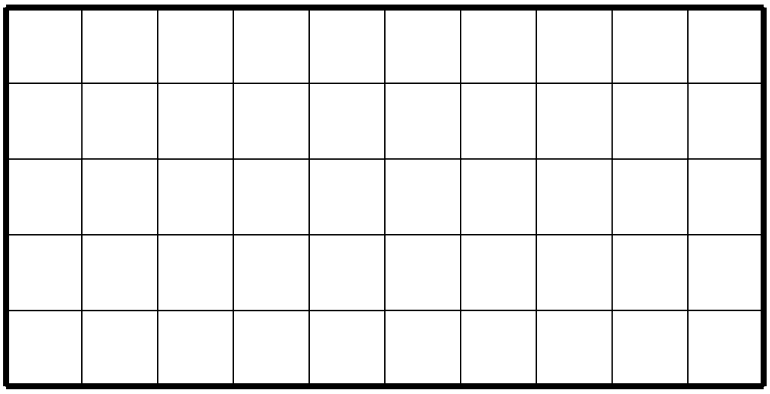


40 = …×…

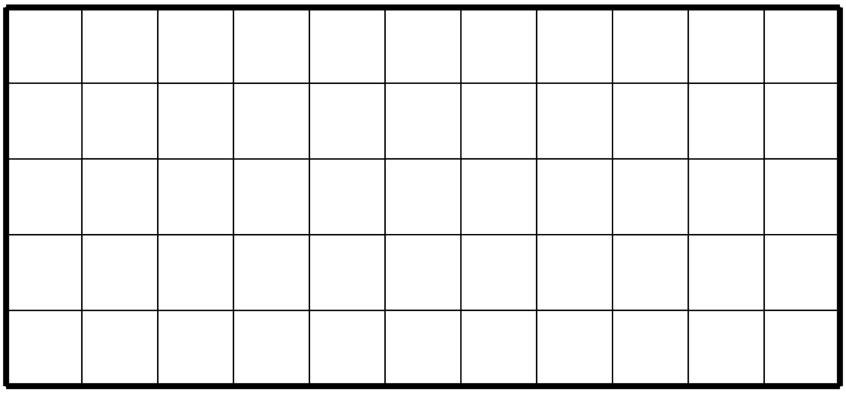
Vers le sommaire



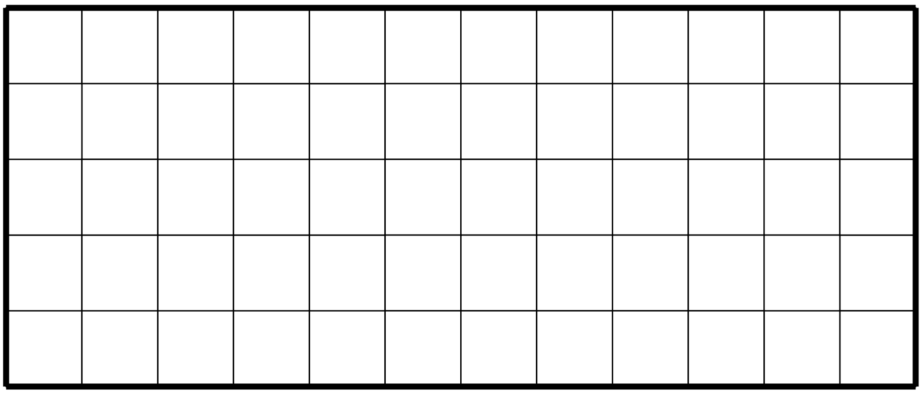
45 = … × …



50 = … × …



55 = … × …



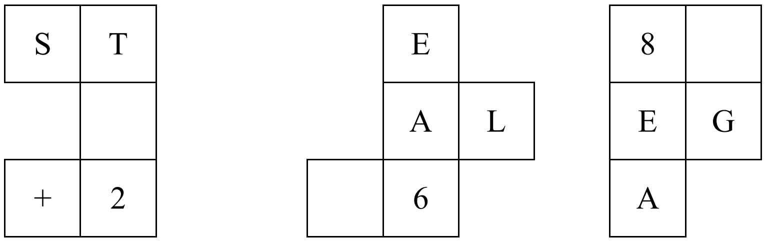
60 = … × …

Vers le sommaire

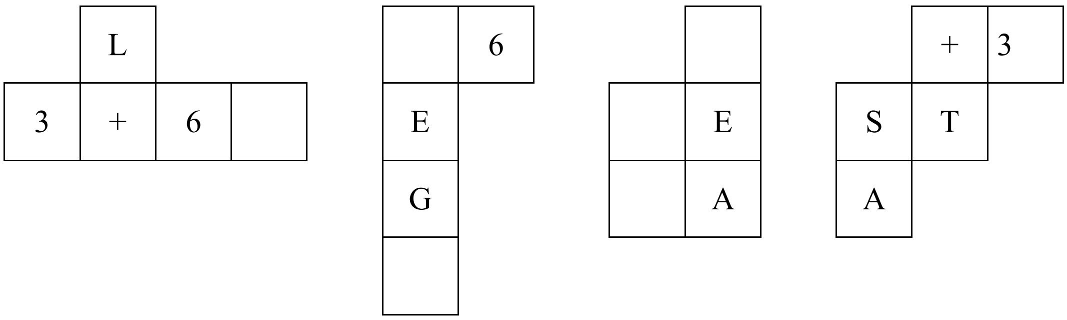
Des pentatextes utilisant de trois à douze pentaminos

Pour chacun des assemblages proposés, il s'agit de découper les pentaminos, puis les ré-assembler pour former un rectangle. Une phrase apparaît… (Attention, les mots sont parfois coupés en bout de ligne…)

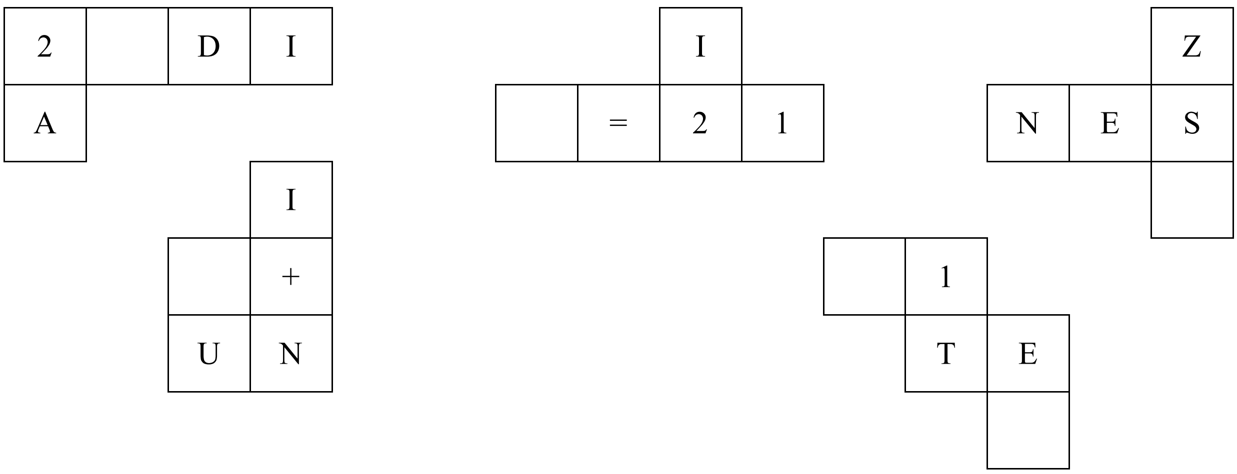
Premier assemblage :



Deuxième assemblage :

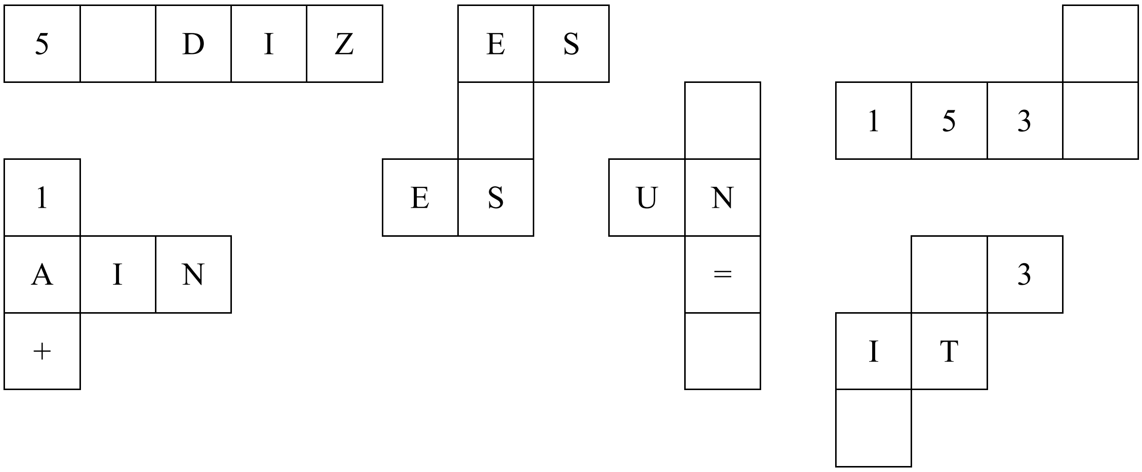


Troisième assemblage :

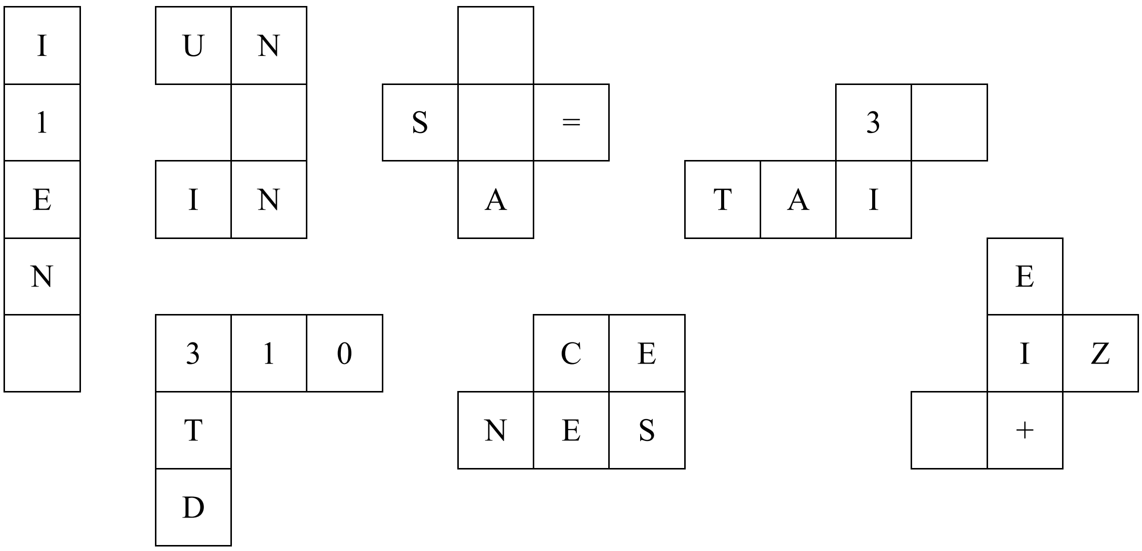


Vers le sommaire

Quatrième assemblage :

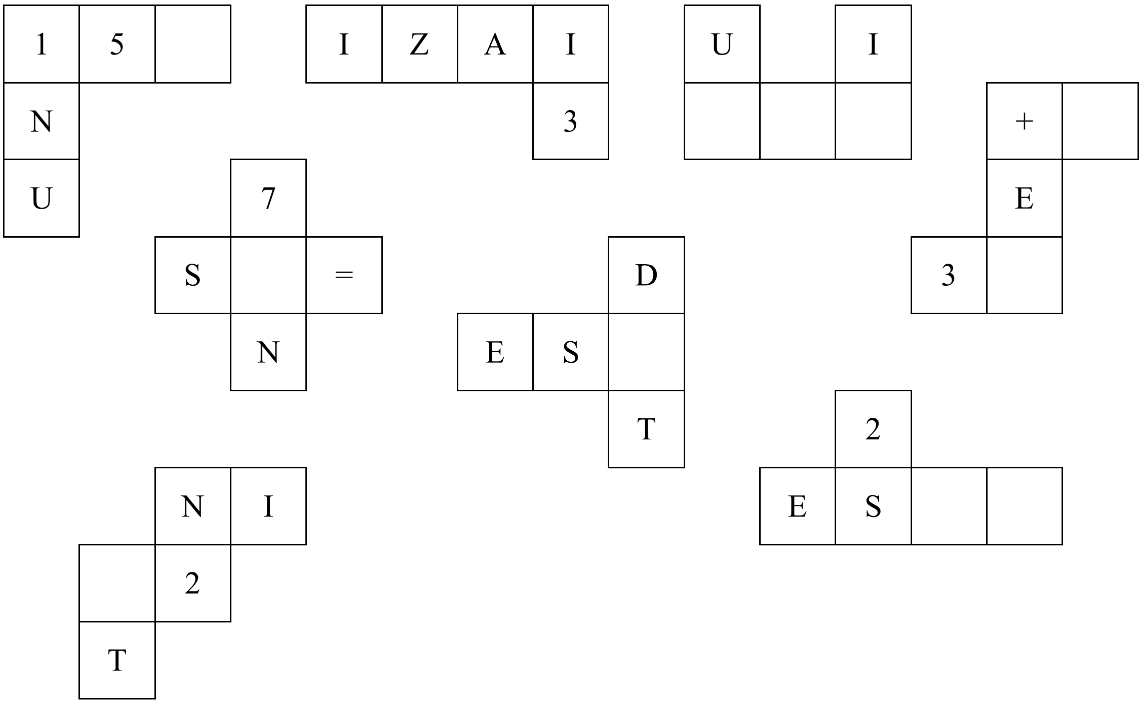


Cinquième assemblage :

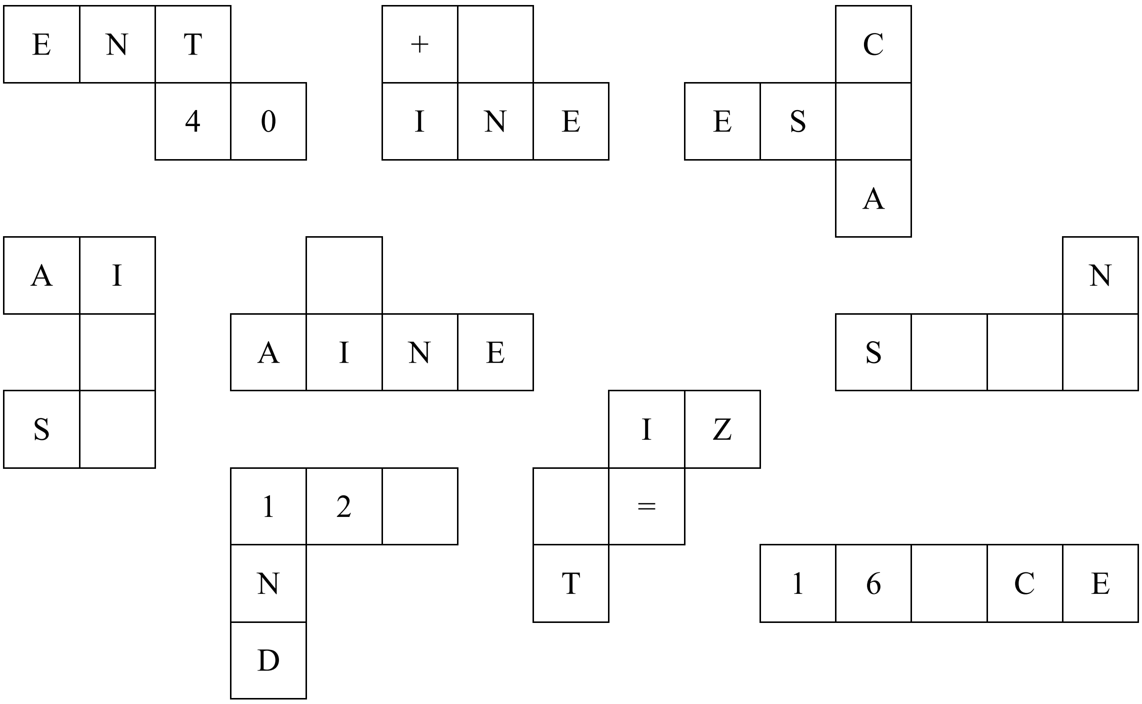


Vers le sommaire

Sixième assemblage :

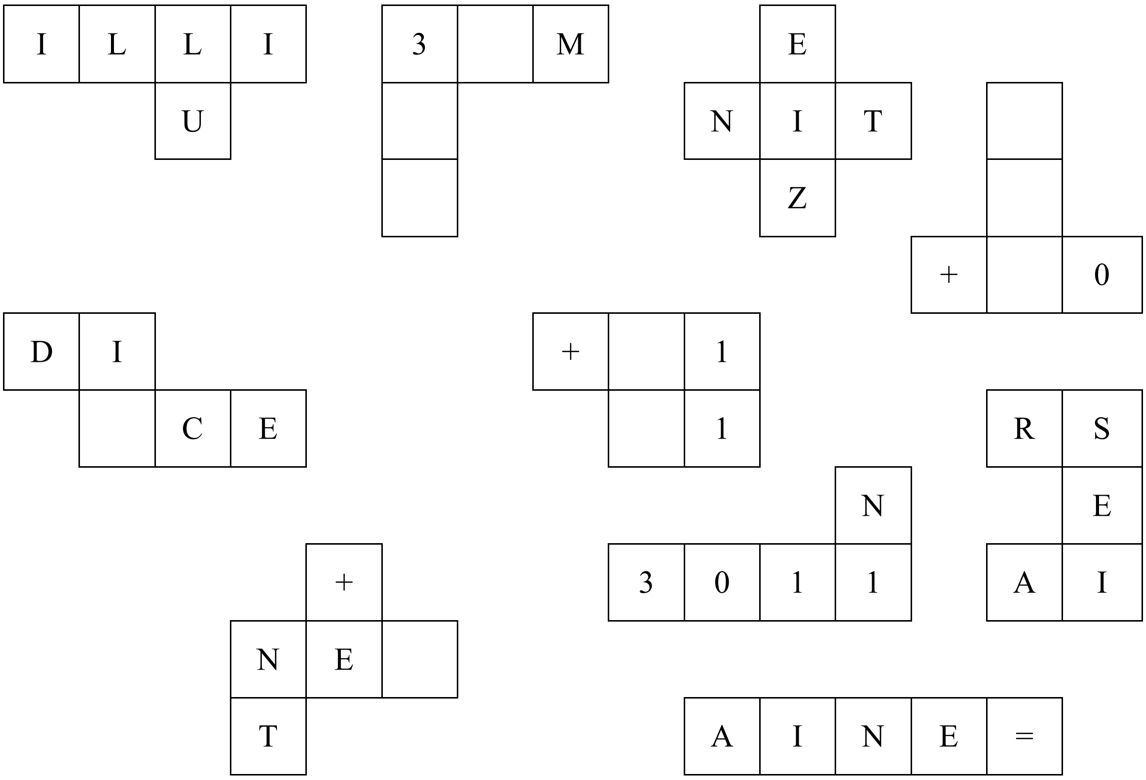


Septième assemblage :

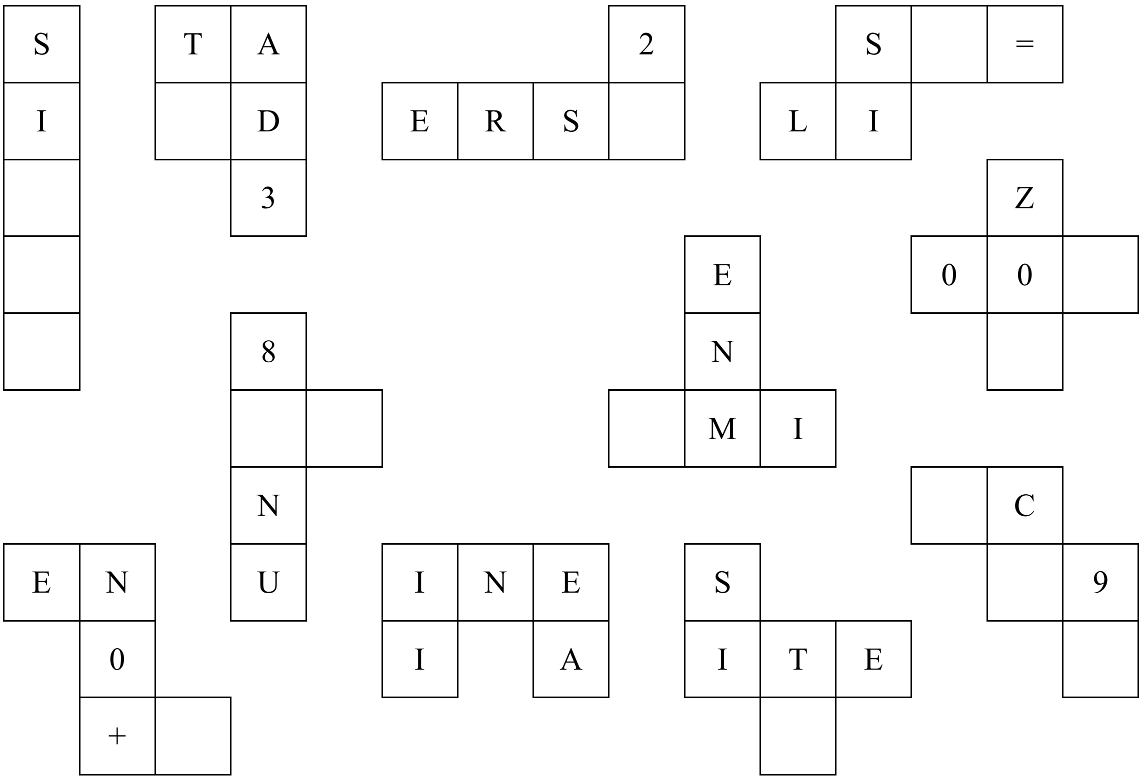


Vers le sommaire

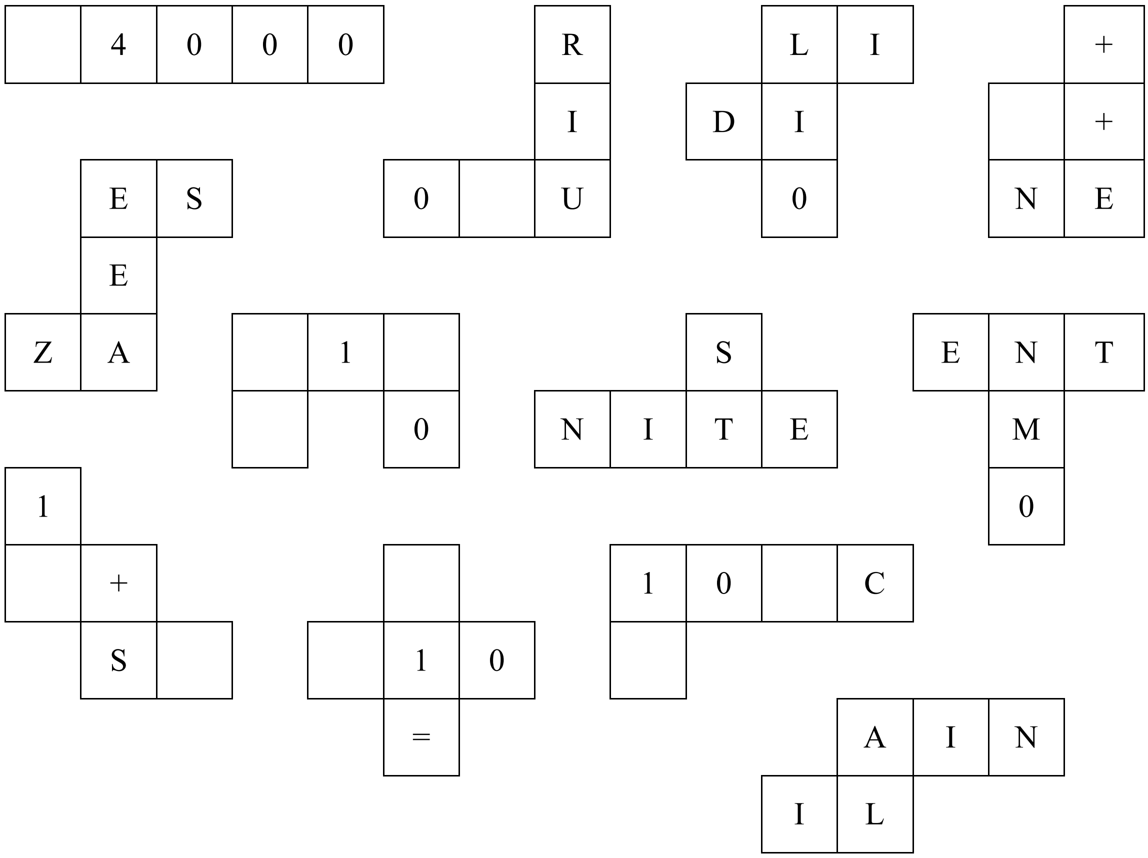
Huitième assemblage :

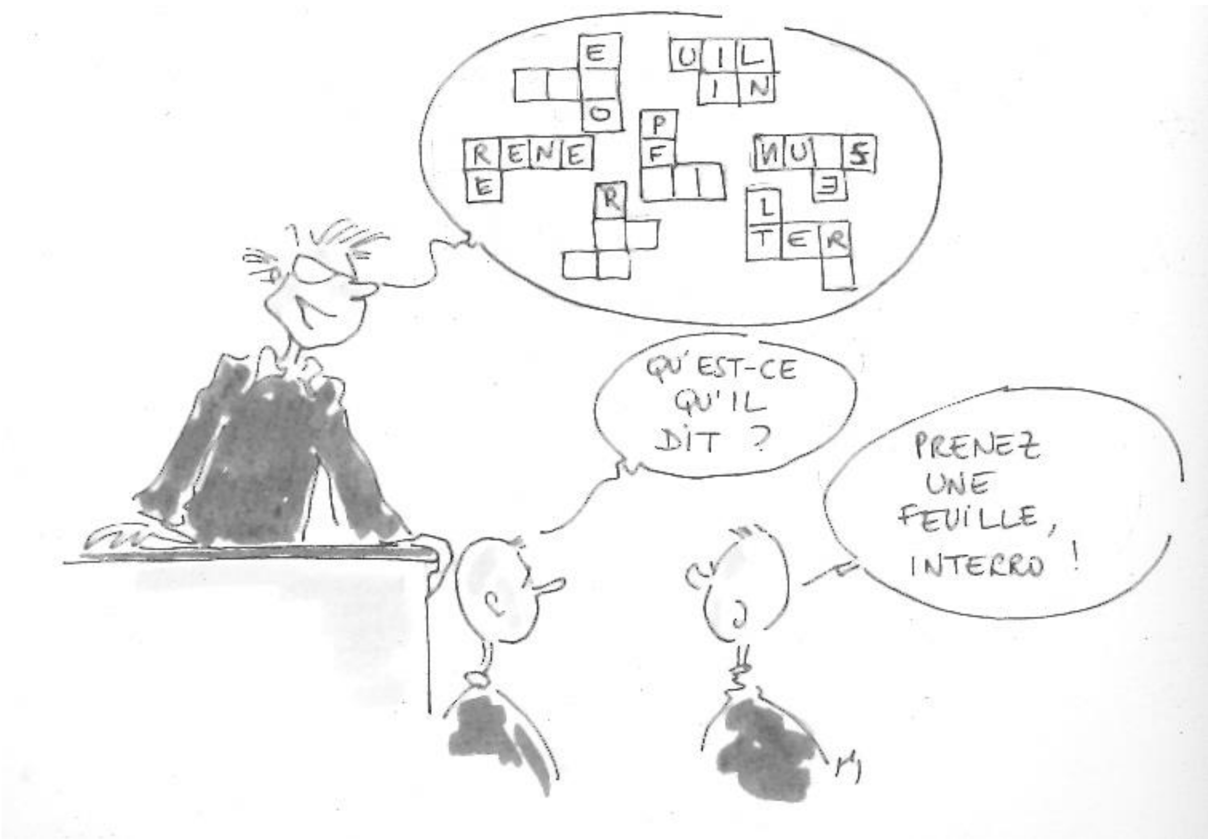


Neuvième assemblage :



Dixième assemblage :

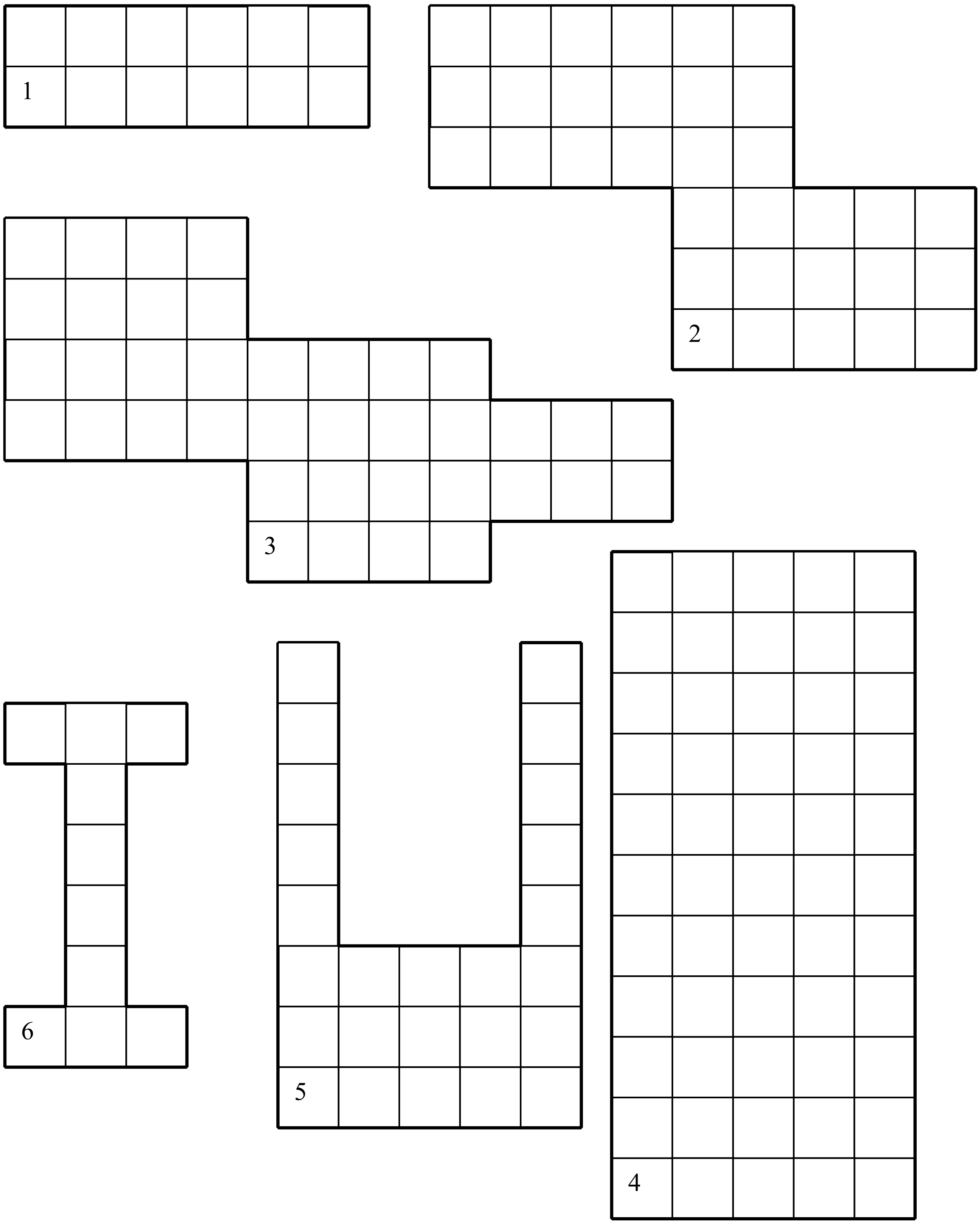




Vers le sommaire

Des polygones non recouverts par les pentaminos

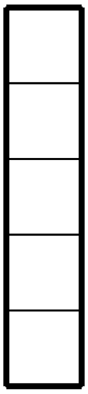
En essayant de manipuler le moins possible les pièces du jeu, explique pourquoi les polygones dessinés ci-dessous ne sont pas recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos (chaque pièce ne peut être utilisée qu'une fois pour un polygone).



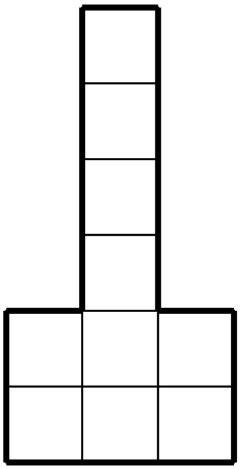
Vers le sommaire

Des objets et des pentaminos

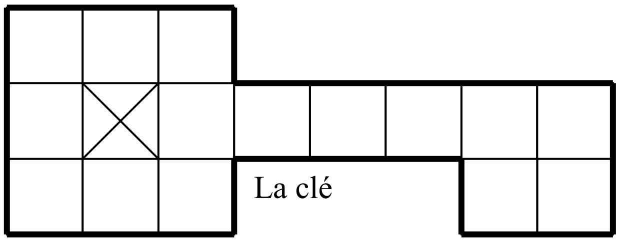
Les silhouettes des objets dessinés ci-dessous peuvent être découvertes par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos. Pour chaque dessin, chaque pièce ne peut être utilisée qu'une fois…



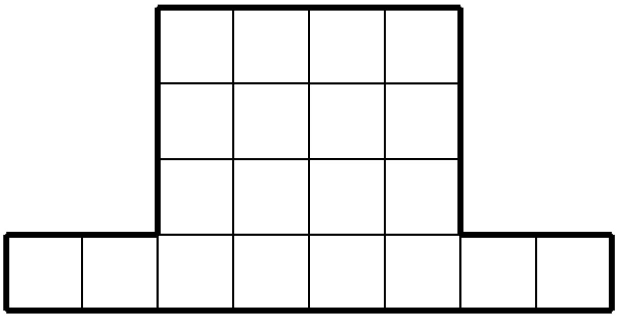
L'allumette



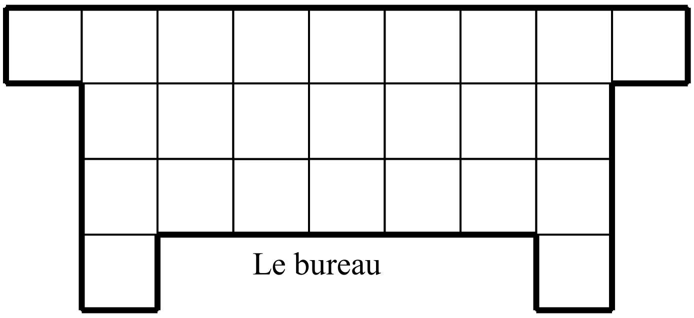
La petite pelle



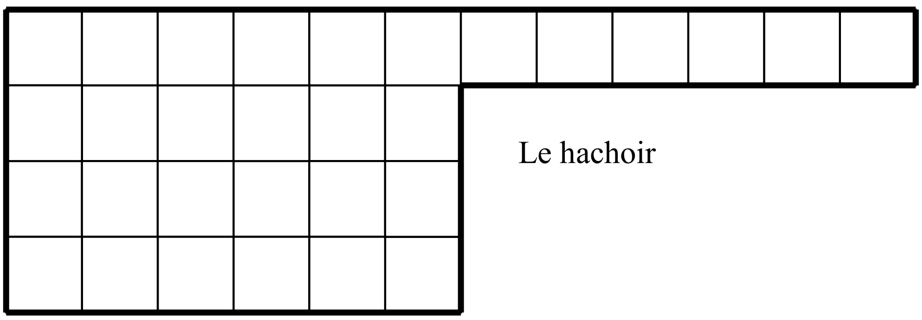
La clé



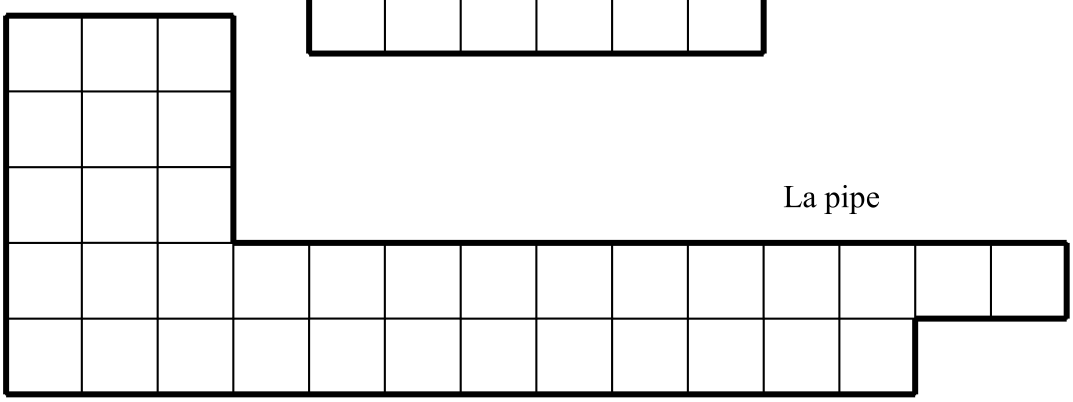
Le chapeau



Le bureau

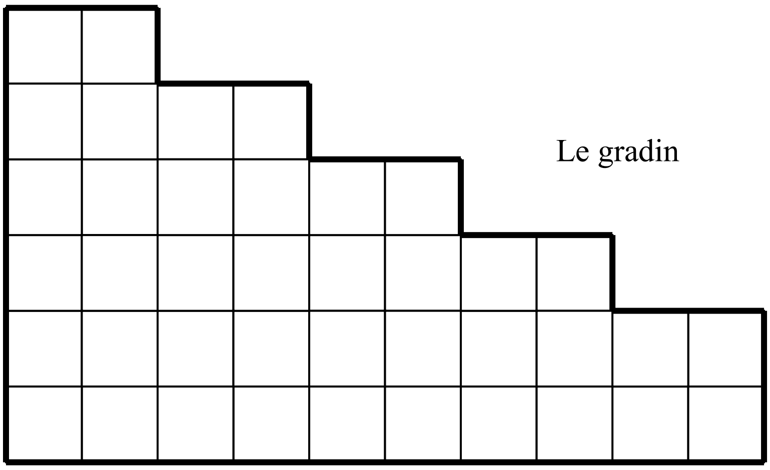


Le hachoir

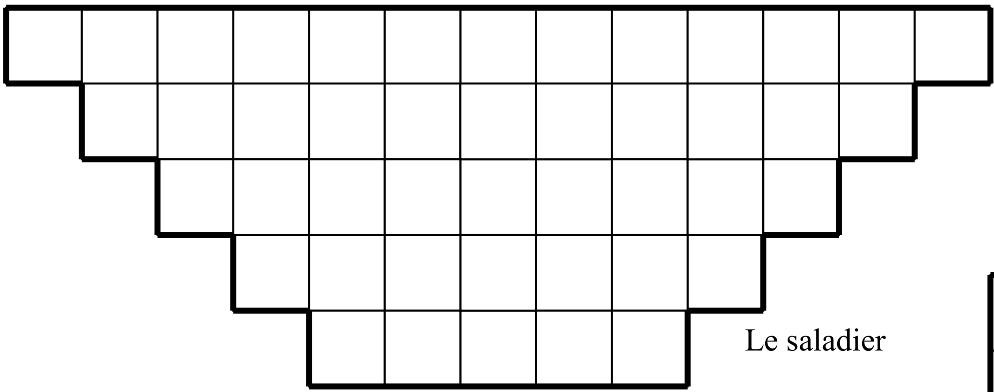


La pipe

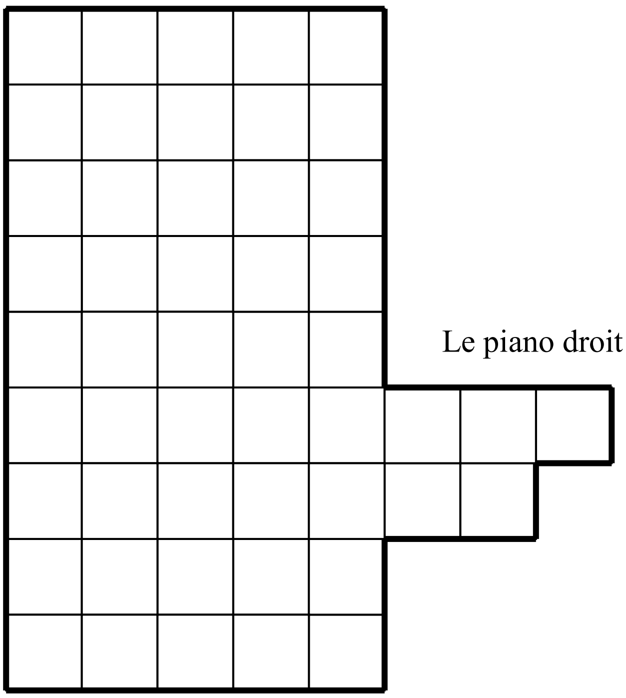
Vers le sommaire



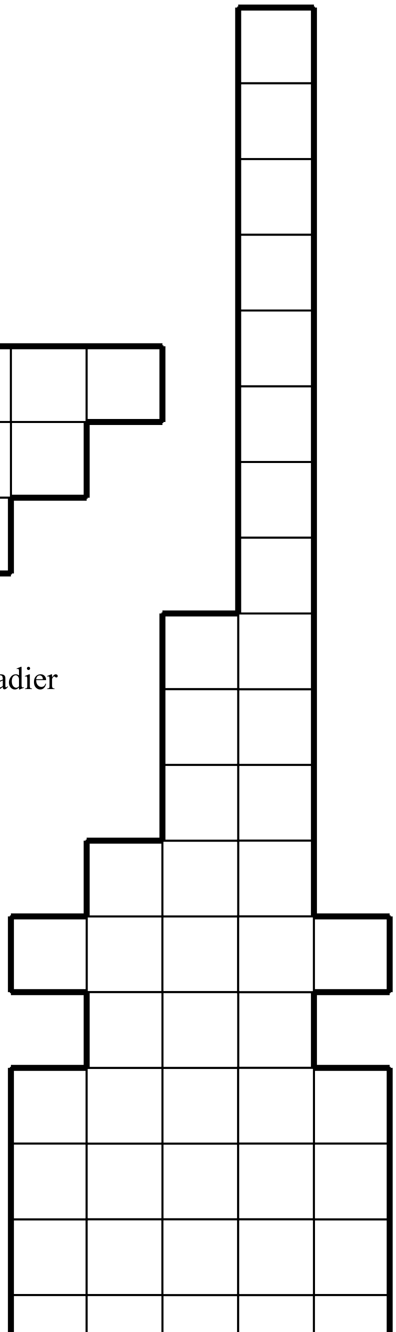
Le gradin



Le saladier

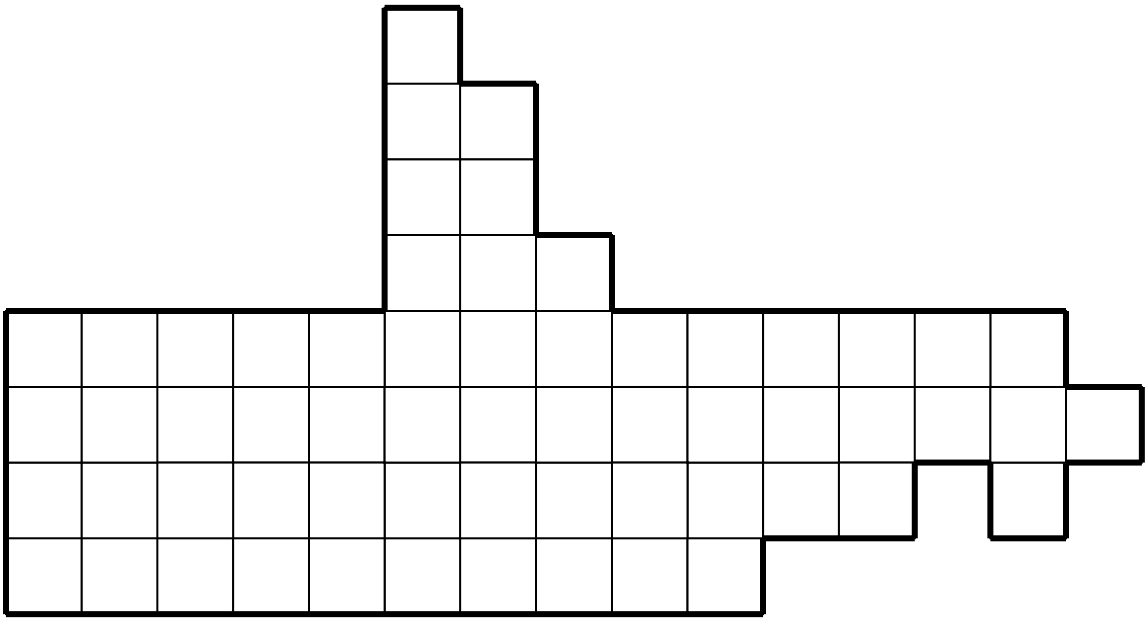


Le piano droit

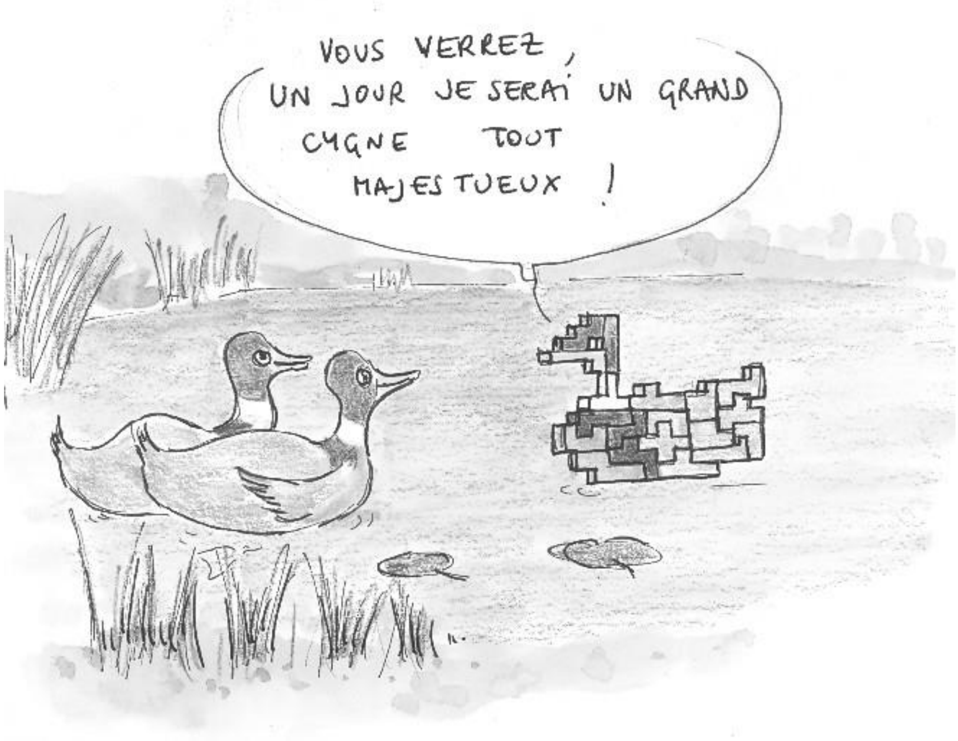


Le téléphone portable

Vers le sommaire



Le sous-marin

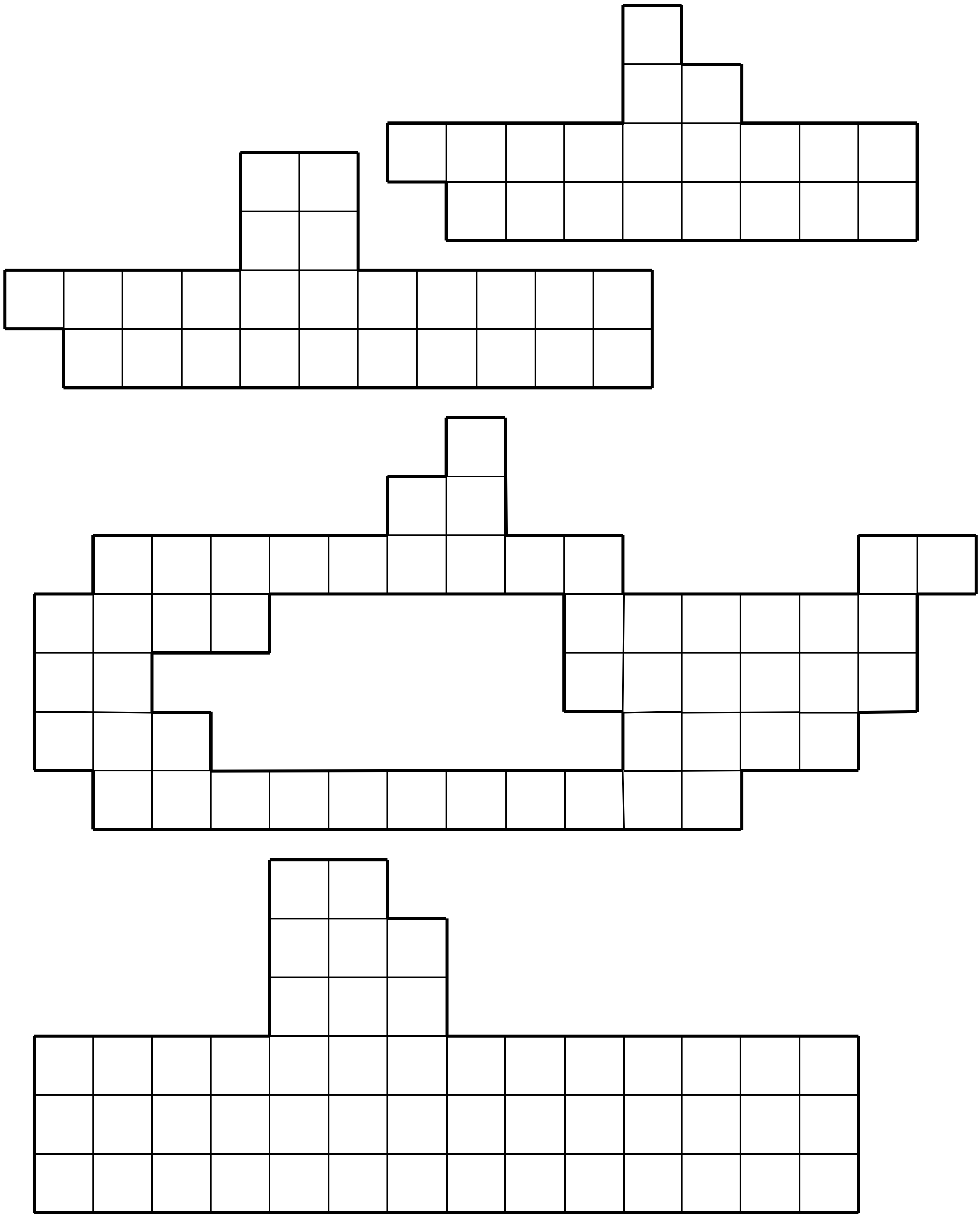


Vers le sommaire

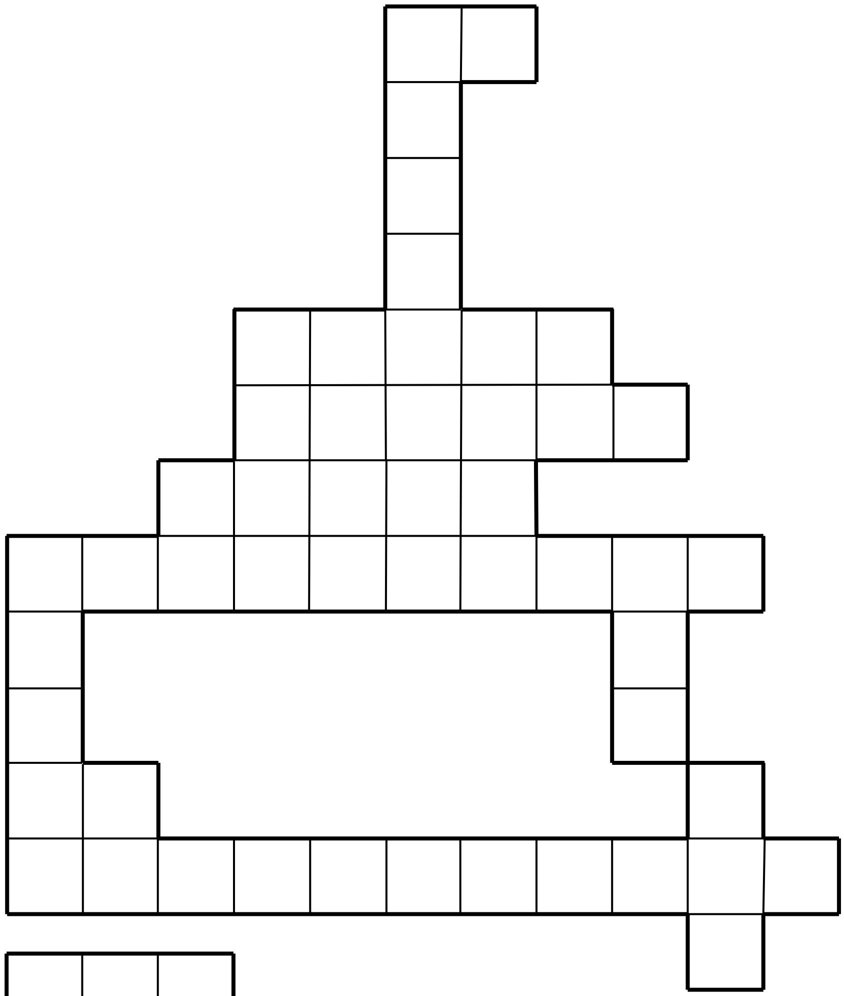
En 2003, au collège de Saint-Mihiel, les élèves du club mathématique ont été fortement influencés par les événements en Irak.

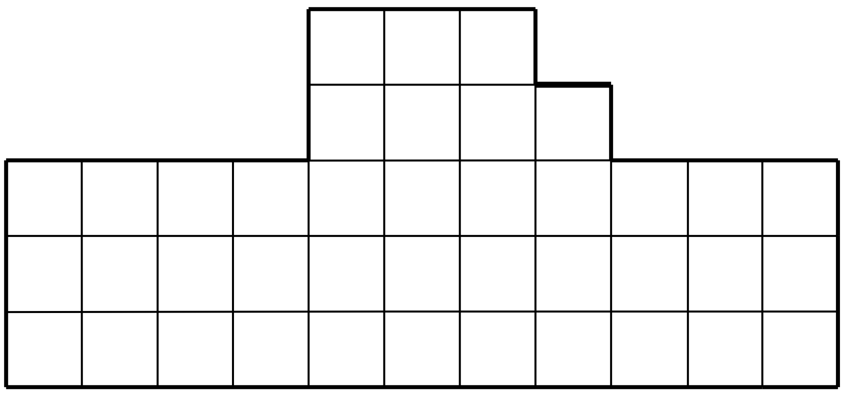
Voici les créations de Thibaut, Albert, Corentin, Juliette, Matthieu …

Des sous-marins :

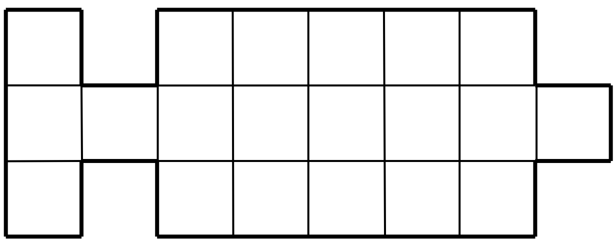


Vers le sommaire



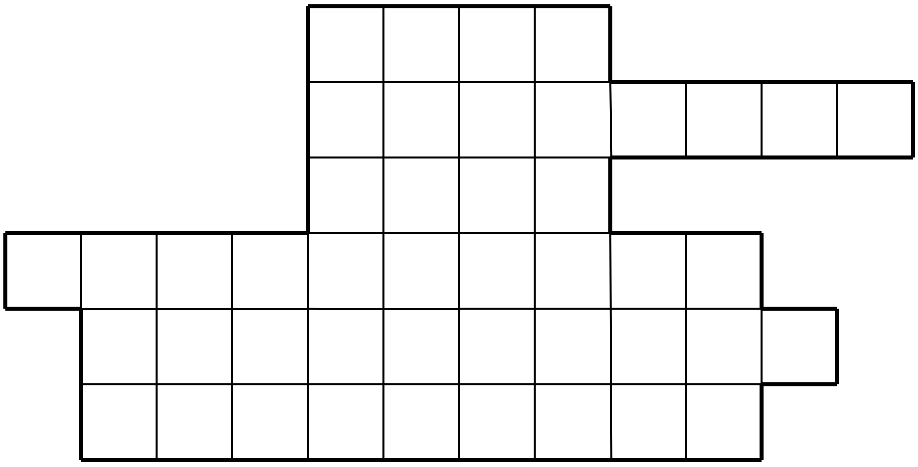


Une torpille :

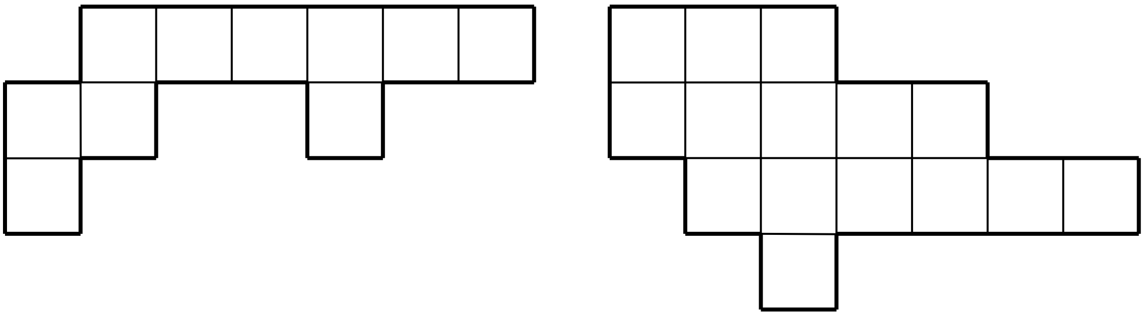


Vers le sommaire

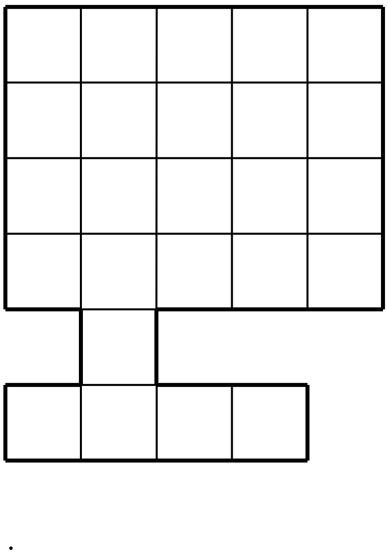
Un char :



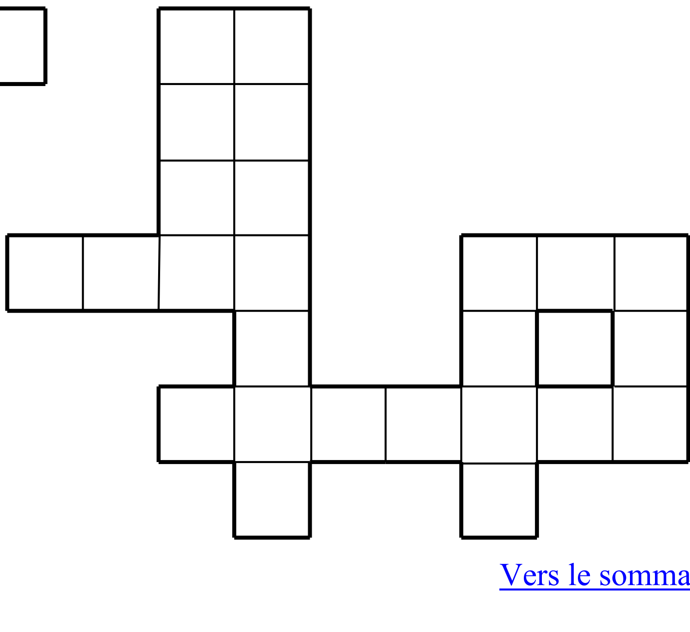
Des armes :



Un ordinateur :

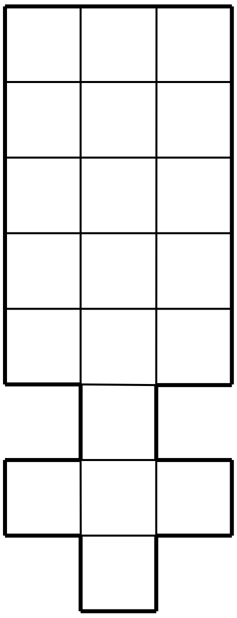


Un monte charge :

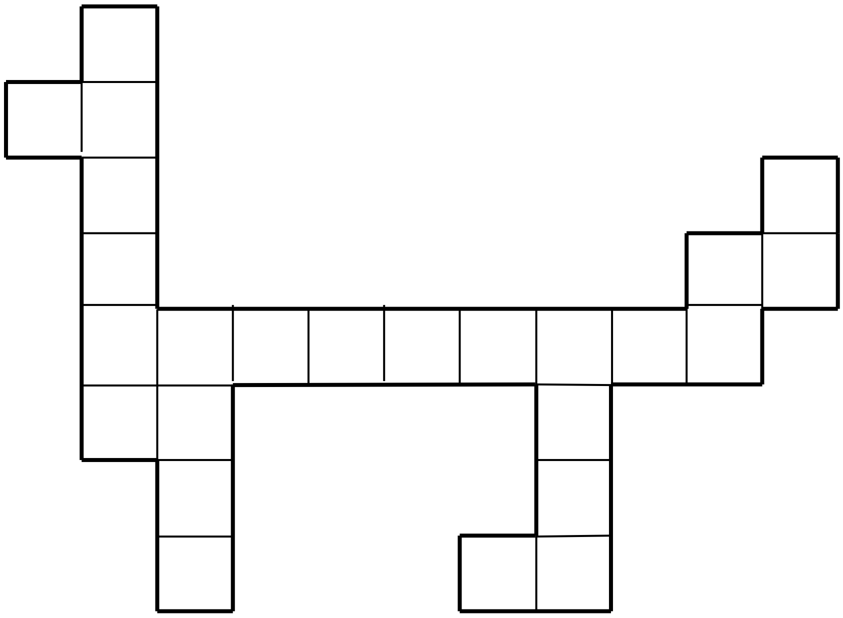


Vers le sommaire

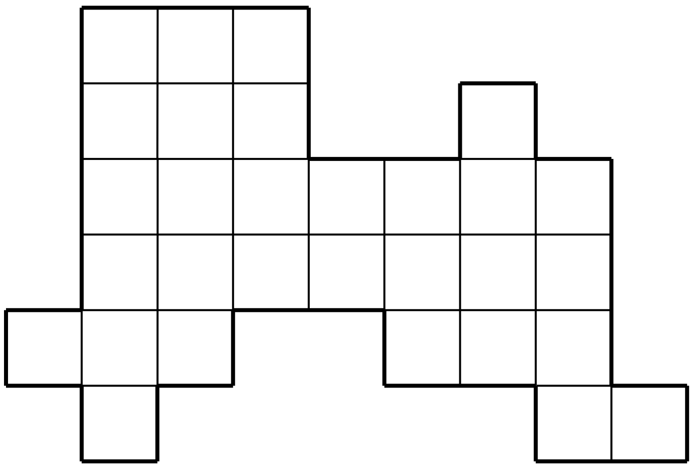
Une médaille :



Un chien :



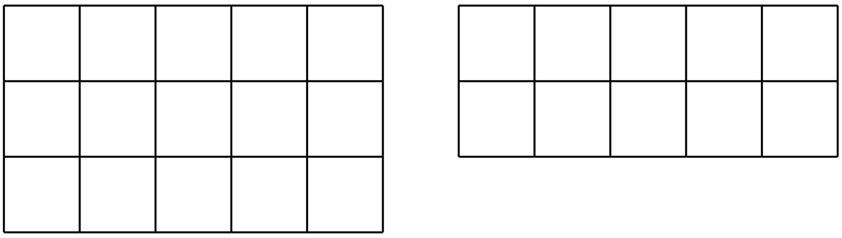
Une locomotive :



Vers le sommaire

Annexe

DEUX RECTANGLES ACCOLES ET DES POLYGONES
Article paru dans le Petit Vert (APMEP Lorraine) n°71 de septembre 2002



Accole ces deux rectangles pour former des polygones. Ils devront être accolés par un nombre entier de côtés de carreaux.

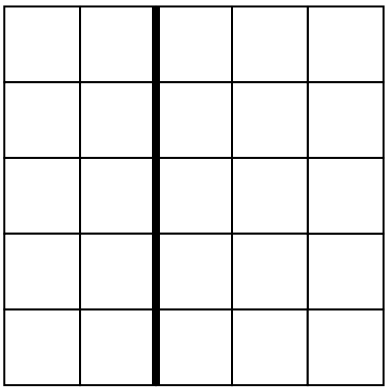
Dessine au moins cinq polygones différents.
Sous chaque polygone, indique en vert son aire et en rouge son périmètre. L'unité d'aire sera l'aire d'un carreau , l'unité de longueur sera la longueur d'un côté de carreau .

Questions "supplémentaires" proposées par la suite :

a- Quelle est la valeur maximale possible pour le périmètre du polygone obtenu ?
b- Quelle est la valeur minimale possible pour le périmètre du polygone obtenu ?
c- Pouvons nous trouver des polygones ayant pour périmètre les valeurs entières comprises entre les valeurs minimale et maximale envisagées aux questions précédentes?

Quelques remarques:

a- Les élèves remarquent aisément que les polygones dessinés ont même aire, cependant le fait d'indiquer l'unité à utiliser induit le comptage des carreaux et peu d'élèves, hélas, pensent au fait que les polygones sont formés des deux mêmes rectangles.



b- Lorsqu'en préalable le périmètre et l'aire de chacun des rectangles de départ sont rappelés, certains élèves pensent que le périmètre de la figure ci-dessus (configuration étant facilement acceptée comme ayant un périmètre minimal) est égal à la somme des périmètres des deux rectangles qui la constituent. Il est facile de faire constater que la figure représente un carré, et que le périmètre de ce carré n'est pas égal à la somme des périmètres des rectangles de départ.

Vers le sommaire

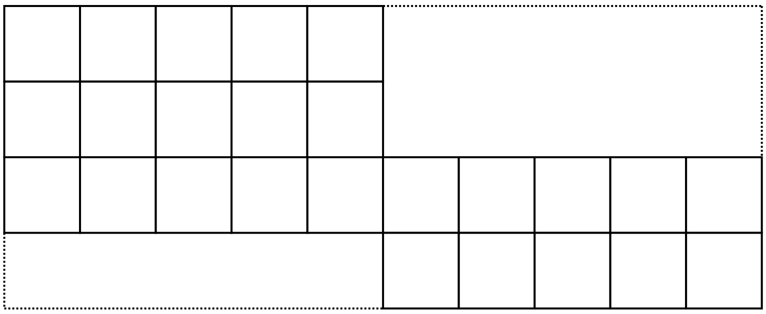
Cette erreur (additivité des périmètres) peut-être utilisée pour faire émerger le fait qu'il est possible de trouver le périmètrte de chaque polygône en soustrayant deux fois la longueur de la partie commune de la somme des deux périmètres.

Le périmètre est maximal lorsqu'on "cache" le minimum de côtés de carreaux et le périmètre est minimal lorqu'on "cache" le maximum de côtés de carreaux. Ceci permet de justifier o d'infrmer les maximum et minimum envisagés par les élèves .

c- Les élèves constatent vite qu'il semble difficile d'obtenir des périmètres impairs. Est-il réellement impossible d'obtenir des périmètres impairs pour de tels polygônes?

<u>Quelques pistes explorées par les élèves:</u>

a- La somme des périmètres des deux rectangles est 30. Selon le nombre de côtés de carreaux cachés, il faut ôter 2, 4, 6 ou 8 unités de longueur. Les périmètres possibles sont alors 22, 24, 26 ou 28.

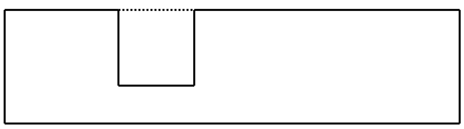


b- En faisant "entourer " le polygône par un rectangle, les élèves constatent que ce rectangle a même périmètre que le polygône dessiné. Il n'est pas très difficile de prouver que le périmètre du rectangle est nécessairement un nombre pair (2 fois la largeur + 2 fois la longueur, c'est à dire la somme de deux nombres pairs, ou deux fois la somme de la longueur et de la largeur, c'est ici une possible introduction à des écritures littérales). Le résultat conjecturé peut ainsi être justifié.

c- Il est aussi possible de leur faire saisir qu'en faisant le tour du polygône, il y aura autant de trajets → que de trajets ← et autant de trajets ↓ que de trajets ↑ (puiqu'on revient au point de départ…) . Le nombre de trajets horizontaux est pair, le nombre de trajets verticaux est pair et il y a ici aussi une bonne occasion d'utiliser le fait que la somme de deux nombres pairs est paire (c'est une évidence pour les élèves).

d- Pour trouver le périmètre des polygônes proposés, le comptage des unités de longueur n'est pas si aisé qu'on pourrait le penser: les élèves ne savent plus de quel sommêt ils sont partis, des résultats sont proposés avec une erreur d'une unité… La méthode d'"entourage" du polygône par un rectangle est la bienvenue, et il est remarquable que les élèves la réutilisent sans difficulté en cours d'année.

Il faut cependant bien prendre garde à leur présenter des polygones ayant un "creux" tel celui dessiné ci-dessous:



Il y a besoin d'adapter la méthode…

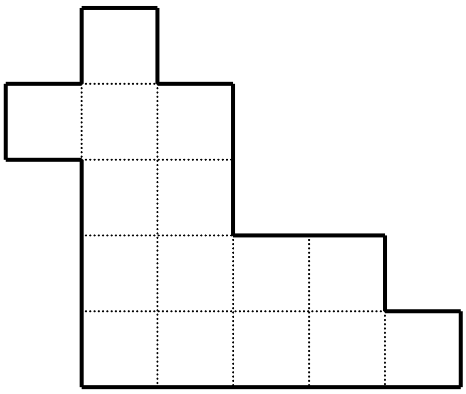
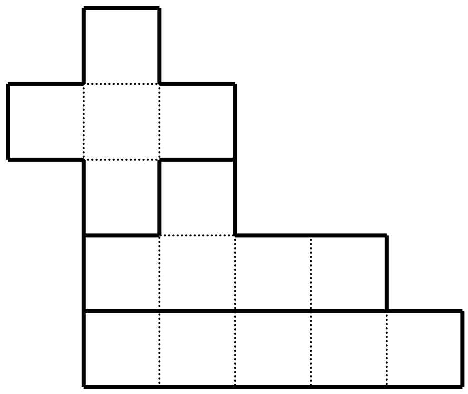
Il faut d'autant plus être prudent qu'une autre image mentale du périmètre sera activée en cours d'année lorsqu'il faudra faire découvrir une valeur approchée de π en faisant rouler des

disques ou en les entourant par une ficelle : si nous faisons "rouler" les deux polygônes dessinés précédemment, après un tour complet, nous n'obtiendrons pas leur périmètre.
En fin d'activité, il pourra être intéressant de faire émerger un certain nombre de méthodes permettant le calcul du périmètre d'un polygône: la somme des longueurs des segments formant la ligne brisée fermée, la longueur du rectangle qui l'entoure (avec toutes les précautions nécesssaires, en particulier le fait que les côtés du polygône suivent les directions du quadrillage), la longueur parcourue par un sommêt lorsque le polygône fait un tour complet, la somme des périmètres des "sous figures" de laquelle on retire deux fois la longueur de la partie commune, une formule…

Il reste ensuite à proposer aux élèves de nombreuses figures géométriques et qu'ils envisagent quelle méthode est possible.

Dans l'excellente revue belge "Math-Jeune Junior" n°101J d'Avril 2002 (La mathématique au quotidien - Mono…,duo…,polyminos (3) pages 64 à 67), Claude Villers évoque les périmètres de ces polygones formés de n carrés élèmentaires. La méthode indiquée utilise le nombres de segments "unités" intérieurs et peut être également proposée à nos élèves.

Périmètres de polygones recouverts par trois pentaminos

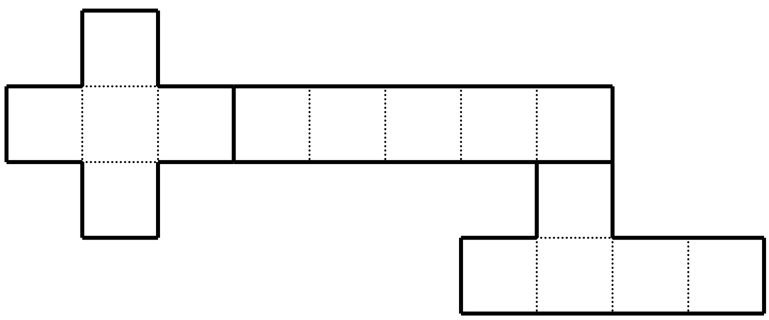



Le polygone ci-dessus peut être recouvert par 3 pentaminos.

La longueur d'un côté de carreau du quadrillage est prise comme unité de longueur. Quel est le périmètre de ce polygone ?
Dessine un polygone recouvert par 3 pentaminos dont le périmètre est le plus grand possible.
Dessine un polygone recouvert par 3 pentaminos dont le périmètre est le plus petit possible.

Dessine des polygones recouverts par 3 pentaminos dont le périmètre a pour périmètre les valeurs intermédiaires comprises entre le maximum et le minimum obtenus aux deux questions précédentes.

Cette activité est du même type que celle décrite dans l'article du Petit Vert mis précédemment en annexe.

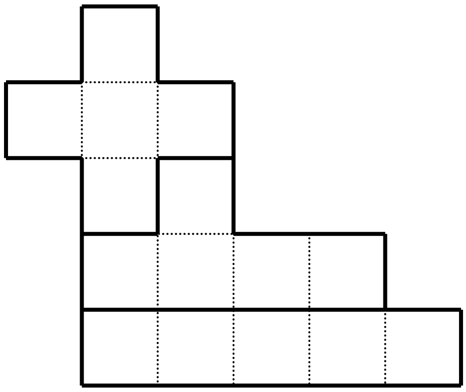


Un assemblage tel celui ci-dessus admet un périmètre maximal.

Les trois pentaminos utilisés ont « 12 côtés de carreaux » pour périmètre. Il y a 2 jonctions par un coté de carreau. Le périmètre du polygone est donc égal à « 3×12 - 2×2 côtés de carreau ». Il ne peut y avoir moins de ces deux jonctions, le périmètre est donc maximal.

La configuration proposée dans l'énoncé de l'activité semble admettre le périmètre minimal.
Il y a 7 jonctions par un côté de carreau, difficile de faire mieux…
Le périmètre du polygone est égal à « 3×12 - 7×2 côtés de carreau ».

Vers le sommaire



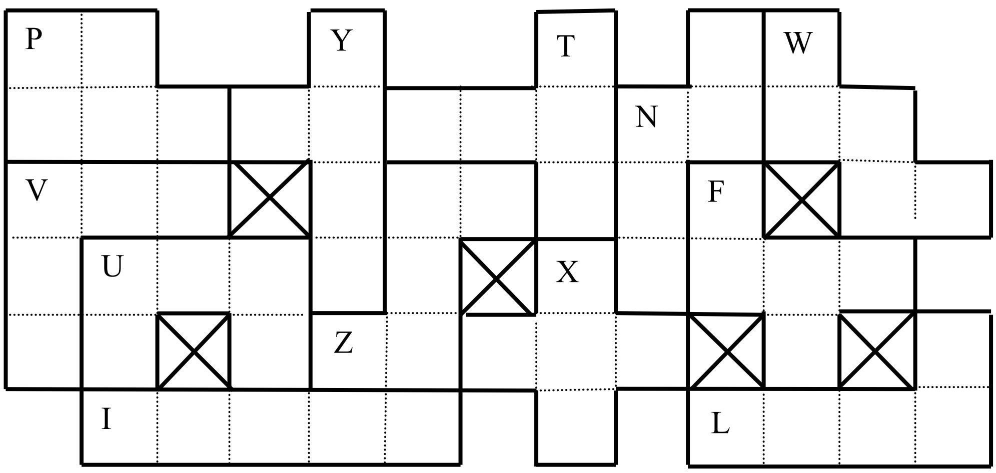
Concernant la recherche des valeurs intermédiaires entre le maximum (32) et le minimum (22), pour des raisons semblables à celles données dans l'article mis en annexe ou en considérant le nombre de jonctions par des côtés de carreau, il est clair que seuls des périmètres égaux à 24, 26, 28, 30 sont envisageables.

Ce type d'activité peut être envisagé avec d'autres pentaminos, en particulier permettant d'obtenir un périmètre inférieur à 22 côtés de carreaux. Un périmètre de 16 côtés de carreaux est facile à obtenir…

---

12 pentaminos à découper
(Ces pentaminos sont utilisables pour les activités présentées par la suite)

L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.
Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



Vers le sommaire

ISOMETRIES ET PENTAMINOS

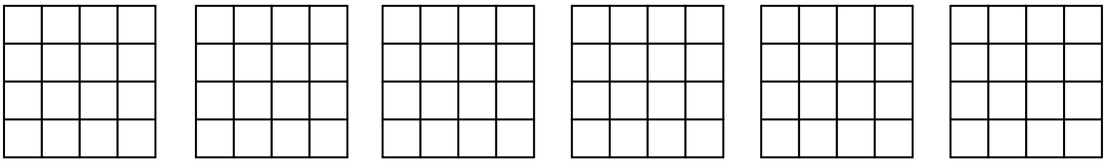
Vers le sommaire

Placements d'un carreau dans un carré

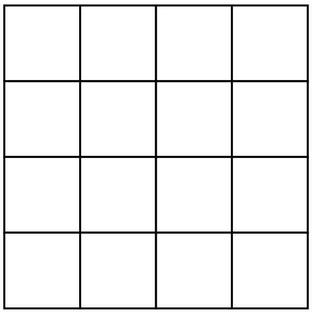
Un carreau dans un carré 4×4

En voulant recouvrir un carré 4×4 par des pentaminos choisis parmi les douze, un carreau reste non recouvert.

Combien y a-t-il de placements possibles pour ce carreau ? Deux placements seront considérés comme identiques lorsqu'ils pourront correspondre par une symétrie ou une rotation.



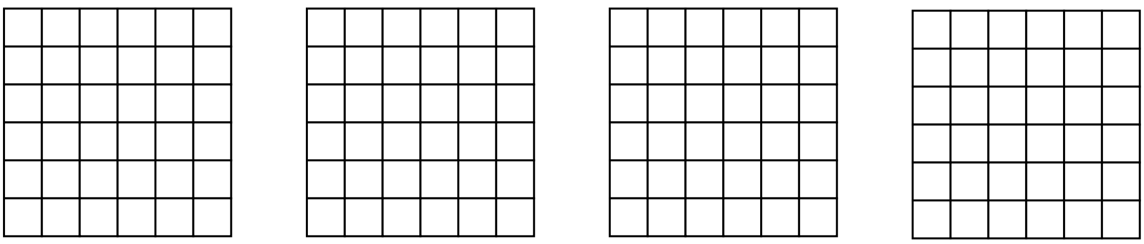
Est-il toujours possible de recouvrir les 15 cases restantes par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ? Le plateau ci-dessous est utilisable.



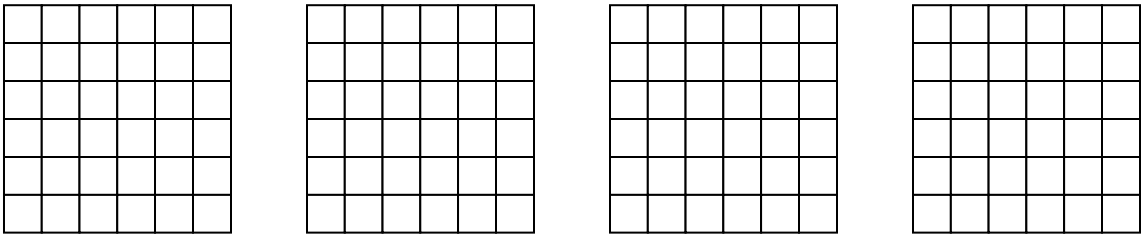
Un carreau dans un carré 6×6

En voulant recouvrir un carré 6×6 par des pentaminos choisis parmi les 12, un carreau reste non recouvert.

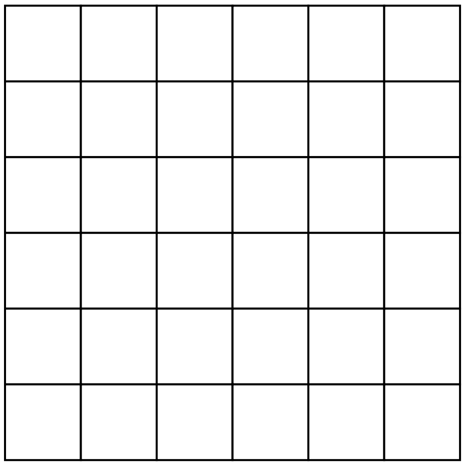
Combien y a-t-il de places possibles pour ce carreau ? Deux placements seront considérés comme identiques lorsqu'ils pourront correspondre par une symétrie ou une rotation.



Vers le sommaire

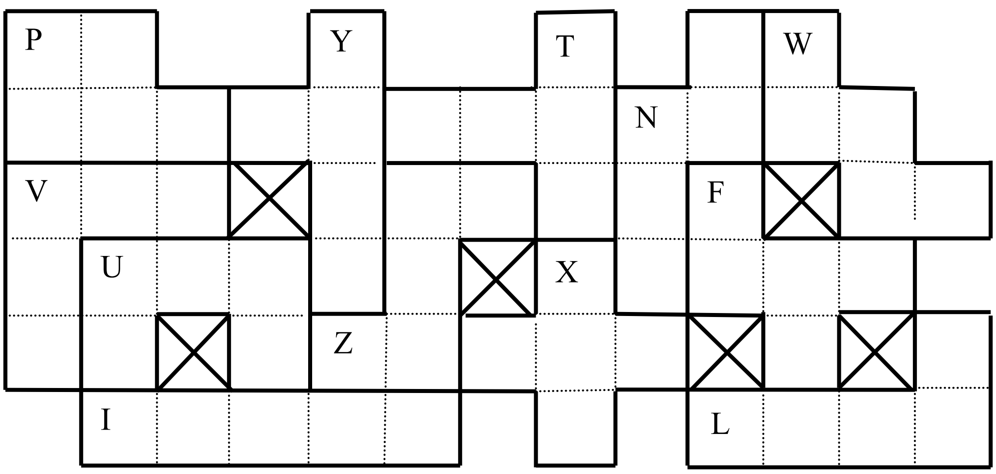


Est-il toujours possible de recouvrir les 15 cases restantes par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ? Le plateau ci-dessous est utilisable.



L’ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l’ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z

Les petits carrés munis d’une croix seront des « chutes » inutilisées.

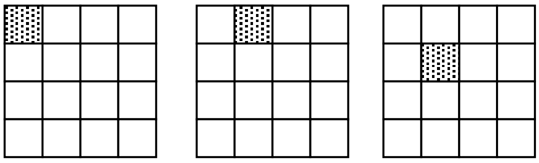


Vers le sommaire

Quelques indications pour le lecteur :

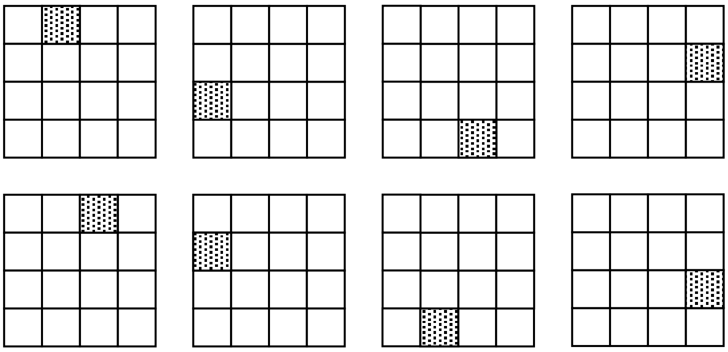
Les placements d'un carreau dans un carré 4 $\times$4

Seules trois positions sont à considérer.



Cela peut surprendre les élèves.

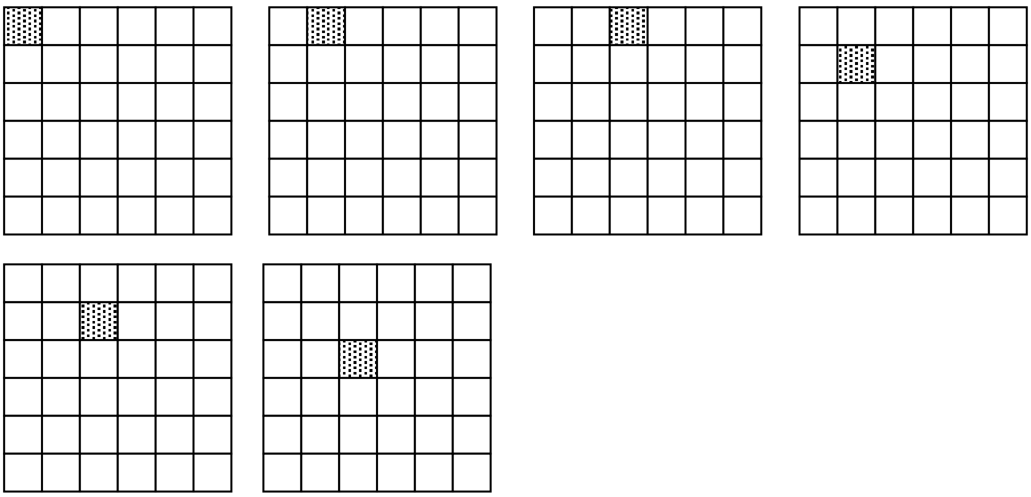
Deux placements seront considérés comme identiques lorsqu'ils pourront correspondre par une symétrie ou une rotation. Les dessins ci-dessous représentent la même position.



Les quatre dessins de la première ligne sont obtenus par rotation du premier dessin.
Les quatre dessins de la seconde ligne sont obtenus par symétrie du premier dessin, puis par rotation du dessin obtenu.
Pour le premier dessin, la réussite du recouvrement des 15 cases restantes par 3 pentaminos choisis parmi les 12 nous garantit la réussite du recouvrement pour les 7 autres dessins.
Dans les trois cas, les cases restantes sont recouvrables par 3 pentaminos choisis parmi les 12.

Un carreau dans un carré 6 $\times$6

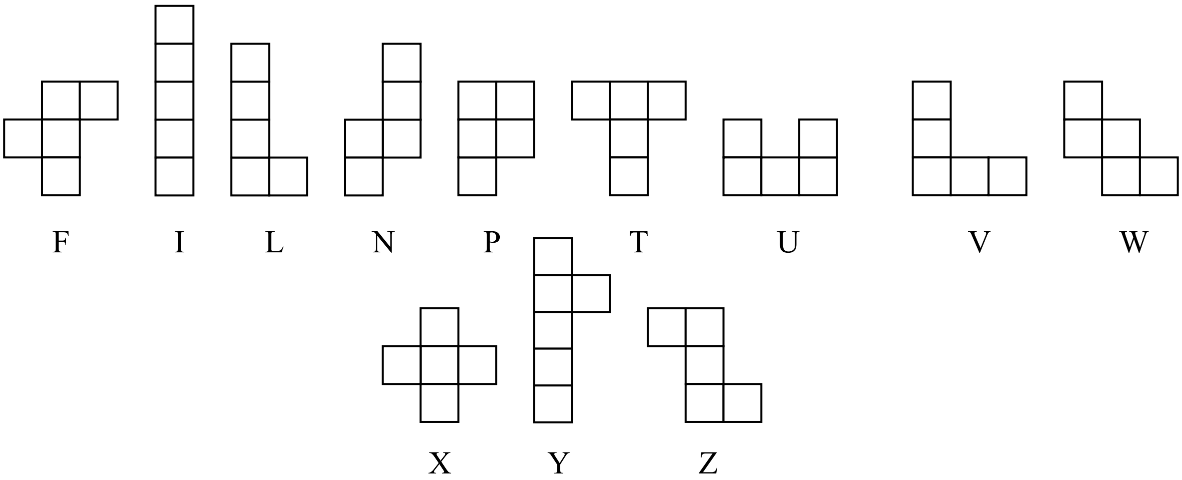
Avec un résonnement à celui fait précédemment, voici les seules positions à considérer



Pour ces 6 cas, les 35 cases restantes sont recouvrables par 7 pièces choisies parmi les 12 pentaminos.
Ces différents placements du carreau relèvent de l'énumération rencontrée dès l'école maternelle.

Vers le sommaire

Des pions symétriques et des pièces choisies parmi les 12 pentaminos



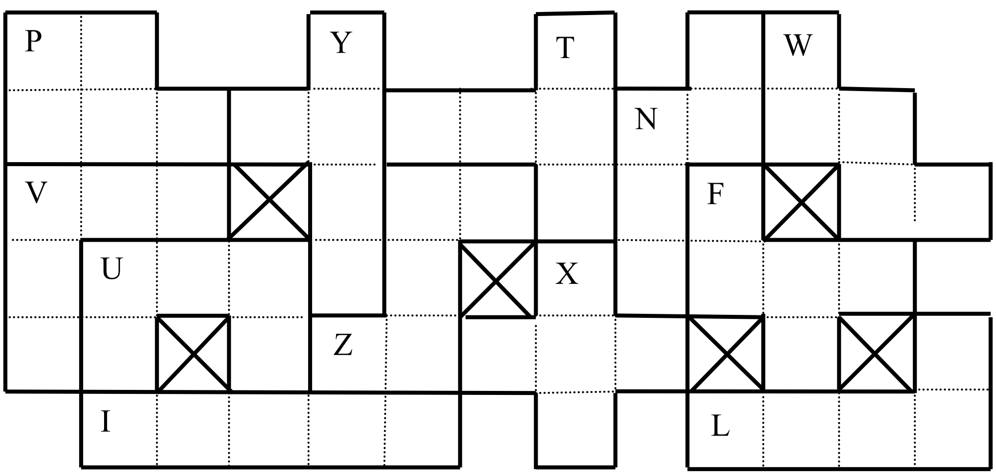
La manipulation de certaines pièces choisies parmi les 12 pentaminos permet d'envisager le recouvrement de polygones contenant comme nombre de carreaux un multiple de 5.

Des polygones contenant un nombre de carreaux non multiple de 5 laisse des cases vides qu'il est tentant de disposer de manière symétrique.

Le carré 8×8 et 4 cases à disposer de manière symétrique est un grand classique des amateurs de pentaminos.
Le rectangle 7×9 et 3 cases à disposer de manière symétrique pourra tenter ceux qui auront envie d'explorer des pistes de recherche nouvelles.
Ces activités, difficiles pour les élèves ont été remplacées par le placement symétrique de deux cases dans un polygone formé de 27 carreaux. Chercher le recouvrement par 5 pentaminos choisis parmi 12 est plus aisé et ne perturbe pas l'apparition de symétries.

Voici quelques polygones formés de 27 carreaux et leurs recueils de solutions. La plupart d'entre eux ont été proposés par des élèves du collège de Saint-Mihiel dans le cadre d'un club mathématique.

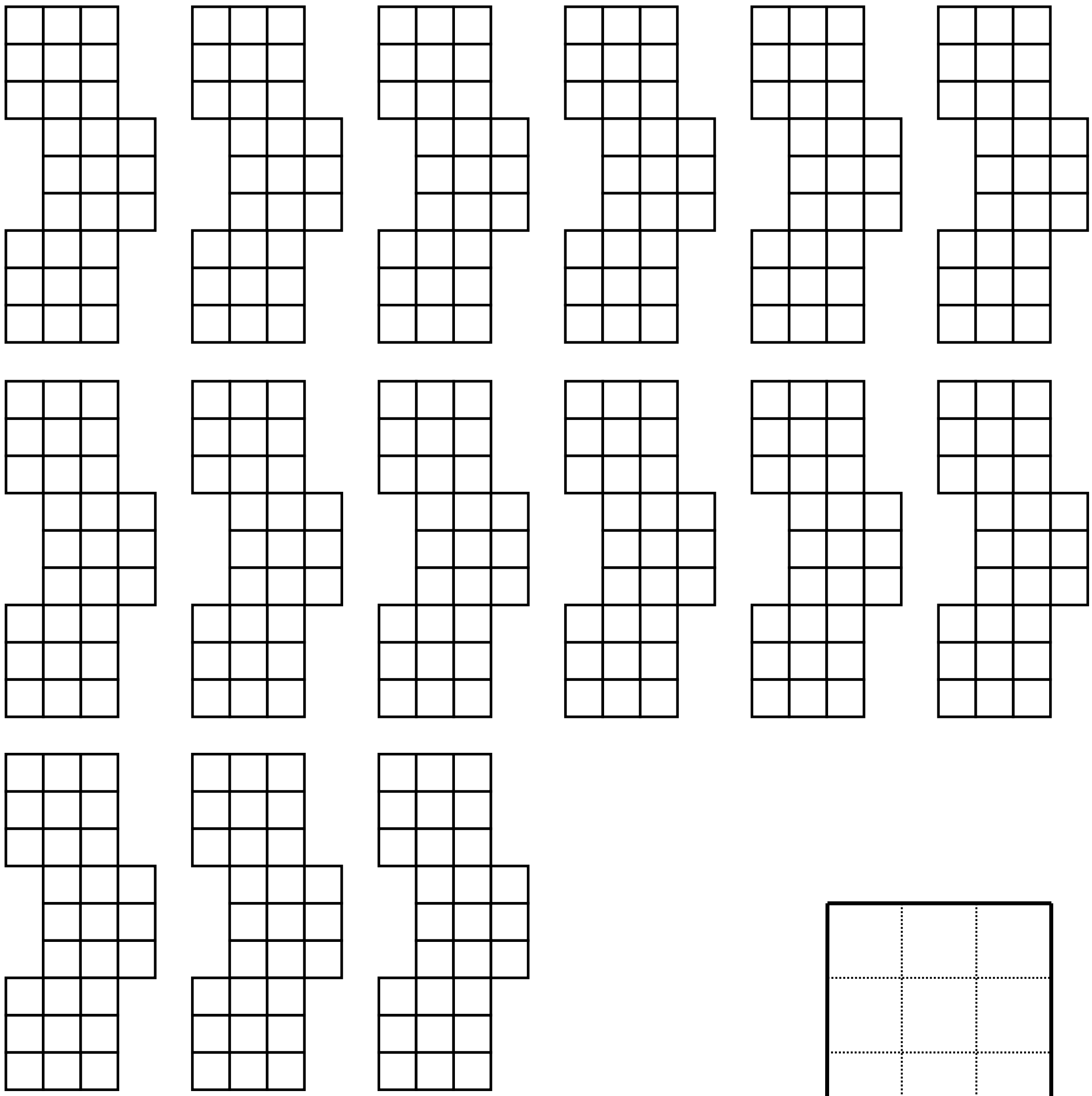
L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.
Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



Vers le sommaire

Des pentaminos et un axe de symétrie (1)

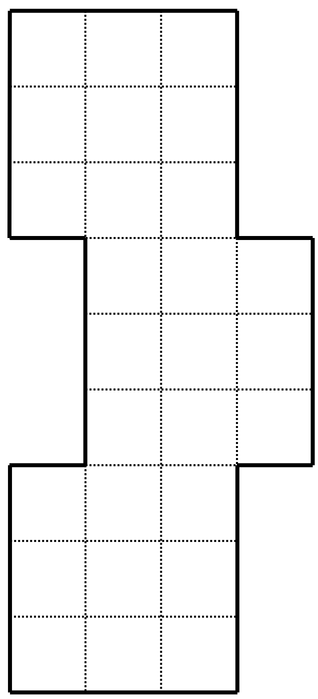
Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés symétriques par rapport à l'axe de symétrie de ces polygones.



Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

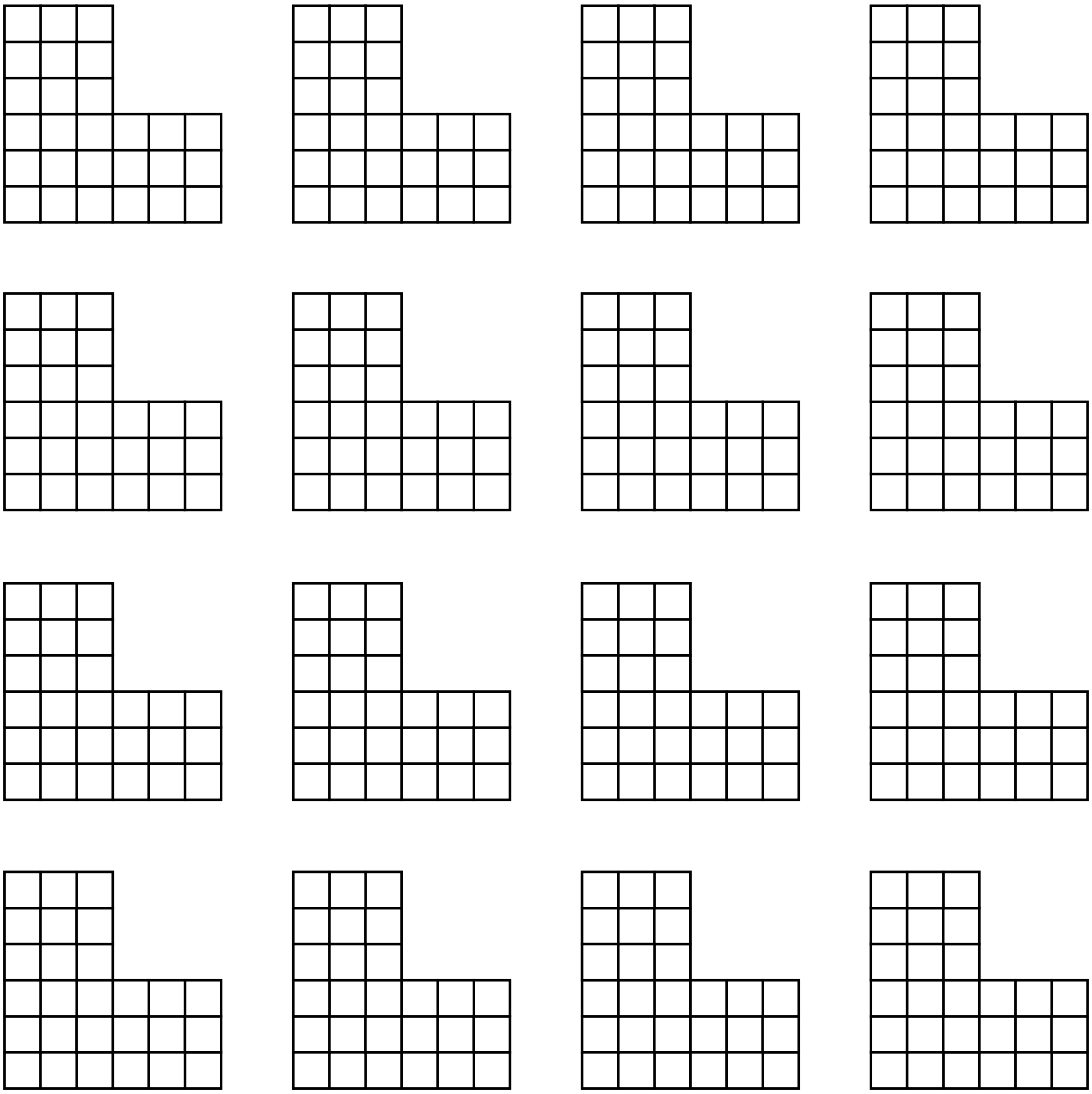
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

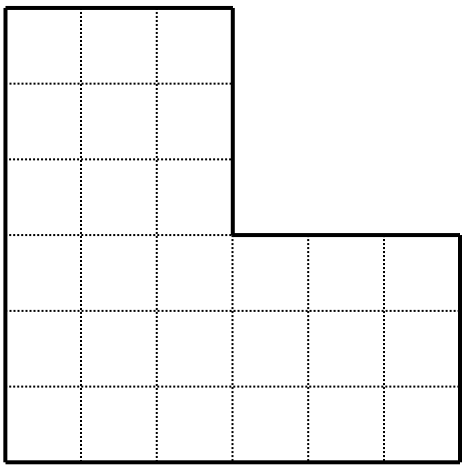


Vers le sommaire

Des pentaminos et un axe de symétrie (2)

Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés symétriques par rapport à l'axe de symétrie de ces polygones.





Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

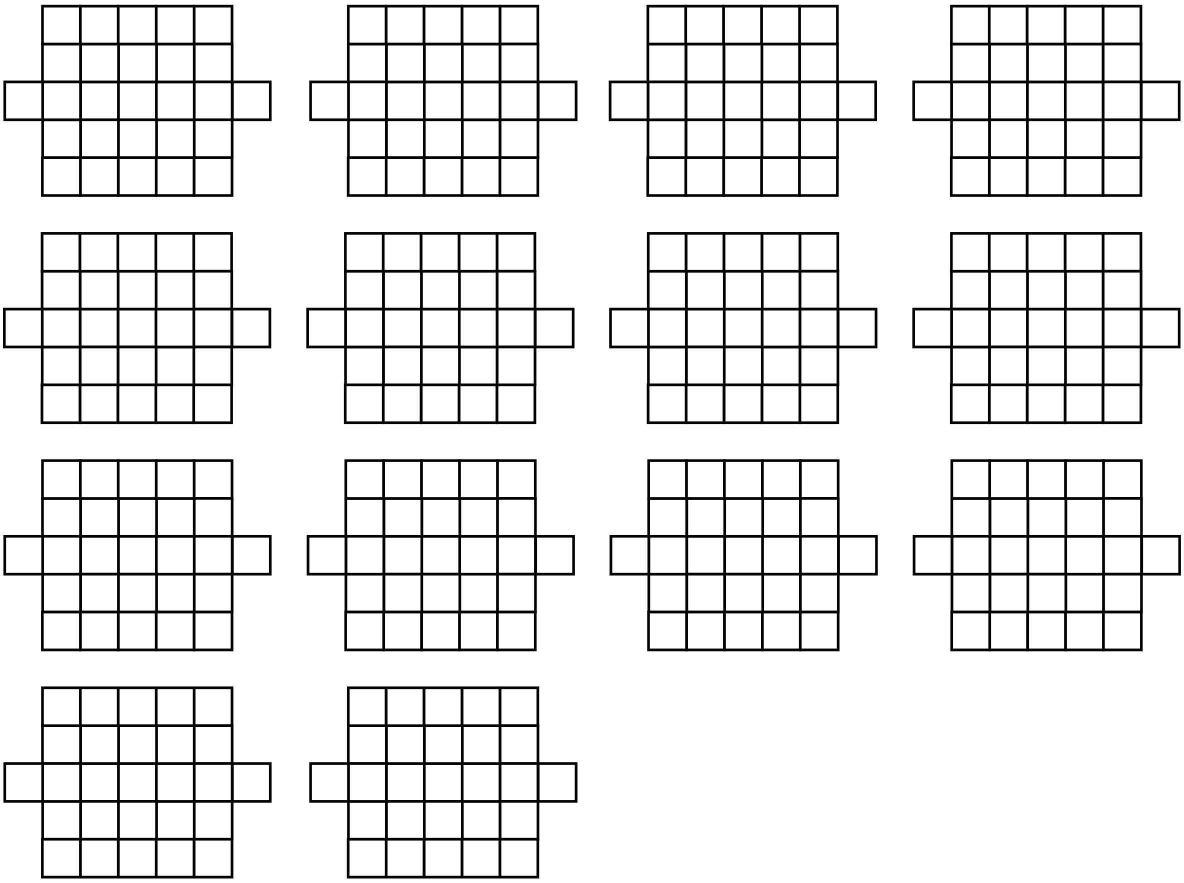
Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

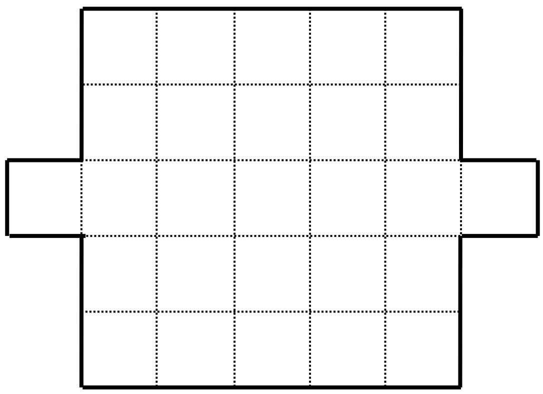
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

Vers le sommaire

Des pentaminos et un axe de symétrie (3)

Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés  symétriques par rapport à l'axe de symétrie vertical de ces polygones.





Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

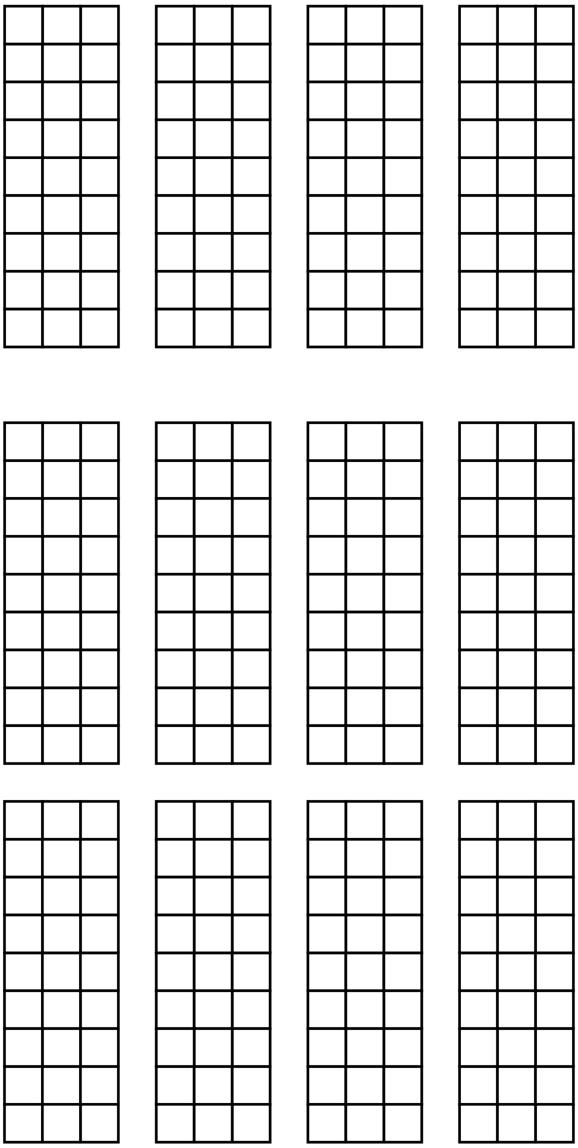
Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

Vers le sommaire

Des pentaminos et un axe de symétrie (4)

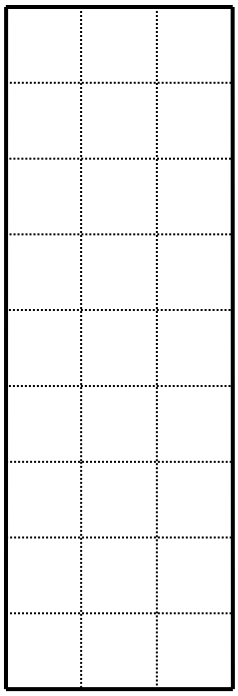
Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés symétriques par rapport à l'axe de symétrie vertical de ces polygones.



Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

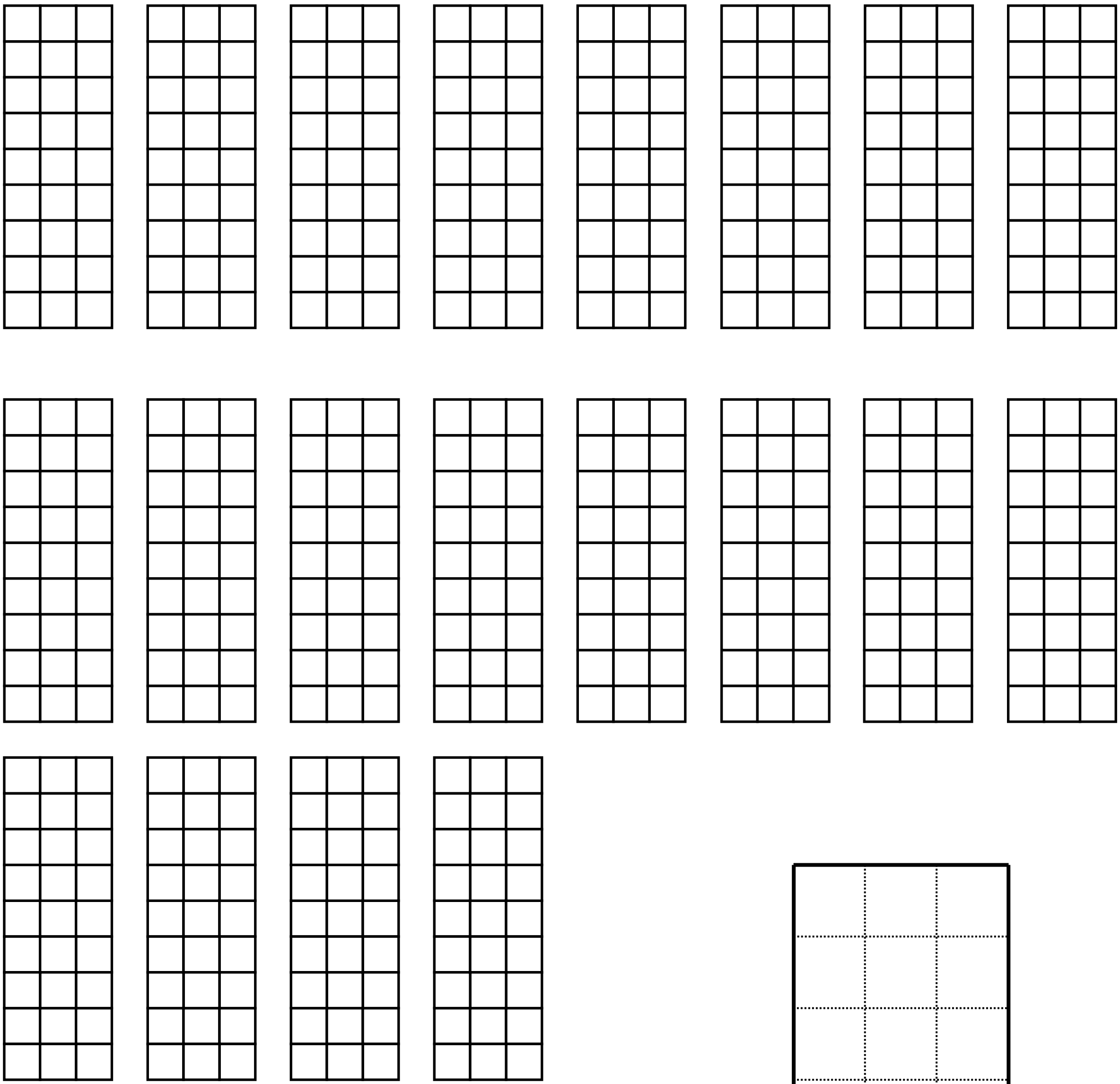
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.



Vers le sommaire

Des pentaminos et un axe de symétrie (5)

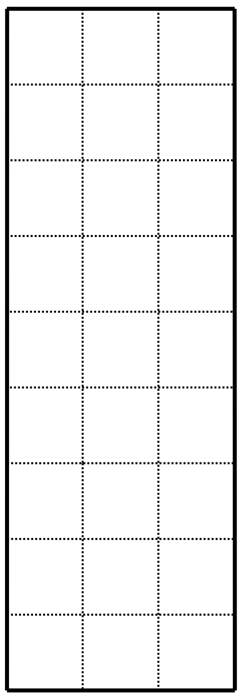
Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés symétriques par rapport à l'axe de symétrie horizontal de ces polygones.



Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

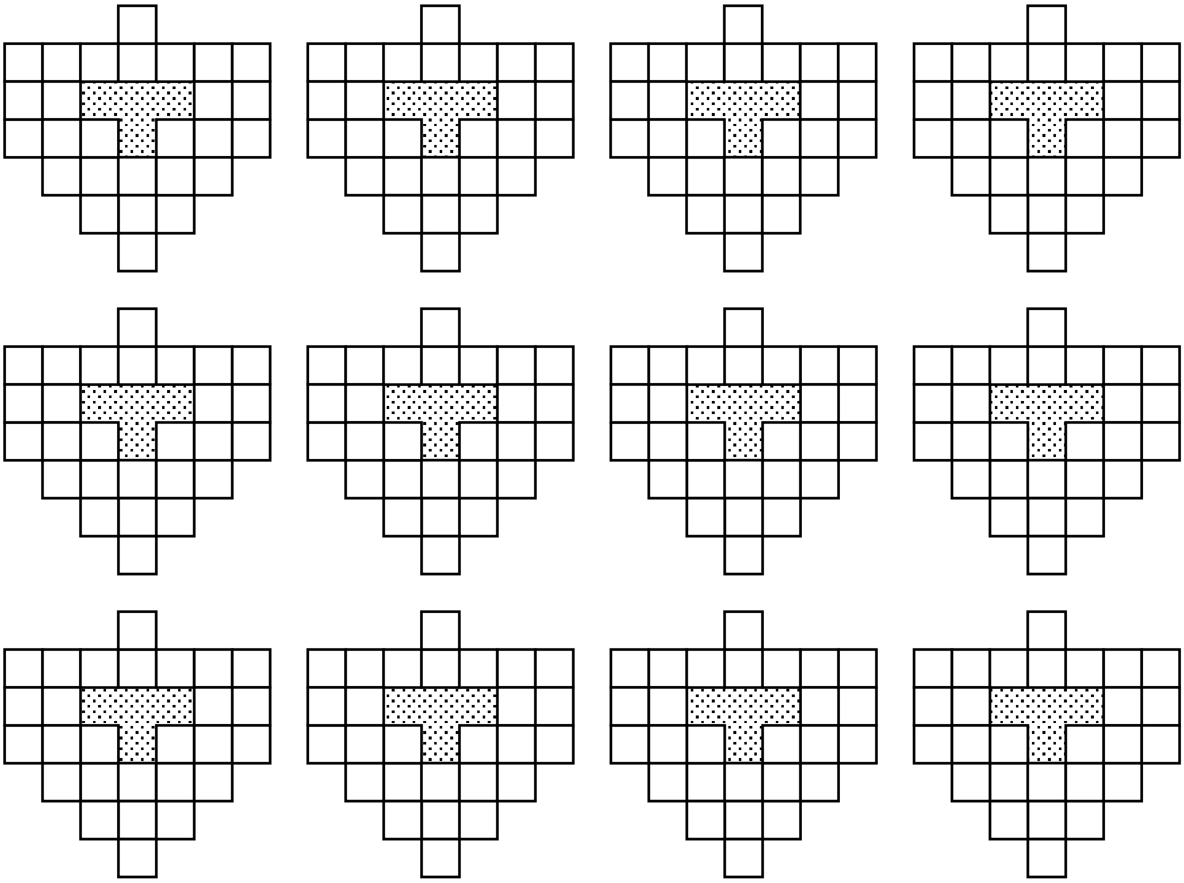
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

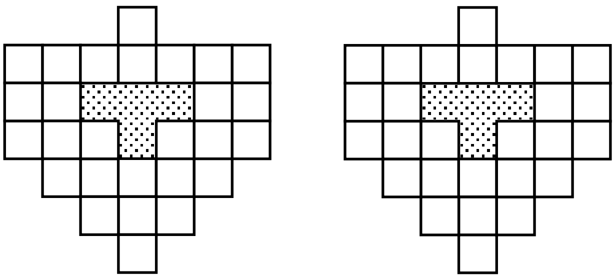


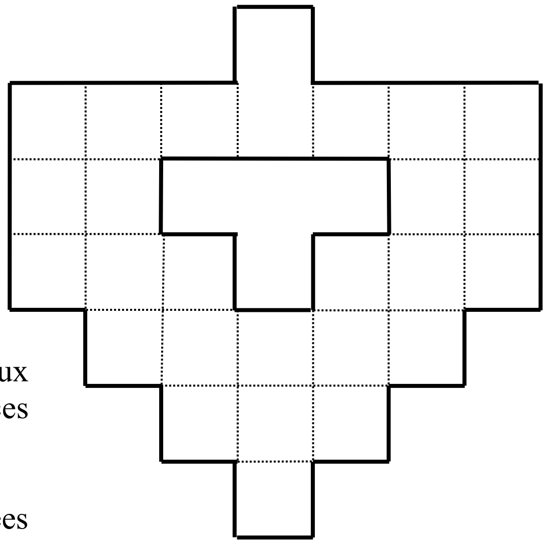
Vers le sommaire

Des pentaminos et un axe de symétrie (6)

Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés □ symétriques par rapport à l'axe de symétrie vertical de ces polygones.







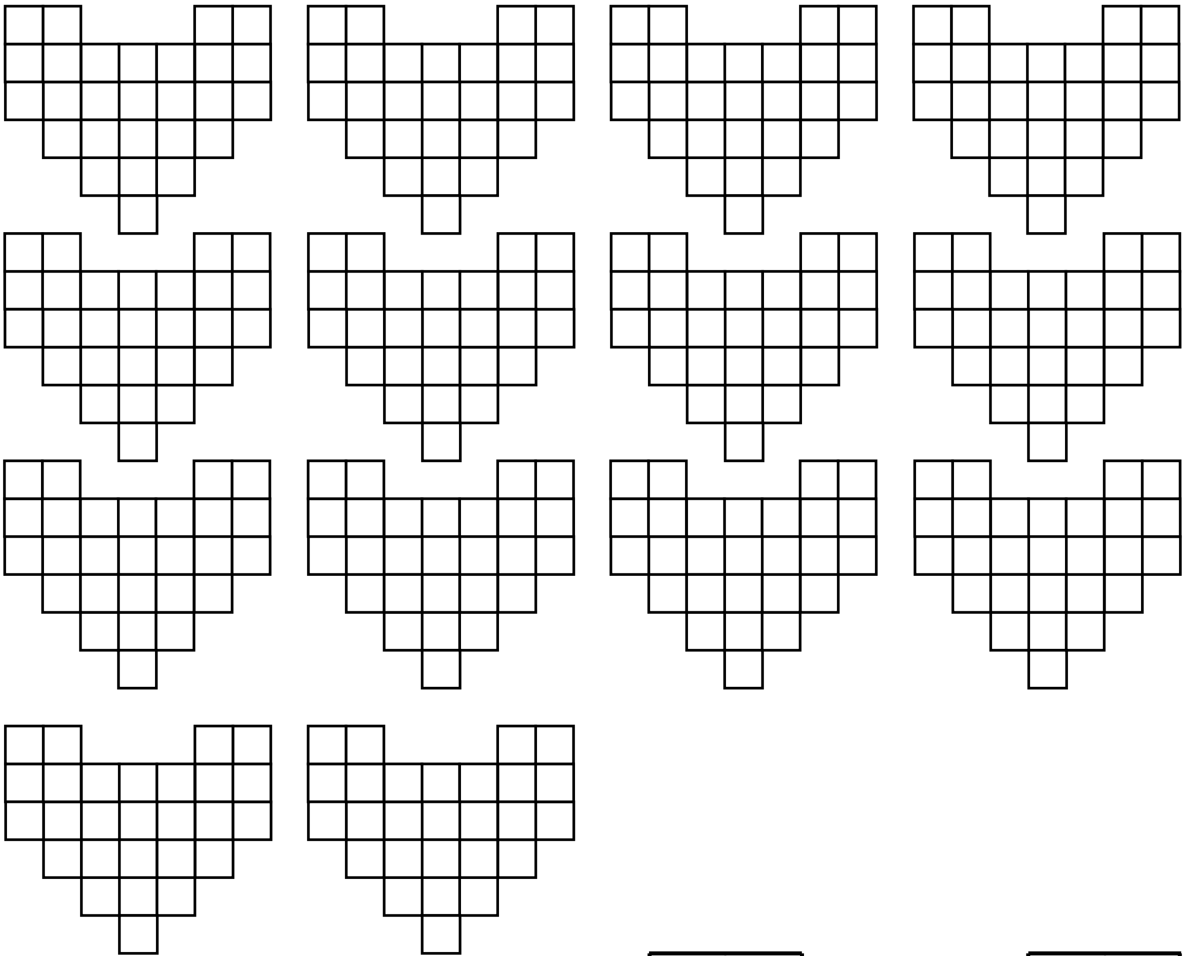
Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

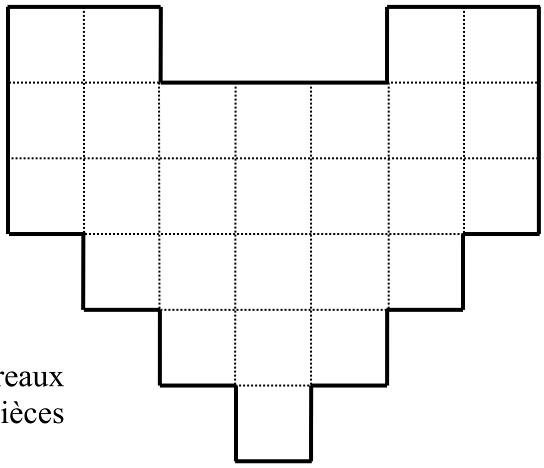
Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

Des pentaminos et un axe de symétrie (7)

Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés ☐ symétriques par rapport à l'axe de symétrie de ces polygones.





Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

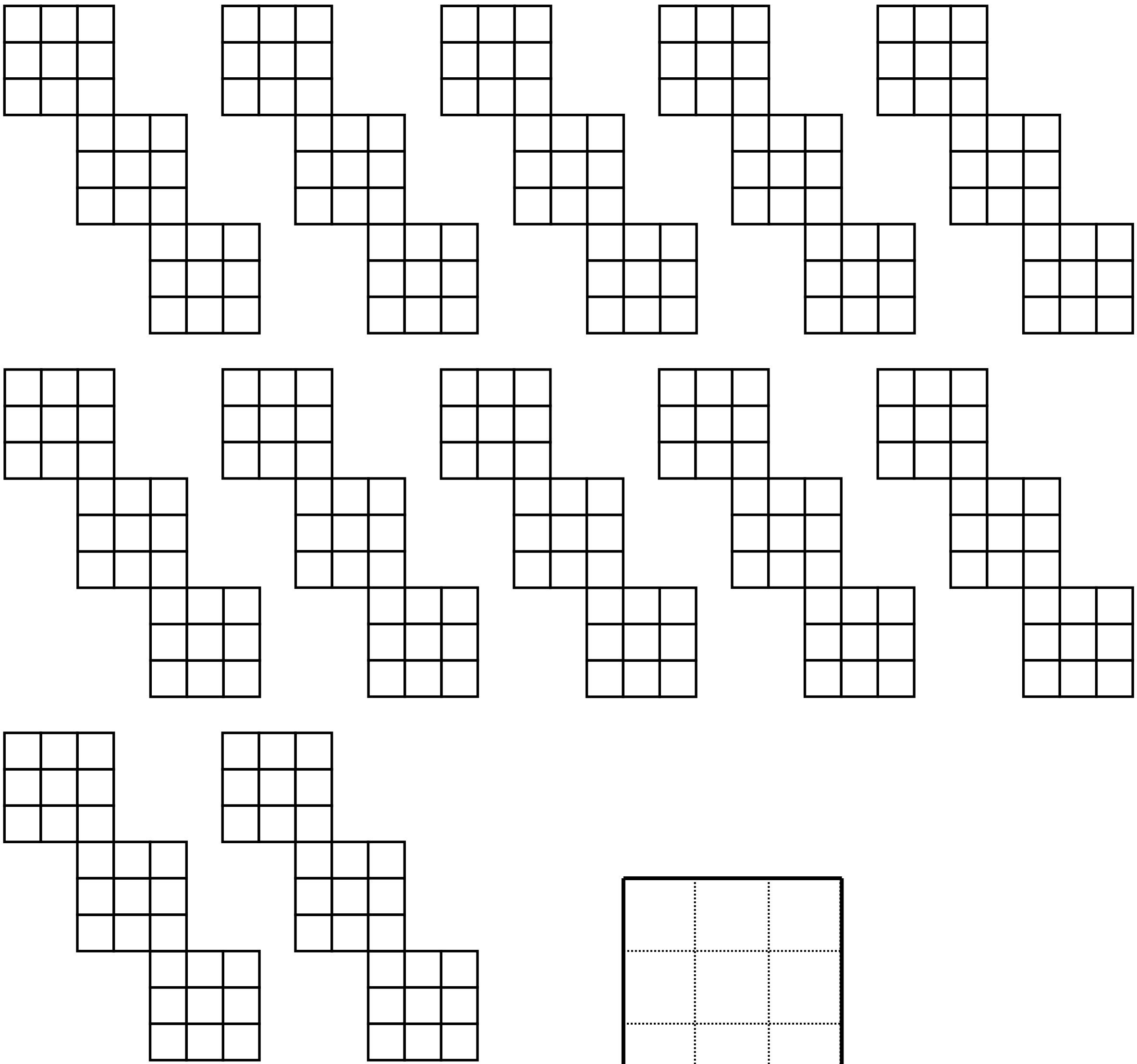
Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

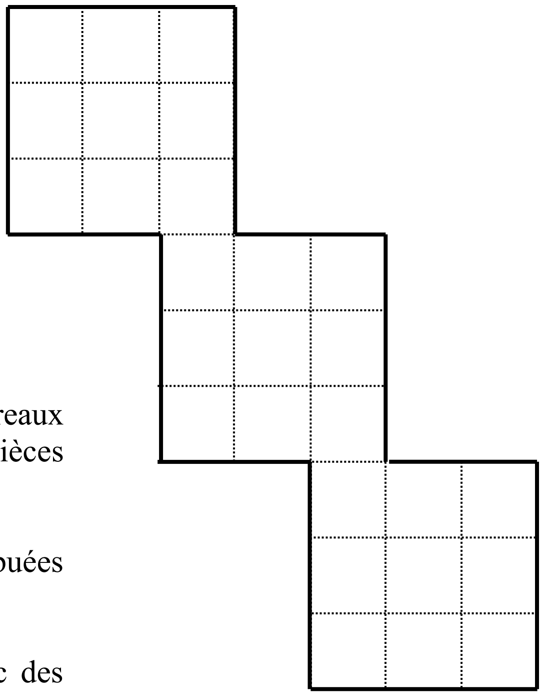
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

Vers le sommaire

Des pentaminos et un centre de symétrie (1)

Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés  symétriques par rapport au centre de symétrie de ces polygones





Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

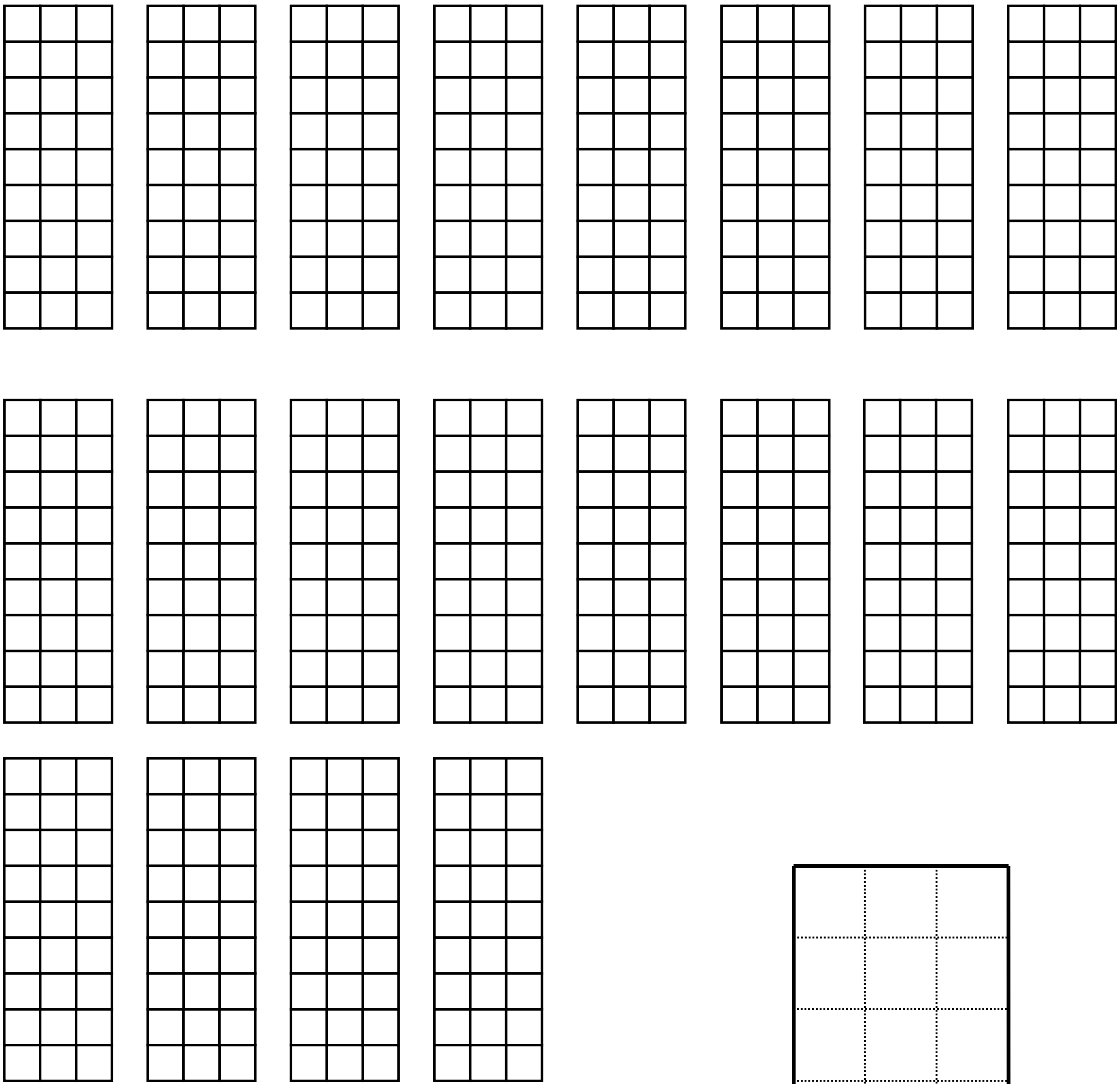
Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

Vers le sommaire

Des pentaminos et un centre de symétrie (2)

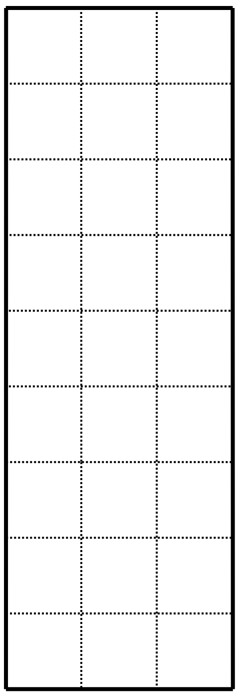
Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés ☐ symétriques par rapport au centre de symétrie de ces polygones.



Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

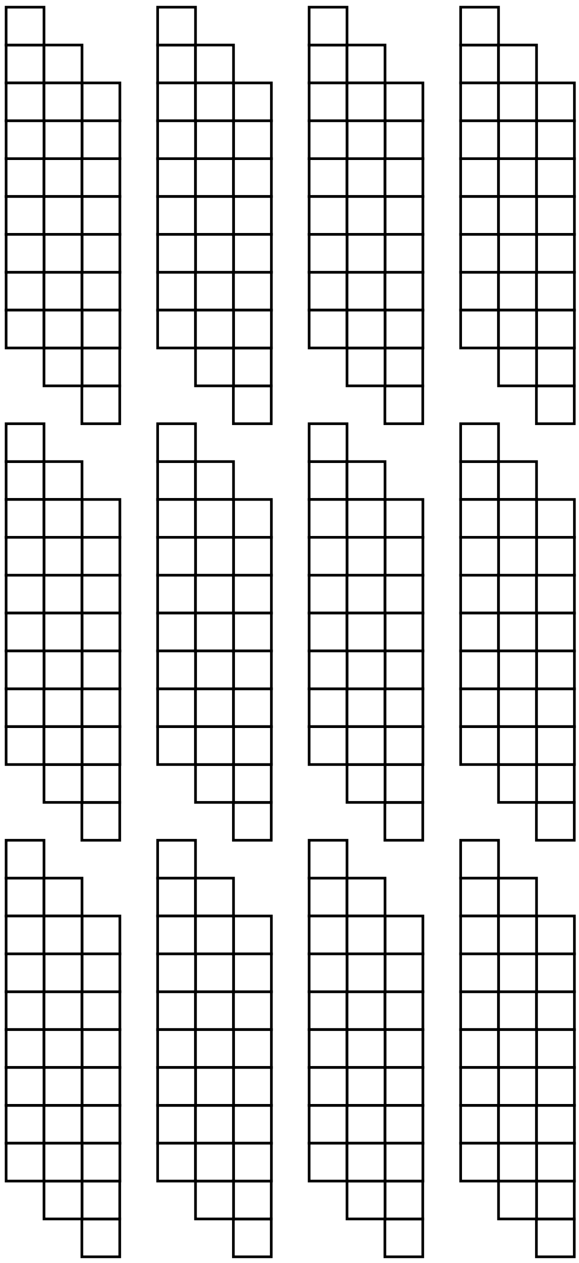
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.



Vers le sommaire

Des pentaminos et un centre de symétrie (3)

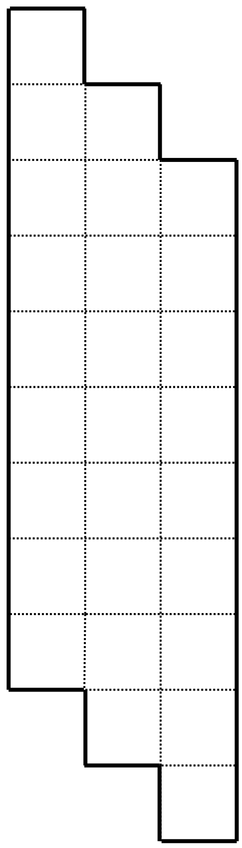
Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés ☐ symétriques par rapport au centre de symétrie de ces polygones.



Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

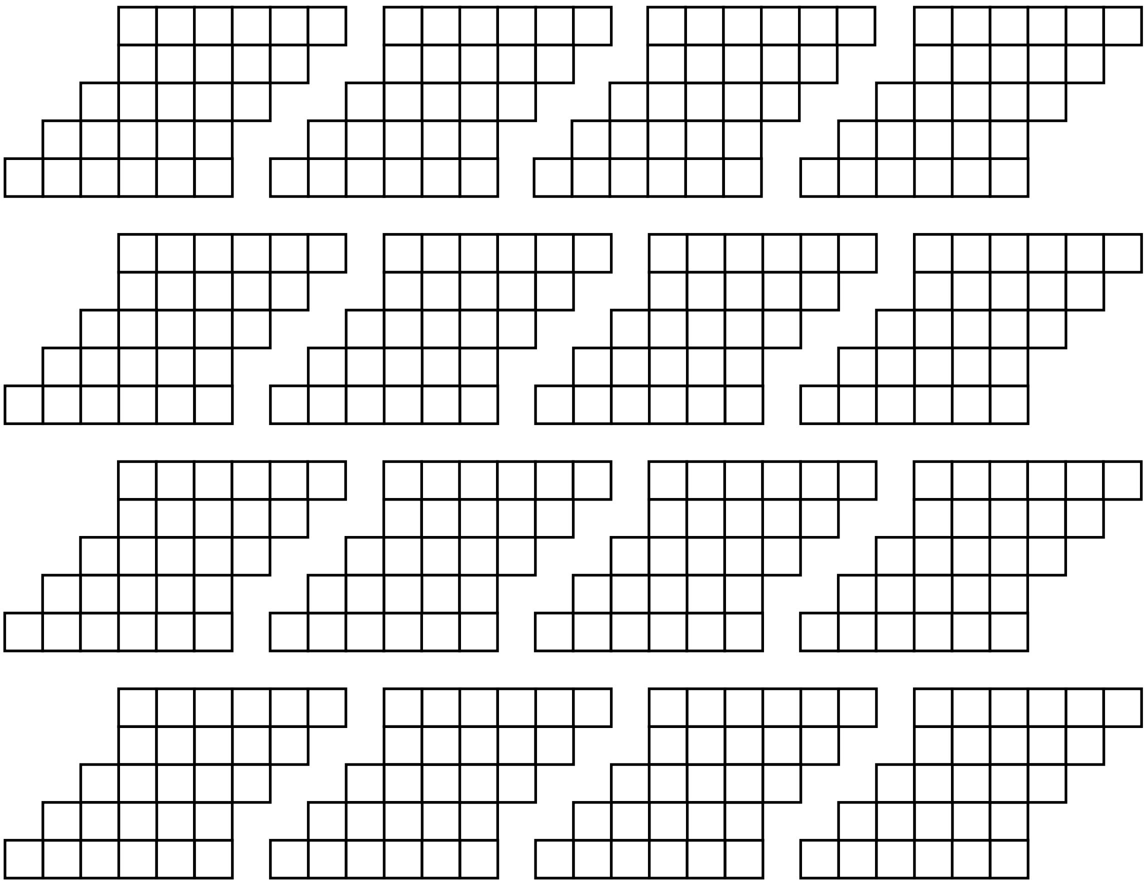
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.



Vers le sommaire

Des pentaminos et un centre de symétrie (4)

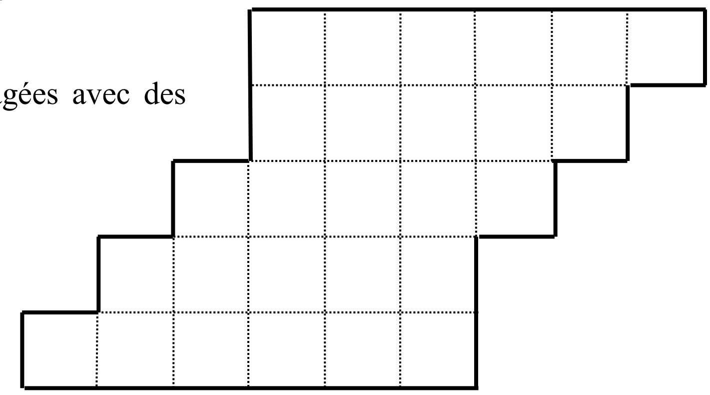
Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés symétriques par rapport au centre de symétrie de ces polygones.



Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

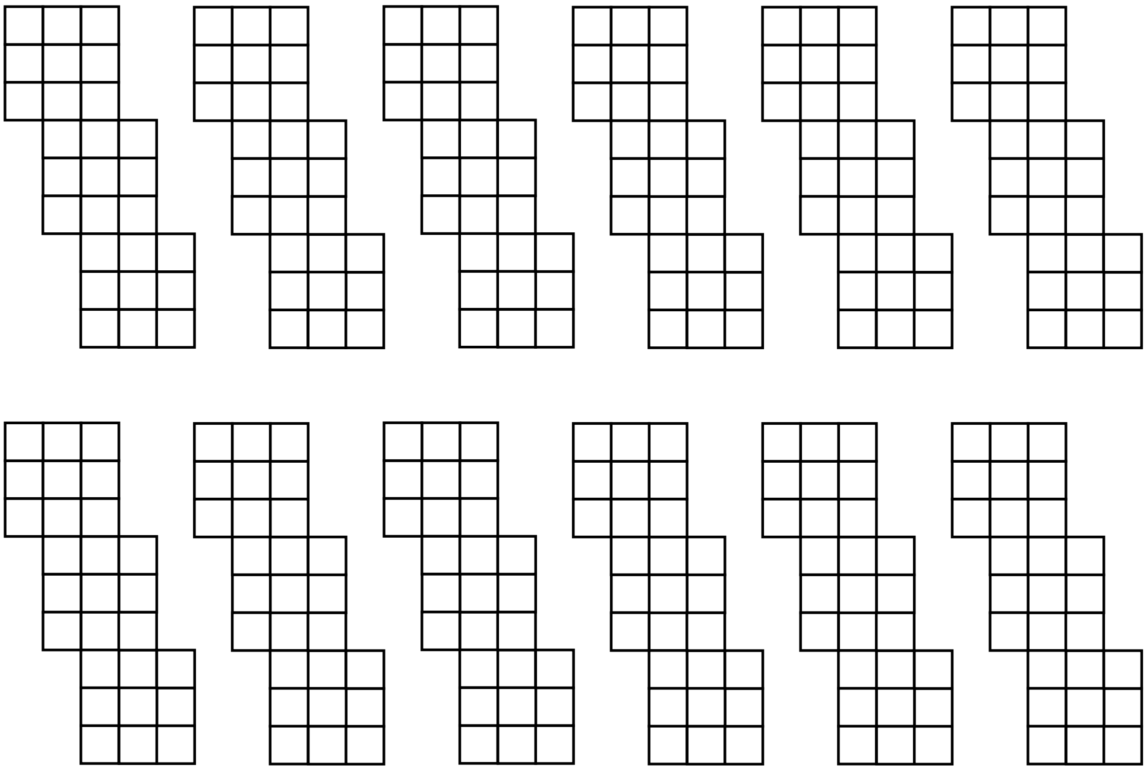
Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

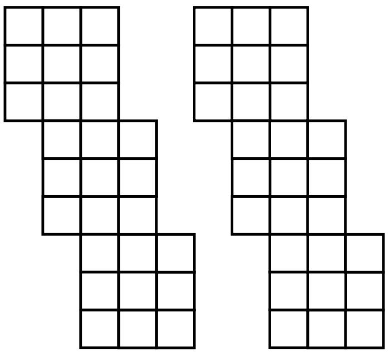


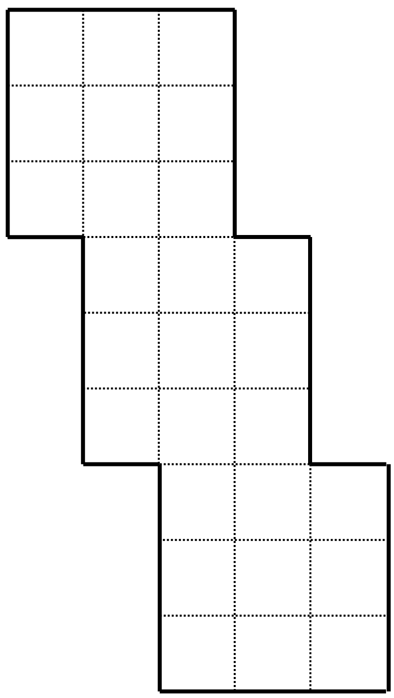
Vers le sommaire

Des pentaminos et un centre de symétrie (5)

Dans les polygones ci-dessous, marque d'une croix toutes les positions possibles de deux carrés □ symétriques par rapport au centre de symétrie de ces polygones





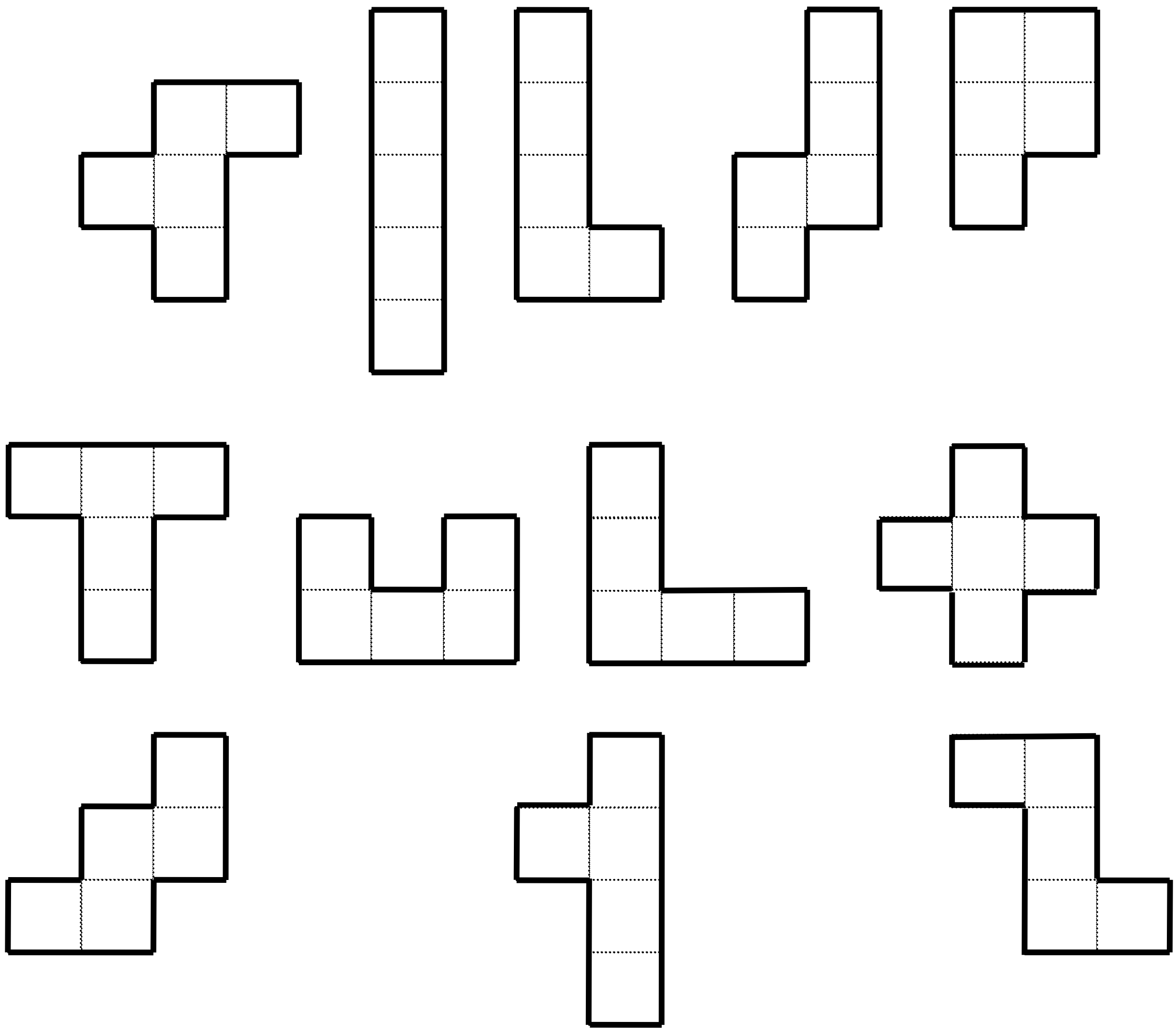


Dans les polygones ci-dessus, les 25 carreaux restants sont-ils recouvrables par des pièces choisies parmi les 12 pentaminos ?

Le dessin ci-contre et les pièces du jeu distribuées à tous pourront être utilisés.

Les recherches pourront être partagées avec des élèves de la classe.

Les 12 pentaminos et des axes de symétrie



Trace les axes de symétrie possédés par certains des 12 pentaminos (ils reprennent la même place après avoir pivoté autour d'un axe de symétrie).

Vers le sommaire

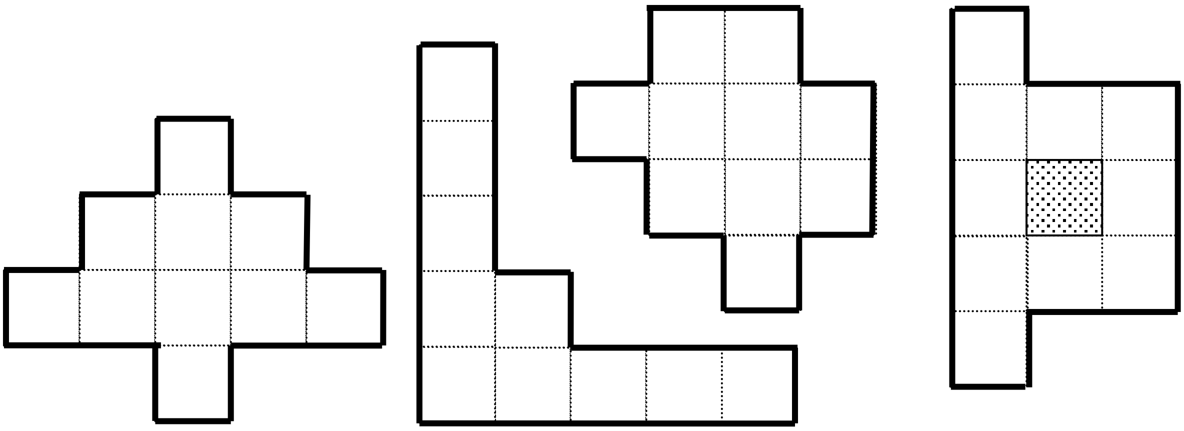
Des assemblages de deux pentaminos et des axes de symétrie

En utilisant les pièces possédant au moins un axe de symétrie, réalise des assemblages de deux pentaminos possédant eux aussi un axe de symétrie.

Dessine ci-dessous tes découvertes.

Vers le sommaire

Avec deux pièces, j'ai réalisé des assemblages possédant un axe de symétrie.
Indique en pointillés l'axe de symétrie et retrouve les limites des pièces.



Trouve d'autres assemblages possédant un axe de symétrie, en utilisant deux pièces ne possédant pas nécessairement d'axe de symétrie :

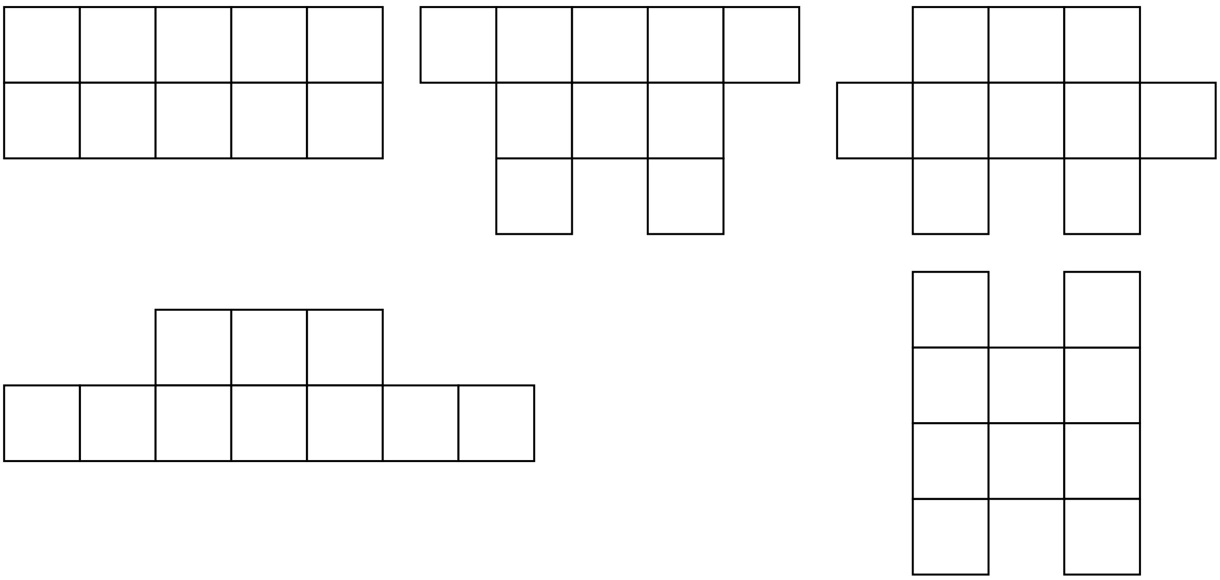
Vers le sommaire

Quelques indications pour le lecteur

Cette dernière recherche peut paraître difficile à mettre en œuvre en classe. Les élèves trouvent quelques assemblages par essais erreurs.

Une autre démarche semble intéressante ;

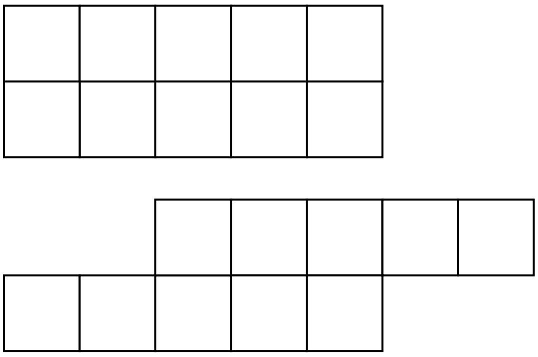
Je réalise un assemblage symétrique de dix carreaux. Je déplace de façon symétrique deux carreaux du premier assemblage.

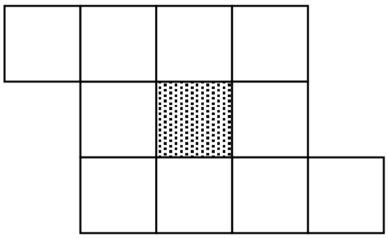


D’autres assemblages peuvent être utilisés comme départ : ils peuvent comporter un ou plusieurs « trous ».

Vers le sommaire

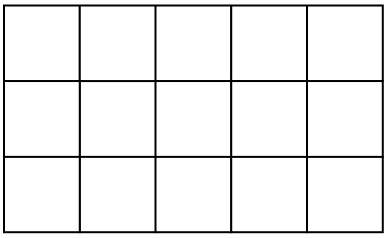
Des symétries centrales peuvent être mises à contribution :

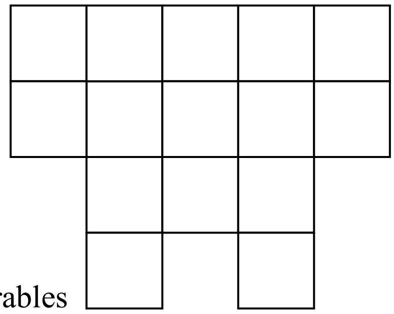


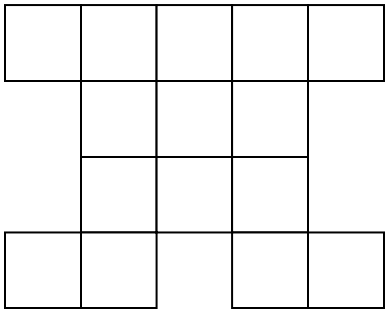


Le déplacement symétrique des deux carreaux permet de faire vivre corporellement les déplacements.
Dans tous les cas, il restera à tenter de recouvrir les dessins par deux pentaminos choisis parmi les douze.
Avec dix carreaux, les déplacements par une symétrie centrale peinent à fournir un assemblage symétrique de deux pentaminos.

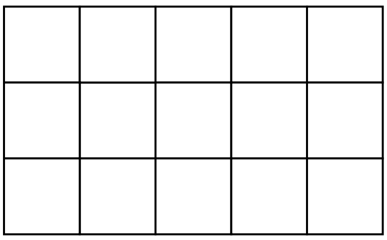
Il n'en sera pas de même lors d'un prolongement possible de la recherche des configurations symétriques formées de trois pentaminos choisis parmi les douze.

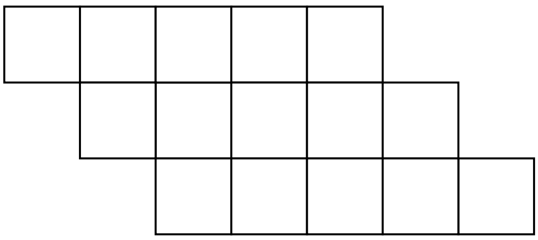




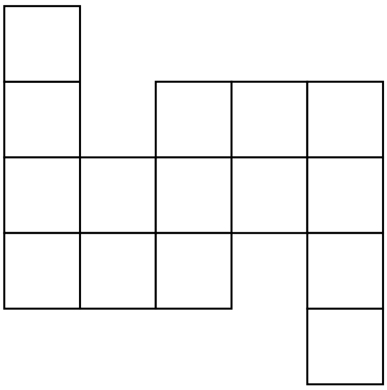


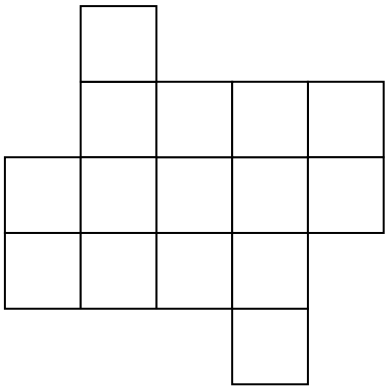
Ces configurations sont recouvrables





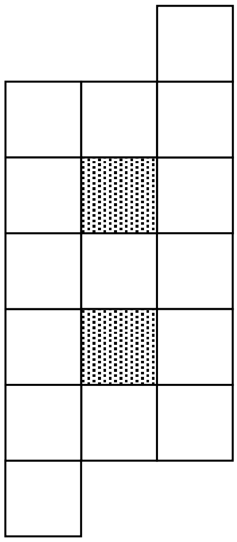
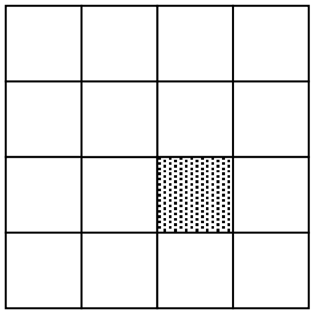
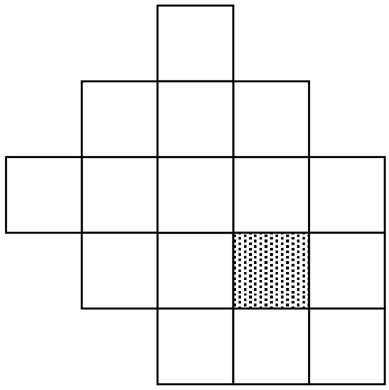
Ces configurations sont également recouvrables….





Vers le sommaire

La recherche n’est pas close, des assemblages comportant des trous conviennent également.

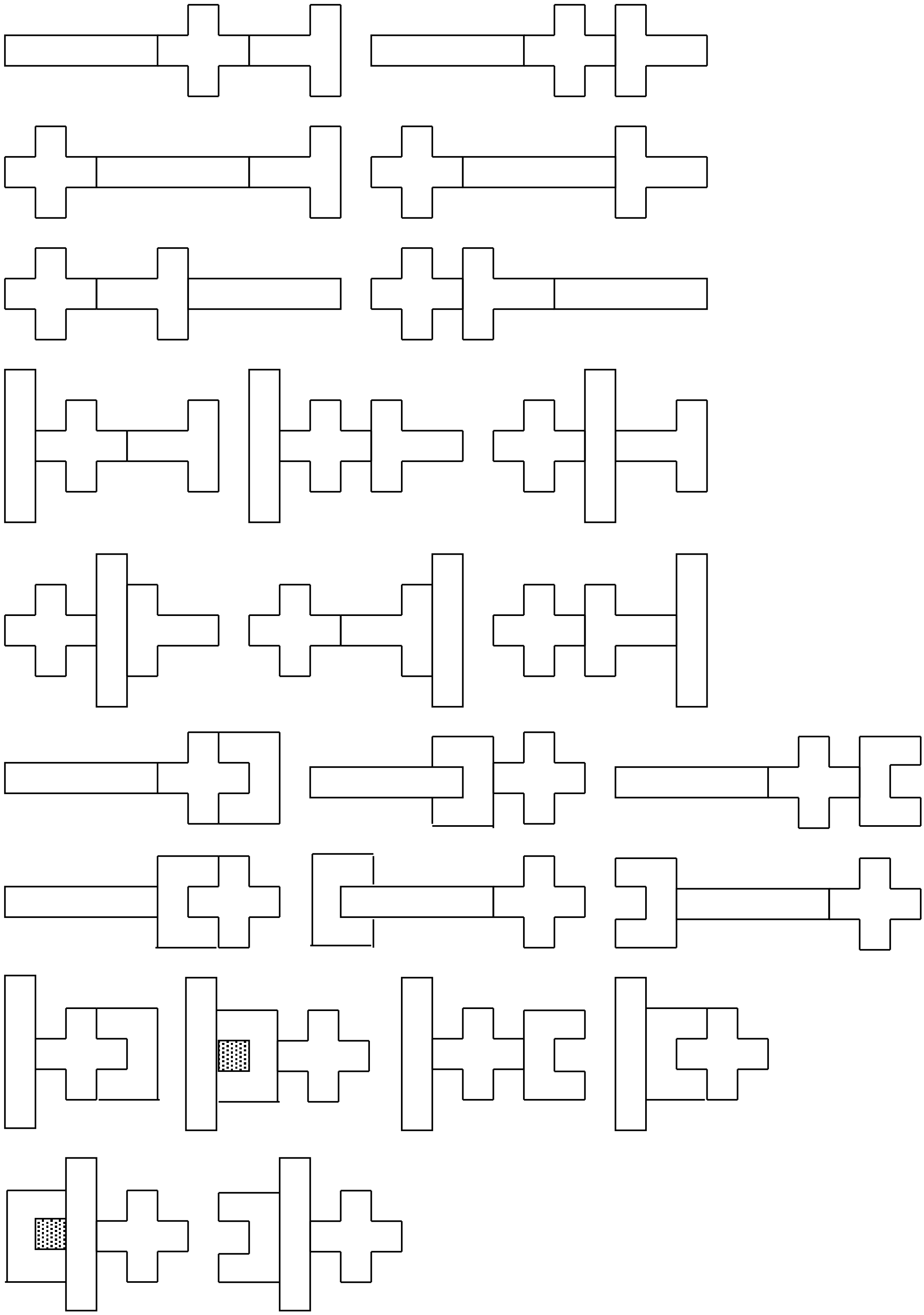
Bonne recherche…

Dans les pages suivantes, voici l’état actuel de mes recherches. Il serait sympathique que les lecteurs de cette brochure complètent la collection.

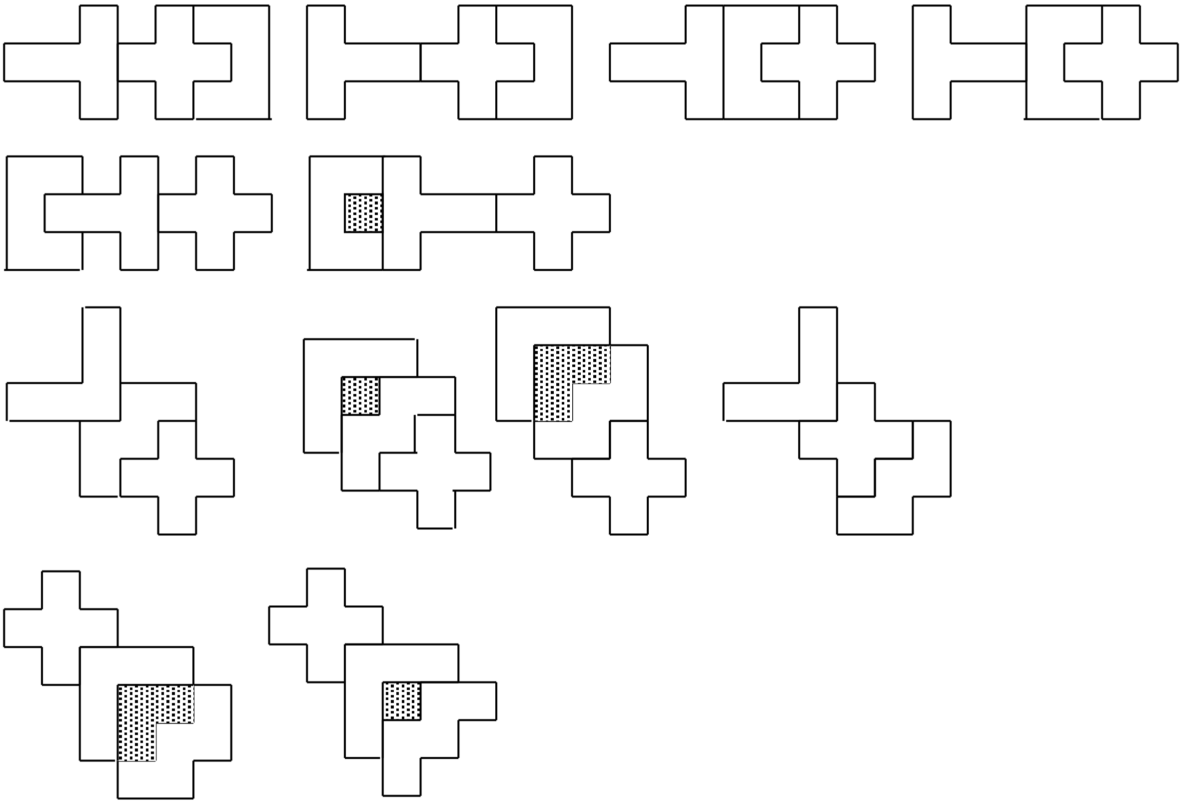
Vers le sommaire

Des assemblages symétriques de trois pièces :

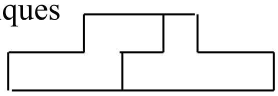
En assemblant trois pièces possédant un axe de symétrie commun :

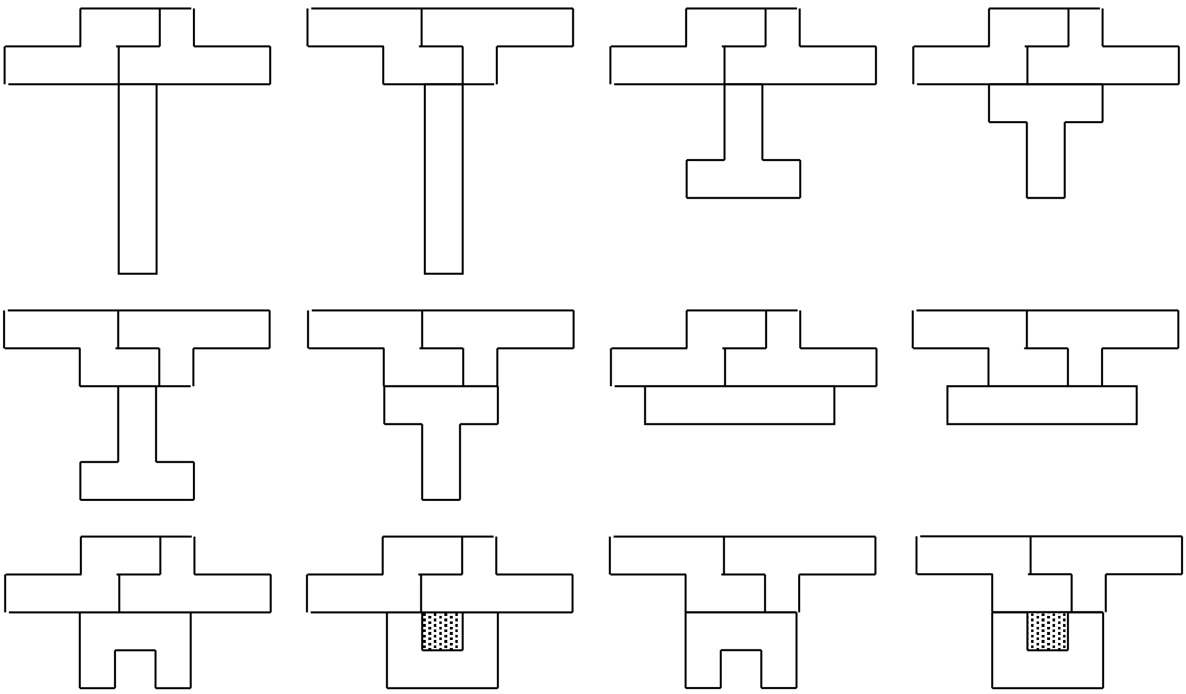


Vers le sommaire

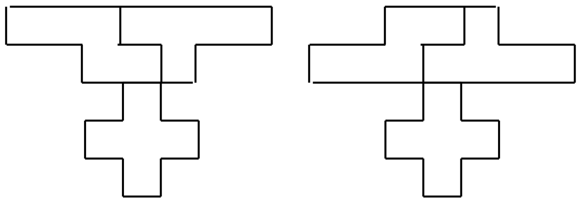


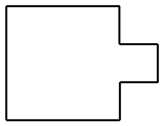
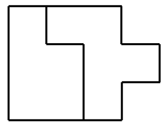
En utilisant des polygones contenant 10 carrés et ayant un axe de symétrie :

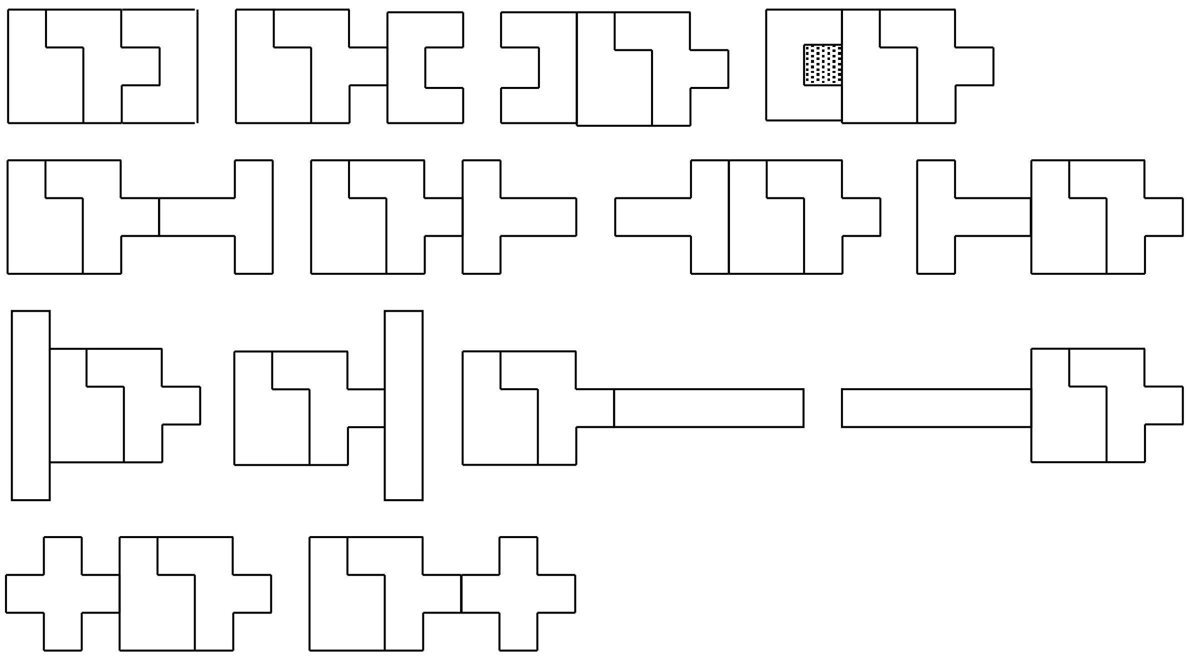
Avec  recouvert par deux pentaminos non symétriques 

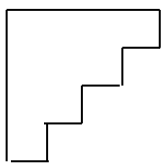
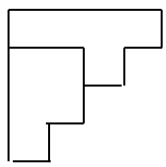


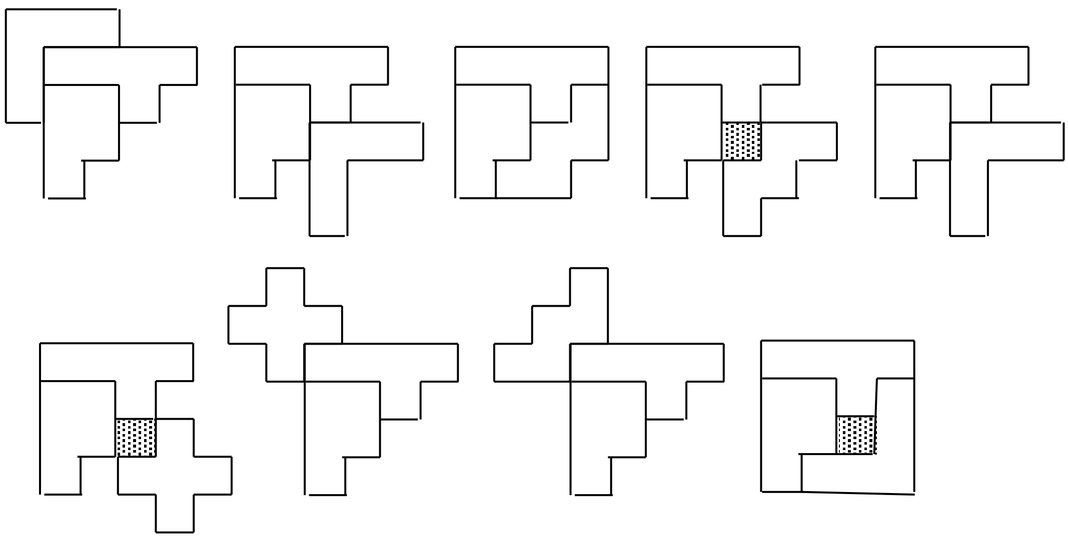
Vers le sommaire



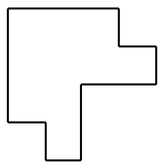
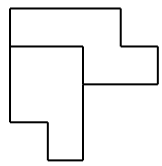
Avec  recouvert par deux pentaminos non symétriques 

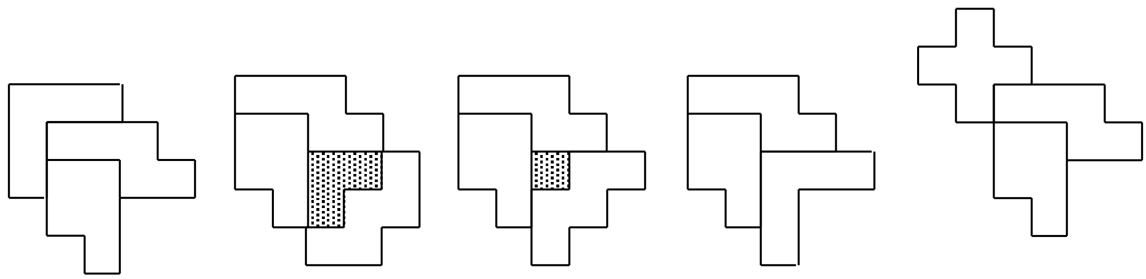


Avec  recouvert par deux pentaminos non symétriques 

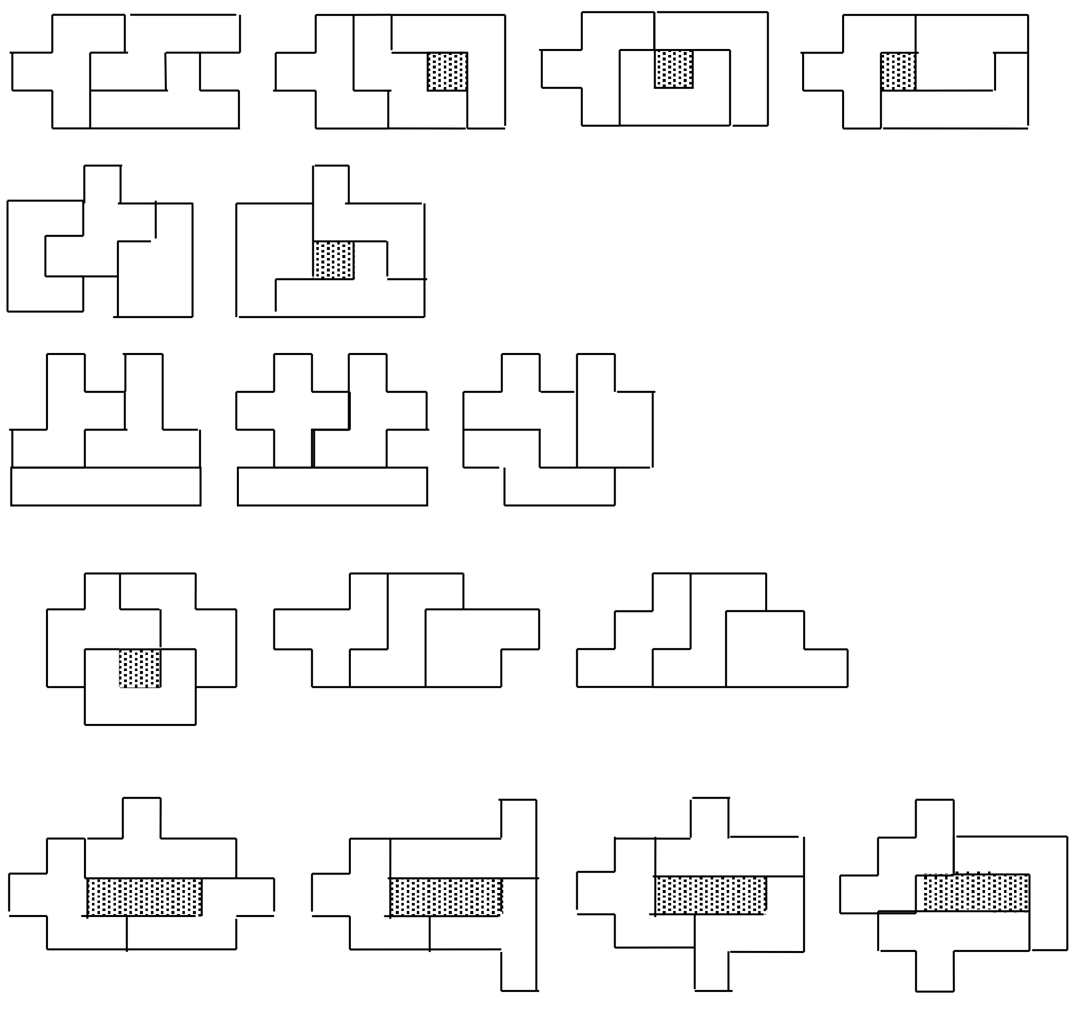


Vers le sommaire

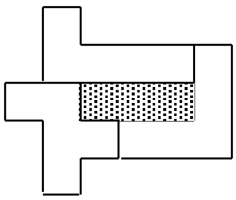
Avec  recouvert par des pentaminos non symétriques 

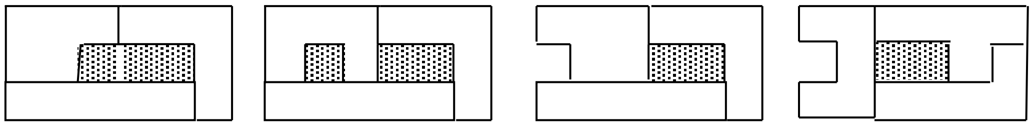


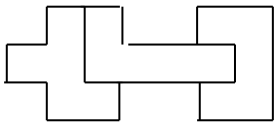
A partir du rectangle 3×5 :

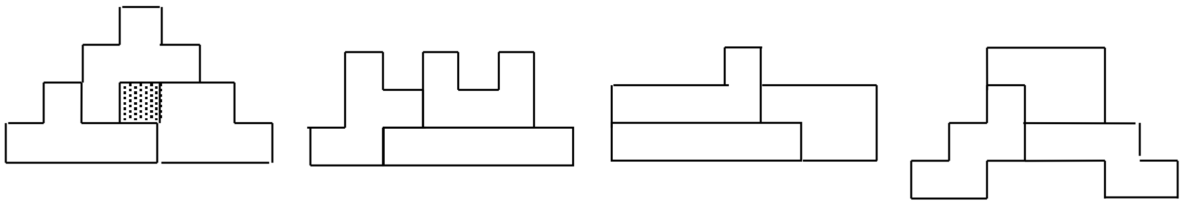


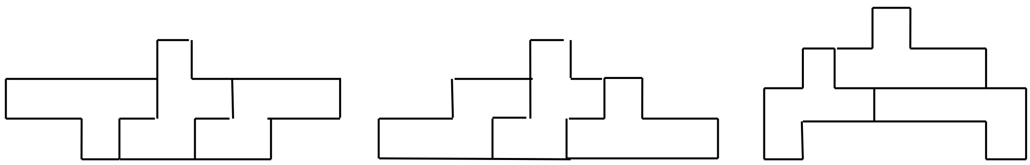
[Vers le sommaire]

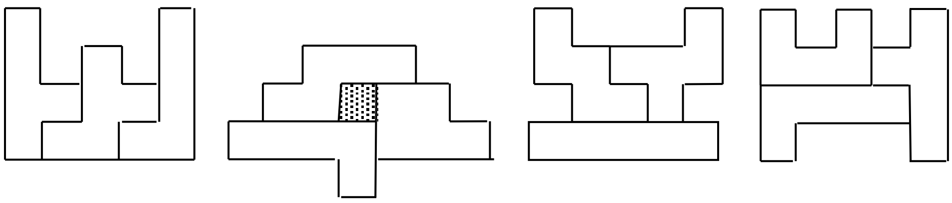


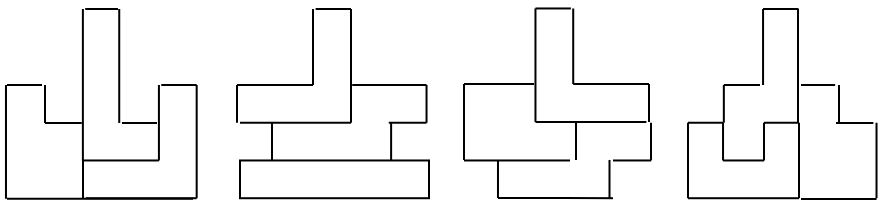


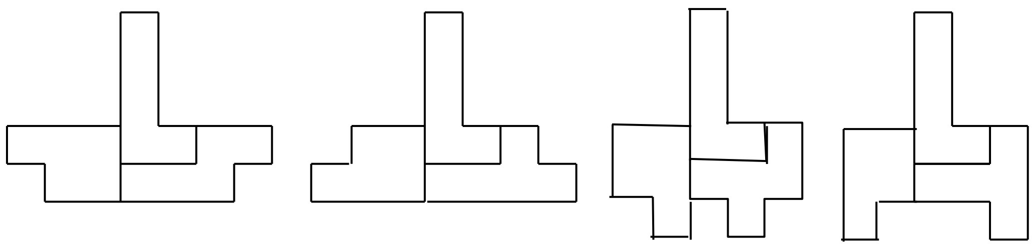




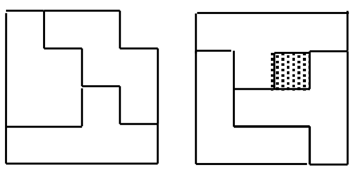




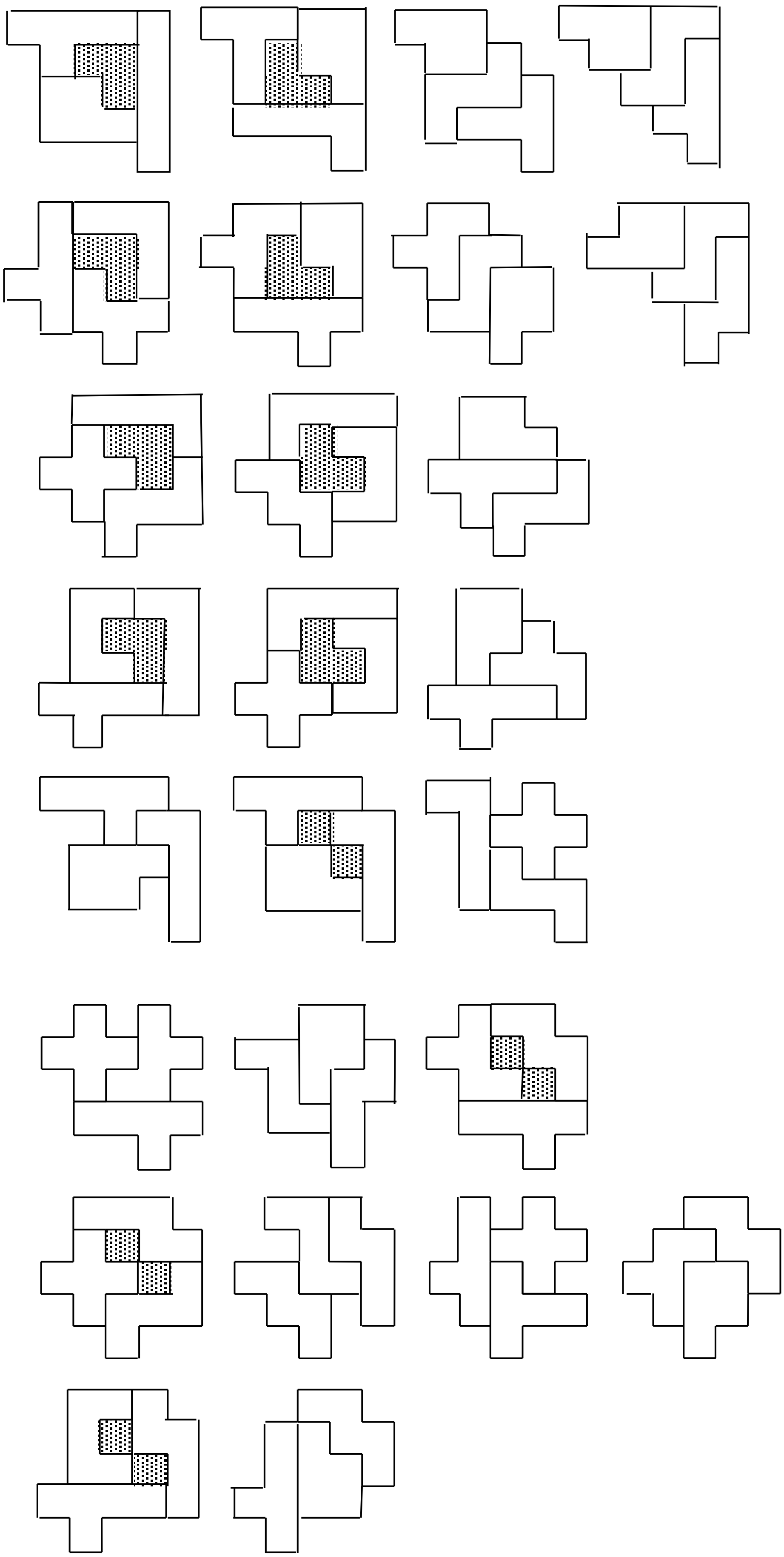


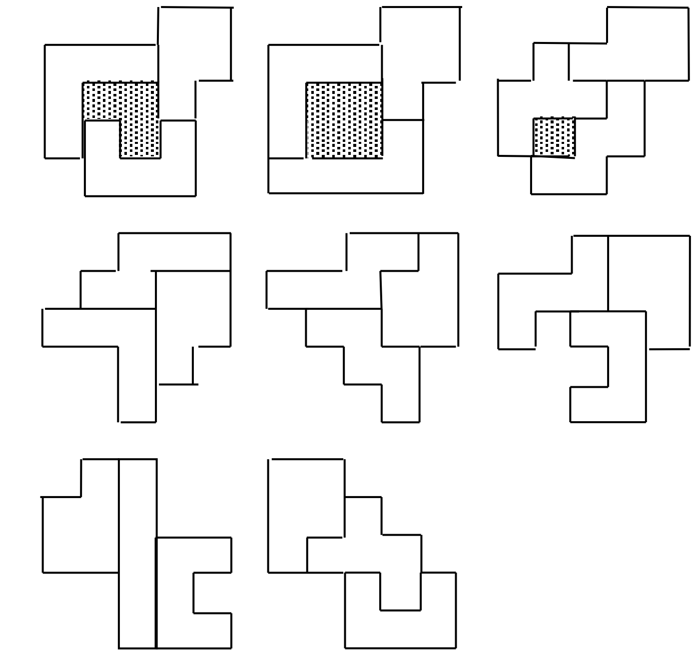


A partir du carré 4×4 :

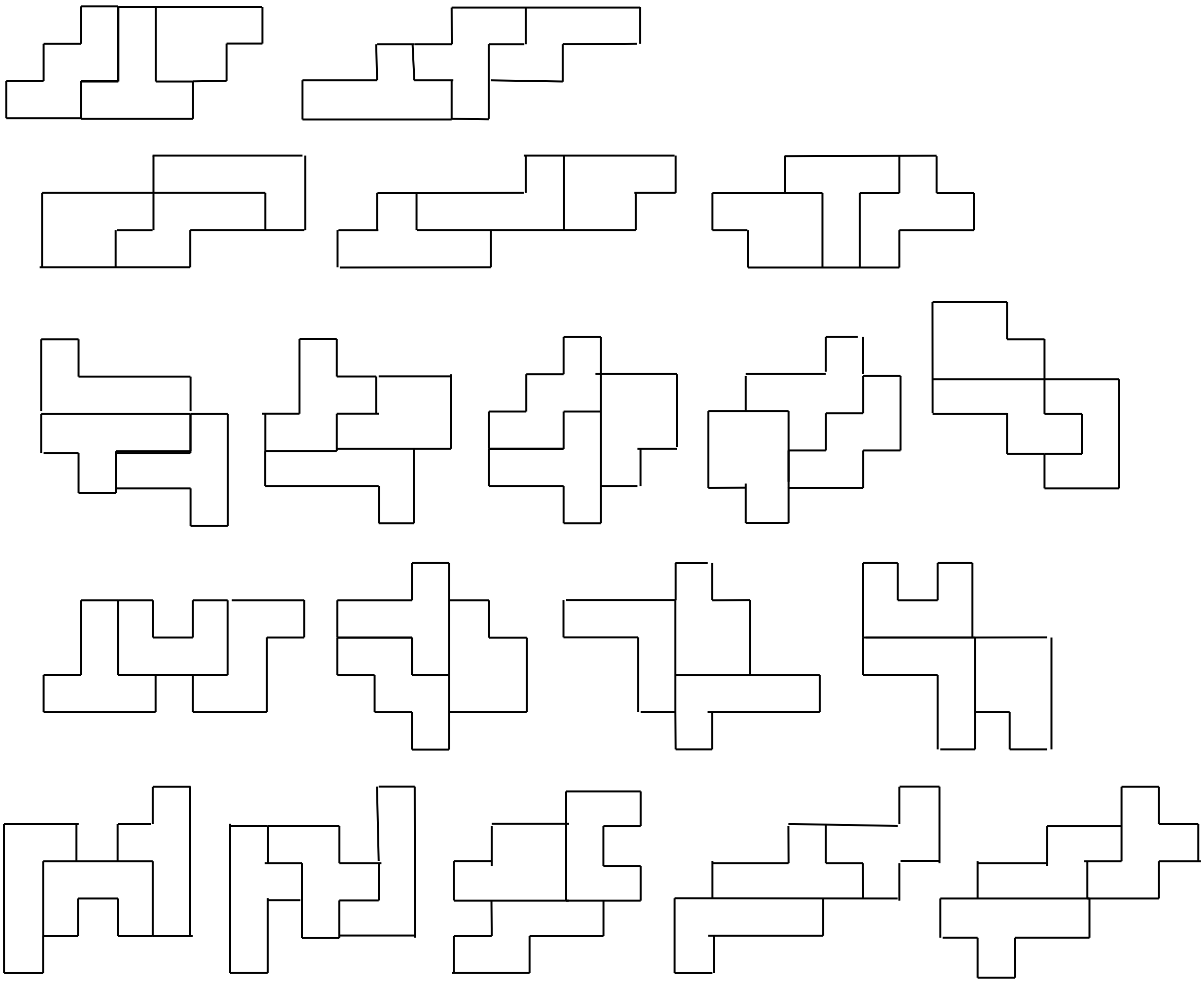


Vers le sommaire

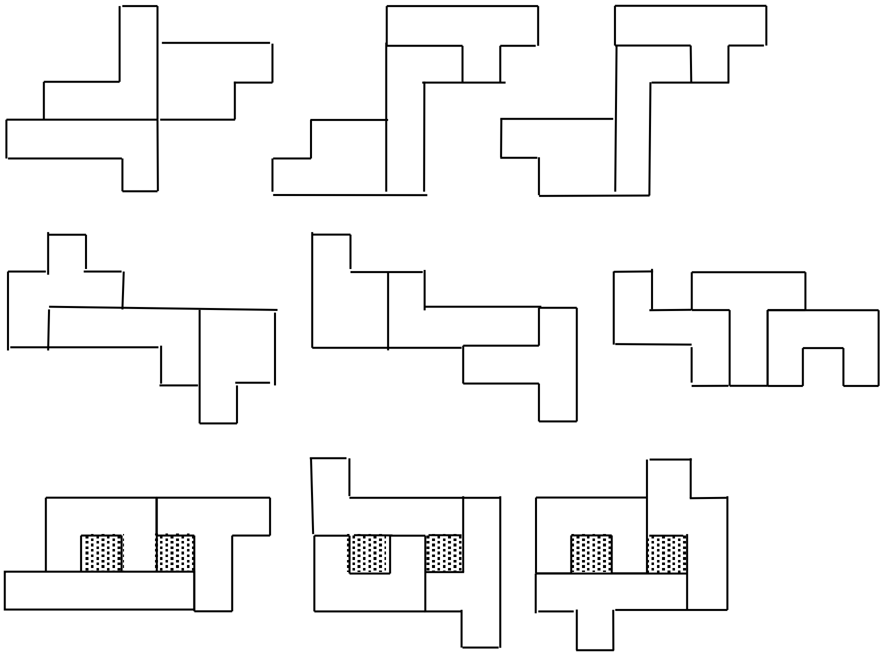




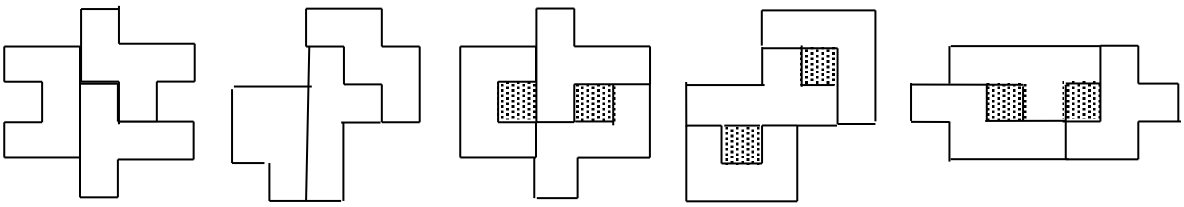
Avec un centre de symétrie :



[Vers le sommaire]

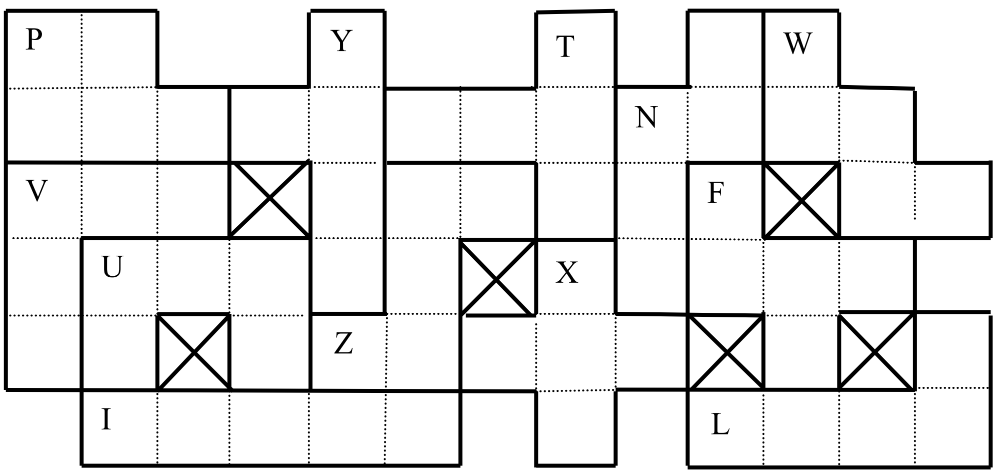


Avec un centre de symétrie et deux axes de symétrie ;



Les pages suivantes vont faire se déplacer des pentaminos. Pour la plupart d'entre elles, les pièces habituelles pourront être manipulées.

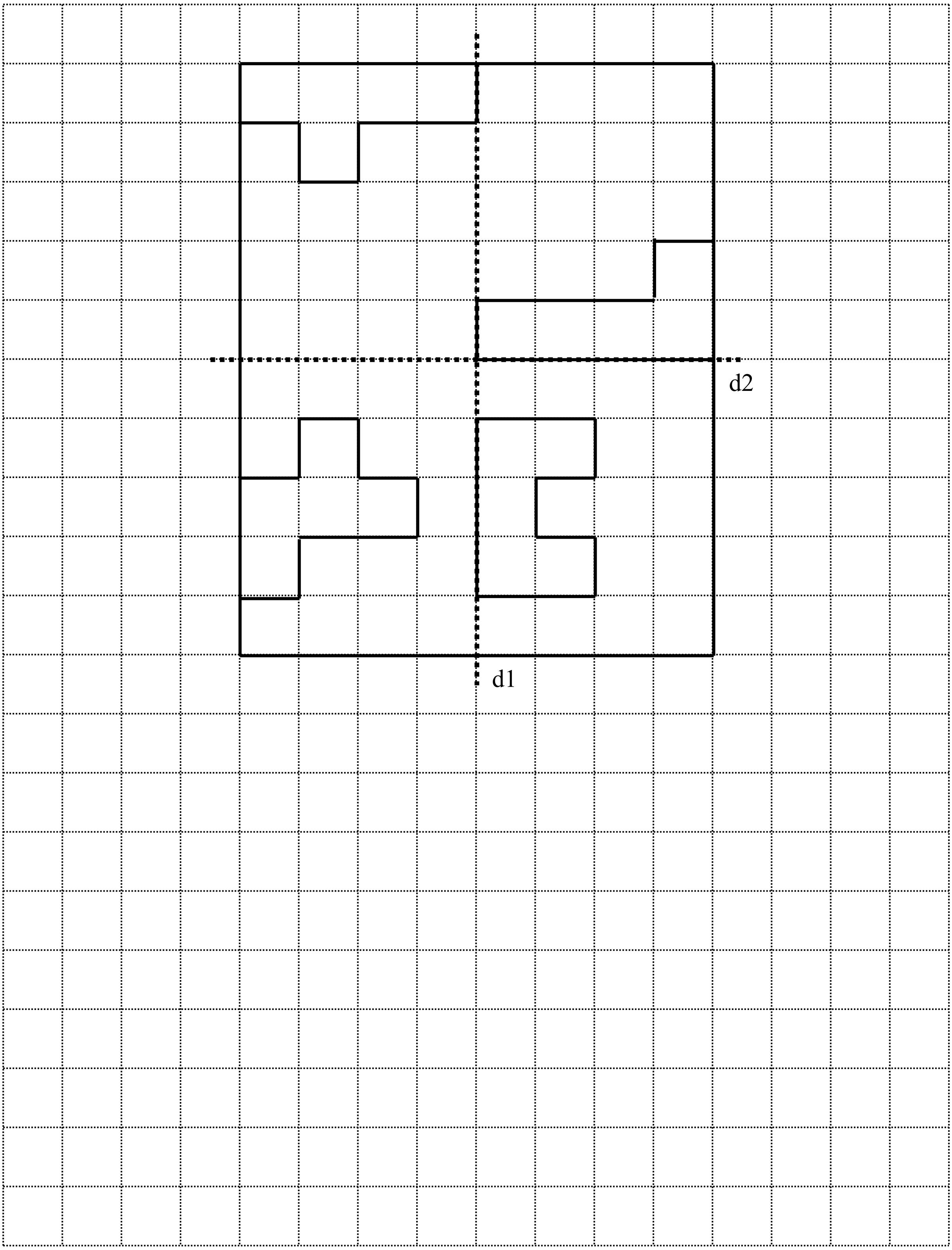
L'ensemble des 12 pièces est à coller sur du carton, puis à découper dans l'ordre : I, puis W, puis P, puis F et L accolés, puis L, puis N, puis X, puis U et V accolés, puis U, puis Y, puis T et enfin Z.
Les petits carrés munis d'une croix seront des « chutes » inutilisées.



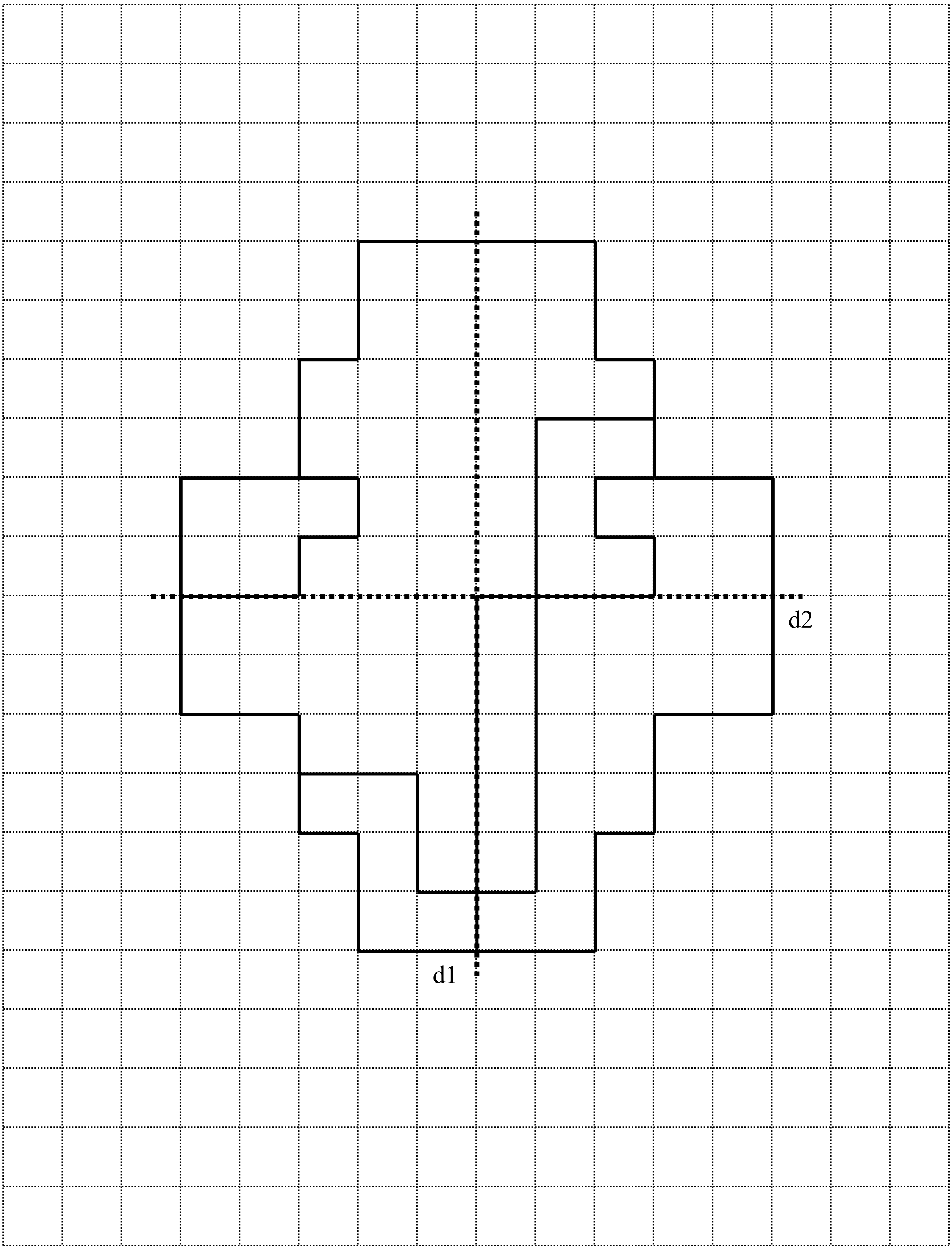
Vers le sommaire

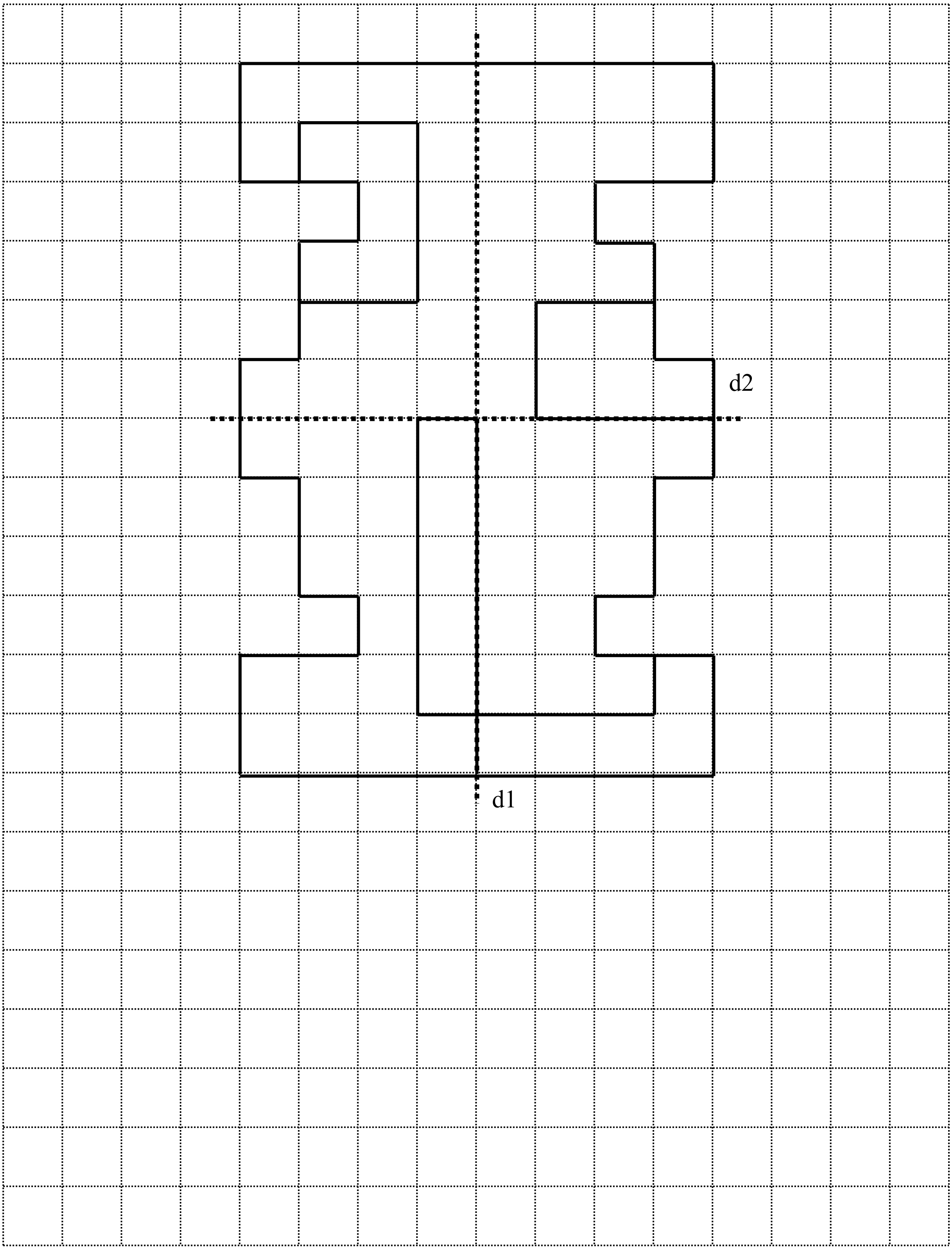
Des pentaminos et des symétries orthogonales (1)

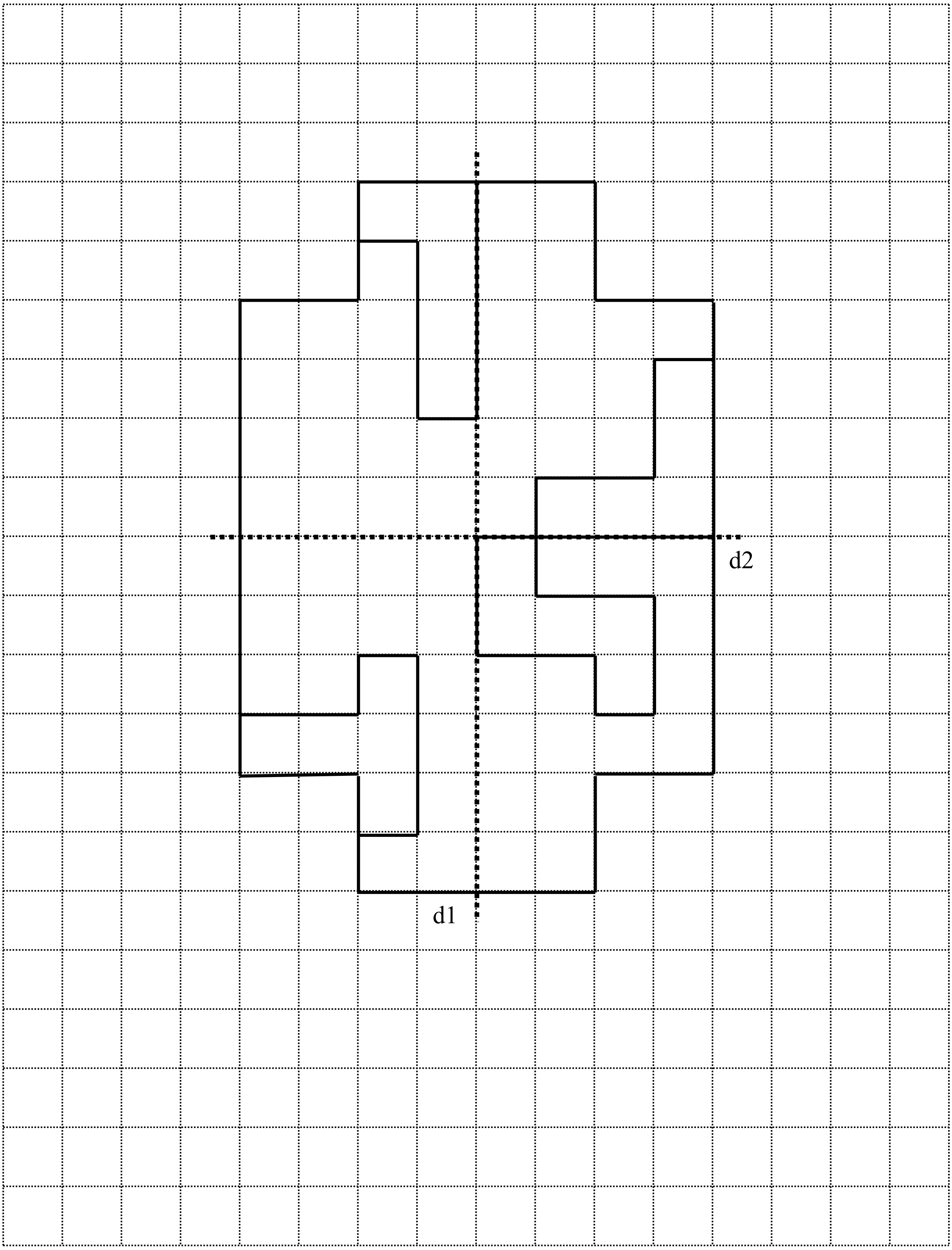
Complète chacun des dessins ci-dessous afin qu'il admette les droites d1 et d2 comme axes de symétrie.
Colorie les dessins en utilisant une couleur différente pour chaque type de pièce.

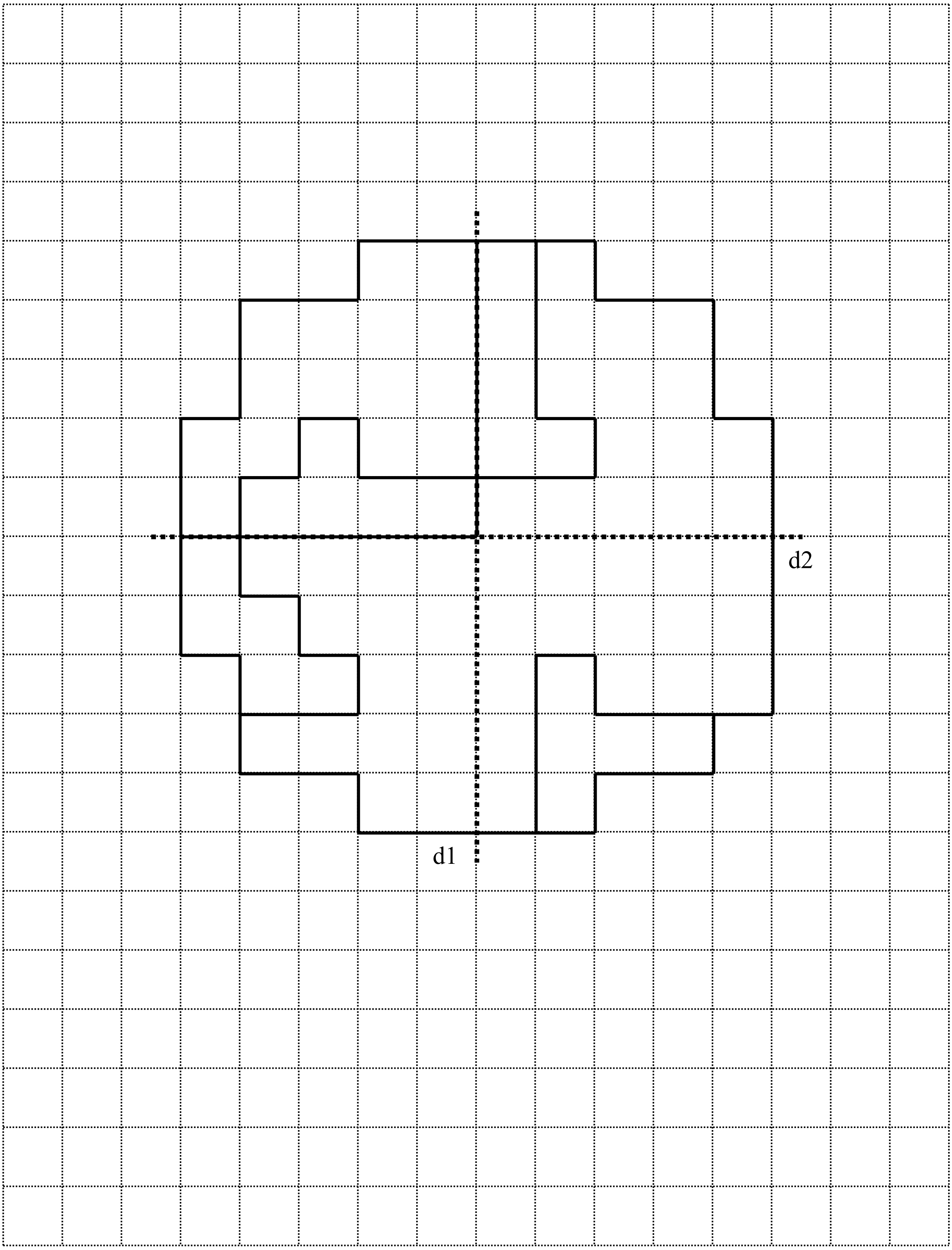


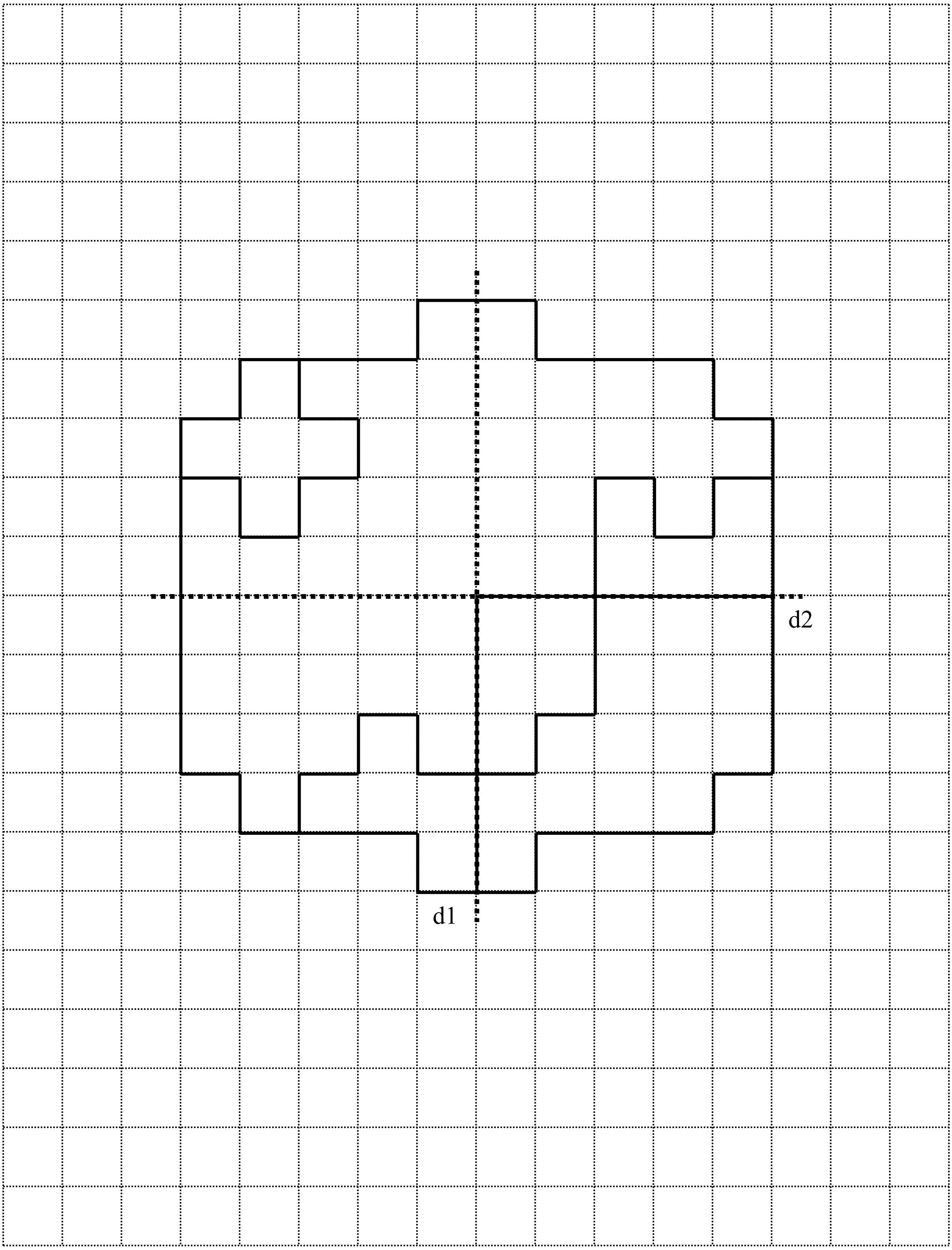
Vers le sommaire


d2
d1


d2
d1

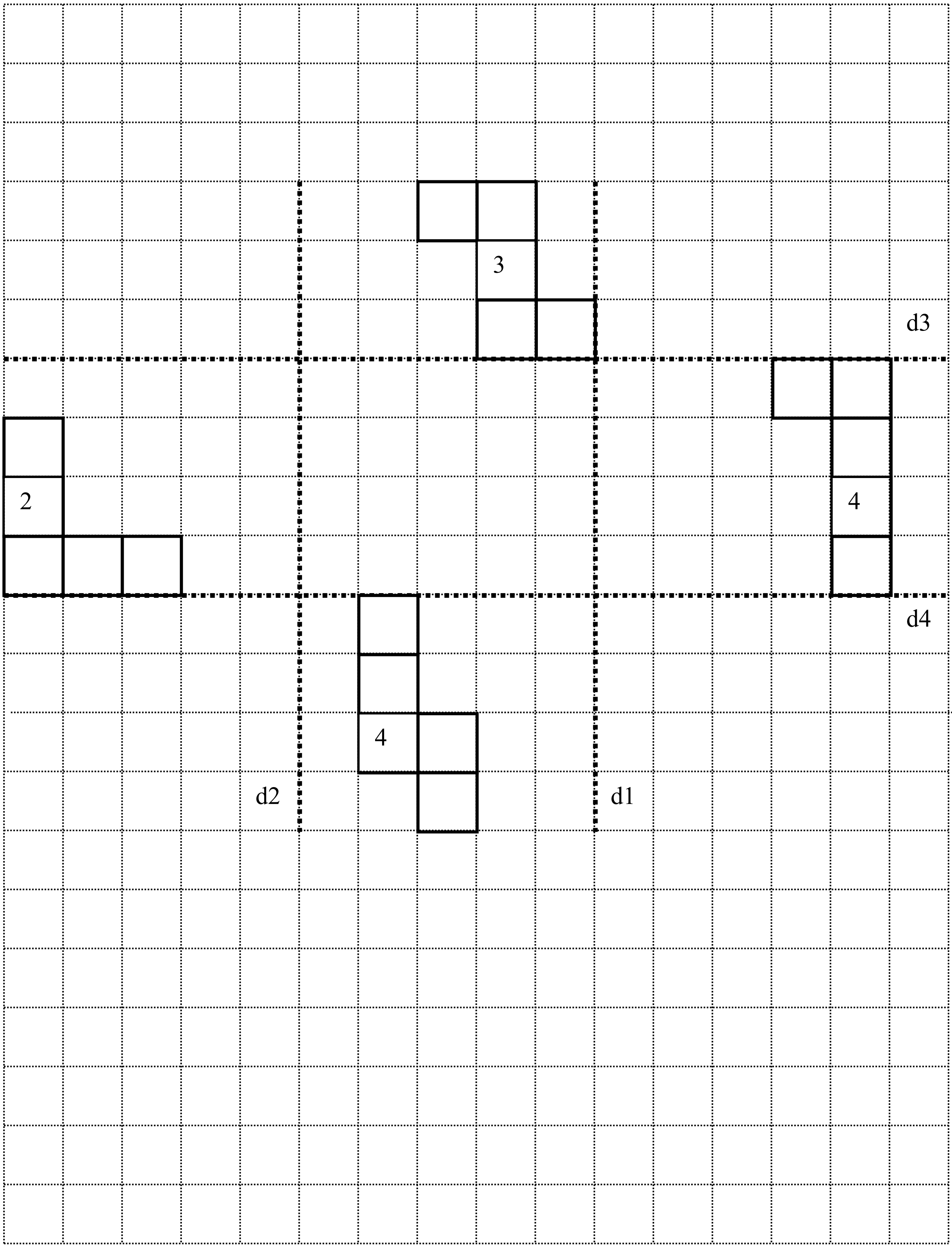

d2
d1


d2
d1

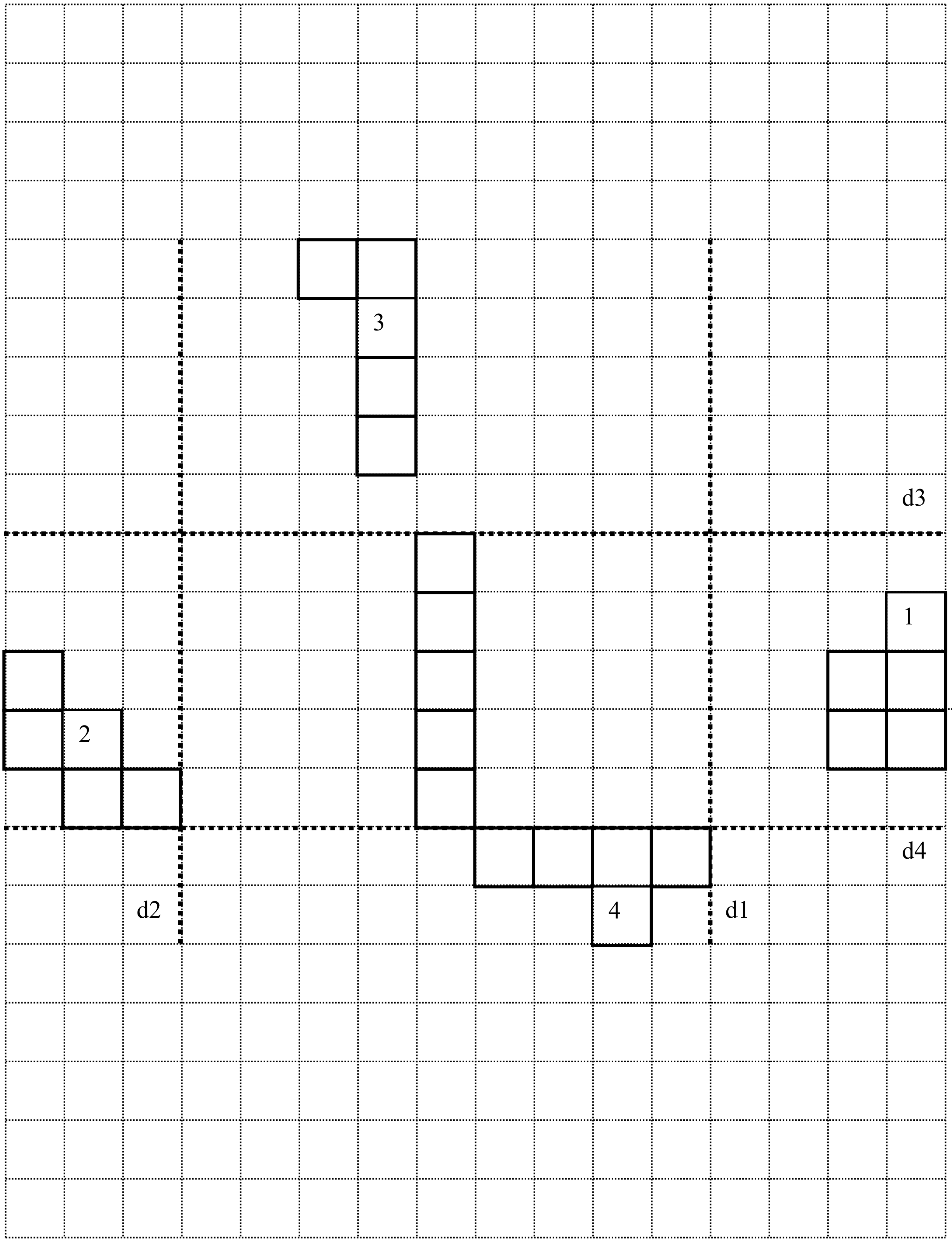

d2
d1

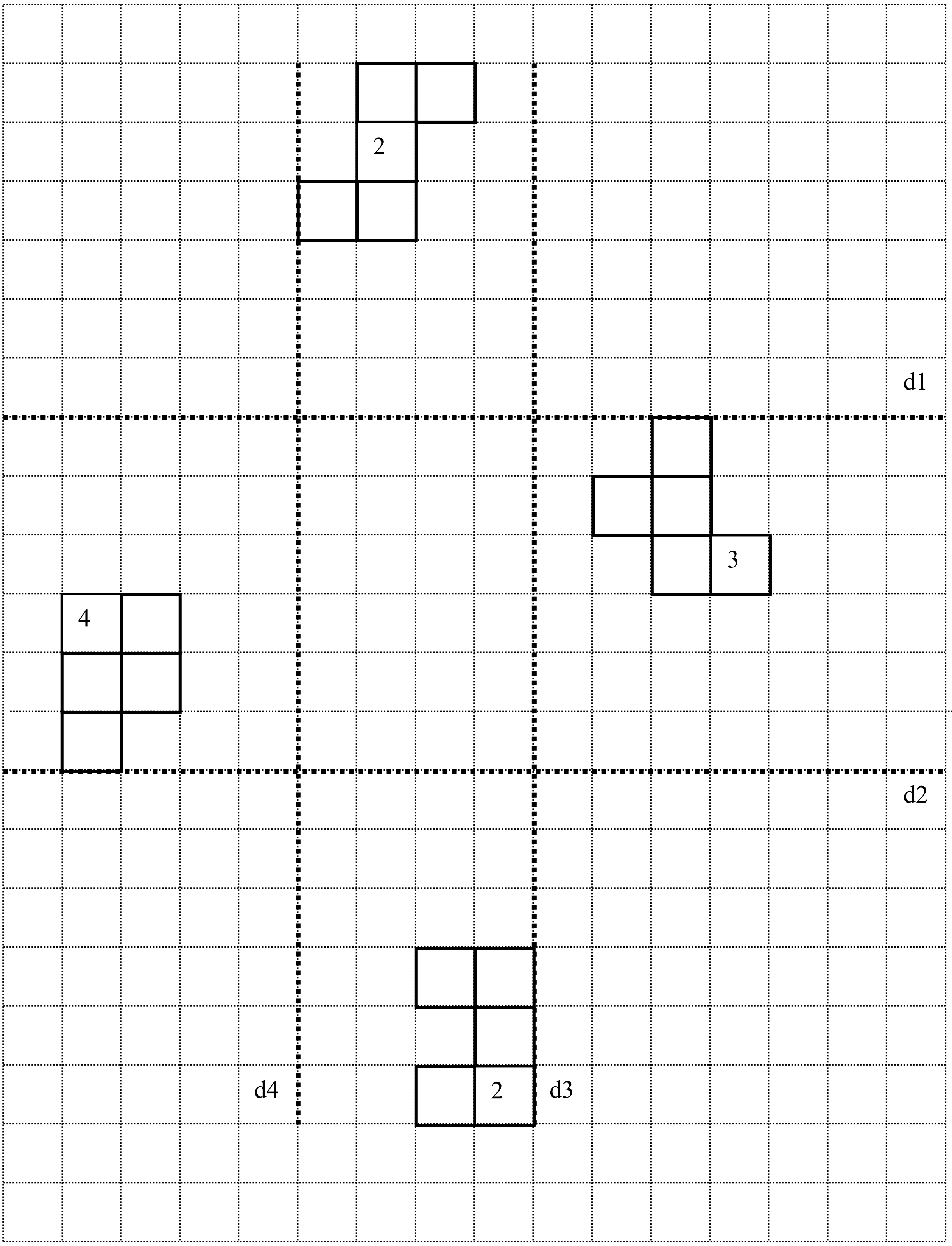
Des pentaminos et des symétries orthogonales

Pour chacun des dessins ci-dessous, trace le symétrique de la pièce 1 par rapport à la droite d1, le symétrique de la pièce 2 par rapport à la droite d2, le symétrique de la pièce 3 par rapport à la droite d3, le symétrique de la pièce 4 par rapport à la droite d4.
Colorie le dessin en utilisant une couleur par type de pièce.



Vers le sommaire

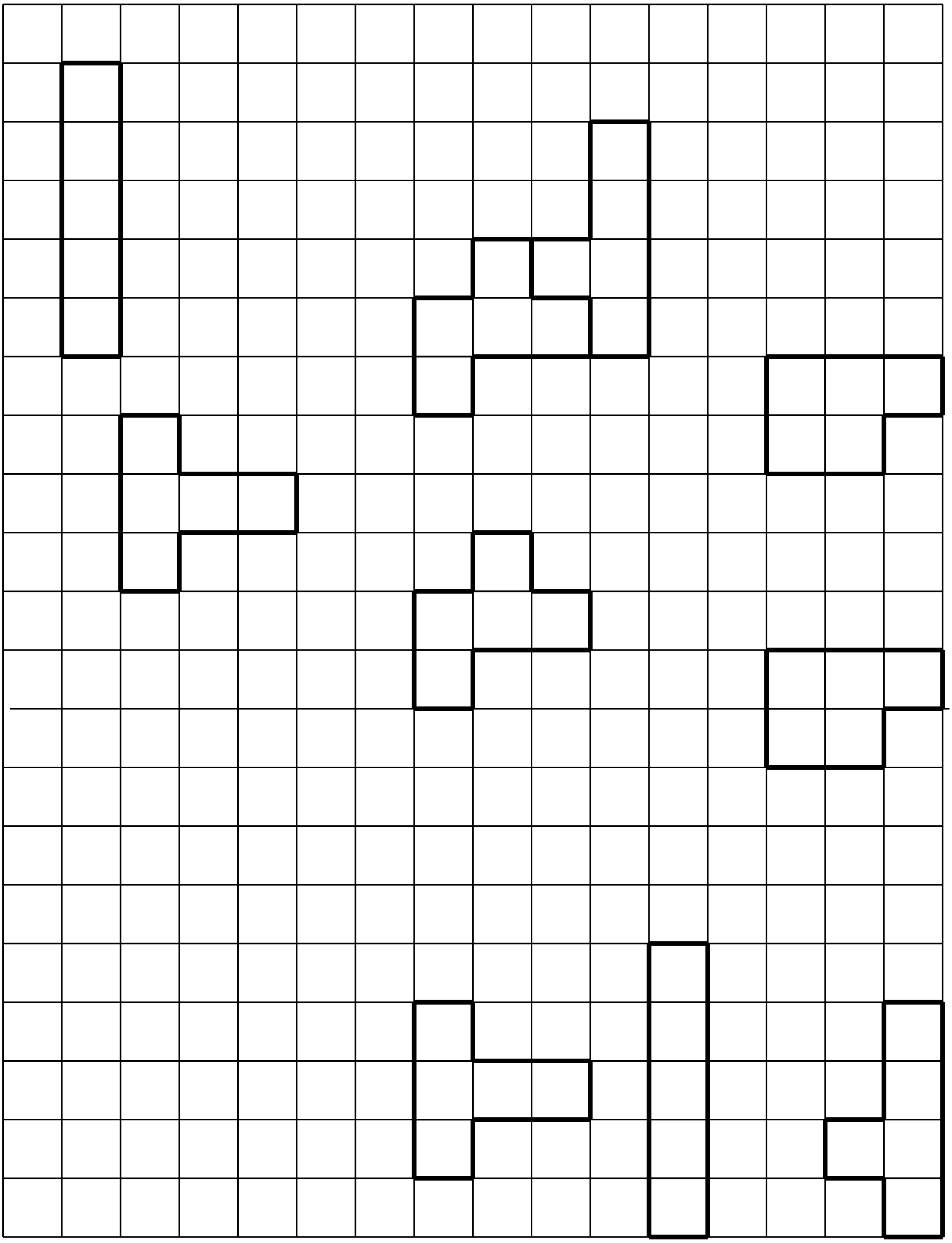

3
d3
1
2
d4
d2
4
d1



Vers le sommaire

Cinq pentaminos et un pavage (1)

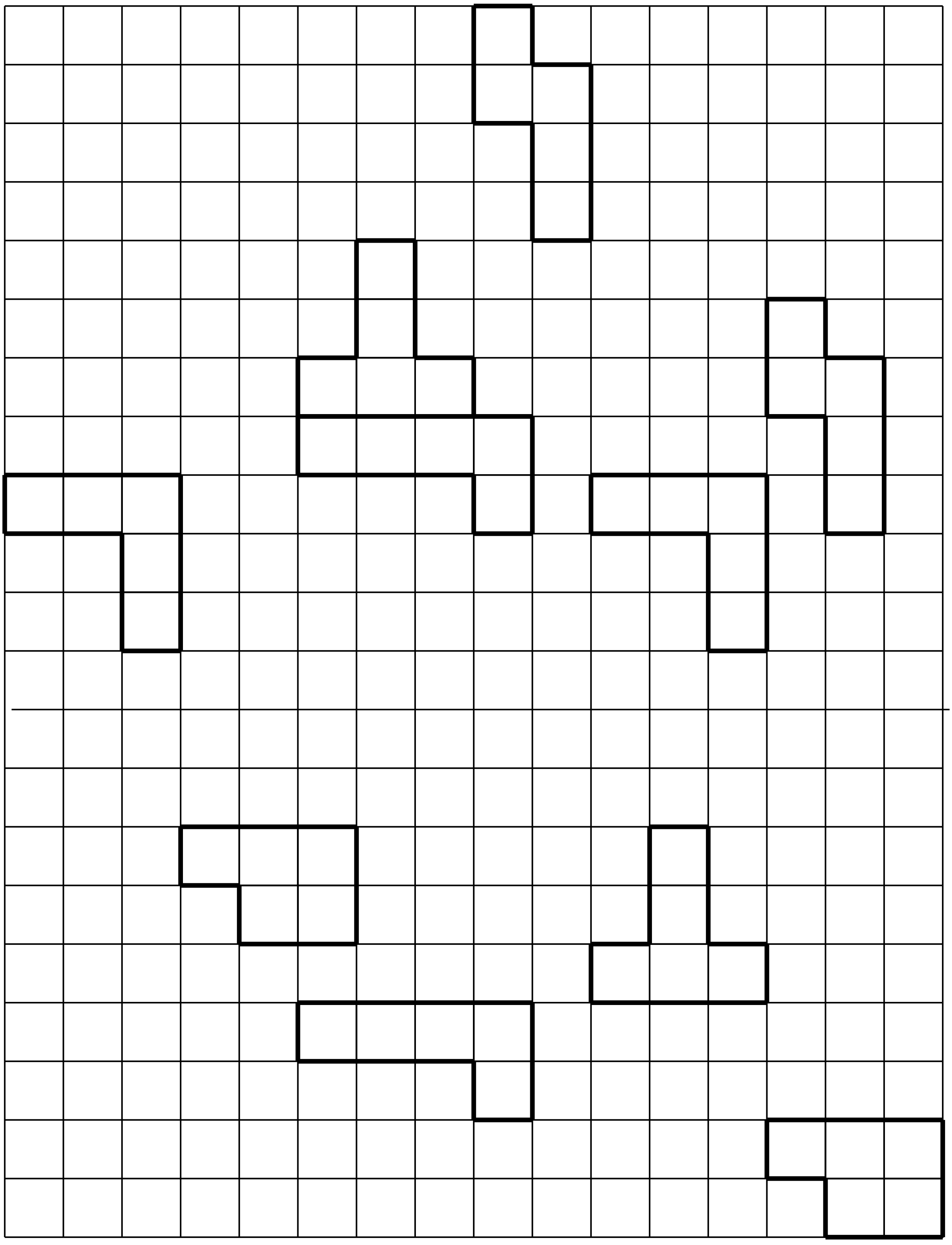
Nous allons paver le plan avec cinq pentaminos. Chaque pièce correspond à une pièce du même type par une translation.
Termine le pavage. Colorie chaque pièce d'une couleur différente.



Vers le sommaire

Cinq pentaminos et un pavage (2)

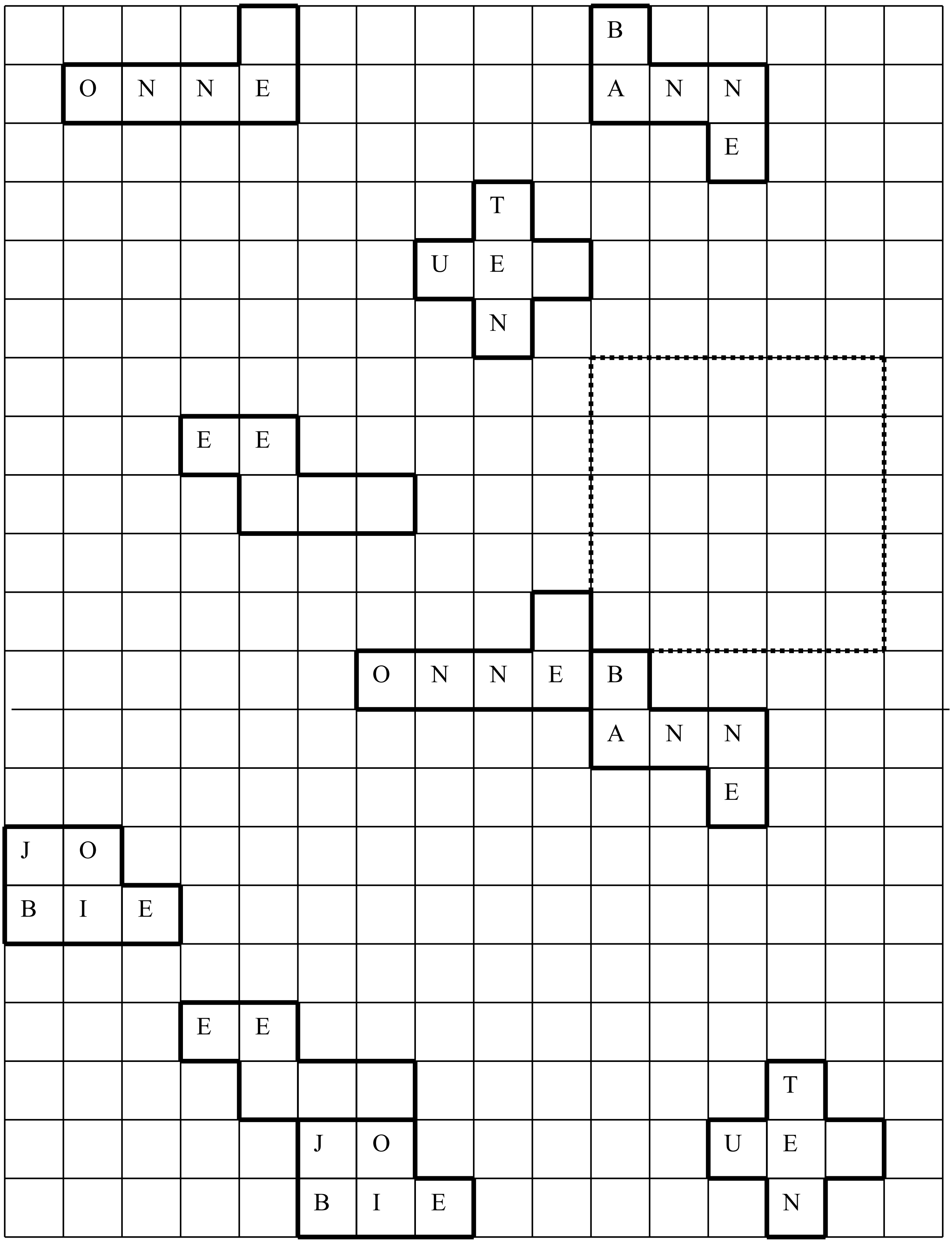
Nous allons paver le plan avec cinq pentaminos. Chaque pièce correspond à une pièce du même type par une translation.
Termine le pavage. Colorie chaque pièce d'une couleur différente.



Vers le sommaire

Cinq pentaminos et un pavage (3)

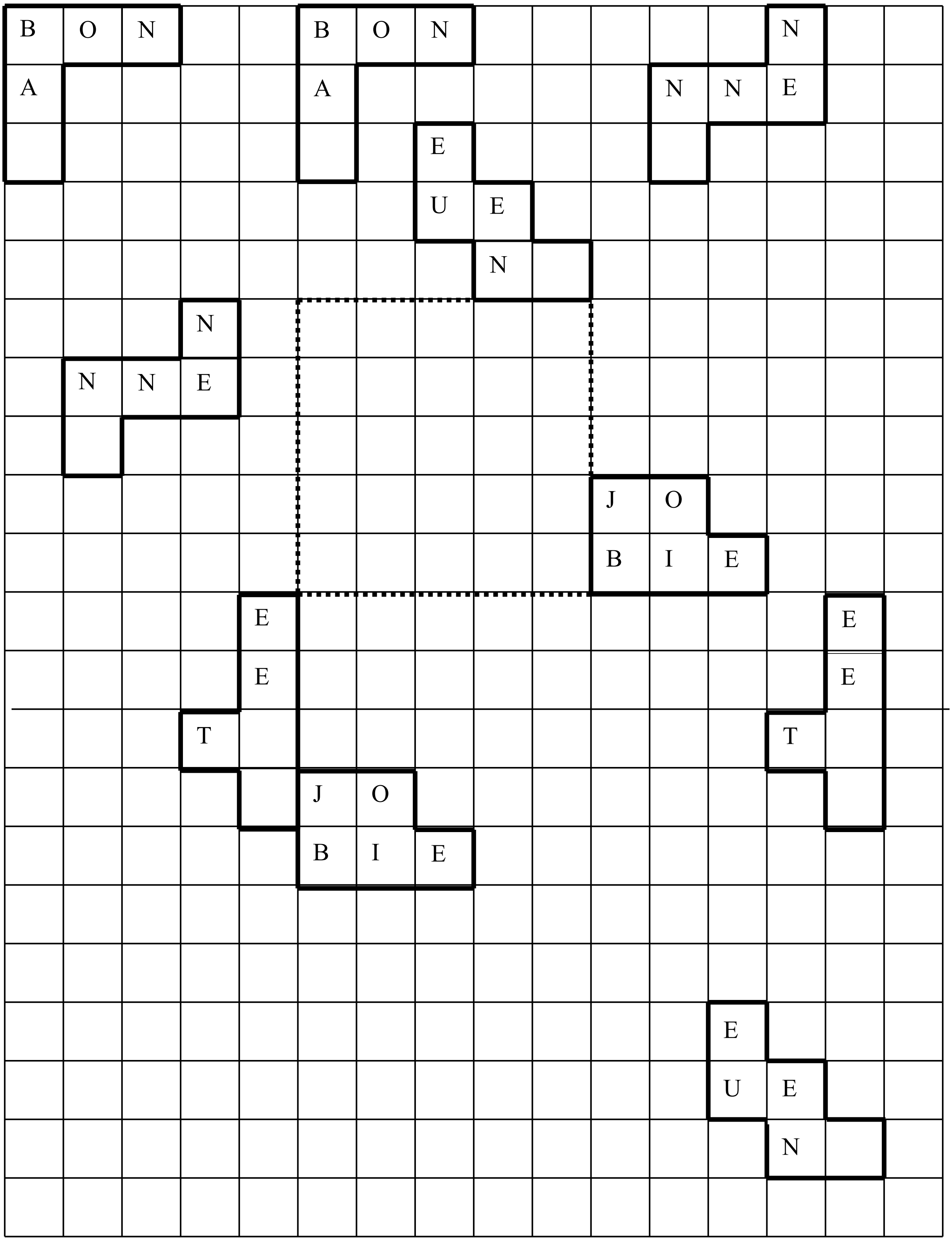
Nous allons paver le plan avec cinq pentaminos. Chaque pièce correspond à une pièce du même type par une translation.
Termine le pavage. Une phrase apparaît dans le carré en pointillés.



Vers le sommaire

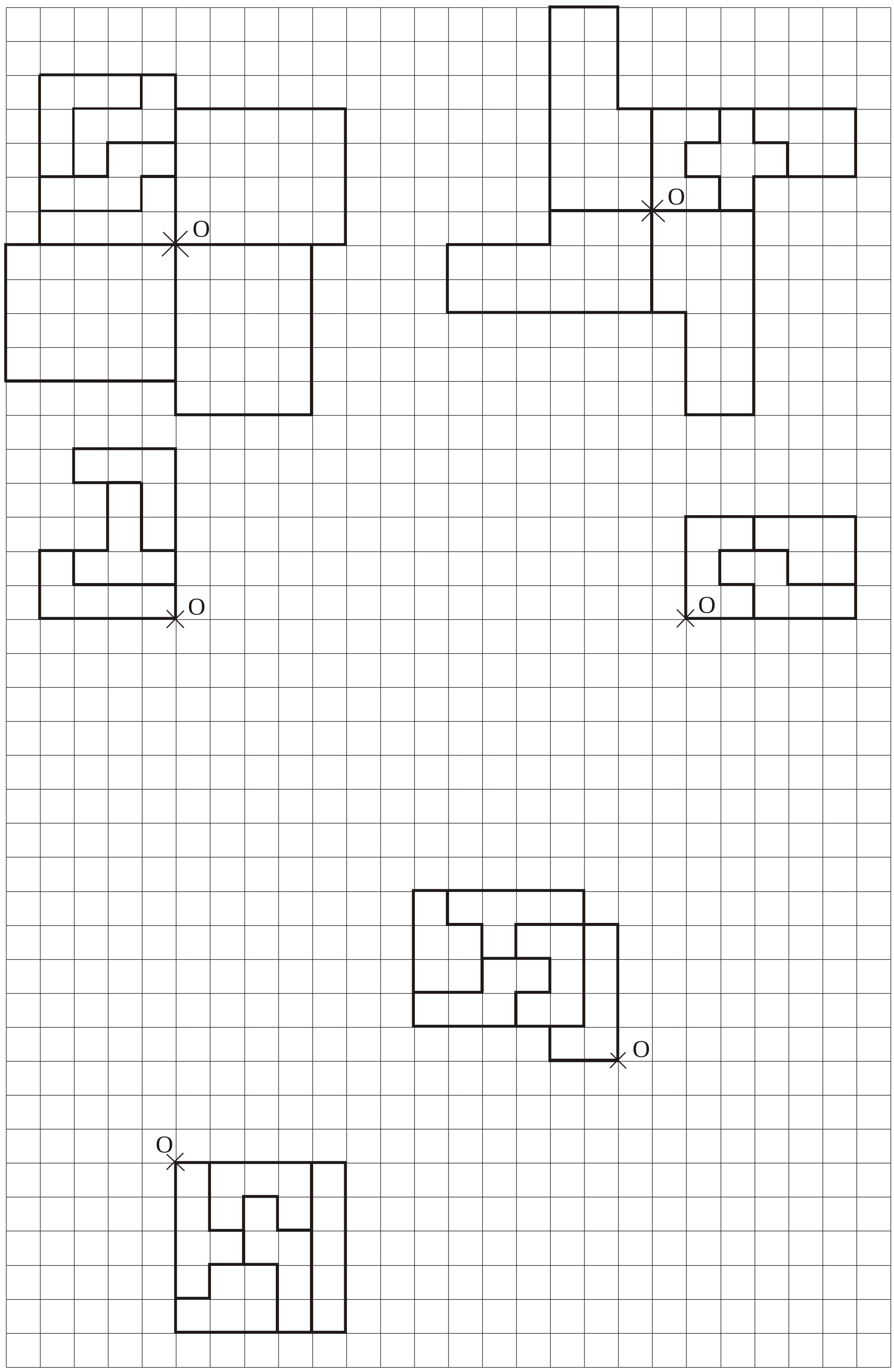
Cinq pentaminos et un pavage (3)

Nous allons paver le plan avec cinq pentaminos. Chaque pièce correspond à une pièce du même type par une translation.
Termine le pavage. Une phrase apparaît dans le carré en pointillés.



Polygones formés par des pentaminos et rotations

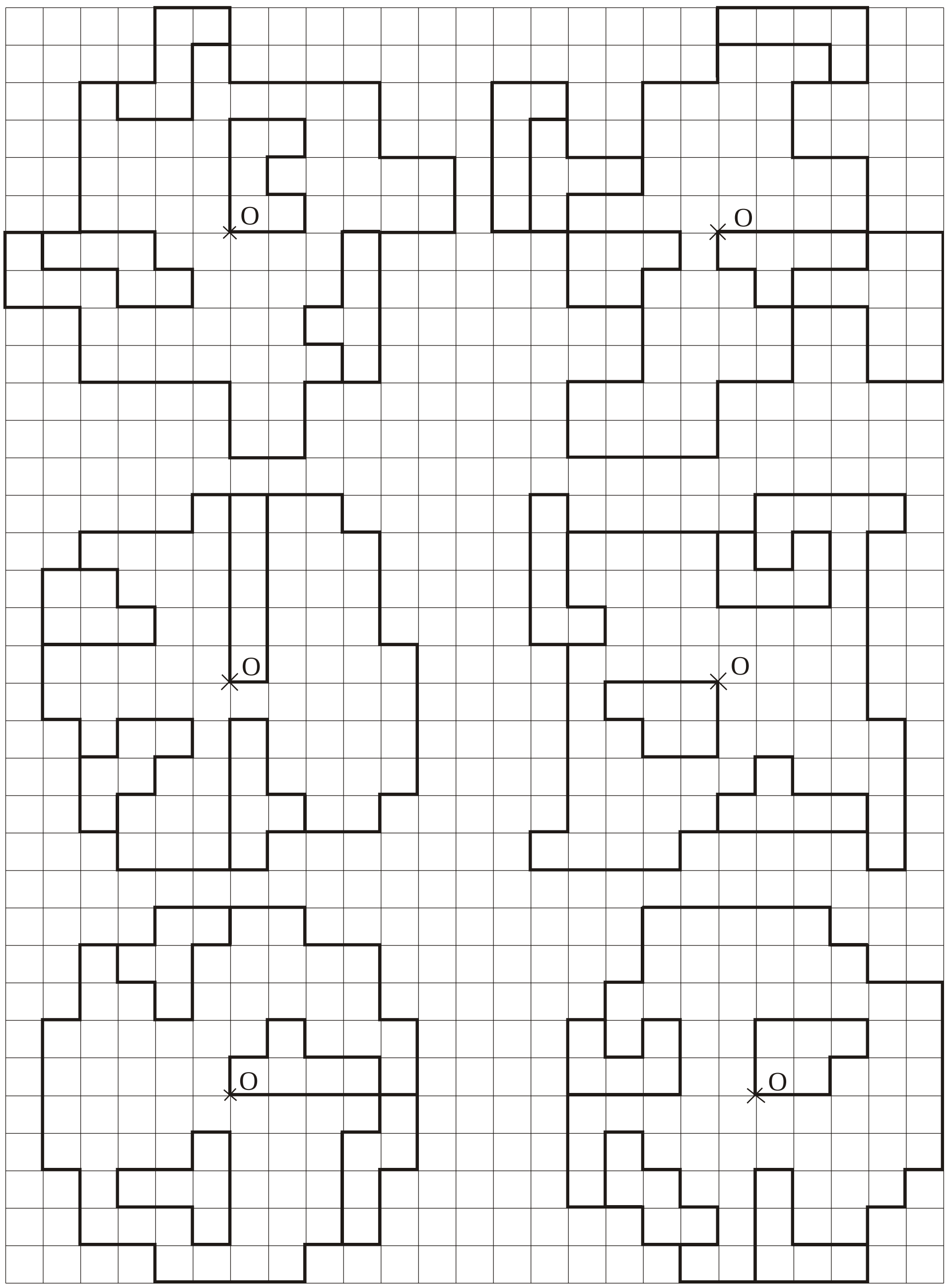
Pour chacun des 6 dessins ci-dessous :
Dessine l'image du polygone formé par les pentaminos par la rotation de centre O et d'angle 90° ↷.
Dessine l'image de ce que tu viens d'obtenir par cette même rotation.
De nouveau, dessine l'image de ce que tu viens d'obtenir par cette même rotation.
Enfin, dessine l'image de ce que tu viens d'obtenir par cette même rotation.
Colorie tes dessins (une couleur par pentamino)



Des pentaminos et des rotations

Pour chacun des 6 dessins ci-dessous :

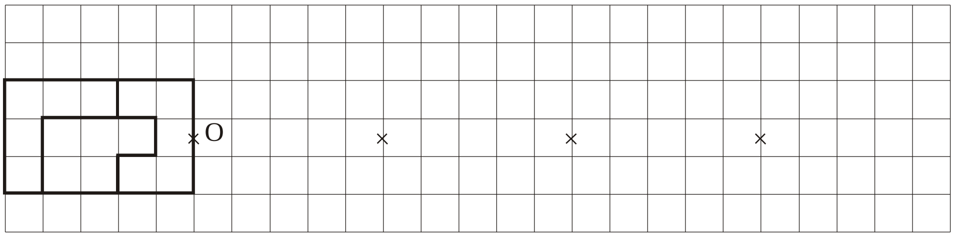
1) Dessine l'image des 4 pentaminos déjà placés par la rotation de centre O et d'angle 90°.
2) Dessine l'image des 4 pentaminos déjà placés par la rotation de centre O et d'angle 90°.
3) Colorie tes dessins en utilisant une couleur différente pour chaque type de pièce.



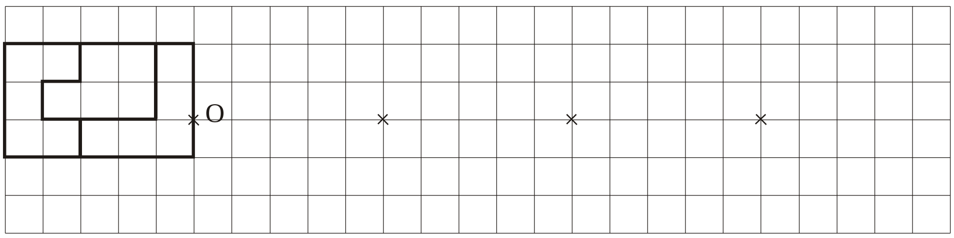
Trois pentaminos et des frises (1)

Complète les frises ci-dessous à l'aide des transformations indiquées :

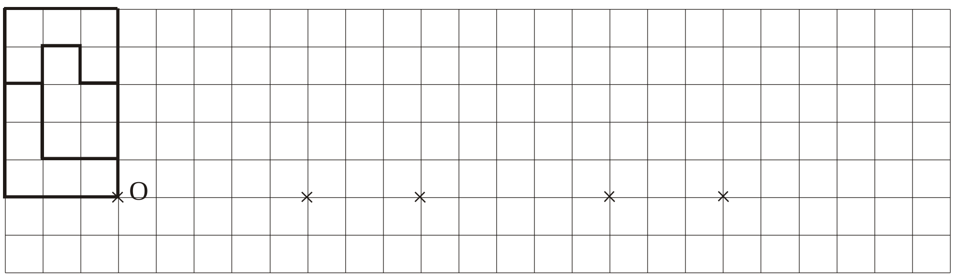
a) Utilise des symétries centrales



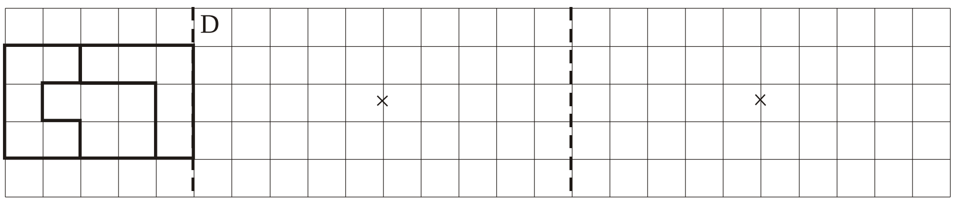
b) Utilise des symétries centrales



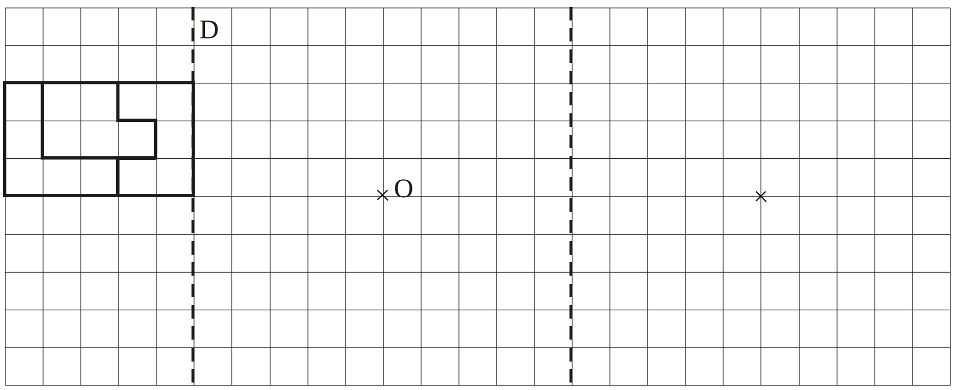
c) Utilise des rotations d'angle 90°



d) Utilise des symétries axiales et des symétries centrales



e) Utilise des symétries axiales et des symétries centrales

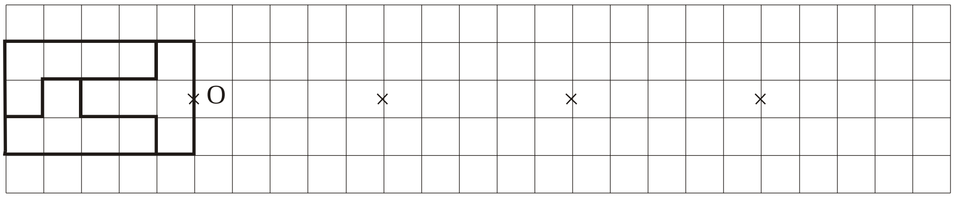


Vers le sommaire

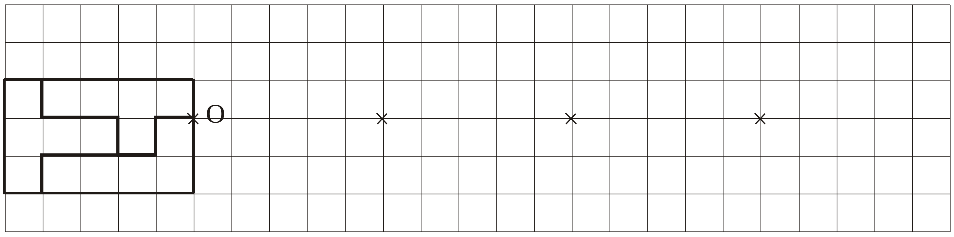
Trois pentaminos et des frises (2)

Complète les frises ci-dessous à l'aide des transformations indiquées :

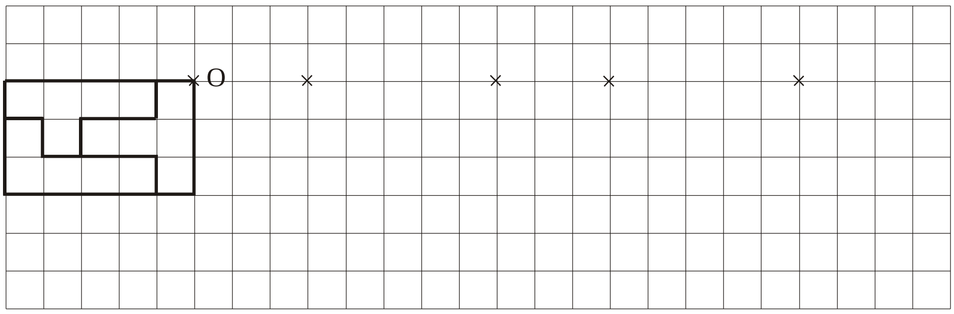
a) Utilise des symétries centrales



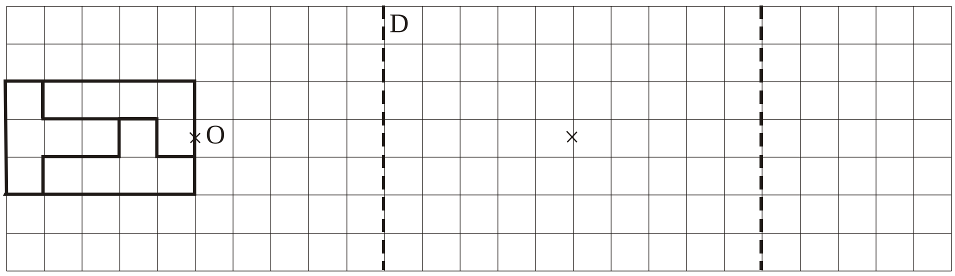
b) Utilise des symétries centrales



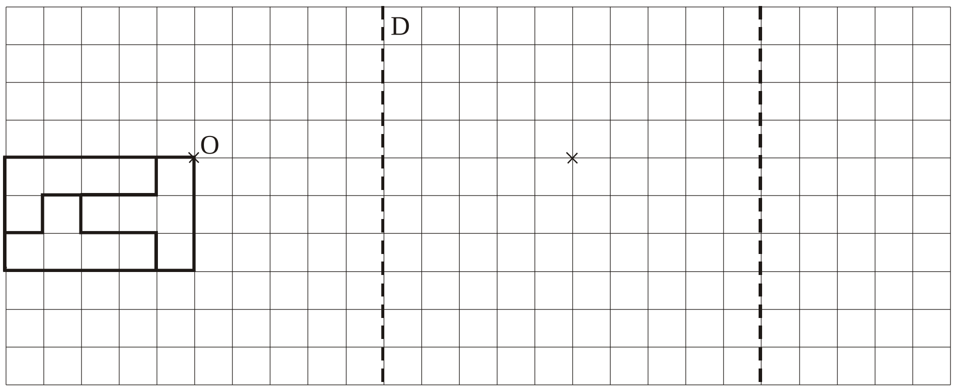
c) Utilise des rotations d'angle 90°



d) Utilise des symétries axiales et des symétries centrales



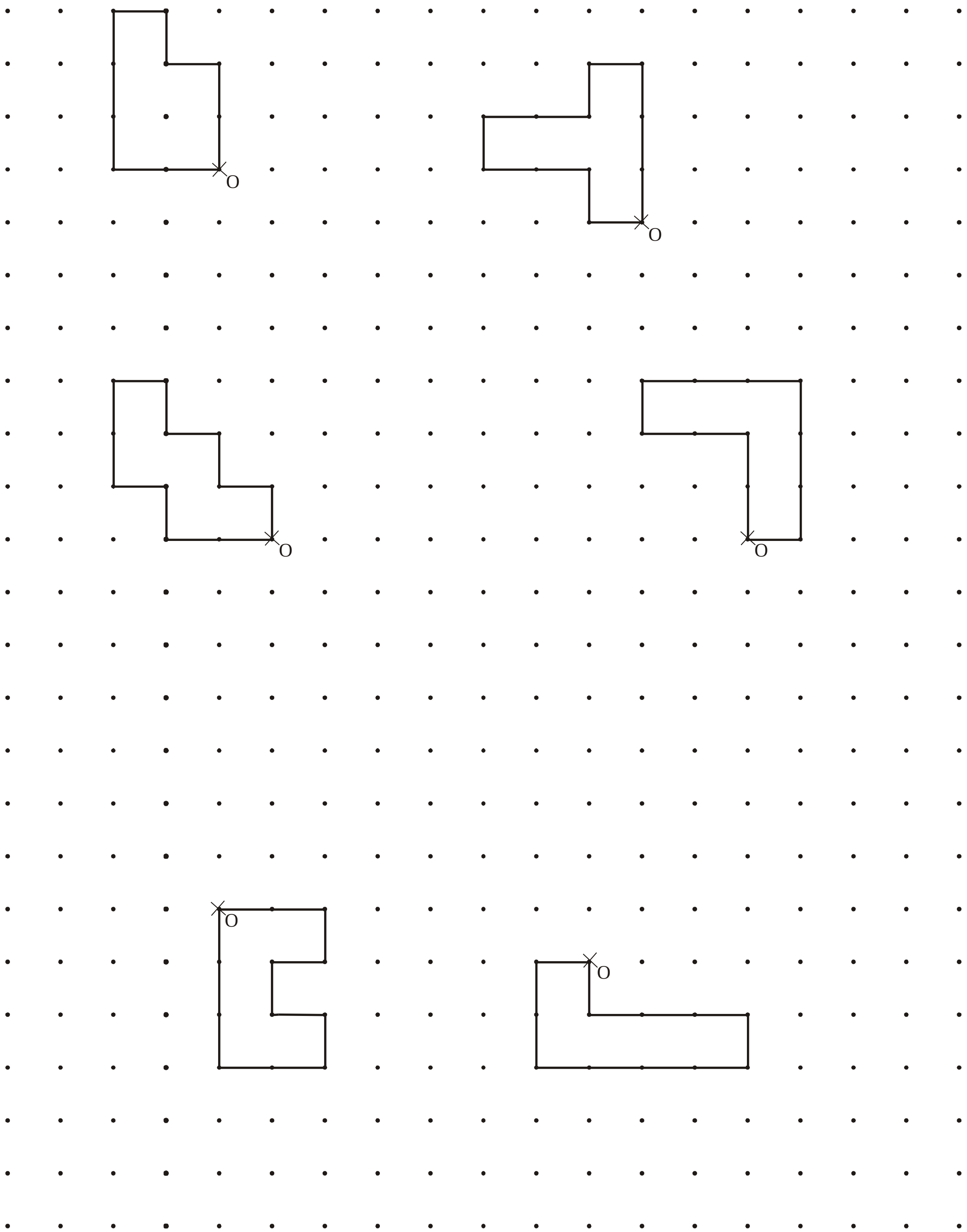
e) Utilise des symétries axiales et des symétries centrales



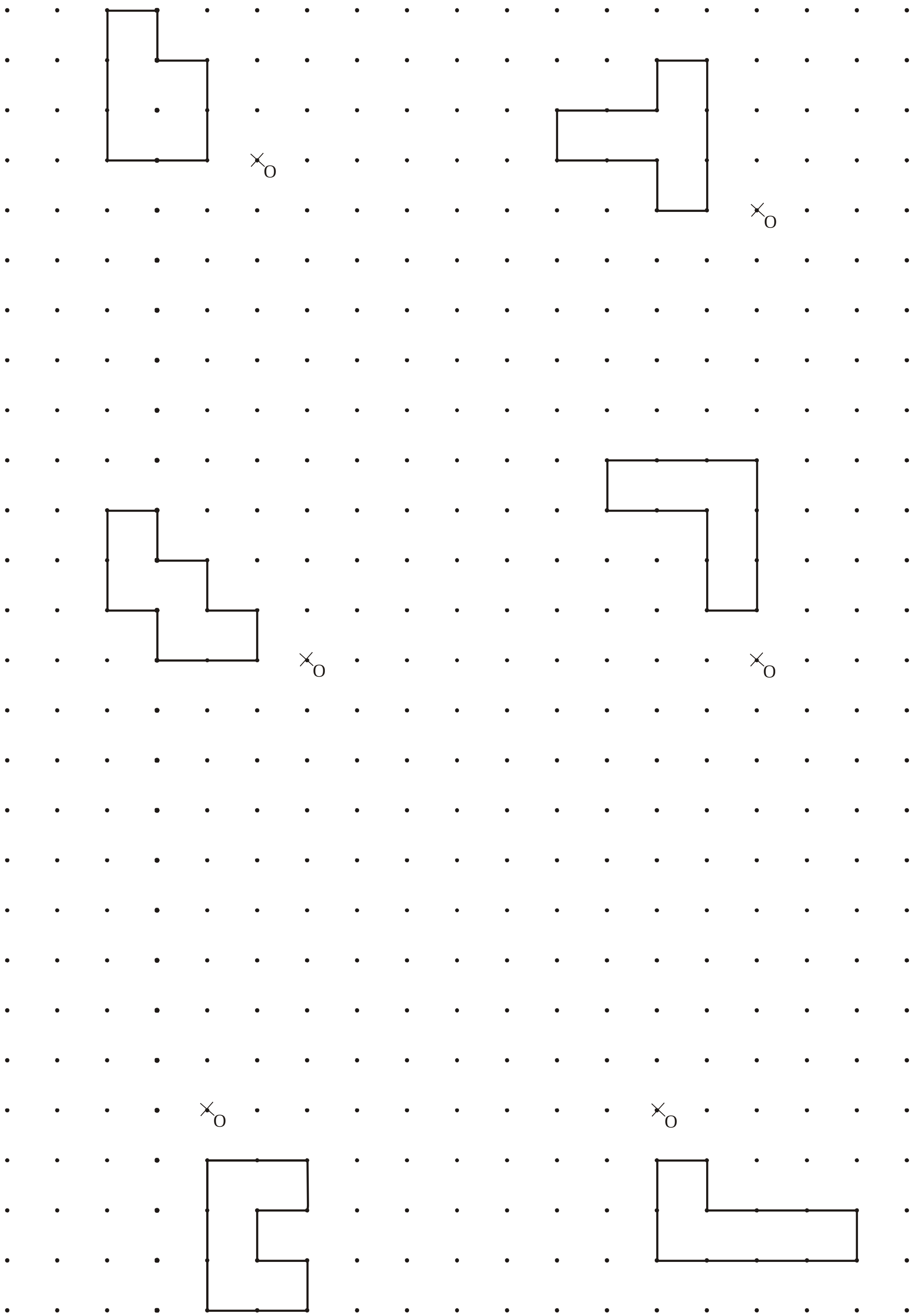
Vers le sommaire

Des pentaminos qui tournent

Pour chacun des 12 pentaminos,trouve l'image par la rotation de centre O et d'angle 90°, puis par la rotation de centre O, d'angle 180°, puis par la rotation de centre O et d'angle 270°.



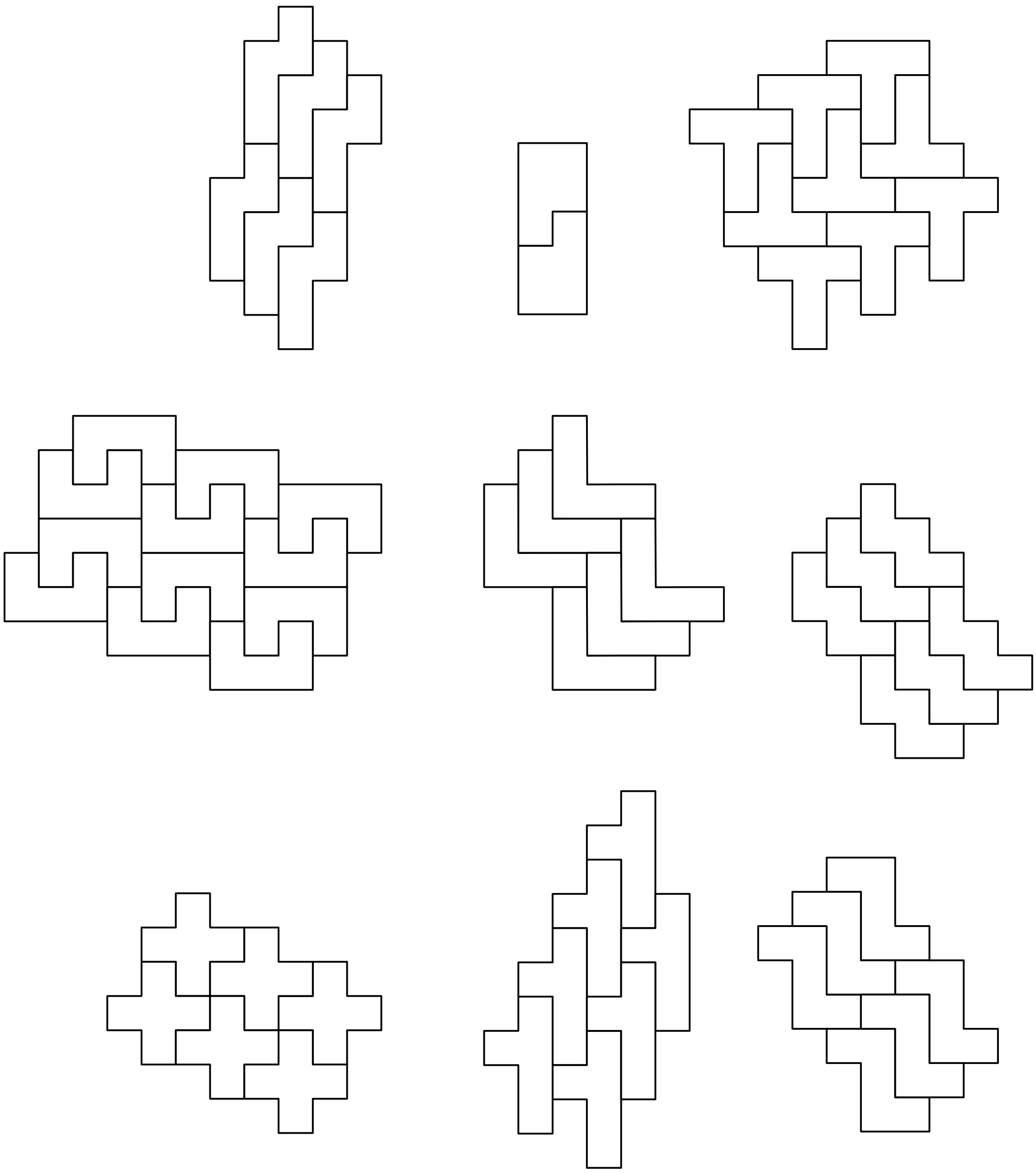
Vers le sommaire



Vers le sommaire

Pavage du plan par un pentamino

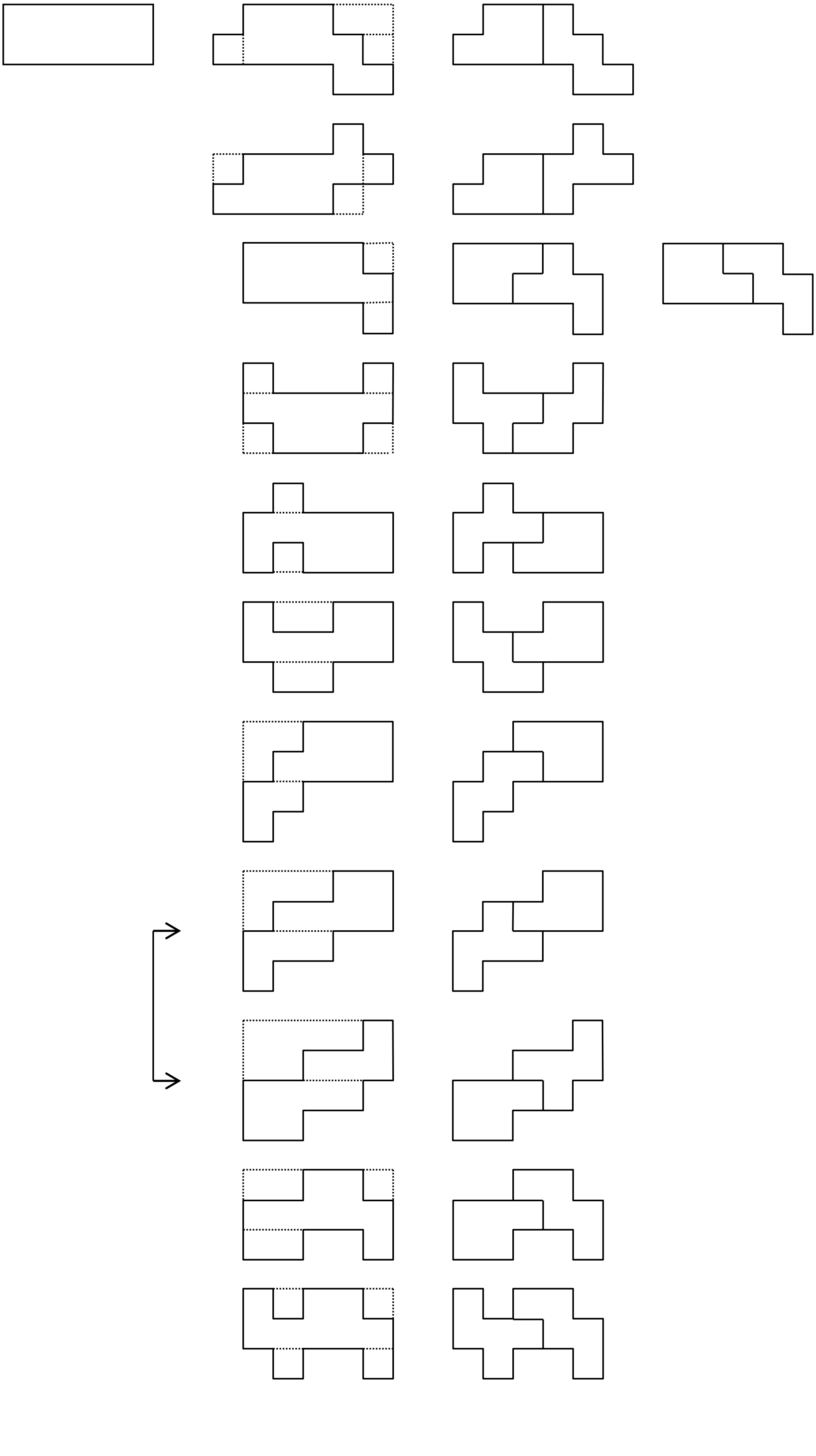
Chaque pentamino pave le plan.



Vers le sommaire

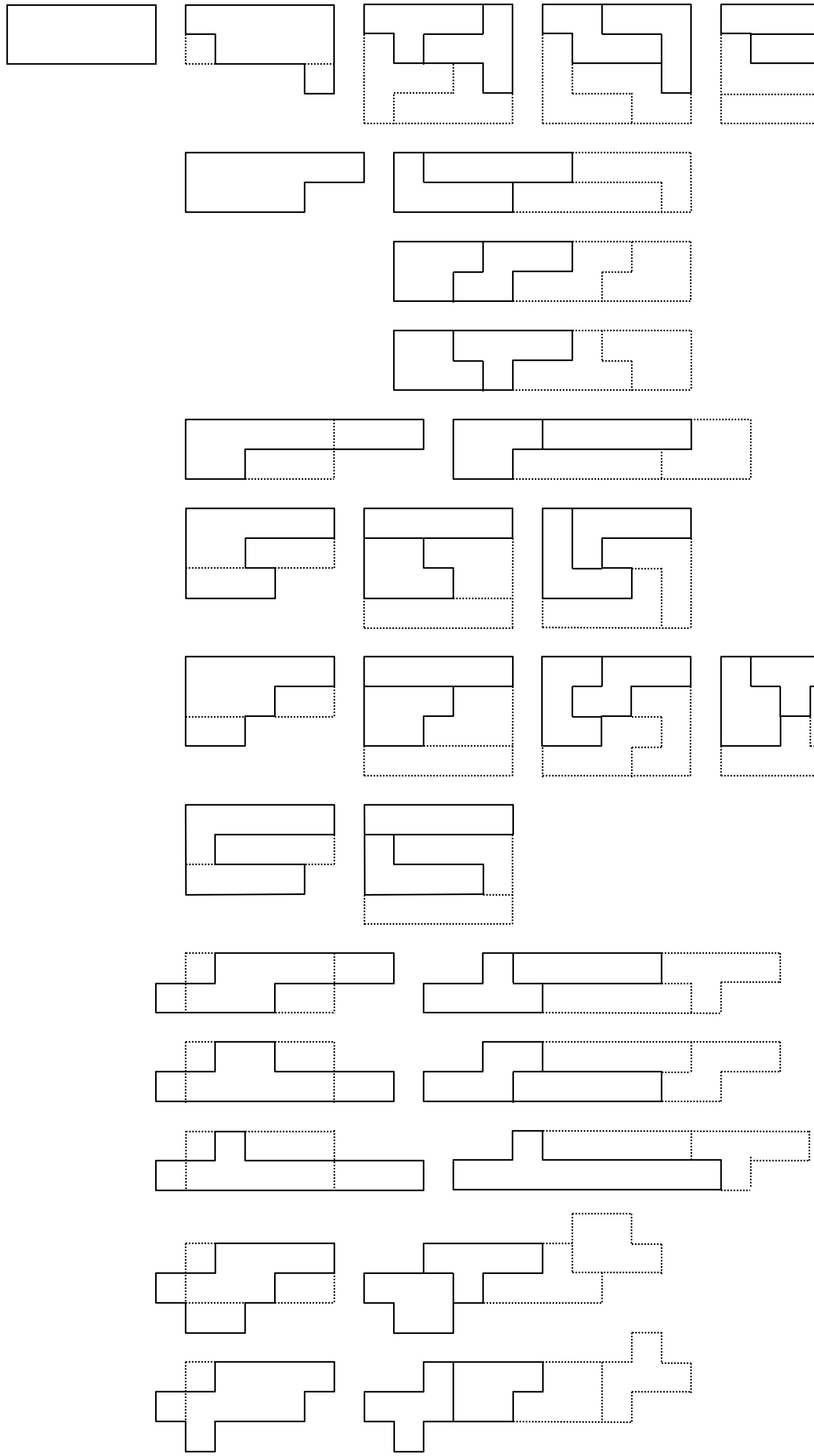
Des motifs de pavage formés de deux pentaminos

En utilisant des translations de parties de rectangle :



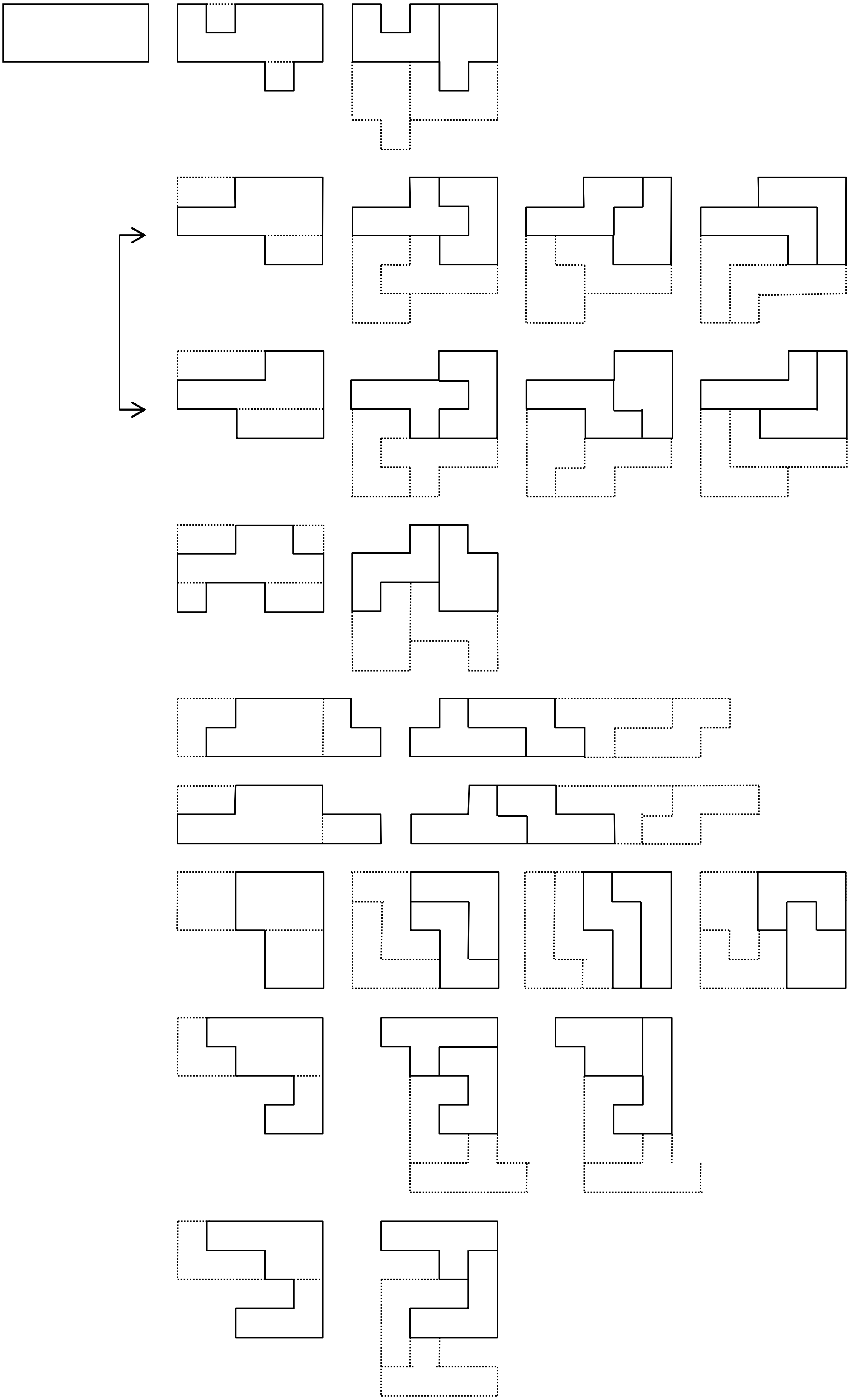
Vers le sommaire

En utilisant des symétries centrales par rapport à un milieu de côté du rectangle :

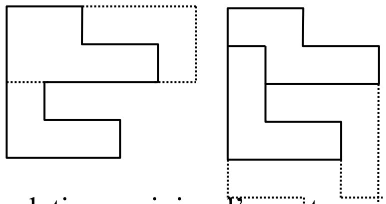


Vers le sommaire

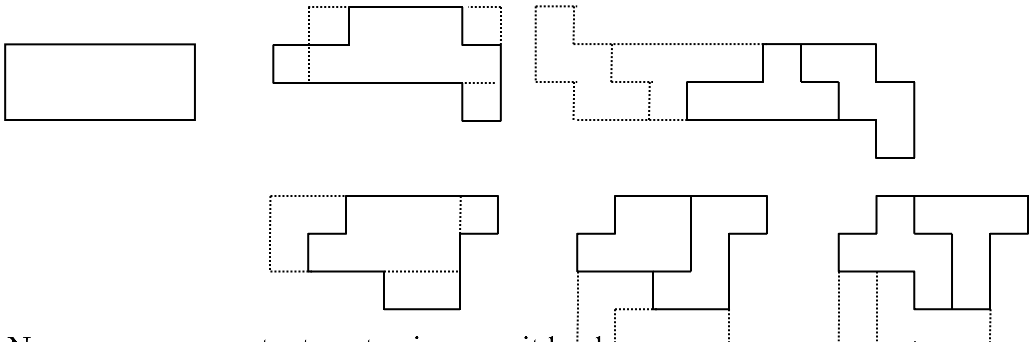
En utilisant une translation suivie d'un retournement autour d'une médiane du rectangle :



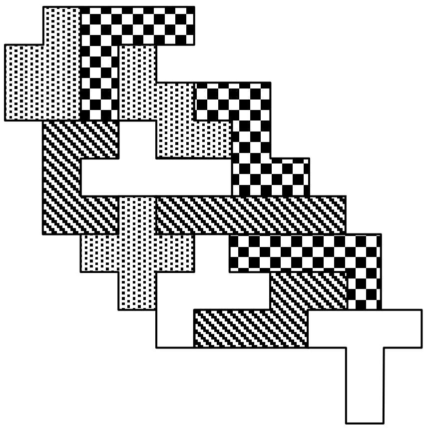
Vers le sommaire



En utilisant deux translations suivies d'un retournement autour d'une médiane du rectangle :



Nous avons vu que tout pentamino pavait le plan.
Les pages précédentes montrent des motifs de pavage formés de deux pentaminos.
Les activités « cinq pentaminos et un pavage » présentent des motifs de pavage formés de cinq pentaminos. La recherche peut se poursuivre en utilisant de plus en plus de pièces : la couverture de « Jeux 1 (A.P.M.E.P n° 44, 1982) nous incite à aller beaucoup plus loin en présentant un dallage du tore avec les douze pentaminos, ainsi que sa coloration en quatre couleurs…



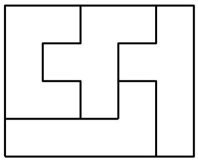
Les deux activités qui suivent peuvent être mises en œuvre petit à petit en classe :

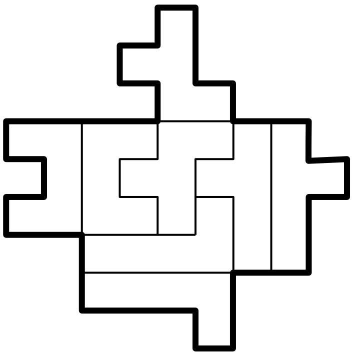
Un rectangle est partagé en quatre zones (elles peuvent être des pentaminos, mais ce n'est pas une obligation…)
Le pavage du plan se construit petit à petit en dessinant petit à petit les symétriques du rectangle de départ par rapport aux côtés du rectangle (premier dessin) ou par rapport au milieu des côtés du rectangle de départ (deuxième dessin)
Un premier examen des dessins obtenus peut servir à une première rencontre avec des translations…
Un examen plus approfondi des dessins fait apparaître d'autres pavages : les motifs de base sont formés du rectangle de départ auquel sont accolés les symétriques des quatre zones qui le composent. De nouveau des translations peuvent être mises en évidence…

Les activités « Carrés 5×5 pour des motifs de pavage » mettent en œuvre diverses méthodes utilisées en particulier par M.C. Escher et ainsi créer d'autres pavages formés de cinq pentaminos.

Vers le sommaire

Des pavages créés à partir d'autres pavages

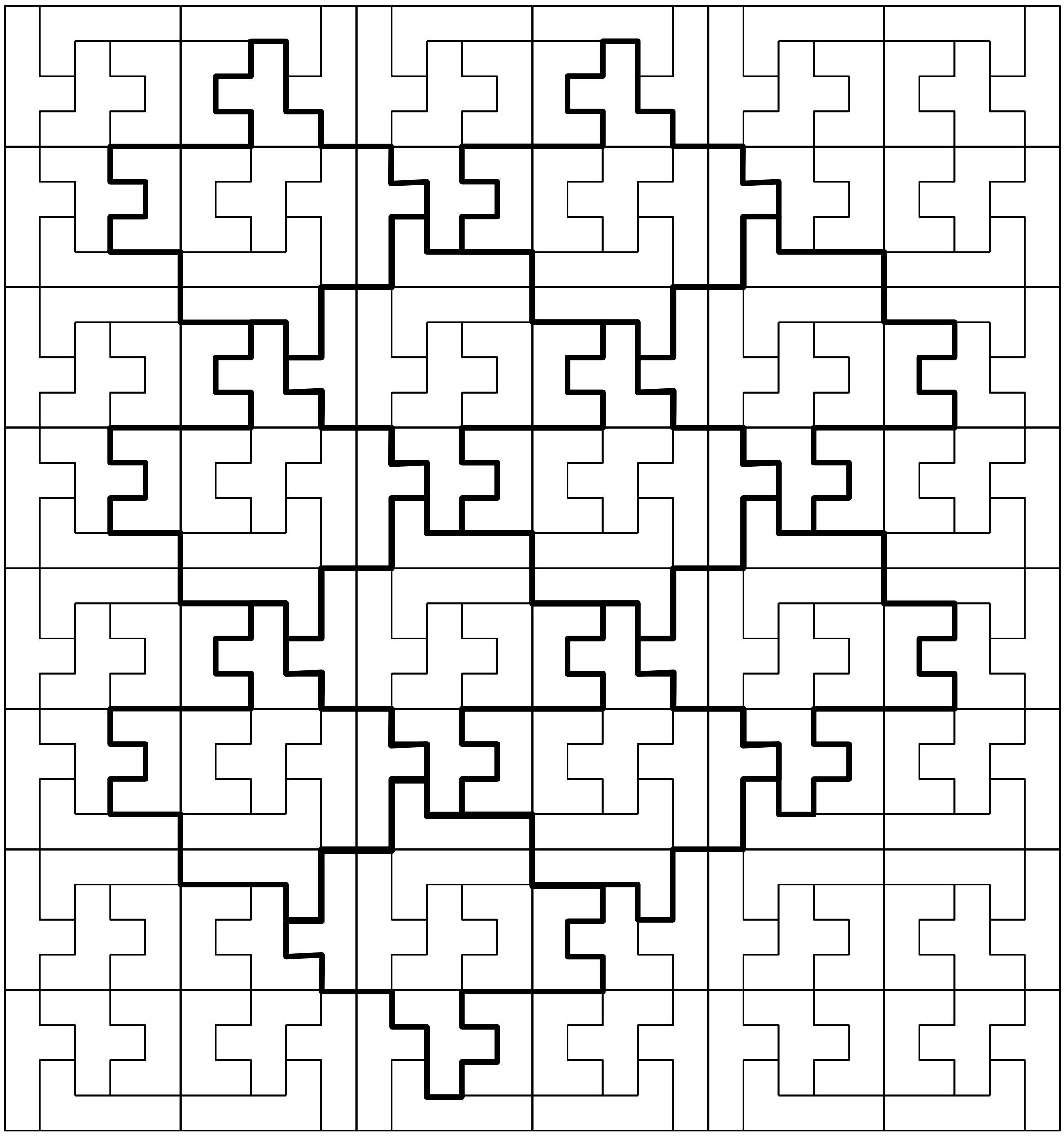


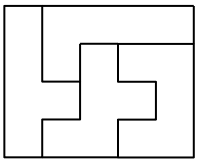


J'ai recouvert un rectangle 4×5 avec 4 pentaminos. J'ai créé un pavage en dessinant les symétriques du motif obtenu par rapport aux côtés du rectangle.

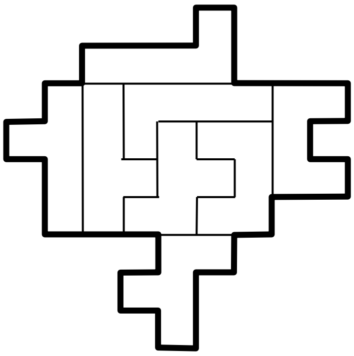
En considérant le motif de base et les symétriques des pentaminos par rapport aux cotés du rectangle, un nouveau motif de pavage apparaît.

Celle méthode correspond à ce qui est fait lors du découpage d'une enveloppe fermée.

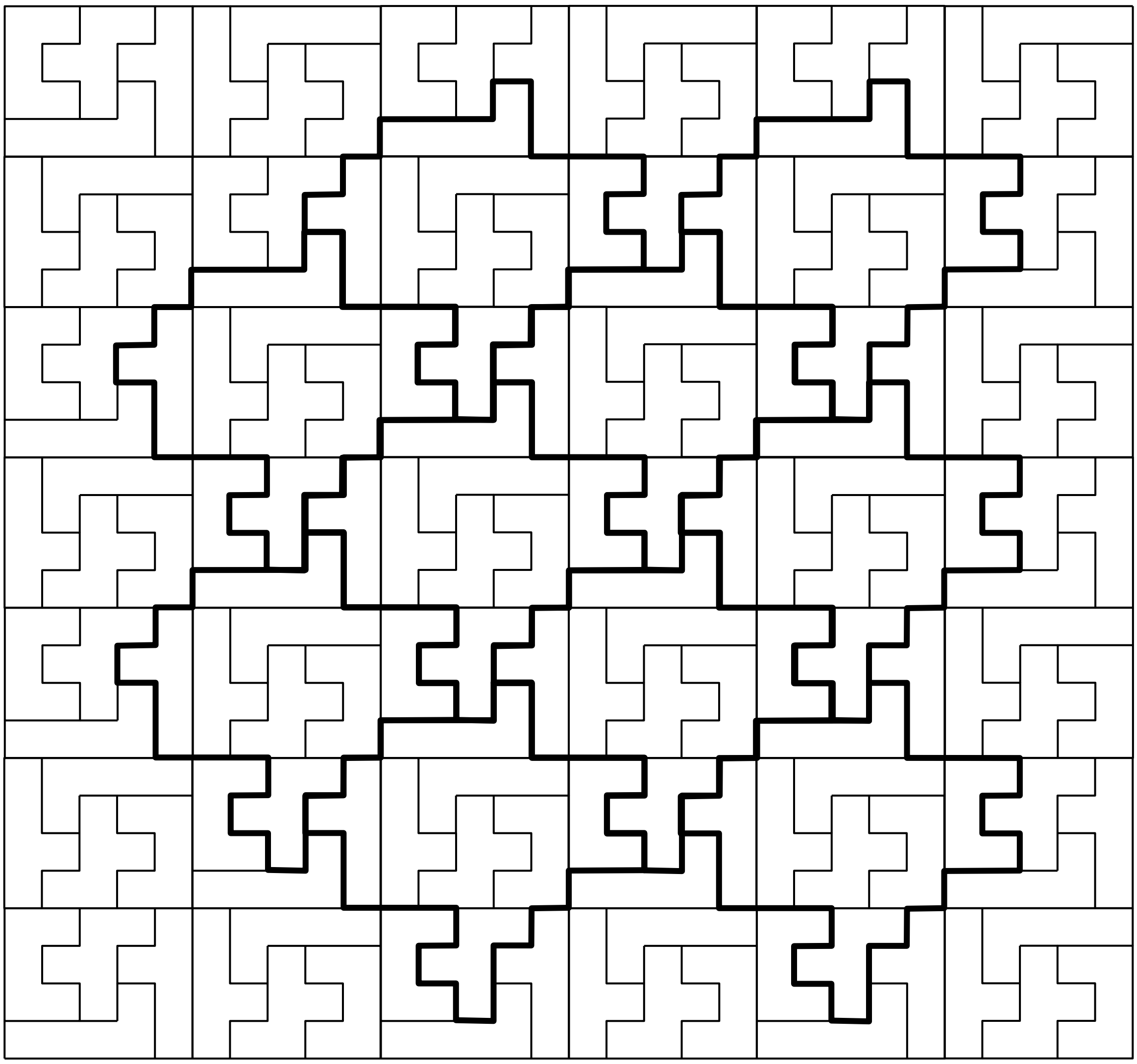




J'ai recouvert un rectangle 4×5 avec 4 pentaminos. J'ai créé un pavage en dessinant les symétriques du motif obtenu par rapport au milieu des côtés du rectangle.

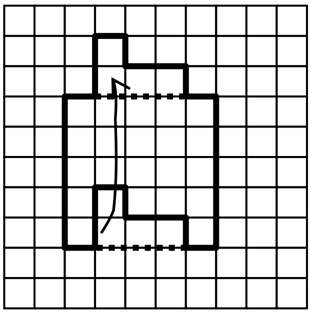


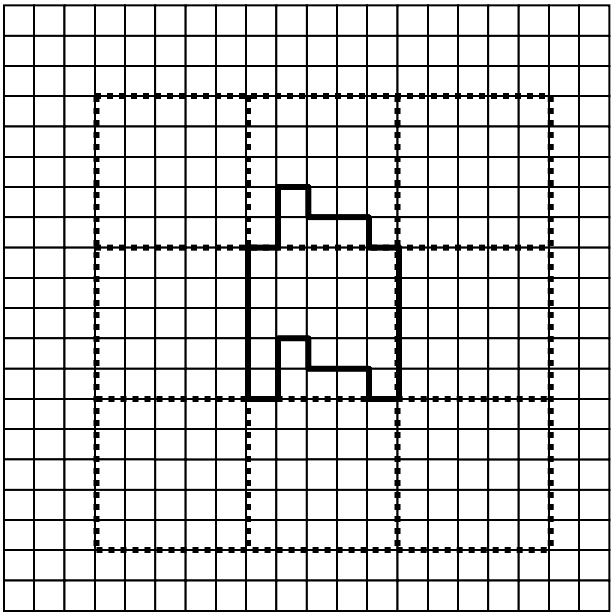
En considérant le motif de base et les symétriques des pentaminos par rapport au milieu des cotés du rectangle, un nouveau motif de pavage apparaît.



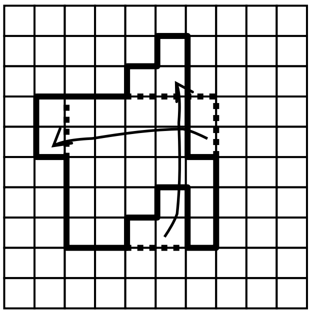
Carrés 5×5 pour des motifs de pavage

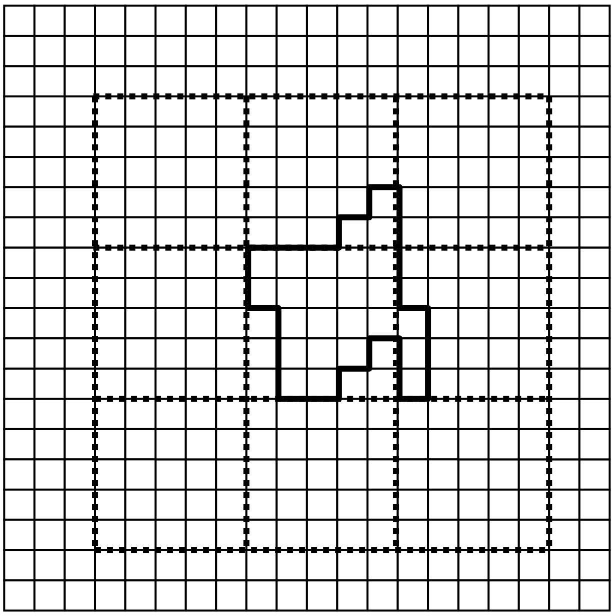
J’ai translaté un morceau du carré 5×5. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.





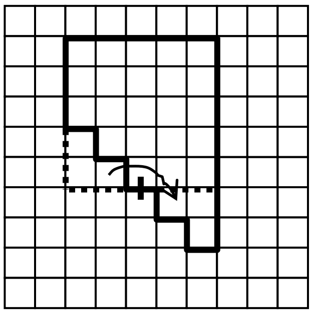
J’ai translaté deux morceaux du carré 5×5. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.

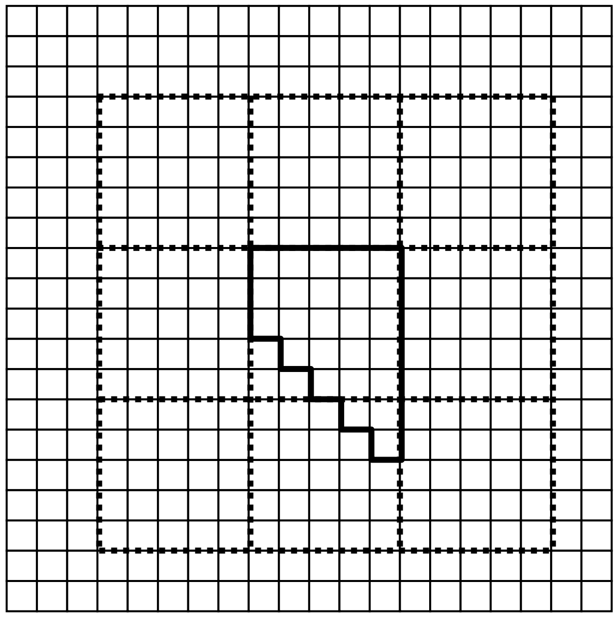




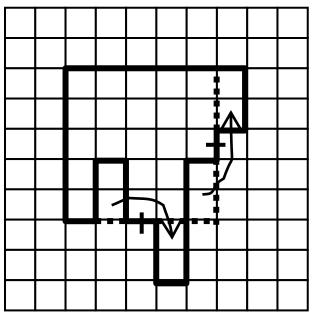
Vers le sommaire

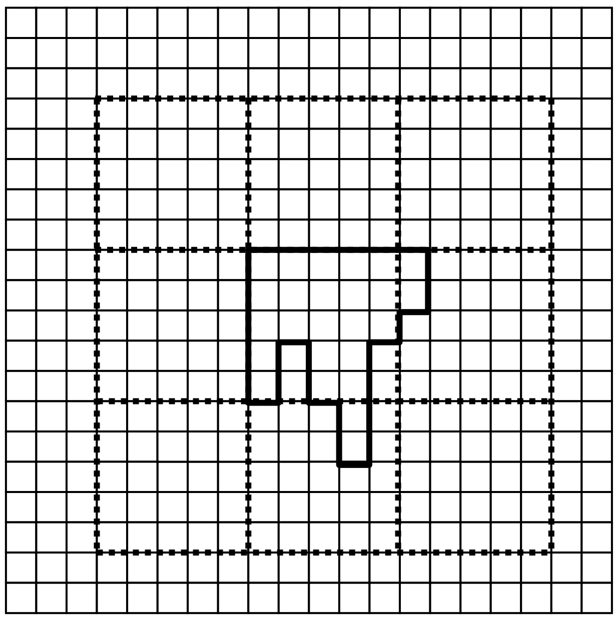
J’ai déplacé un morceau du carré 5×5 à l’aide d’une symétrie centrale. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.





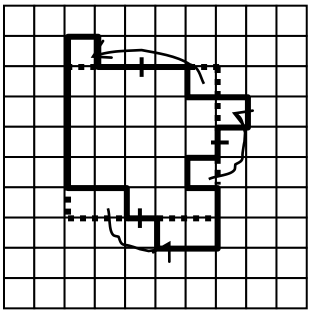
J’ai déplacé deux morceaux du carré 5×5 à l’aide de deux symétries centrales. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.

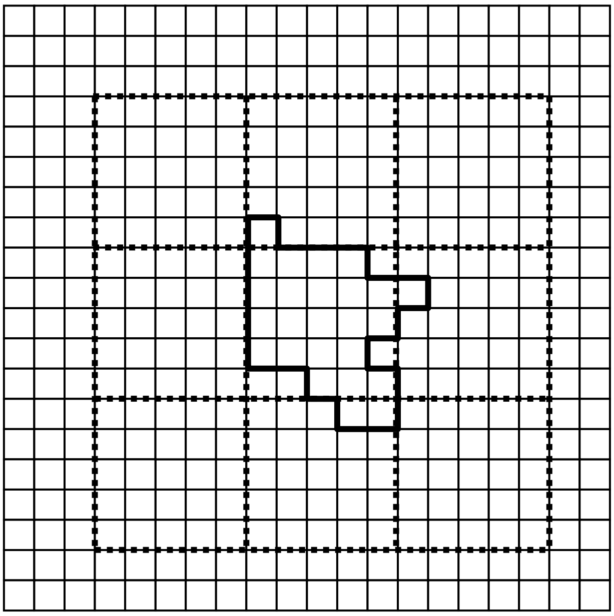




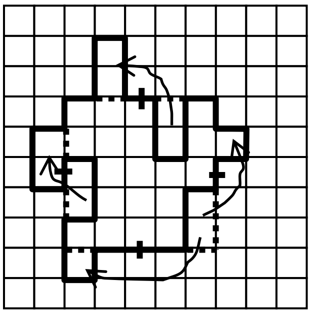
Vers le sommaire

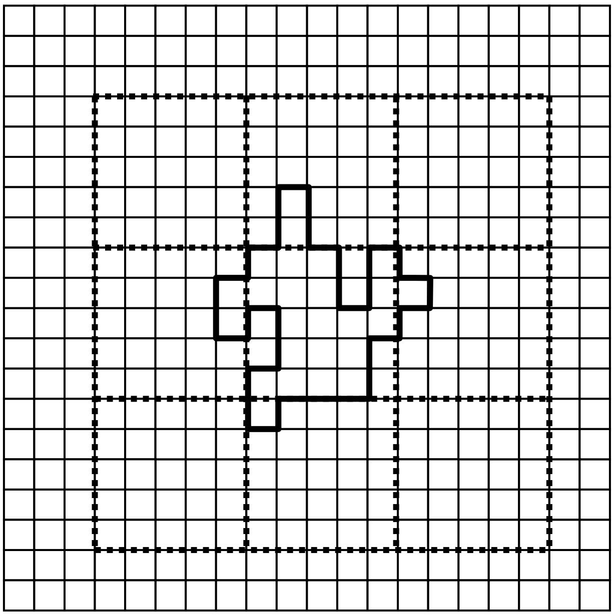
J'ai déplacé trois morceaux du carré 5×5 à l'aide de trois symétries centrales. J'ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.





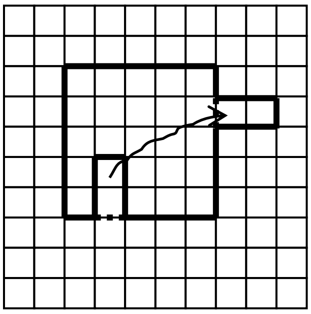
J'ai déplacé quatre morceaux du carré 5×5 à l'aide de quatre symétries centrales. J'ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.

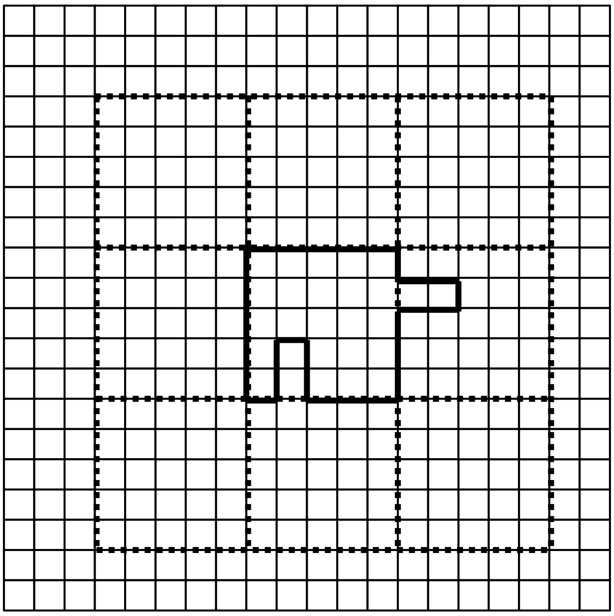




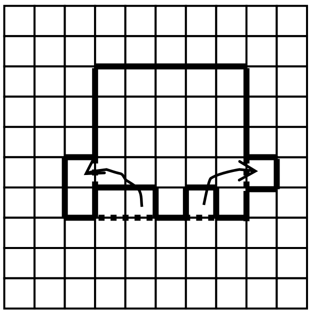
Vers le sommaire

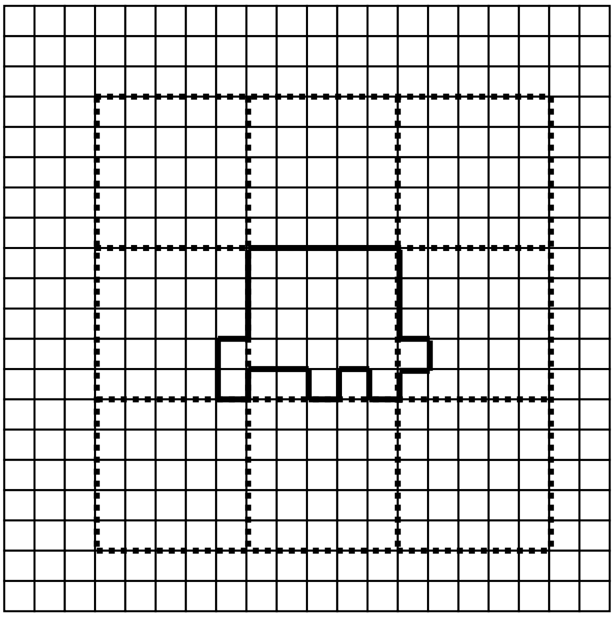
J’ai déplacé un morceau du carré 5 ×5 à l’aide d’une rotation. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.





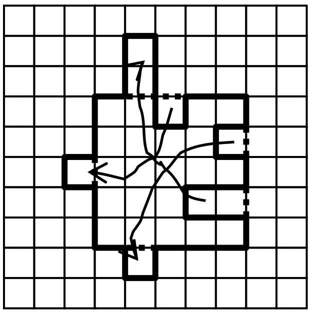
J’ai déplacé deux morceaux du carré 5 ×5 à l’aide de deux rotations. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.

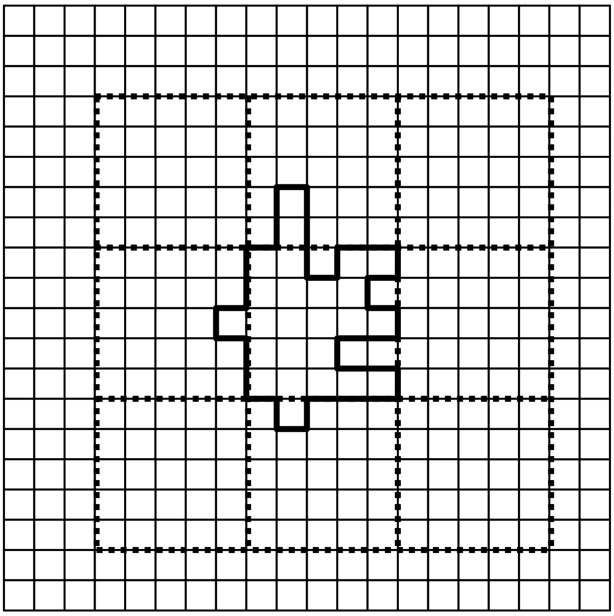




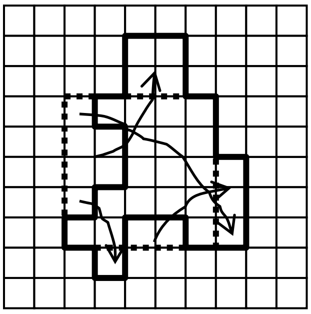
Vers le sommaire

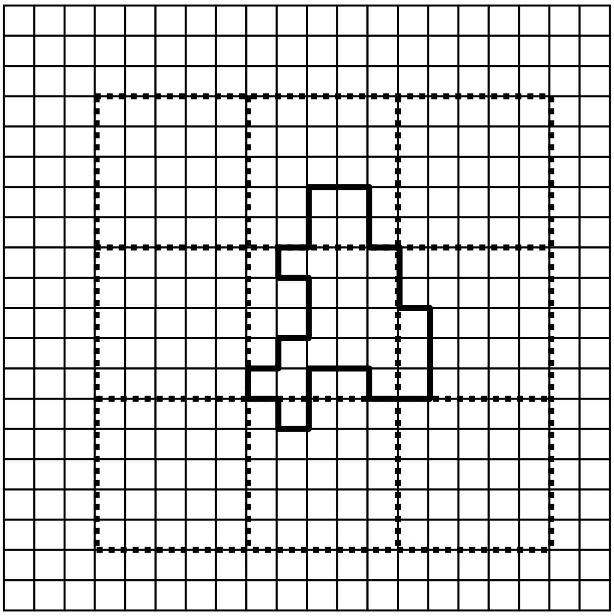
J'ai déplacé trois morceaux du carré 5 × 5 à l'aide de trois rotations. J'ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.





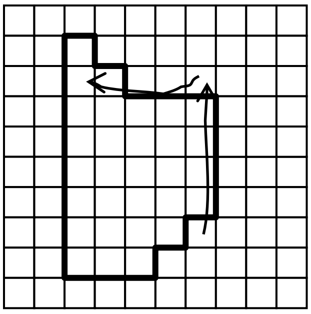
J'ai déplacé quatre morceaux du carré 5 × 5 à l'aide de quatre rotations. J'ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.

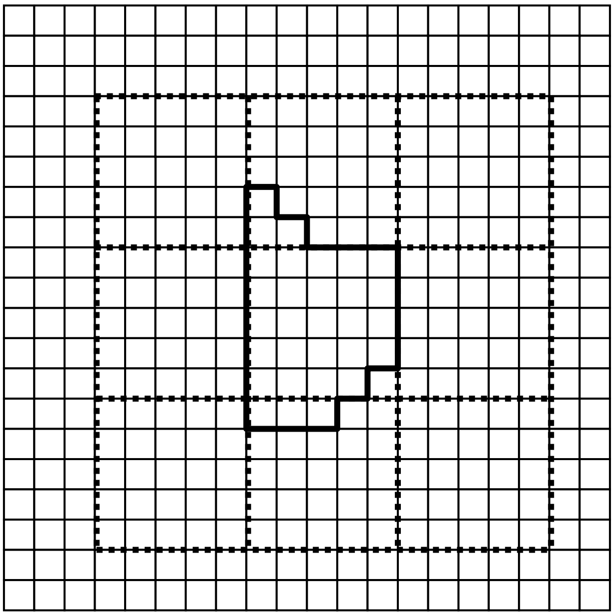




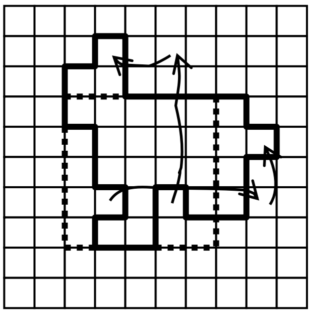
Vers le sommaire

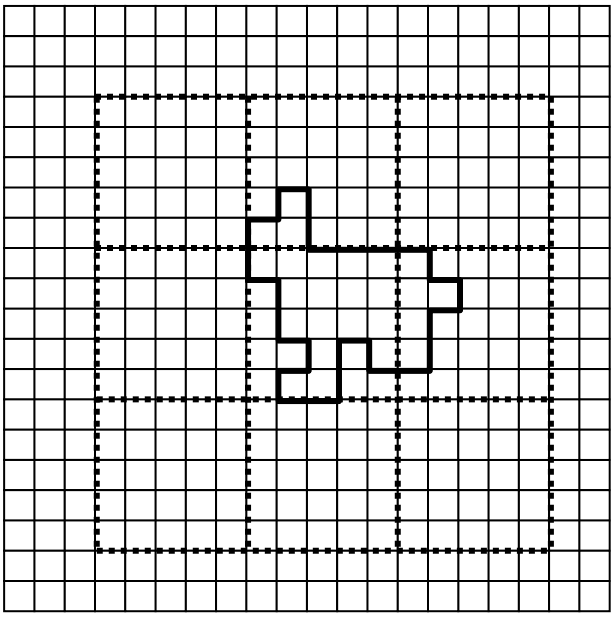
J’ai déplacé un morceau du carré 5×5 à l’aide d’une translation suivie d’une symétrie. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.





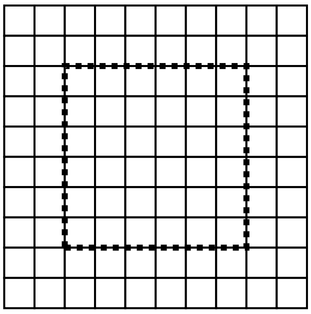
J’ai déplacé deux morceaux du carré 5×5 à l’aide de translations suivies de symétries. J’ai obtenu un motif de pavage.
Dessine le pavage obtenu en entourant le dessin ci-dessous par 8 motifs superposables à celui proposé.

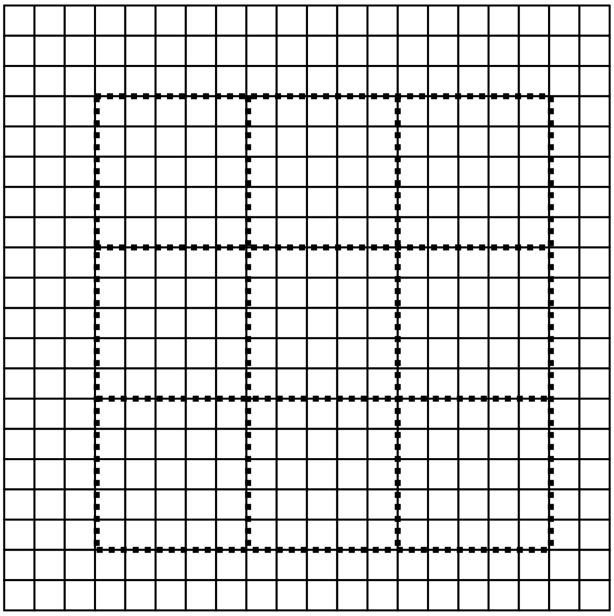


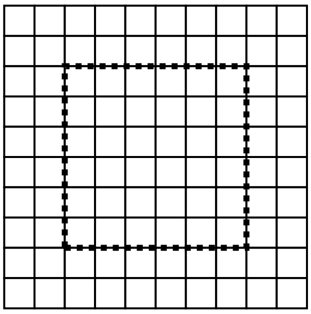


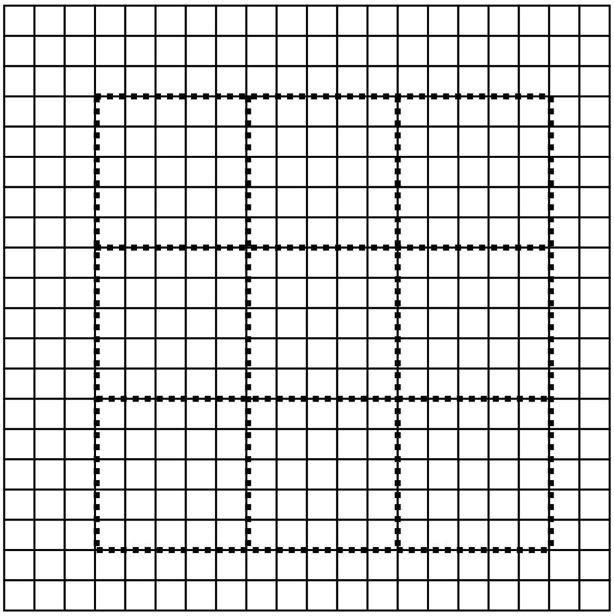
Vers le sommaire

Des carrés 5 × 5. Pour d'autres pavages…

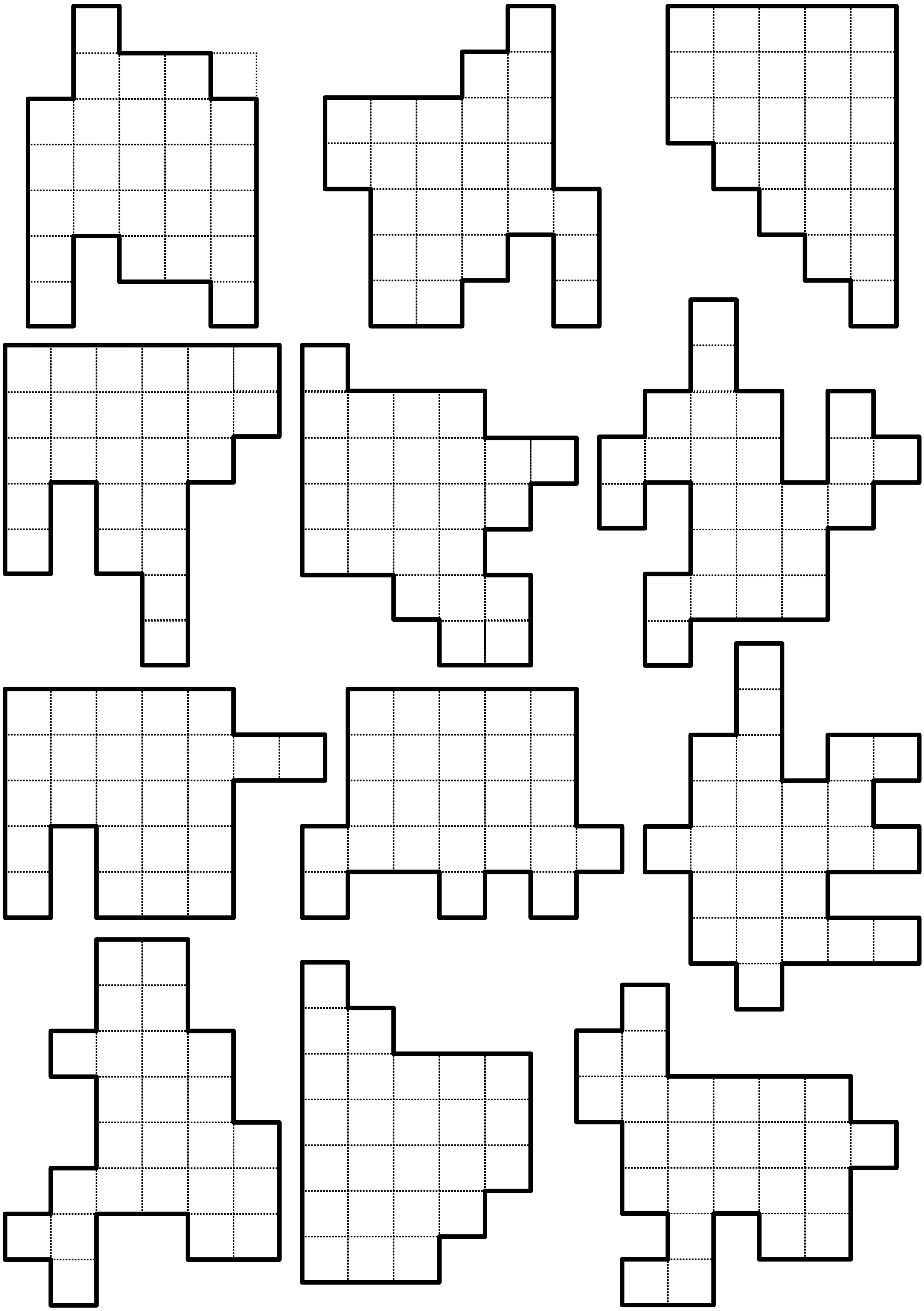






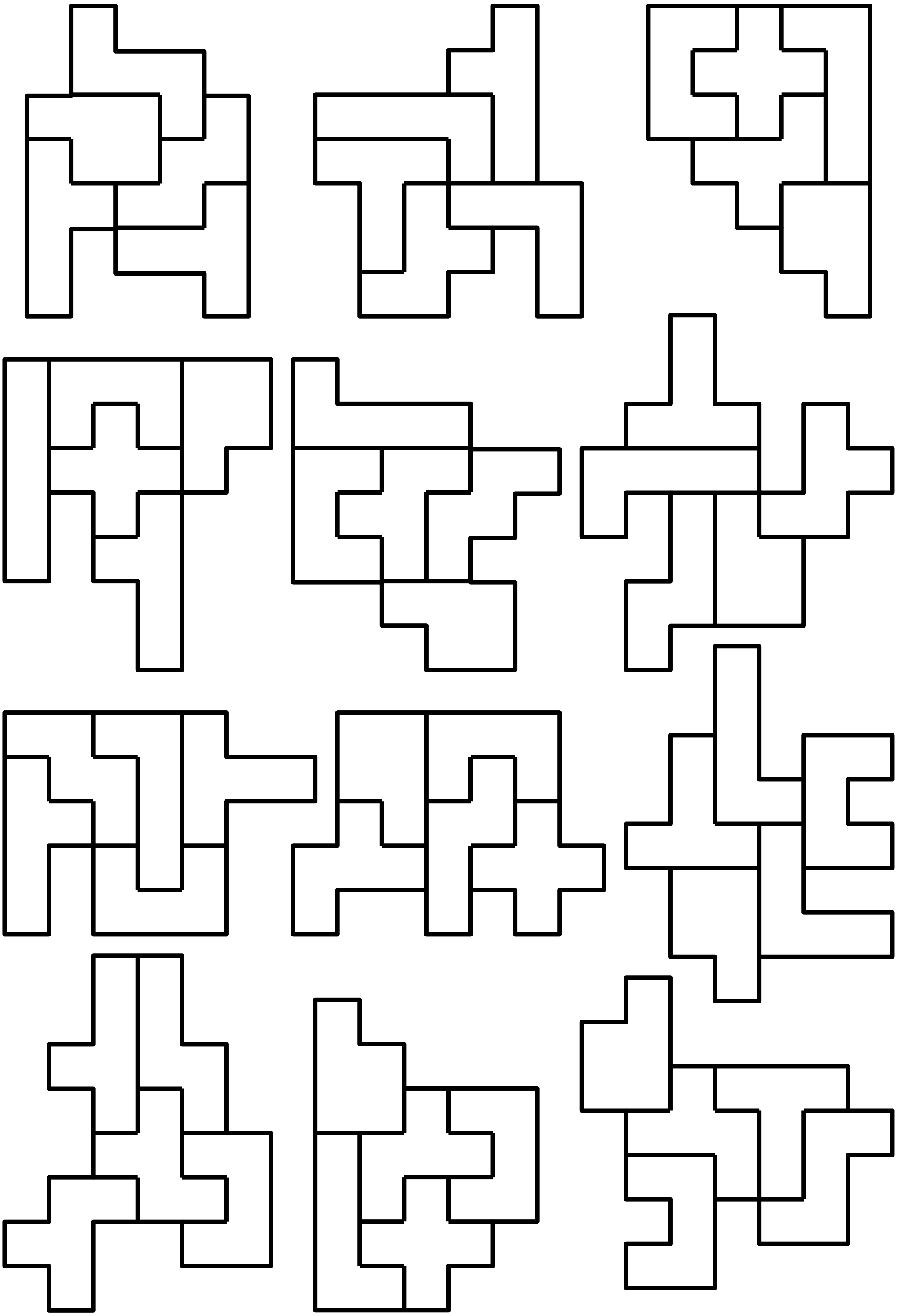


Des motifs de pavages à recouvrir avec cinq pièces choisies parmi les douze pentaminos



Vers le sommaire

Des motifs de pavages recouverts avec cinq pièces choisies parmi les douze pentaminos



Vers le sommaire

P

TABLE DES MATIÈRES

Vers le sommaire