1986

Jacques VERDIER
A.P.M.E.P. Lorraine

Travail de groupes en séquences longues :

démarche de recherche sur problèmes ouverts

1986

Cet ouvrage présente le travail fait dans plusieurs classes de seconde – mais qui pourrait facilement être adapté dans toute autre classe –, dont l'objectif est d'initier les élèves à une démarche de recherche sur problèmes ouverts.

Les élèves travaillent, en groupe, sur des « fiches-problèmes » proposées par le professeur. En 1984/85, les élèves ont rendu compte de leurs travaux dans cinq numéros d'un « journal de mathématiques ».

Dans une première partie, on trouvera les objectifs de ce type de travail, et le mode de fonctionnement de la classe.

Dans une seconde partie, quelques exemples – commentés – de réalisations des élèves.

Et, enfin, un recueil de quelques unes des fiches utilisées dans la classe.

Jacques VERDIER,
mai 1986

Brochure éditée par la Régionale LORRAINE de l'A.P.M.E.P.

Imprimée à l'I.R.E.M. de Lorraine, 54506 VANDŒUVRE

Dépôt légal : 4e trimestre 1986.
Second tirage : décembre 1988

EN GUISE D'INTRODUCTION

Citons Daniel HAMELINE :

« Apprendre, c'est autant perdre les idées qu'on se faisait qu'en acquérir de nouvelles.

« Il me semble que cet outil (1) a une spécificité par rapport aux autres méthodes pédagogiques que nous utilisons, c'est qu'il permet à l'élèves de perdre des idées qu'il se fait, tout en lui permettant d'en construire de nouvelles.

« D'autre part, l'expérience montre que les élèves sont très motivés par ce genre d'activités, dans la mesure où ils peuvent tous s'engager dans un processus de réalisation.

« Mais cet outil n'atteindra sa pleine efficacité que si nous sommes parfaitement conscients de son intérêt, et le meilleur moyen d'en prendre conscience, c'est d'essayer ! »

(1) D. Hameline parle ici des situations-problèmes.

SOMMAIRE

En rouge dans ce document : quelques notes qui ne figuraient pas dans l'édition papier de 1986.

1ère partie

1.1. INTRODUCTION AU PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES : MORCEAUX CHOISIS.

« La tâche essentielle [du professeur] est d'entraîner ses élèves, devant des situations saisies dans leur complexité naturelle, à la réflexion et à l'initiative personnelle ».

« La classe de mathématiques est, dans son râle essentiel, un lieu de découverte et d'exploration de situations plus ou moins maîtrisables, de réflexion sur des problèmes ».

« Au cours des activités, on ne se contentera pas de constatations, mais bien au contraire on s'efforcera - dans la plupart des cas - de justifier les résultats apparus ».

« [A travers ces diverses activités] on mettra en lumière les différentes phases d'un raisonnement mathématique : conjecture, mise en œuvre d'arguments, élaboration d'une stratégie de démonstration, et rédaction de la démonstration ».

« La pratique fondamentale, sur quoi repose pour l'élève l'entraînement au travail personnel, est celle des problèmes ; on n'hésitera pas à comparer sur une même question l'efficacité de plusieurs méthodes ».

« [La qualité d'un problème est] aussi d'avoir un intérêt aux yeux des élèves, et un intérêt en soi, même s'il ne conduit pas toujours à une synthèse immédiate ».

« Il s'agit de développer l'activité mathématique personnelle de l'élève ; or il n'y a pas de telle activité sans recherche, et par conséquent sans une gamme de problèmes ».

(Extraits du programme officiel de mathématiques[1])

[1] Programmes alors en vigueur en 1983-1985.

1.2. LES OBJECTIFS POURSUIVIS

1.2.1. ACQUÉRIR UNE DÉMARCHE DE RECHERCHE

- oser "se lancer" dans la résolution d'un problème ;
- reconnaître des situations déjà rencontrées ;
- réinvestir dans un domaine a priori éloigné ses connaissances et savoir-faire antérieurs ;
- faire la distinction entre une solution empirique et une démonstration mathématique (au sens de PREUVE). [N.B. Les élèves éprouvent de grandes difficultés à faire cette distinction : ce doit être un des objectifs de l'apprentissage].

1.2.2. RESTITUER LE TRAVAIL FAIT

- rendre compte de sa démarche
  - aux autres élèves,
  - au professeur ;
- s'exprimer correctement par écrit (plan, phrases, clarté, lisibilité, ...) ;
- présenter avec soin un travail.

1.2.3. OBJECTIFS DE "SOCIALISATION"

- être le plus autonome possible par rapport aux apprentissages ;
- travailler dans un groupe et y prendre des responsabilités ;
- susciter un comportement spécifique de travail en groupe (mettre en doute la parole de l'autre, demander des éclaircissements, rendre fructifiants les désaccords, prouver que l'on a raison, ...).

1.2.4.

Voici ce que Georges GLAESER (alors à l'IREM de Strasbourg) pense de l'initiation à la recherche de problèmes :

L'initiation à la recherche des problèmes va à l'encontre de certains préjugés "moraux". La curiosité (abusivement confondue avec l'indiscrétion) est souvent considérée comme un "vilain défaut", car "il ne faut pas chercher à comprendre". Nombreux sont ceux qui se sentent coupables lorsqu'ils "sèchent" longtemps sur un problème ; ils ont à tort l'impression de perdre du temps, alors que l'attitude plus efficace qui consisterait à se reporter immédiatement à une réponse toute rédigée nous semble au contraire condamnable.

Tout enseignement mathématique digne de ce nom doit initier l'élève à l'aventure du problème. Pour cela, l'éducateur devra briser bien des obstacles extrascolaires qui incitent à la passivité et au conformisme.

La recherche de problèmes n'est pas une activité scolaire compatible avec des horaires stricts, réalisée en temps limité. Il est impossible d'exiger d'un élève qu'il résolve un problème et remette la solution par écrit à échéance fixée. Le succès ne peut donner lieu à une bonne note, puisque l'échec ne saurait être sanctionné. Il s'agit donc d'une activité libre, à laquelle on se livre par goût d'une façon désintéressée. On comparera le statut du problème, dans l'enseignement des mathématiques, à la lecture des œuvres littéraires, ne figurant pas au programme, dans l'enseignement du français.

Le maître sèmera, de temps en temps, des idées de problème dans l'espoir de récolter un comportement de recherche. Mais lorsque l'inspecteur viendra passer vingt minutes dans sa classe, il n'apercevra pas ce qui germe dans la tête des enfants, et il ne pourra juger si l'initiative du professeur est sur le point de porter ses fruits. Ainsi, s'agit-il aussi pour le maître d'une activité gratuite, à laquelle il n'est pas règlementairement astreint.

Cependant la résolution d'un problème est une aventure d'une telle intensité qu'elle fait date dans la mémoire de tous ceux qui l'ont vécue. Heureux le professeur qui la révèle à ses élèves !

["LE LIVRE DU PROBLÈME", volume 1, IREM de Strasbourg, Editions CEDIC, 1976 (page 20)]

1.3. LE MODE DE FONCTIONNEMENT

1.3.1. HORAIRE UTILISÉ PAR CE TRAVAIL

Il a varié suivant les années et les classes :

- en 1982/83 (seconde S.M.S.) : 1,5 h dédoublée ;
- en 1983/84 (seconde technique spéciale, d'horaire total 5 heures non dédoublées) : 1 heure par semaine, quelquefois 2 ;
- en 1984/85 (même classe) : 2 h par semaine ;
- en 1985/86 (même classe) : 2 h par quinzaine.

La question de la gestion du temps est importante : mettre les élèves dans une telle situation de recherche est-il oui ou non une perte de temps ? Il est vrai que le professeur a parfois l'impression que "les choses ne vont pas assez vite" ...

Pour moi, il n'existe pas d'autre moyen de développer chez les élèves ce comportement de recherche, objectif que j'estime très important. L'efficacité est d'ailleurs à long terme (le "contenu immédiat" de chaque problème n'ayant que peu d'importance).

Il y a quelques années, chaque groupe, lorsqu'il avait terminé, exposait oralement : j'ai très vite abandonné cette démarche, pour deux raisons principalement :

- l'exposé oral n'était que la lecture d'un document écrit (il aurait fallu travailler en classe sur les techniques de l'exposé oral, ce qui aurait pris du temps et ne faisait pas partie, à ce moment-là, de mes préoccupations) ;
- les résultats d'une démarche ne passionnaient pas du tout ceux qui n'y avaient pas participé, et l'exposé n'était d'aucun profit au reste de la classe.

Ensuite, pendant plusieurs années, j'ai demandé aux élèves un compte-rendu écrit, dans lequel ils devaient exposer le problème posé, leur démarche de recherche, les "pistes" sur lesquelles ils avaient travaillé, la solution s'ils l'avaient trouvée, etc.).
Je corrigeais et annotais ce travail comme un devoir de mathématiques (ou de français) "ordinaire".
Mais il était très difficile d'obtenir des élèves qu'ils rédigeassent correctement (leur principal argument, bien connu des enseignants, était « mais **VOUS**, vous avez parfaitement compris ce que **NOUS** voulions dire ») ; une des difficultés était de leur faire comprendre la nécessité d'un PLAN pour leur devoir.

En 1983/84, dans le cadre d'une équipe interdisciplinaire en Seconde Technique Spéciale (élèves titulaires d'un C.A.P. et désirant poursuivre un second cycle long - secteur tertiaire), j'ai

travaillé en commun avec le professeur de français pour tenter résoudre ce problème de la rédaction.
Le professeur de français intervenait en tant que « candide » en mathématiques :

- il aidait les élèves à **EXPLICITER** leur démarche de recherche ou leur raisonnement (le simple fait de devoir l'expliquer oralement au "candide" leur permettait de mieux en concevoir la structure, de mieux l'analyser, voire de mettre en évidence des points qu'ils **CROYAIENT** avoir compris) ;
- il aidait les élèves à la **RÉDACTION** de leur travail.

En 1984/85, j'ai proposé aux élèves d'éditer un "JOURNAL DE MATHEMATIQUES" (interne à la classe), dans lequel chaque groupe publierait le compte rendu de son T.D.

L'objectif était alors que la rédaction soit faite EN FONCTION du public visé : les camarades de la classe (de même niveau mathématique, mais qui n'avaient pas cherché le problème exposé).

1.3.2. LE RECUEIL DE FICHES

C'est un classeur qui contient une cinquantaine de "fiches problèmes-ouverts". Il reste en permanence dans la salle de classe, dans une armoire ouverte aux élèves. Outre ces "fiches-problèmes" (dont certaines sont présentées en troisième partie, d'autres étant directement recopiées de brochures APMEP, IREM, etc.), il y a un grand nombre de fiches de documentation (histoire des mathématiques, thèmes proposés dans le programme de seconde, etc.).

Un certain nombre de ces fiches ont été inspirées par les travaux d'élèves de 2ème T du lycée B. Pascal de ROUEN, qui avaient alors Marcel DUMONT comme professeur : sa classe était entrée "en correspondance" avec ma classe de seconde S.M.S.

1.3.3. RÉPARTITION DES ÉLÈVES ET CHOIX DES SUJETS

- Les élèves travaillent en petits groupes (deux, trois, quatre au maximum). Ces groupes sont libres d'évoluer dans le temps : ce sont le plus souvent les affinités individuelles qui président à la constitution de ces groupes.

- Chaque groupe choisit, dans le "stock" de fiches, celle sur laquelle il va travailler le professeur intervient pour éviter que les élèves ne choisissent un travail trop difficile (en début d'année, par exemple), ou trop semblable à un travail déjà fait par ce même groupe.

1.3.4. LE SUIVI DU TRAVAIL

A la fin de chaque séquence, les élèves remplissent la page du jour du "LIVRE DE BORD", ainsi conçue :

			Date :
Elèves du groupe	Nom du T.D.	Qu'avez-vous fait aujourd'hui ? Quelles difficultés avez-vous rencontrées ?	Que comptez-vous faire la prochaine fois ?

C'est ce "livre de bord" qui permet le suivi du travail réalisé, car j'y porte également mes appréciations et commentaires sur le travail réalisé (ou non réalisé !) dans la semaine.

1.3.5. LA RESTITUTION

La phase la plus difficile est de faire restituer par les élèves, au reste de la classe, leurs recherches et leurs résultats.

Ce journal de classe (voir quelques exemplaires en seconde partie) a été TRES MOTIVANT, et a incité les élèves à rédiger correctement. C'est grâce à lui que - enfin - les objectifs de restitution (cf. § 1.2.2) ont pu être atteints.

1.4. L'ÉVALUATION DES ÉLÈVES

Les recherches et comptes-rendus réalisés par les élèves lors de leurs T.D. font partie intégrante de leur travail et, à ce titre, doivent faire l'objet d'une évaluation ayant la même "valeur" que les tests de contrôle, les travaux sur ordinateur, etc.
Personnellement, je ne NOTE pas ces comptes rendus, mais je les évalue en fonction des objectifs précisés plus haut (cf. § 1.2).

Chaque élève a une "FEUILLE DE ROUTE" sur laquelle il inscrit TOUS les travaux qu'il a réalisés, et sur laquelle il reporte les notes, les appréciations et les commentaires du professeur (commentaires qu'il peut d'ailleurs lui-même commenter !).

Ce système d'évaluation - dont l'idée m'avait été donnée par José MARIA, de la Régionale APMEP de NICE – s'est révélé extrêmement formateur. Il pourrait encore être amélioré par un suivi plus approfondi des "types d'erreurs" faites par les élèves et des progrès réalisés.

En fin de trimestre, l'appréciation et la note portées sur le bulletin constituent un "résumé" des informations figurant sur cette feuille de route (la note du bulletin n'est donc pas QUE la moyenne des tests et contrôles notés).

Les deux pages suivantes donnent quelques exemples de "feuilles de route" des élèves.

Claudine, 2e 5

Date	Note	Nature du travail	Appréciation du prof	Commentaire
17.09.83		Test de calcul (ordre des opérations + factions)	*L'ordre des opérations (la division surtout) n'a pas été respecté.*	
20.09.83	19	Devoir sur les fractions	*Tous les calculs sont exacts. Mais tu pourrais simplifier plus tôt les fractions*	
26.09.83		Devoir à la maison	*Très insuffisant. Tu n'as pas répondu aux questions posées dans $\boxed{1}$: les égalités sont fausses sur un exemple, cela ne prouve nullement qu'elles sont toujours fausses.*	
27.09.83	18	Travail sur ordinateur		
10.10.83		Devoir à la maison	*Des fautes de calcul qui n'auraient pas dû apparaitre dans le 3ème exercice. Pour les deux autres exercices, les réponses ne sont pas entièrement justifiées : il faut apporter la preuve de ce que tu avances.*	
10.10.83		Test de contrôle (factoriser et développer)	*15 justes*	
24.10.83	12,5	Devoir sur les factorisations et les développements	*Avant 15 justes → 7,5 sur 10* *- 5 justes → -2,5*	
5.11.83		Devoir à la maison	*Ton devoir n'est absolument pas rédigé. Dans le 2e exercice, je ne sais ce que tu as cherché, ni ce que tu as trouvé : il n'y a pas un mot d'explication.*	
15.11.83	11,5	Contrôle sur les équations du 1er degré		
24.11.83		TD n°1 sur l'indice des prix	*Les calculs sont exacts, mais la rédaction est très insuffisante. Imaginez que vous avez à faire paraitre ce TD dans une revue de consommateurs, qui vous comprendrait ?*	
14,5	*Aucun problème de calcul. Mais les efforts devront porter sur la rédaction des explications.*			

Sonia, 2^{e} 5

Date	*Note*	*Nature du travail*	*Appréciation du prof*	*Commentaire*
17.09.83		*Test de calcul (ordre des opérations + fractions*	*Attention à l'ordre des opérations*	
29.09.83	*14/20*	*Interrogation sur les fractions*	*Une faute de calcul dans N, et le calcul de R qui n'est pas abordé.*	
3.10.83		*Exercice pour démontrer*	*Mauvais devoir : il n'y a absolument aucune explication ni justification. Un devoir doit être rédigé.*	
10.10.83		*Exercice pour démontrer*	*Le 2^{e} et le 3^{e} exercice sont satisfaisants. Pour le premier, les réponses ne sont pas complètes.*	
17.11.83		*T.P. sur 2 équations à 2 inconnues*	*Les calculs et les résultats sont exacts. Mais vous n'avez pas présenté de façon satisfaisante la méthode générale de résolution d'un système de 2 équations : comment procède-t-on et dans quel but ?*	
5.10.83		*T.P. sur le jeu de cartes*	*Tu ne semble pas avoir bien saisis le sens du mot « démonstration ». L'erreur de raisonnement du 2 n'a pas été détectée, tu as pourtant bien décortiqué le problème.*	
24.10.83	*5,5*	*Devoir sur factorisation et développement.*		
15.11.83	*8*	*2 équations*		
9,5 *Beaucoup de bonne volonté ; les résultats sont corrects dans l'ensemble : il faut persévérer dans cette voie.*				
		T.P. Calendrier des travaux	*Vous auriez quand même pu préciser qu'à partir de là il était facile d'établir le calendrier de travail de chaque équipe.*	
23.1.84	*0 ?*	*2^{e} contrôle inéquations*	*(Peux-tu me dire pourquoi je t'ai mis zéro ?)*	
31.1.84	*17,5*	*Devoir de math sur les impôts*	*Tout est bien compris. Mais la rédaction pourrait encore être améliorée. La réponse à la 4^{e} question n'est pas justifiée.*	
25.2.84	*15*	*Devoir de math (résolution d'équations à 2 inconnues, droite et calcul)*	*Le lien entre la résolution par le calcul et la représentation graphique n'a pas été fait. N'oublie pas les unités pour les graphiques. Des erreurs dans le 4^{e} exercice (les calculs sont faux et la droite ne correspond pas aux calculs).*	
16 *De bons résultats qui laissent présager un bon 3^{e} trimestre.*				

2ème partie

2.1. PREMIER EXEMPLE : LA FICHE « DIÉTÉTIQUE »

La fiche proposée : voir troisième partie, fiche n°1.

Première rédaction des élèves (après un travail de recherche au brouillon du groupe, pendant lequel je ne suis pas intervenu) ; en voici la retranscription :

Isabelle
Zoubida
Véronique
Laurence

Le 27/08/84

Compte rendu du TP n°1

DIÉTETIQUE

Introduction

Le matin nous prenons, habituellement, au petit déjeuner :

- *un bol de lait demi-écrémé → 300 g.*
- *du pain → 125 g.*
- *2 sucres → 10 g.*
- *du beurre pour tartines → 20 g.*

Ce petit déjeuner est-il trop léger ou est-il bien proportionné ?

Pour le savoir, nous nous servons des besoins journaliers d'une adolescente âgée de 16 à 20 ans :
Annexe 1

Calories	Protides	Lipides	Glucides
3 200	95	70	540

Il nous faut également connaitre les valeurs nutritives, par 100g, des aliments consommés le matin :
Annexe2

	Calories	Protides	Lipides	Glucides
Pain	250	7	0,8	55
Lait	51	3,5	2	5,2
Sucre	400	0	0	100
Beurre	761	0,8	84	0,5

Pour connaitre les valeurs nutritives, pour 100g, des aliments consommés, nous nous sommes servies de la règle de trois.

Exemple pour le lait
Le poids du lait est multiplié par le nombre de calories ensuite divisé par 100. On obtient le nombre qui est contenu dans 300 g de lait : $\frac{300 \times 51}{100} = 153$ *calories.*
Même opération pour les protides, lipides et glucides.

Pour trouver le total de nos besoins journaliers, nous avons fait le total des calories pour le pain, le lait, le sucre et le beurre, de même pour les protides, lipides et glucides (annexe 2).

Apports relatifs de notre petit déjeuner :

	Calories	*Protides*	*Lipides*	*Glucides*
Total	*657,7*	*19,41*	*23,8*	*94,45*

Le pourcentage se calcule sur le total des calories, protides, lipides et glucides et sur les besoins journaliers (annexe 1).
Exemple : 657,7 / 3200 x *100 = 20,55 %. On arrondit pour simplifier : 21 %.*

Part de notre petit déjeuner par rapport à nos besoins quotidiens :

	Calories	*Protides*	*Lipides*	*Glucides*
Pourcentage	*21 %*	*20 %*	*34 %*	*18 %*

Peut-on faire un petit déjeuner qui couvre entre le tiers et le quart des besoins, uniquement avec du pain sec et du lait ?

Nous avons pris x pour représenter 100 g de pain et y pour 100 g de lait. Nous nous sommes servies des besoins journaliers pour calculer le tiers et le quart des besoins couverts, par exemple pour les calories :

$$800 < 250x + 51y < 1066$$

Pour 800, on prend 3200 /4.

Nous avons essayé des tas de solutions : division, multiplication, soustraction par les chiffres que l'in a en annexe. Dès que 'on pensait avoir trouvé un chiffres cela n'allait pas, soit avec les lipides, les protides ou les glucides, le chiffre était trop fort ou trop faible.

Nous en avons conclu que nos connaissances en mathématiques ne nous le permettent pas.

La correction par le professeur

Elle porte essentiellement sur la dernière partie de la copie, depuis « Nous avons pris x comme valeur… » jusqu'à la fin de ce paragraphe de 5 lignes.

J'ai estimé que ce paragraphe était à reprendre dans sa totalité, car il ne permettait pas de comprendre la façon dont avait été « mathématisée » la situation, ni de percevoir clairement la difficulté des équations à résoudre (n'oublions pas qu'il s'agit du début de l'année, en seconde, avec des élèves issues de C.A.P.) ; j'en ai discuté oralement avec le groupe.

J'ai fait un certain nombre d'autres remarques (moins importantes quant au fond) sur la rédaction et voici ce que, finalement, ces élèves ont rendu pour la parution du n° 1 de Journal : on voit que le problème est posé beaucoup plus clairement maintenant.

N.D.L.R. (2014) Ce sont les élèves elles-mêmes qui ont tapé ce document à la machine. La mise en page a été scrupuleusement conservée.

Laurence [redacted]
Isabelle [redacted]
Zoubida [redacted]
Véronique [redacted]

DIETETIQUE

Introduction

Le matin, nous prenons habituellement, au petit déjeuner :
- un bol de lait demi-écrémé 300
- du pain 125
- 2 sucres 10
- du beurre pour les tartines 20

Ce petit déjeuner est-il trop léger, trop gras ou est-il bien proportionné ?

Pour le savoir, nous nous servons des besoins journaliers d'une adolescente âgée de 16 à 20 ans :

Tableau n° I

Calories	Protides	Lipides	Glucides
3 200	95	70	540

Il nous faut maintenant connaître les valeurs nutritives, pour 100 g, des aliments consommés le matin :

Tableau n° II

Aliments	Calories	Protides	Lipides	Glucides
Pain	250	7,0	0,8	55
Lait	51	3,5	2,0	5,2
Sucre	400	0,0	0,0	100
Beurre	761	0,8	84,0	0,3

Pour connaître les valeurs nutritives, pour 100 g, des aliments consommés le matin, nous nous sommes servies de la règle de trois.

Exemple pour le lait :
Le pois du lait est multiplié par le nombre de calories ensuite divisé par 100. On obtient le nombre de calories qui est contenu dans 300 g de lait. Exemple : $\frac{300 \times 51}{100} = 153$ calories.
Même opération pour les protides, lipides et glucides.

Pour trouver le pourcentage de nos besoins journaliers, nous avons fait le total des calories pour le pain, le lait, le sucre et le beurre, de même pour les protides, lipides et glucides (tableau n° 2).

Apports nutritifs de notre petit déjeuner :

Calories	Protides	Lipides	Glucides
657,7	19,41	23,8	94,45

Le pourcentage se calcule sur le total des calories, protides, lipides et glucides et sur les besoins journaliers (tableau n° 1).
Exemple : 657,7 : 3 200 x 100 = 20,55 %.
On arrondit pour simplifier, 21 %.

Part de notre petit déjeuner par rapport à nos besoins journaliers :

Calories	Protides	Lipides	Glucides
20 %	20 %	34 %	18 %

Développement :

Peut-on faire un petit déjeuner qui couvre entre le tiers et le quart des besoins quotidiens ?

Comme la quantité de pain et de lait est inconnue, nous avons pris x comme valeur pour représenter le nombre de centaines de grammes de pain et y le nombre de centaines de grammes de lait.

Nous nous sommes servies des besoins journaliers pour calculer le quart et le tiers des besoins couverts.

Exemple :

Pour les calories : il en faut entre 800 et 1066,67 (car 3 200 : 4 = 800 et 3 200 : 3 = 1066,67).

En consommant x fois 100 g de pain et y fois 100 g de lait, on a : 250x + 51y calories.

Il faut donc que 800 < 250x + 51y < 1066,67.

De même pour les protides, lipides, glucides, on obtient les 3 inéquations suivantes :

Nombre de protides : x x 7 + y x 3,5 = 7x + 3,5y
On veut : 23,75 < 7x + 3,5y < 31,66

Nombre de lipides : x x 0,8 + y x 2 = 0,8x + 2y
On veut : 17,5 < 0,8x + 2y < 23,33

Nombre de glucides : x x 55 + y x 5,2 = 55x + 5,2y
On veut : 135 < 55x + 5,2y < 180

Conclusion :

En bricolant, nous n'avons pas trouvé le résultat. Nous ne connaissons pas de méthode mathématique donnant la solution de telles inéquations [2].

---

[2] Remarque ; il est vrai qu'à cette époque de l'année les élèves ne savaient pas résoudre une inéquation du type ax + by < c ; si un autre groupe avait repris le même T.D. plus tard dans l'année, je lui aurais demandé de pousser plus loin, et de DÉMONTRER que le problème posé n'avait effectivement aucune solution.

2.2. SECOND EXEMPLE : L'HÉRITAGE

Il s'agit d'un problème "classique", dû - je crois - à Nicolas CHUQUET.

Voir fiche n° 2 dans la troisième partie.

Ce que je trouvais intéressant, à partir de ce problème, était de savoir si, avec d'autres données que 1 000, 2 000, 3 000 ... et 10 %, il admettait toujours une solution. J'ai donc fait travailler les élèves sur cette piste.

Un premier groupe de trois élèves a choisi ce problème fin octobre. Ce sont des élèves qui avaient de très grosses difficultés (deux d'entre elles ont d'ailleurs abandonné la classe en cours d'année).
Il a fallu que j'intervienne très souvent dans leur groupe, - d'abord pour les aider à COMPRENDRE l'énoncé et à le traduire sous forme mathématique, et ensuite pour leur faire corriger les très nombreuses fautes de calcul dans la résolution des équations.

Voici, retranscrite, une partie de leur fiche : la résolution complète de l'exemple de N. CHUQUET, la "présentation" de leurs deux autres exemples et, surtout, la conclusion de leur T.D.

Sadia
Patricia
Nathalie

L'Héritage

<u>Le problème est le suivant</u>

Plusieurs frères se partagent un héritage. Pour trouver la part de chacun et le nombre de frères, on ca distribuer l'argent de la façon suivante :

- *Le premier prend 1000 F et 10% du reste*
- *Le deuxième prend 2000 F et 10% du reste*
- *et ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils aient tous la même part.*

Pour mieux comprendre le problème, voici un schéma.

1000 F	*10% du reste*	*2000 F*	*10% du reste*	*etc.*
Part du premier		*Part du deuxième*		

La part du premier est égale à la part du second

$P_1 = x - 1000$

$P_1 = 1000 + 10\%\text{ de } P_1 = 1000 + 10 \times \dfrac{(x-1000)}{100}$

$1000 + 0{,}1x\,(x - 1000)$

$1000 + 0{,}1x - 100$

$\boxed{P_1 = 900 + 0{,}1x}$

$R_2 = x - 2000 - P_1$

$P_2 = 2000 \times 10\%\ de\ R_2$

$2000 + 10\%(x - 2000 - P_1)$

$2000 + 0{,}1(x - 2000 - P_1)$

$2000 + 0{,}1(x - 2000 - 900 - 0{,}1x)$

$2000 + 0{,}1(x - 2900 - 0{,}1x)$

$2000 + 0{,}1x - 290 - 0{,}01x$

$\boxed{P_2 = 1710 + 0{,}09x}$

$P_1 = P_2$

$900 + 0{,}1x = 1710 + 0{,}09x$

$900 - 1710 = -0{,}1x + 0{,}09x$

$-810 = -0{,}01x$

$$\boxed{x = \frac{-810}{-0{,}01} = 81000\ F}$$

L'héritage vaut 81000 F

P_1 = 81000 F
- 1000 F
80000 F
-10%
72000 F
1000 + 8000 = 9000 F

P_2 = 72000 F
- 2000 F
70000 F
-10%
63000 F
2000 + 7000 = 9000 F

P_3 = 63000 F
- 3000 F
80000 F
-10%
54000 F
3000 + 6000 = 9000 F

P_4 = 54000 F
- 4000 F
50000 F
-10%
45000 F
4000 + 5000 = 9000 F

P_5 = 45000 F
- 5000 F
40000 F
-10%
36000 F
5000 + 4000 = 9000 F

P_6 = 36000 F
- 6000 F
30000 F
-10%
27000 F
6000 + 3000 = 9000 F

P_7 = 27000 F
- 7000 F
20000 F
-10%
18000 F
7000 + 2000 = 9000 F

P_8 = 18000 F
- 8000 F
1000 F
-10%
9000 F
8000 + 1000 = 9000 F

P_9 = 9000 F

Ils sont 9 frères

Deuxième exemple pour savoir si le problème se généralise

- *Le premier prend 2000 F et 20% du reste*
- *Le deuxième prend 4000 F et 20% du reste*
- *et ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils aient tous la même part.*

$P_1 = x - 2000 \qquad P_1 = 2000 + 20\%\ de\ R_1 = 2000 + \dfrac{20(x-2000)}{100}$

(…)
La suite des calculs se poursuit de la même façon que pour le premier exemple
(…)

Voici un dernier exemple pour savoir si le problème se généralise

- *Le premier prend 2000 F et 5% du reste*
- *Le deuxième prend 4000 F et 5% du reste*
- *et ainsi de suite jusqu'à ce qu'ils aient tous la même part.*

$P_1 = x - 2000 \qquad P_1 = 2000 + 5\%\ de\ R_1 = 2000 + \dfrac{5(x-2000)}{100}$

(…)
La suite des calculs se poursuit de la même façon que pour les deux premiers exemples.
(…)

CONCLUSION

Quelle que soit la valeur des nombres que l'on a choisis :

- *1000, 2000, 3000 avec 10% du rete de l'héritage,*
- *2000, 4000, 6000 avec 20% du reste de l'héritage,*
- *ou bien encore 2000, 3000 avec 5% du reste de l'héritage*

On trouve combien de frères doivent se partager l'héritage et la part de chacun d'eux.

Un autre groupe, après lecture du journal en février (où était parue la rédaction précédente), n'a pas été satisfait de la conclusion apportée (il s'agissait cette fois de trois "bonnes" élèves, et je venais d'insister "lourdement" en classe sur le fait que quelques exemples ne constituent pas du tout une PREUVE en mathématiques.

Elles ont donc cherché tout d'abord un CONTRE-EXEMPLE (qu'elles ont trouvé, après un essai infructueux). Puis elles se sont posé le problème en ces termes : « Nous cherchons si ce problème admet une solution pour x = valeur totale de l'héritage, y = valeur choisie pour résoudre le problème et P = pourcentage choisi ».

La formulation n'était pas très "heureuse" et a été reprise ensuite, après discussion avec le groupe : en effet, dans ce nouveau problème, x est "l'inconnue", alors que y et P sont des "paramètres" (pour parler mathématiquement).

Voici, dans son intégralité, le T.D. qu'ont rendu ces élèves (il est paru dans le n° 4 du journal, en mars 1985).

Nelly
Lysiane
Aline

L'héritage (suite)

D'après le TP réalisé par d'autres élèves, nous devons vérifier si leurs affirmations correspondent, pour tous les nombres.
Pour 1000, 2000, 3000… avec 10% du reste de l'héritage,
pour 2000, 4000, 4000… avec 20% du reste de l'héritage,
pour 2000, 3000, … avec 5% du reste de l'héritage.

Nous chercherons, en généralisant le problème, pour quel nombre de frères il y a une solution.

Nous prenons un exemple :

Le premier prend 1000 F et 8% du reste,
Le deuxième prend 1200 F et 8% du reste,
Le troisième prend 2000 F et 8% du reste,
Le quatrième prend 2500 F et 8% du reste…

Héritage = x

1000	*8%*	
P_1		*R_1*

$$R_1 = x - 1000$$

$$P_1 = 1000 + 8\%\ de\ R_1 = 1000 + 8 \times \left(\frac{x-1000}{100}\right)$$

$$= 1000 + 0,08 \times (x - 1000)$$

$$= 1000 - 0,08x - 80$$

$$\boxed{P_1 = 920 + 0,08x}$$

1000 F	*8%*	*1500 F*	*8%*	
P_1		*R_1*		
		P_2		*R_2*

$$R_2 = x - 1500$$

$$P_2 = 1500 + 8\%\ de\ P_1$$

$$= 1500 + 8\% \times (x - 1500 - P_1)$$

$$= 1500 + 0,08 \times (x - 1500 - 920 - 1,08x)$$

$$= 1500 + 0,0x - 120 - 73,6 - 0,0064x$$

$$\boxed{P_2 = 1306,4 + 0,0736x}$$

Résolution de l'équation pour que la part du premier soit égale à la part du deuxième :

$$P_1 = P_2$$
$$920 + 0,08x = 1306,4 + 0,0736x$$
$$0,08x - 0,0736x = 1306,4 - 920$$
$$0,0064x = 386,4$$
$$x = \frac{386,4}{0,0064}$$
$$\boxed{x = 60375 = total\ de\ l'héritage}$$

Pour trouver la part que reçoit le premier, on remplace x par sa valeur dans l'équation nous permettant de trouver P_1 :

$$\begin{aligned} P_1 &= 9\,20 + 0,08x \\ &= 920 + 0,08 \times 60375 \\ &= 920 + 40830 \\ &= 5750 \end{aligned}$$

Pour trouver le nombre de frères qui se partagent l'héritage, nous devons diviser la part totale de l'héritage par la part P_1 :

$$\frac{x}{P_1} = \frac{60375}{5720} = 10,5$$

Nous constatons que ce problème n'a pas de solution ENTIÈRE.

Nous cherchons la valeur de l'héritage x pour un pourcentage P et une valeur choisie Y (quelconque).

- *Le premier prend Y et P% du reste,*
- *le deuxième prend 2Y et P% du reste,*
- *le troisième prend 3Y et P% du reste, etc.*

x		
Y	*P%*	
P_1	*R_1*	

$$R_1 = x - Y$$
$$\begin{aligned} P_1 &= Y + P\%\ de\ (x - Y) \\ &= Y + \frac{P}{100}(x - Y) \\ &= \frac{P}{100}x + Y - \frac{P}{100}Y \end{aligned}$$
$$\boxed{P_1 = \frac{P}{100}x + \left(1 - \frac{P}{100}\right)Y}$$

Y	*P% de R_1*	*2Y*	*P% de R_2*	
P_1		*R_1*		
		P_2		*R_2*

$$R_2 = x - P_1 - 2Y$$

$$P_2 = 2Y + P\% \text{ de } R_2$$

$$= 2Y + \frac{P}{100}\times(x - P_1 - 2Y)$$

$$= 2Y + \frac{P}{100}\times x - \frac{P}{100}\times P_1 - \frac{P}{100}\times 2Y$$

$$= 2Y + \frac{P}{100}x - \frac{P}{100}\times\left[\frac{P}{100}x + \left(1 - \frac{P}{100}\right)Y\right] - \frac{P}{100}\times 2Y$$

$$= 2Y + \frac{P}{100}x - \frac{P^2}{10000}x - \frac{P}{100}Y + \frac{P^2}{10000}Y - \frac{P}{100}2Y$$

$$= \frac{P}{100}x - \frac{P^2}{10000}x + 2Y - \frac{P}{100}3Y + \frac{P^2}{10000}Y$$

Résolution par le calcul avec les valeurs, pour que la part du premier égale la part du deuxième, $P_2 = P_1$.

$$\frac{P}{100}x - \frac{P^2}{10000}x + 2Y - \frac{P}{100}3Y + \frac{P^2}{10000}Y = \frac{P}{100}x + \left(1 - \frac{P}{100}\right)Y$$

$$\frac{P}{100}x - \frac{P^2}{10000}x - \frac{P}{100}x = \left(1 - \frac{P}{100}\right)Y - 2Y + \frac{P}{100}3Y - \frac{P^2}{10000}Y$$

$$-\frac{P^2}{1000}x = Y - \frac{P}{100}Y - 2Y + \frac{P}{100}3Y - \frac{P^2}{10000}Y$$

$$= -Y + \frac{P}{100}2Y - \frac{P^2}{1000}Y$$

$$x = -\frac{10000}{P^2}\left(-Y + \frac{P}{100}2Y - \frac{P^2}{1000}Y\right)$$

$$= \frac{10000}{P^2}Y - \frac{100}{P}\times 2Y + Y$$

$$x = -\frac{10000}{P^2}\left(-Y + \frac{P}{100}2Y - \frac{P^2}{1000}Y\right)$$

$$= \frac{10000}{P^2}Y - \frac{100}{P}\times 2Y + Y$$

*Nous cherchons le nombre de frères N en divisant l'héritage total **x** par la part du premier, **P_1**.*

$$N = \frac{x}{P_1} = \frac{\left(\frac{100-P}{P}\right)^2 Y}{\frac{P}{100} \times \left[\left(\frac{100-P}{P}\right)^2 Y\right] + \left(1 - \frac{P}{100}\right) Y}$$

$$N = \frac{\left(\frac{100-P}{P}\right)^2}{\frac{P}{100} \times \left[\left(\frac{100-P}{P}\right)^2\right] + \left(1 - \frac{P}{100}\right)}$$

$$N = \frac{\left(\frac{100-P}{P}\right)^2}{\frac{P}{100} \times \left[\left(\frac{10000-200P+P^2}{P^2}\right)\right] + \left(1 - \frac{P}{100}\right)}$$

$$= \frac{\left(\frac{100-P}{P}\right)^2}{\frac{100}{P} - 2 + \frac{P}{100} + \left(1 - \frac{P}{100}\right)} = \frac{\left(\frac{100}{P} - 1\right)^2}{\frac{100}{P} - 1}$$

$$= \frac{100}{P} - 1$$

Conclusion

Pour que le problème ait une solution, il fait que le nombre de frères soit un nombre entier.

Soit $\frac{100}{P} - 1 \in \mathbb{N}$.

Pour que $\frac{100}{P} - 1 \in \mathbb{N}$ *, il faut que* $\boxed{\frac{100}{P} \in \mathbb{N}}$

Liste d'exemples :

Valeur de P	*Nombre de frères*
25 %	*4*
20 %	*5*
12,5 %	*8*

Valeur de P	*Nombre de frères*
6,25 %	*16*
4 %	*25*
2 %	*50*

2.3. TROISIÈME EXEMPLE, STATISTIQUES : ENQUÊTE SUR LE TABAC AU LYCÉE

Au cours d'une des séances de travail sur fiches, un groupe de trois élèves a eu (subitement ?) l'idée de faire une enquête dans le lycée et d'exploiter la statistique des résultats.

Je les ai envoyées au C.D.I. compulser, pendant cette séance de deux heures, tout ce qu'il y avait sur les statistiques dans TOUS les manuels de seconde : elles ont retenu l'idée de faire un enquête sur le tabac au lycée, en s'inspirant du questionnaire publié dans

Mathématiques, classe de seconde
Nouvelle collection Durrande
par A. Thuizat, G. Girault, N.et P. Lemaire
(Tehnique & Vulgarisation, PARIS, 1981), page 39

(mais en modifiant, en ôtant et en rajoutant des questions).

Ce genre d'activités est certainement habituel en seconde ([3]) ; mais ce qu'il y a eu là de remarquable (et qui ne m'était jamais arrivé dans ma longue carrière), c'est que ces trois élèves ont totalement pris en charge l'organisation de l'enquête et du dépouillement :

- elles ont tapé et tiré les 900 questionnaires ;
- elles les ont fait distribuer (par leurs camarades de classe) dans tout le lycée ;
- elles les ont fait "récupérer" (590 réponses exploitables sont revenues, soit les 2/3) ;
- elles ont préparé - avec mon aide - le codage des réponses pour ordinateur (utilisation du logiciel "TRIS" du C.N.D.P.), et ont organisé la saisie des données par toute la classe ;
- elles ont organisé une séance de constitution de panneaux pour visualiser les résultats : là encore, elles ont distribué le travail à la classe pendant une séance de deux heures.

C'est ainsi que le C.D.I. du lycée Varoquaux a pu se doter d'une exposition temporaire, esthétiquement réussie ([4]), sur le thème du tabac.

Dans tout ce travail - excepté la recherche du codage informatique des réponses - le professeur n'a pas eu le rôle moteur : il était un des participants aux moments où toute la classe était concernée, et il n'intervenait pas (parce qu'il n'y avait pas de demande) dans le groupe de trois lorsque celui-ci était dans une phase de préparation.

[3] Il n'a qu'à lire, à ce sujet, le programme officiel de la classe de seconde.
[4] Il est malheureusement impossible de reproduire ici les photographies des panneaux.

2.4. QUATRIÈME EXEMPLE. SANS LEVER LE CRAYON : CONJECTURES, CONTRE-EXEMPLES ET PREUVES

Le compte rendu suivant, publié par les élèves dans le "journal" n° 2 de l'année 84/85, met clairement en évidence une démarche de recherche scientifique.

La fiche utilisée est la fiche n° 34 (voir en 3ème partie), fiche elle-même conçue et réalisée en 1978 par un groupe de quatre élèves de seconde T après lecture d'un document sur les 7 ponts de Königsberg.

Véronique R.
Zoubida M.
Fatia L.
Isabelle P.

SANS LEVER LE CRAYON

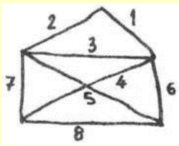
Nous avons constaté que certaines figures pouvaient se dessiner « sans lever le crayon » et d'autres pas.

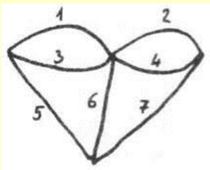
Existe-t-il une méthode pour savoir si une figure est réalisable sans lever le crayon ?

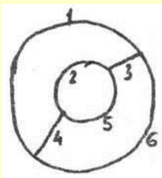
Nous avons émis plusieurs hypothèses :

Première hypothèse : est-ce que le problème ne viendrait pas du nombre de segments, pair ou impair ?

Avec certaines figures on obtenait un résultat, mais pas avec d'autres.
Exemples :

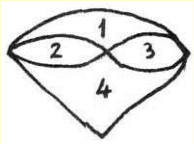
Cette figure a 8 segments et elle est réalisable.


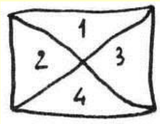
Celle-là en a 7 et ne se réalise pas.


Mais celle-là en a 6 et elle n'est pas réalisable.


Notre hypothèse était donc fausse.

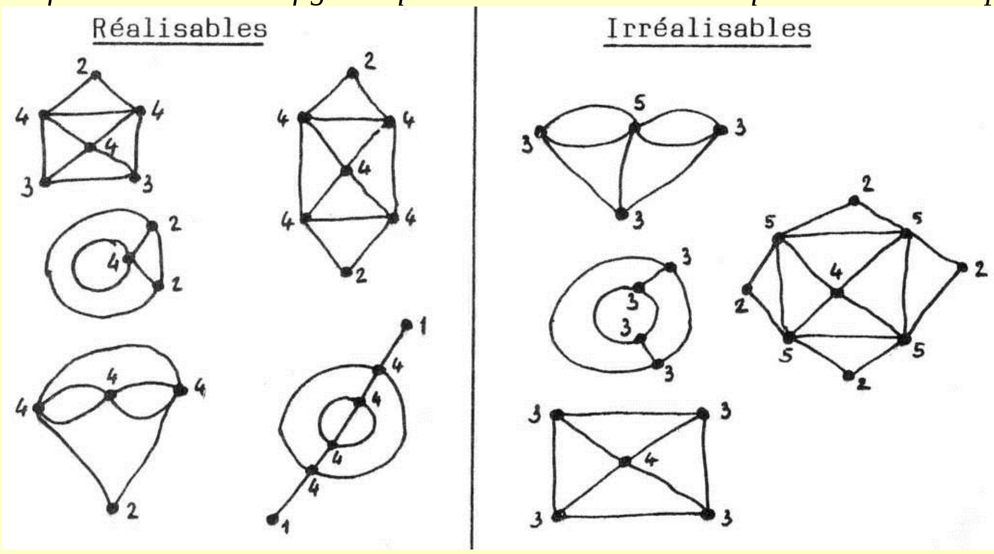
<u>Deuxième hypothèse</u> : est-ce dû au nombre de parties libres intérieures de la figure : pair ou impair ? <u>Exemples</u> :

4 parties libres, et elle est réalisable. 

4 parties libres, et elle ne se réalise pas. 

Notre hypothèse était donc fausse.

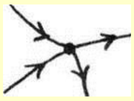
Nous avons fait un tableau des figures qui se réalisent et de celles qui ne se réalisent pas :



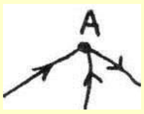
(les petits chiffres correspondent au nombre de segments qui passent par chaque point).

Avec l'aide du professeur, nous avons établi des règles :

<u>Règle 1</u> : lorsqu'un point sert de départ ET d'arrivée, ou s'il sert simplement de passage, alors ce point est pair.

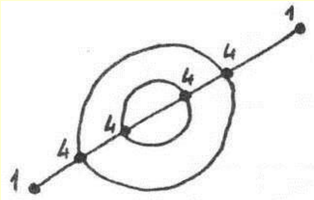


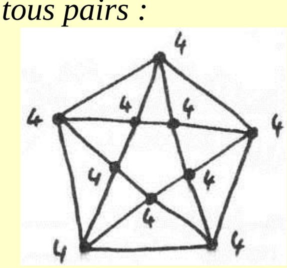
<u>Règle 2</u> : par contre, lorsque le point sert soit de point de départ soit de point d'arrivée, mais pas les deux, le nombre de segments est impair



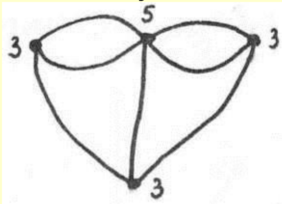
Lorsqu'un point est pair, il peut donc être à la fois départ ET arrivée, ou de passage ; lorsqu'il est impair, il sert soit de départ, soit d'arrivée.

Pour qu'une figure soit réalisable, il faut seulement deux points dont les segments sont impairs, ou que les segments de tous les points soient tous pairs :

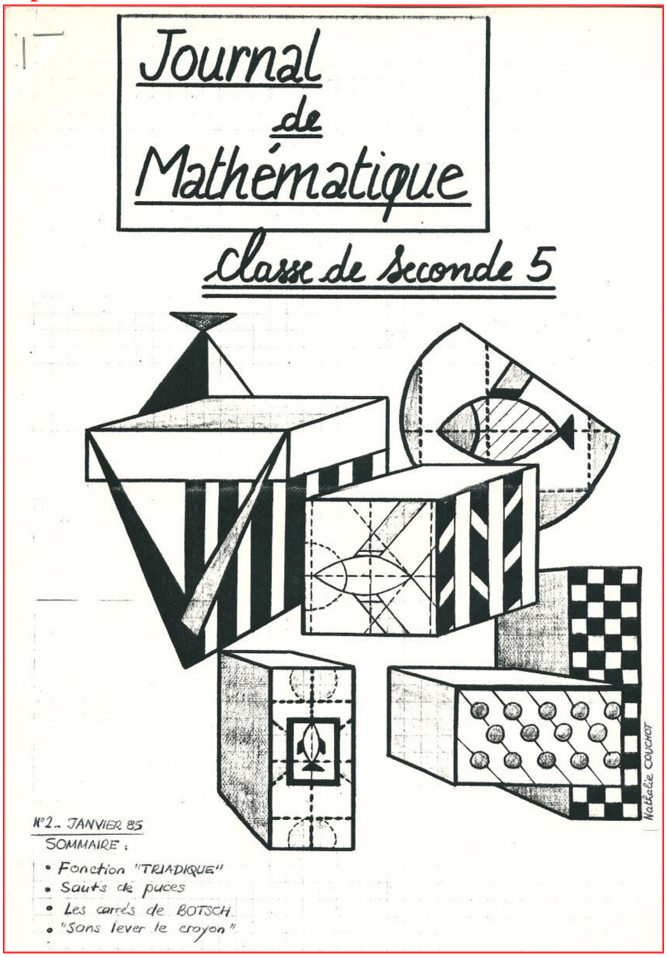




Quand il y a plusieurs points impairs, il faut plusieurs départs ou plusieurs arrivées, donc elles ne sont pas réalisables. Il faut lever le crayon !



Reproduction de la couverture du « Journal de Mathématiques » de la classe (janvier 1985). Cette image ne figurait pas dans la brochure éditée en 1986.



3ème partie

FICHE n° 1

Mathématisation d'un problème
Inéquations du 1er degré à 2 inconnues

DIÉTÉTIQUE

Besoins journaliers (adolescentes de 16/20 ans) :

Calories	Protides	Lipides	Glucides
3 200	95	70	540

Valeur nutritive de certains aliments (pour 100 g) :

	Calories	Protides	Lipides	Glucides
Pain blanc	250	7	0,8	55
Lait ½ écrémé	51	3,5	2	5,2
Yaourt	45	3,4	1,5	1
Sucre	400	0	0	100
Confiture	285	0,5	0,1	70
Cacao pur	492	21	28	38
Flocons d'avoine	367	14	5	66
Beurre	761	0,8	84	0,5
Œuf	162	13	12	0,6
Pomme, poire	61	0,3	0,4	14

Quantités habituellement utilisées :

Lait, le bol : 300 g
Lait, la tasse : 120 g
Yaourt : 125 g
Beurre pour une tartine : 5 g
L'œuf : de 55 à 65 g

Cacao, la cuillère : 5 g
Sucre, le morceau : 5 g
Pain, la baguette : 250 g
Pomme : 150 à 200 g

1°) Avec ce que vous prenez habituellement à votre petit déjeuner, quelle part de vos besoins quotidiens couvrez-vous ?

2°) Peut-on faire un petit déjeuner qui couvre entre le quart et le tiers des besoins quotidiens, uniquement avec du pain sec et du lait ?

3°) Mais ne serait-il pas plus agréable de beurrer les tartines, de sucrer le lait, etc. ?

4°) Chercher, dans une revue, les valeurs nutritives des aliments. Faire un exemple de menu équilibré pour la journée [voir par exemple, sur l'ordinateur, le programme NUT].

FICHE n° 2

Mathématisation d'un problème
Équations du 1er degré
Équations avec paramètres
Conjectures

L'HÉRITAGE

Voici un problème dû à Nicolas CHUQUET (Bachelier en médecine à LYON), datant de la fin du XVe siècle.

> Plusieurs frères se partagent un héritage.
>
> Le premier prend 1 000 F et 10 % du reste.
>
> Le second prend 2 000 F et 10 % du reste.
>
> Le troisième prend 3 000 F et 10 % du reste.
>
> Et ainsi de suite ... sauf pour le dernier frère, qui prendra tout ce que lui auront laissé les autres.
>
> Tous les frères ont alors la même part.

1°) Résoudre ce problème, en cherchant notamment combien il y a de frères, et combien vaut l'héritage.

2°) Ce genre de problème peut-il se généraliser ?
Par exemple : en modifiant les valeurs de l'énoncé, y a-t-il encore une solution ?

Qu'est-ce qui fait que le problème a, ou n'a pas, de solution ? Précisez bien quelles sont vos "hypothèses" de travail, pour les distinguer de ce que vous démontrez.

FICHE n° 3

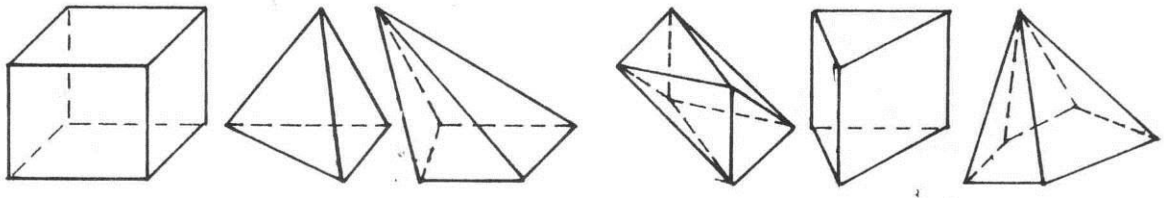
Relation d'Euler

UNE RELATION SUR LES POLYÈDRES

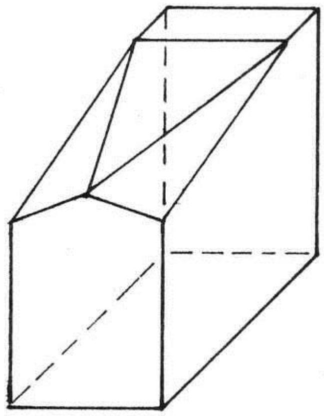
Objectifs :

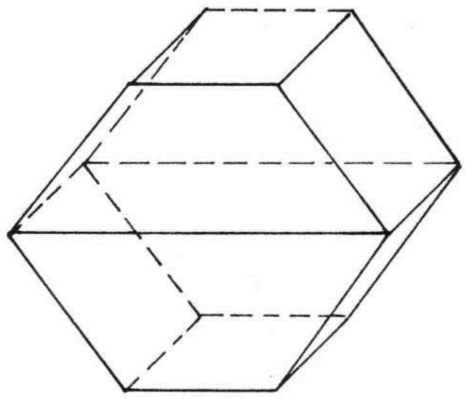
- réhabiliter et rendre fonctionnel le raisonnement déductif ;
- émettre des hypothèses, et les valider expérimentalement ;
- savoir si ces hypothèses peuvent être mises en défaut (contre-exemples).

Observer les figures suivantes. Pour chacune d'elles, dénombrer le nombre de faces (F), le nombre de sommets (S) et le nombre d'arêtes (A).



Peut-on trouver une relation entre S, F et A qui soit vraie pour tous ces polyèdres ? Cette relation est-elle encore vraie sur ces deux-là :





Peut-on trouver un polyèdre où cette relation soit mise en défaut ?

<u>Phase de validation des résultats</u> :

1. Partons d'un polyèdre où le nombre de sommets S, le nombre de faces F et le nombre d'arêtes A vérifient la relation S + F = A + 2. Sur l'une des faces de ce polyèdre, "accolons" une pyramide dont la base est cette face. Calculer alors les nouveaux nombres de faces (F'), de sommets (S') et d'arêtes (A') ; la relation est-elle encore vraie ?

2. Partons d'un polyèdre où S + F = A + 2. "Tronquons" l'un des sommets (cela revient à ôter une pyramide de sommet ce point). Calculer alors F', S' et A' ; la relation est-elle encore vraie ?

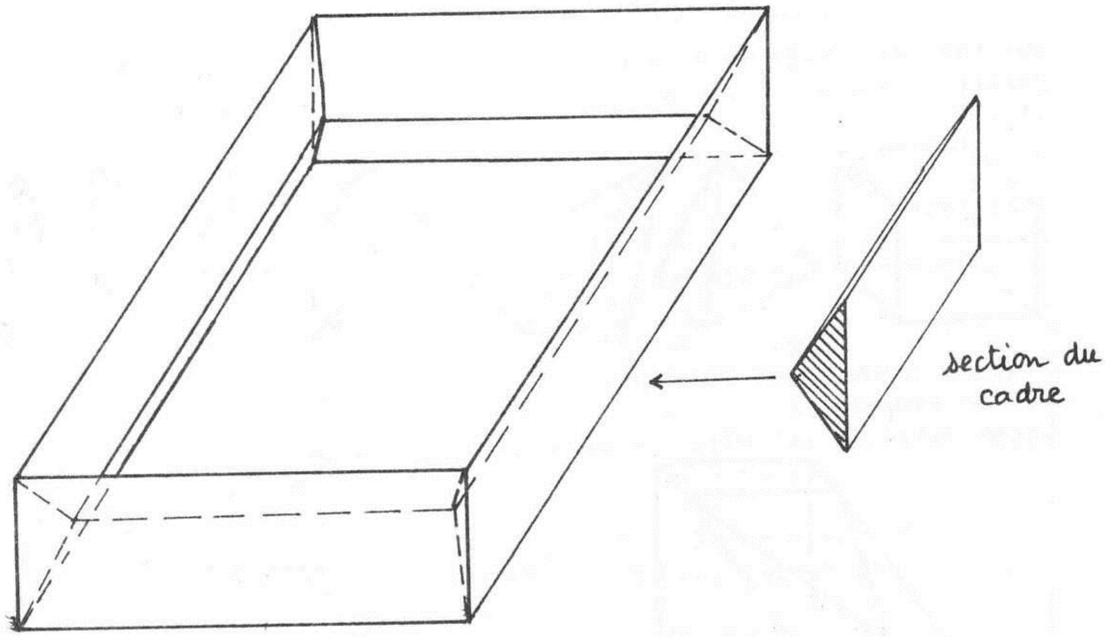
3. Les paragraphes 1 et 2 ci-dessus permettent-ils de démontrer la véracité de la relation
S + F = A + 2 ?

Suite page suivante

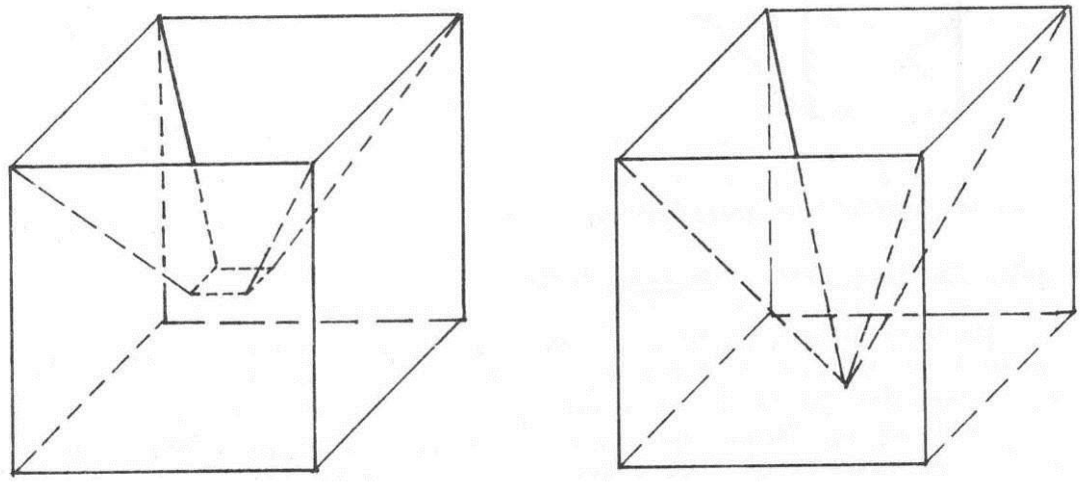
<u>Cas de polyèdre convexes ou non-convexes</u>

- Expliquer ce qui différencie un polyèdre convexe d'un polyèdre non-convexe.

- Observer ce "cadre", réalisé avec une moulure de section triangulaire. La relation est-elle encore vérifiée sur ce polyèdre non-convexe ?



- Est-elle encore vérifiée sur ces deux-ci ?



(On pourra lire le document "LE MODELE DE LAKATOS", précisant les notions de conjecture, de contre-exemple et de preuves : il pourra vous donner des idées de polyèdres à tracer, qui ne vérifient pas la relation d'Euler : S + F = A + 2).

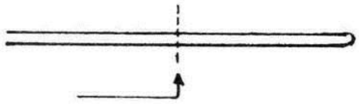
FICHE n° 4

Idée de marcel DUMONT, retrouvée dans :
« Le Petit Archimède », n° 59-60,
Et dans « Mathématiques buissonnières »,
de A. Délédicq, Ed. Cédic, page 210.

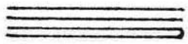
PLIER, COUPER, SUPERPOSER

On imagine un très long serpentin de papier, droit, d'un seul tenant.

On le plie en deux, et on coupe au milieu :

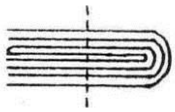


et on superpose les deux « tas » :

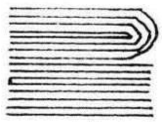


On a alors deux morceaux droits et un morceau plié.

On continue : on plie, on coupe au milieu :



et on superpose :



On a maintenant 6 morceaux droits et 5 morceaux pliés.

On continue… (en imagination !).

- Combien y a-t-il de morceaux après n opérations ? combien de droits et combien de pliés ?
- Y a-t-il une règle de récurrence[5] ?
- Analyser en détail la situation et trouver le plus de propriétés possibles.
- Démontrer (algébriquement) les résultats observés. Certains sont-ils la conséquence d'autres ?

[5] Chercher ce mot dans les dictionnaires

FICHE n° 5

Stratégie

JEU DE MARIENBAD

Deux joueurs, A et B, jouent alternativement.

Le joueur A dispose sur la table trois tas d'allumettes (comprenant chacun un nombre quelconque d'allumettes, qu'il choisit).

Le joueur B enlève un nombre quelconque d'allumettes d'un des tas (mais d'un seul tas) ; il peut même enlever un tas entier.

Le joueur A fait de même, puis le joueur B, et ainsi de suite.

Celui qui réussit à "vider" la table gagne.

Montrer qu'il existe une stratégie permettant au joueur A de gagner.

Note n° 1 : la numération en base deux du nombre d'allumettes de chaque tas fournira un aide appréciable pour la résolution de ce problème.

Note n° 2 : on peut très bien jouer avec plus de trois tas. Dans le film « L'ANNÉE DERNIÈRE A MARIENBAD », on propose ce jeu avec quatre tas de sept, cinq, trois et une allumette respectivement.

Note n° 3 : ce problème est un exemple particulier des jeux de Nim ; on pourra chercher une documentation théorique sur ces jeux à "Graphes sans circuit (noyaux)".

FICHE n° 6

Stratégie

D'après la revue « Arts & métiers » (1982)

LES CHIFFRES DU CADRE

Objectif : analyser une situation ne nécessitant aucune compétence mathématique préalable.

Dans ce cadre, il y a :

1 fois le chiffre 0
2 fois le chiffre 1
3 fois le chiffre 2
2 fois le chiffre 3

Compléter, dans le même esprit :

Dans ce cadre, il y a :

… fois le chiffre 0
… fois le chiffre 1
… fois le chiffre 2
… fois le chiffre 3
… fois le chiffre 4

Dans ce cadre, il y a :

… fois le chiffre 0
… fois le chiffre 1
… fois le chiffre 2
… fois le chiffre 3
… fois le chiffre 4
… fois le chiffre 5
… fois le chiffre 6
… fois le chiffre 7
… fois le chiffre 8
… fois le chiffre 9

etc.

FICHE n° 7

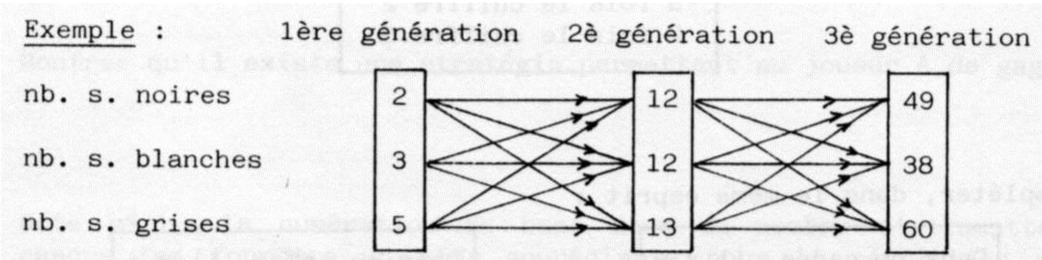
D'après une fiche de
François T., François R. et Patrice E.
(lycée Pascal, Rouen, 17/10/1979)

LES GÉNÉRATIONS DE SOURIS

Chaque souris noire donne naissance à $\begin{cases}\text{2 souris noires}\\ \text{1 souris blanche}\\ \text{2 souris grises}\end{cases}$

Chaque souris blanche donne naissance à $\begin{cases}\text{1 souris noire}\\ \text{0 souris blanche}\\ \text{3 souris grises}\end{cases}$

Chaque souris grise donne naissance à $\begin{cases}\text{1 souris noire}\\ \text{2 souris blanches}\\ \text{0 souris grise}\end{cases}$



1. Montrer comment on passe du nombre $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ de souris d'une génération au nombre de souris de la génération suivante.

2. On peut « coder » ce passage d'une génération à la suivante par la « matrice » $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}$.

   Expliquer comment « fonctionne » ce codage.

3. Comment peut-on passer de la première à la troisième génération en une seule fois ? (On procèdera comme dans l'énoncé de cette fiche : chaque souris noire donne naissance à … (à la troisième génération), etc.).
   Comment trouve-t-on la « matrice » de ce passage ?

4. Comment-passe-t-on directement de la première à la quatrième génération ?

FICHE n° 8

* Analyse d'une situation
* Découverte d'un algorithme de classement

COMBINATOIRE

Objectifs :

- analyser une situation ne nécessitant que très peu de connaissances préalables ;
- mettre en évidence un algorithme ;
- gérer cet algorithme à la main, et éventuellement sur machine.

On dresse une liste de tous les nombres qui s'écrivent avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, chacun pris une fois et une seule. Par exemple, le nombre 751 328 469.

On classe ces nombres dans l'ordre croissant. Le premier est, bien sûr, 123 456 789.
Quel est le deuxième ? Le troisième ?
Quel est le dernier ?
Combien y en a-t-il en tout ?

Quel est le 100 000$^{\text{ème}}$?

Complément : faire un programme (pour calculatrice programmable ou pour ordinateur) qui affiche le N-ième nombre de cette suite, N étant donné.

FICHE n° 9

D'après un article de François Pluvinage, paru dans l'Ouvert n° 35 (juin 1984) de l'I.R.E.M. de Strasbourg.

3 + 2 × = =
LE LANGAGE DE LA CALCULETTE

Matériel nécessaire :

- une calculatrice « scientifique » (par exemple TI 30 ou fx 82)
- plusieurs calculatrices « simples » (quatre opérations, =, M+, M-, éventuellement %)

Objectifs de ce T.D. :

Essayer de savoir « comment ça marche » et quelles différences il y a entre les différents modèles de calculettes.

Procédure de travail :

Taper des séquences de touches sur diverses calculettes, observer l'affichage, et noter les résultats obtenus.

Première observation :

Séquence **23 + 8 =**

Touches tapées		2	3	+	8	=
Divers modèles	1e calculette	2	23	23	8	31
	2e calculette	2	23	23	8	31
	3e calculette	etc.				

Ici, les deux premières calculettes ont le même comportement. Mais en tapant « 8 », « 23 » a disparu. A-t-il vraiment disparu ?

Deuxième observation : séquence **23 + 8 = = =**

Troisième observation : séquences **3 × 5 =** et **3 × 5 = = =**

Quatrième observation : séquences **6 + =** et **6 + = = =**

Cinquième observation : séquences **6 × =** et **6 × = = =**

Sixième observation : séquences **2 + 3 × 4 =** et **2 + 3 × 4 = = =**

Septième observation : séquences **2 ÷ =** et **5 ÷ = = =**

Restitution :

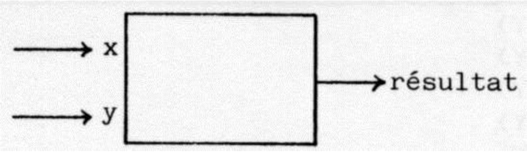
Expliquer aux autres élèves de la classe le fonctionnement de chacune des calculettes, soit par un article dans notre Journal, soit par un montage au rétroprojecteur, soit ...

FICHE n° 10

* Calculs dans D
* Equations à 2 inconnues
* Conjectures

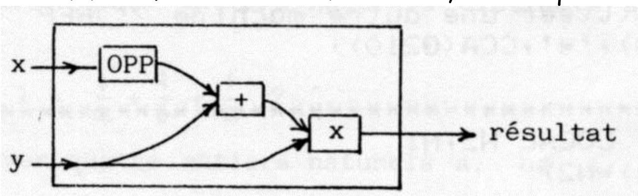
« OPÉRATRICES »

J'ai « fabriqué » pour vous des « machines » à opérer sur les nombres. Extérieurement, on pourrait les représenter ainsi :

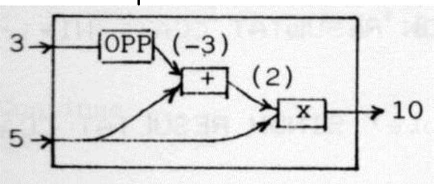


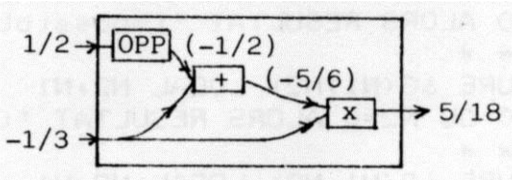
On y « rentre » deux nombres, et il en « sort » un résultat.

A l'intérieur, les machines ne connaissent que les opérations $\boxed{+}$ et $\boxed{\times}$, et les fonctions $\boxed{\text{OPP}}$ et $\boxed{\text{INV}}$ (opposé et inverse).
Regardons par exemple comment fonctionne la machine A, « disséquée » ci-dessous :



Avec deux exemples :





Ces machines n'existent pas réellement. Mais j'ai simulé leur fonctionnement par le programme « CACHE » de l'ordinateur. Il vous suffit de mettre le système L.S.E. en route et de lancer ce programme par LA (valider) CACHE (valider).

Vous pourrez alors vérifier que la machine A fonctionne bien comme ci-dessus (noter au passage que l'ordinateur est incapable de donner un résultat sous forme de fraction).

Le but de ce T.D. est de découvrir le « fonctionnement interne » de chacune des cinq machines B, C, D, E et F.

Listing du programme L.S.E. correspondant à la fiche précédente :

```
1   * CACHE
2   * JACQUES VERDIER OCTOBRE 1985
3   * Programme de simulation de boites à opérations
10  CHAINE CHX,REP,Z
100 &PAUSE(499);LIRE[.128.,'Quel type de machine choisis-tu (A, B, C, D, E ou
    F) ?']CHX
105 CHX←TMA(GRL(CHX,1))
110 SI LGR(CHX,1)≠1 ALORS DEBUT AFFICHER[/,'Un seul choix, s.v.p.'];ALLER EN 100 FIN
112 SI EQN(CHX,1)<65 OU EQN(CHX,1)>70 ALORS DEBUT AFFICHER[/,'Une lettre de A à F,
    s.v.p,' ; ALLER EN 100 FIN
150 LIRE[2/,'Valeur du premier nombre entré (x) :']X
160 LIRE[2/,'Valeur du second nombre entré (y) :']Y
169 * * * * *
180 SI CHX='A' ALORS Z←&A(X,Y)
182 SI CHX='B' ALORS Z←&B(X,Y)
184 SI CHX='C' ALORS Z←&C(X,Y)
186 SI CHX='D' ALORS Z←&D(X,Y)
188 SI CHX='E' ALORS Z←&E(X,Y)
190 SI CHX='F' ALORS Z←&F(X,Y)
195 &AFF(X,Y,CHX,Z)
198 AFFICHER[2/,'Note soigneusement le résultat obtenu.']
199 &SUITE()
200 LIRE[2/,'Veux-tu renter un autre essai sur la même machine ?']REP
205 &REPON(REP,CCCA(@150),*,CCA(@200))
201 LIRE[2/,'Veux-tu utiliser une autre machine ?']REP
205 &REPON(REP,CCCA(@150),*,CCA(@210))
298 TERMINER
299 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
300 PROCEDURE &A(N1,N2) LOCAL N1,N2
302 RESULTAT CCA((N2-N1)*N2)
309 * * * * *
310 PROCEDURE &B(N1,N2) LOCAL N1,N2
312 RESULTAT SI N1=0 ALORS RESULTAT 'Impossible' SINON RESULTAT CCA(1/N1+(-N2))
319 * * * * *
320 PROCEDURE &C(N1,N2) LOCAL N1,N2
322 RESULTAT SI N1=0 OU N2=0 ALORS RESULTAT 'Impossible' SINON RESULTAT
    CCA(1/N1+1/N2)
329 * * * * *
330 PROCEDURE &D(N1,N2) LOCAL N1,N2
332 RESULTAT CCA(N1+N1*N2+N2)
339 * * * * *
340 PROCEDURE &E(N1,N2) LOCAL N1,N2
342 RESULTAT CCA(-N1*N1)
349 * * * * *
350 PROCEDURE &F(N1,N2) LOCAL N1,N2
352 RESULTAT SI N1+N2=0 ALORS 'Impossible' SINON RESULTAT CCA(1/(N1+N2))
359 * * * * *
400 PROCEDURE &AFF(U,V,MACH,RESUL) LOCAL U,V,MACH,RESUL
402 AFFICHER[.128.,*X,.255 255 255 255 255 255 255 .' ←',U]2+LGR(RESUL),U
404 AFFICHER[/,U,' ←',.255 255.,U,.255 .255.]RESUL, MACH
406 AFFICHER[/,*X,.255 255 255 255 255 255 255 .' ←',U]2+LGR(RESUL),V
408 RETOUR
419 * * * * *
450 PROCEDURE &PAUSE(TEMPS) LOCAL TEMPS, I
452 FAIRE 452 POUR I←1 JUSQUA TEMPS
454 RETOUR
499 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
```

FICHE n° 11

In « La pratique du problème ouvert », G. ARSAC, publication de l'IREM de LYON, 1984

FRACTIONS DE SOMME 1

- Peux-tu trouver deux entiers naturels distincts a et b tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$?

- Peux-tu trouver trois entiers naturels distincts a, b et c tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$?

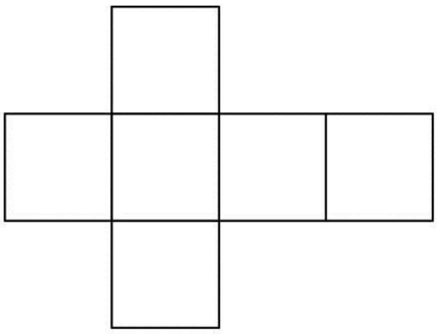
- Peux-tu trouver quatre entiers naturels distincts a, b, c et d tels que $1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$?

- Continue…

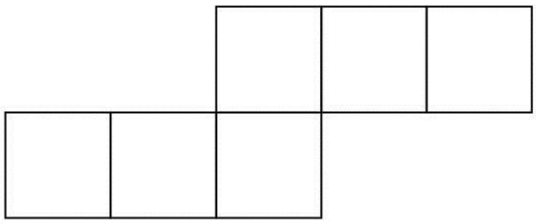
FICHE n° 12

* Logique
* Dénombrements

DÉVELOPPEMENT D'UN CUBE



Quand on découpe cette « forme » et qu'on plie, on obtient un cube … c'est archi connu !



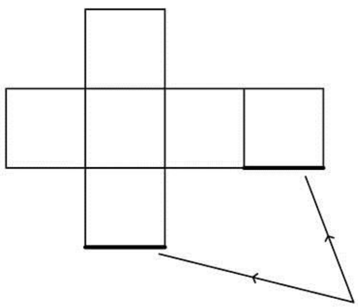
Et avec cette forme-là, peut-on obtenir un cube ?

Peut-on trouver **TOUTES** (*) les « formes » qui, repliées, donneraient un cube (c'est ce qu'on appelle des <u>développements du cube</u>), en **PROUVANT** qu'on les a bien obtenues toutes ?

(*) Seules les formes d'un seul tenant (appelées « hexaminos ») sont autorisées.

<u>Pour aller plus loin</u> :

1. Quelle sont les arêtes qui se correspondent (indispensable si on veut mettre des languettes pour coller) ?

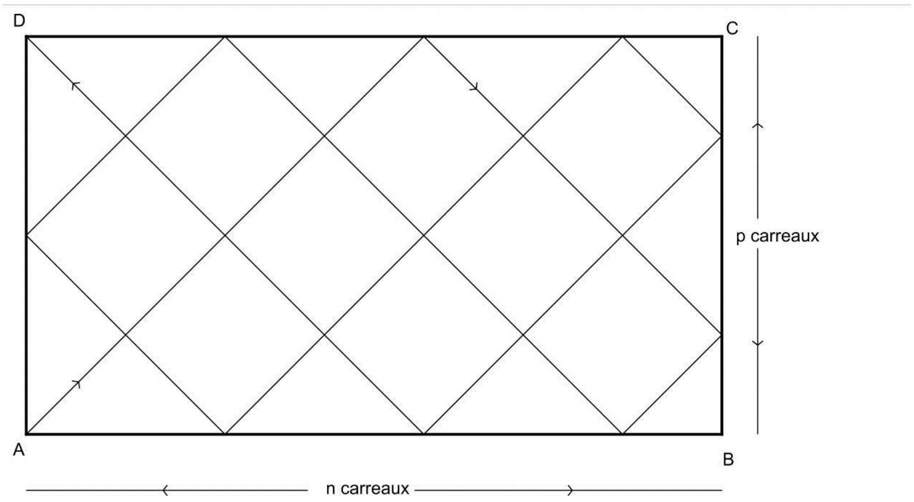


Ces deux arêtes se correspondent : elles seront « collées » ensemble.

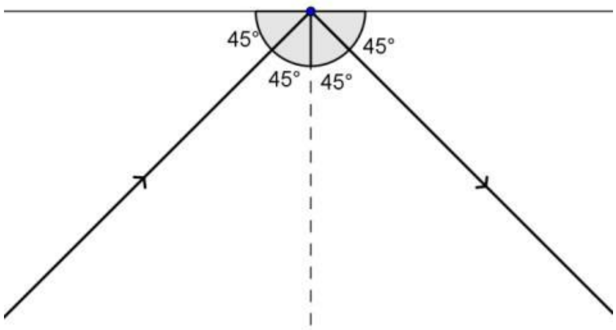
2. Et si, au lieu de faire un simple cube, on voulait faire un **DÉ** à jouer ?

FICHE n° 13

LE BILLARD



La balle de billard part du coin A à 450.
Chaque fois qu'elle tape un bord, elle rebondit :



Peut-on prévoir, en fonction de *n* et de *p* (entiers), le coin par lequel ressortira cette balle ?

FICHE n° 14

Voir aussi fiche n°15

OBJETS FRACTALS

Bibliographie

- La Recherche, janvier 1978
- Encyclopaedia Universalis (Fractales)
- Le Petit Archimède, numéros 49-50 et 57-58

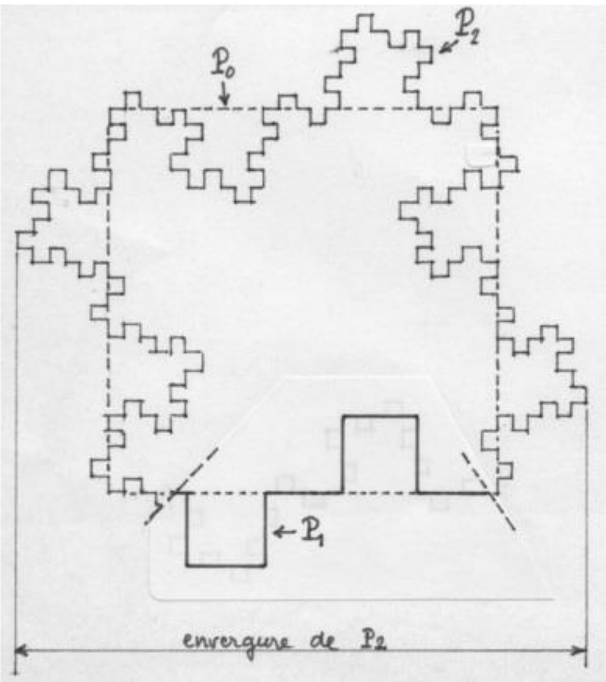
Historique

* La première étincelle de la théorie des objets fractals jaillit en 1877 dans une correspondance entre Kantor et Dedekind : ils remettaient en cause certains fondements de la géométrie d'Euclide, et notamment la notion de dimension. Aujourd'hui, cette révolution conceptuelle a des retombées en anatomie, en botanique, etc.

* En 1890, Peano annonçait l'existence de courbes « monstrueuses », capables de remplir un carré. Elles fournissent maintenant un modèle géométrique des réseaux fluviaux.

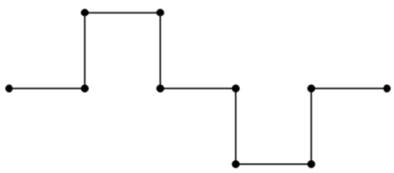
* D'autres « monstres » on été engendrés par Kantor (1884), Van Koch (1904) et Hauesdorff (1919). Ce sont des figures intermédiaires entre surfaces et volumes, baptisées fractales parce que leur dimension est factionnaire. La surface interne du poumon, par exemple, est un objet fractal.

Courbe de Peano



Sur cette figure due à Peano, chaque segment est partagé en 5 parties :

et se transforme en celle ligne brisée :



et ainsi de suite…

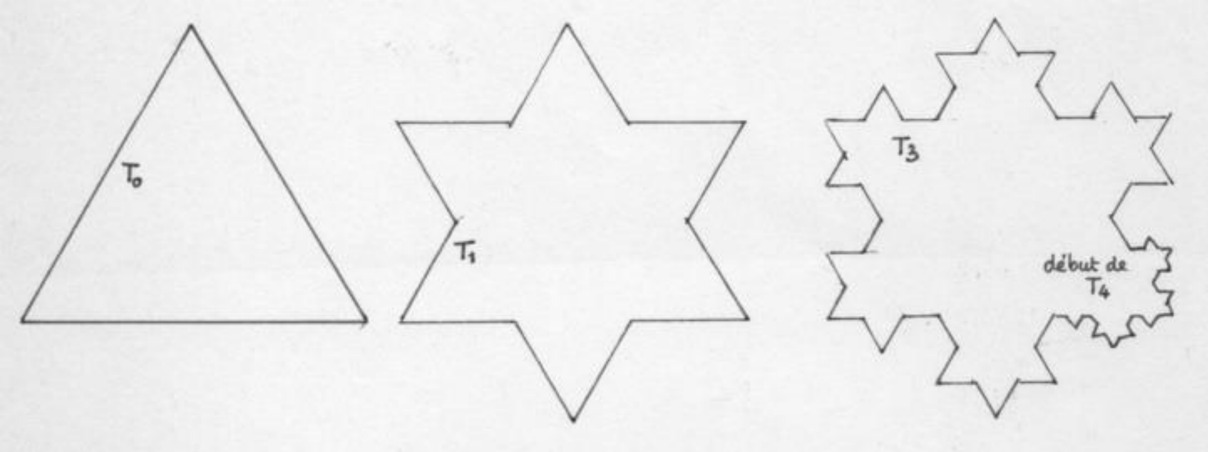
En supposant que le carré P_0 de départ a pour longueur l'unité, déterminer la surface, la longueur et l'envergure de P_n.

Représenter graphiquement la longueur de P_n en fonction de n.

…/…

Le flocon de neige de Van Koch

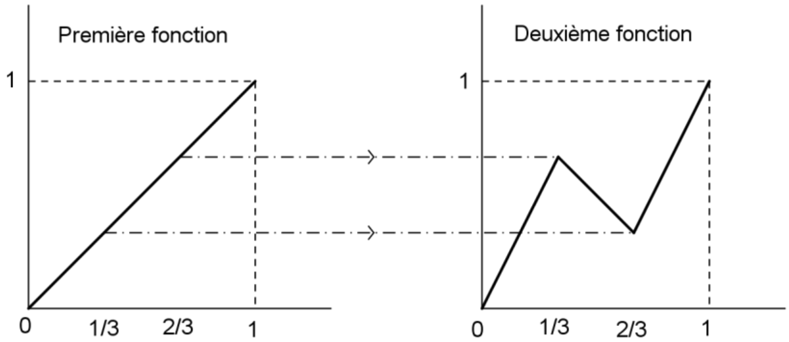
Même problème avec la courbe suivante, générée par des triangles équilatéraux.



FICHE n° 15

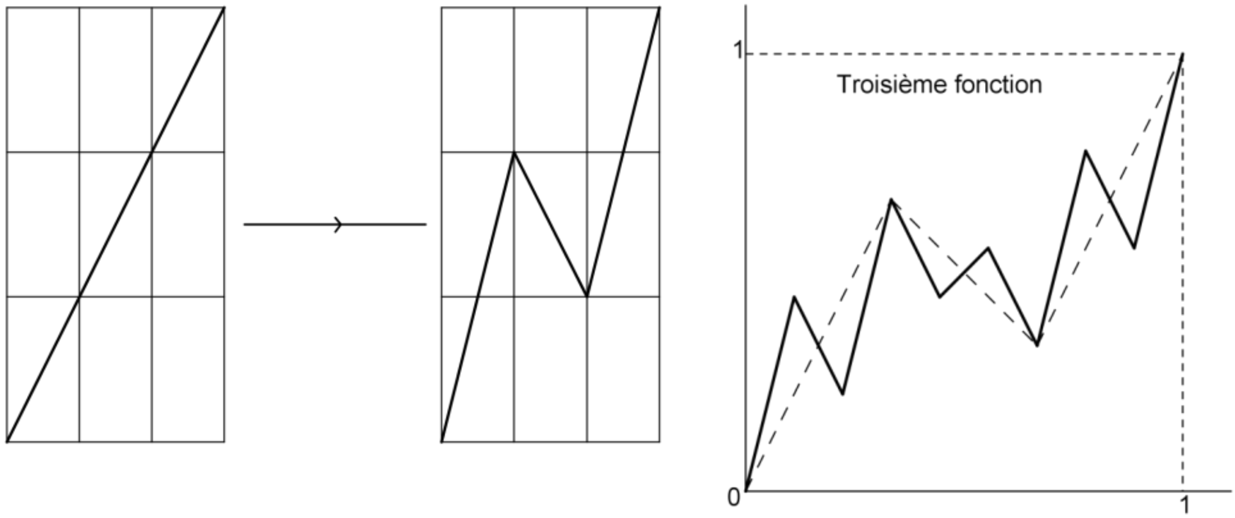
FONCTION TRIADIQUE (courbe fractale)

On définit, sur [0 ; 1] la suite de fonctions suivante :



On coupe le segment tracé en trois, et on « échange » les ordonnées des deux points trouvés. Le graphe de la seconde fonction joint donc les points (0 ; 0), (1/3 ; 2/3) ; (2/3 ; 1/3) et (1 ; 1).

Et on continue ainsi de suite : **chaque segment** est coupé en trois, et se transforme en trois nouveaux segments par « échange » des ordonnées des deux points intermédiaires :



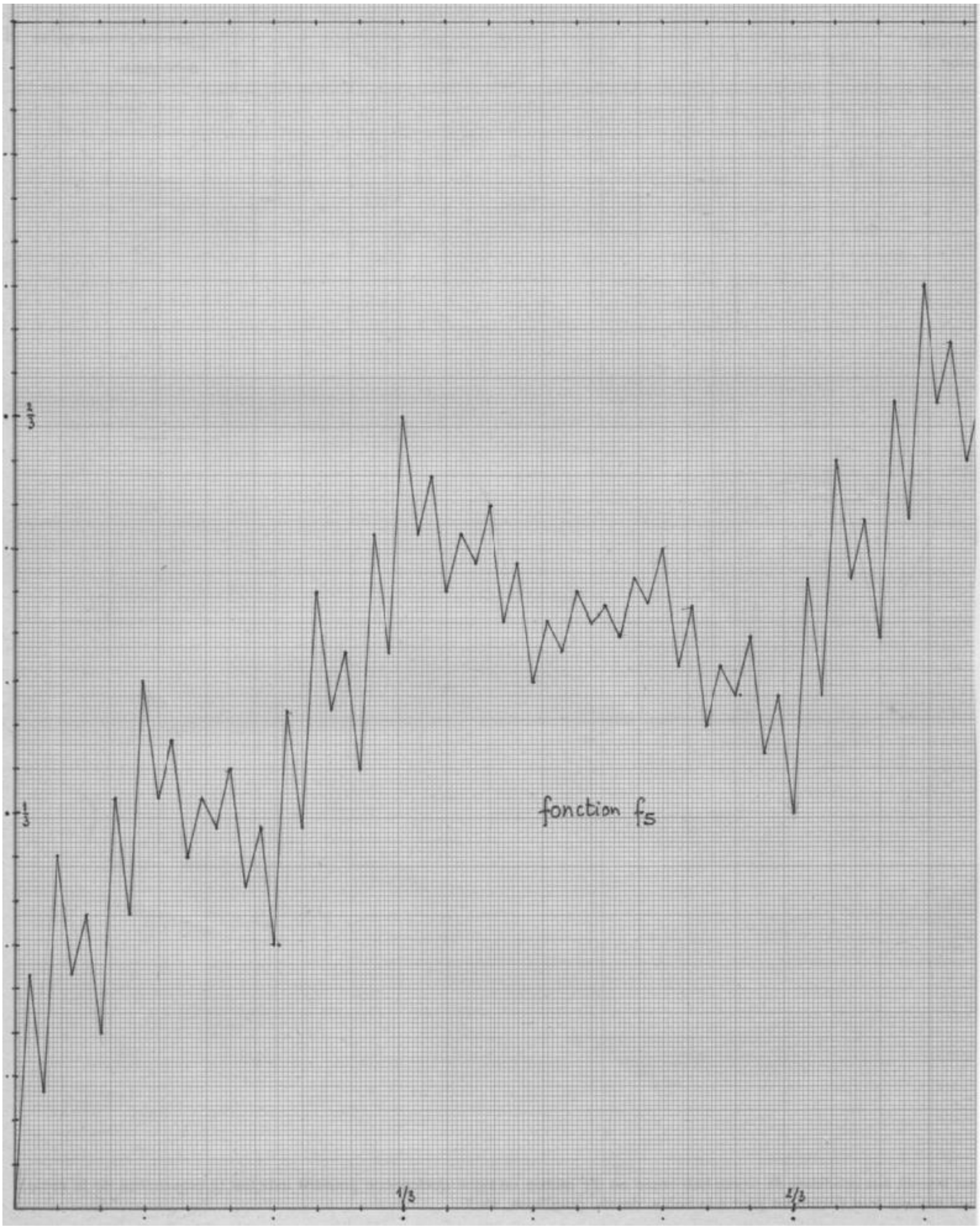
* En prenant une unité égale à 243 mm (ou 81 mm) sur les axes, représentez avec soin les graphes de la troisième, de la quatrième et de la cinquième fonction.

* De combien de segments se compose le graphe de la *n*-ième fonction ? Combien y a-t-il de sommets sur ce graphe ?

* Déterminez la longueur totale du graphe de la troisième fonction, de la quatrième et de la cinquième, etc.

* Cherchez tout ce que vous pouvez-dire sur ces fonctions (par exemple, comment sont « répartis » les différents segments, combien de chaque sorte, quelles longueurs, …).

Page suivante : le graphe de la cinquième fonction (tronqué à droite)



fonction f_5
1/3
2/3

FICHE n° 16

* Combinaisons linéaires
* Équations linéaires

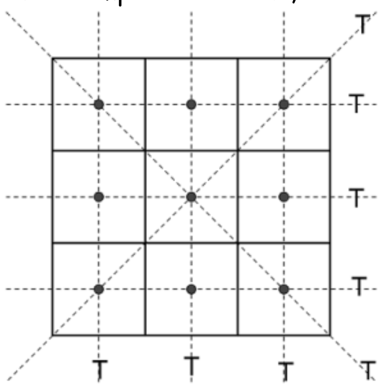
CARRÉS MAGIQUES

Voici deux carrés magiques :

2	8	5
8	5	2
5	2	8

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Dans ce T.D., on appellera « carré magique » tour carré de 3x3 cases, comprenant 9 nombres entiers, tels que les totaux des 3 lignes horizontales, des 3 colonnes verticales et des 2 diagonales soient égaux (sur les deux exemples ci-dessus, ces sommes valent 15).



Le problème est le suivant :

Connaissant le total T, peut-on déterminer combien il existe de carrés magiques correspondant à ce total ?

AIDES

Dans un premier temps, on pourra essayer de construire quelques carrés magiques de total T (par exemple T=7 ou T=9) ; puis on cherchera systématiquement tous les carrés magiques de total T=1, T=2, T=3, et ainsi de suite.

On pourra « mathématiser » le problème en appelant a, b, c, d, e, f, g, h et i les neuf nombres inconnus.

- On démontrera que T =3e ;
- On montrera que la connaissance du contenu de deux cases non alignées avec le centre (par exemple a et b) permet de déterminer totalement le carré.

Il faudra alors trouver un moyen de construite TOUS les carrés magiques correspondant à un nombre T donné (sans en oublier, et sans proposer deux fois le même !) : c'est à partir de ce moyen que l'on pourra DÉNOMBRER ces carrés.

FICHE n° 17

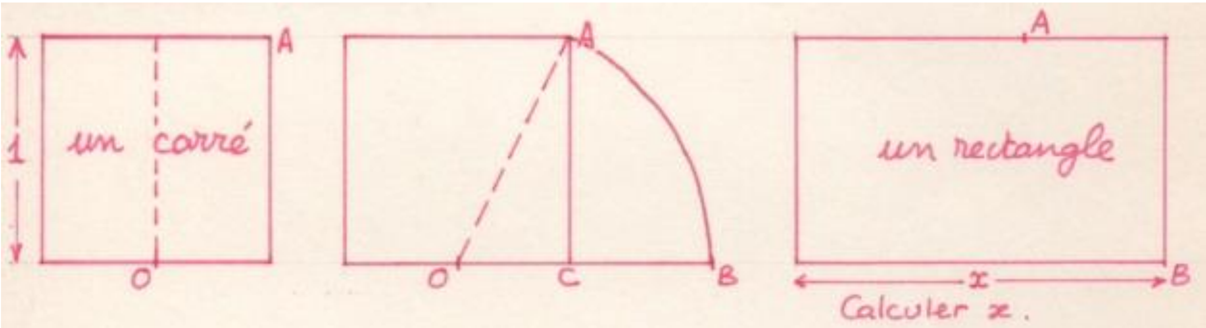
LE NOMBRE D'OR

Voir :

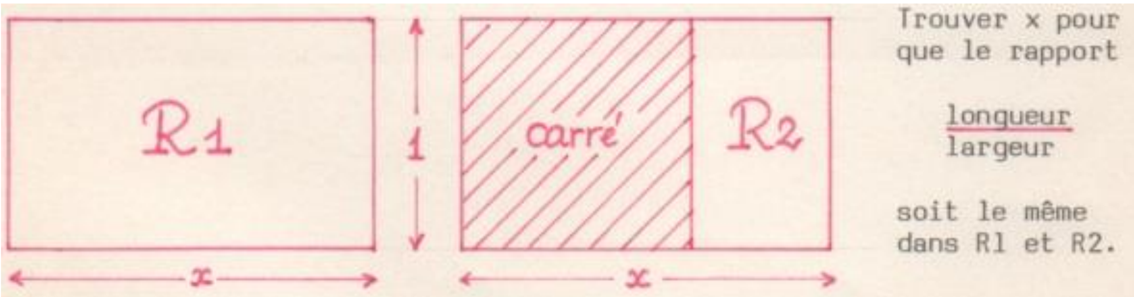
- Le professeur d'enseignement artistique,
- Des traités d'architecture, d'histoire de l'art,
- Encyclopaedia Universalis, « Proportion » et « Pyramide »
- Revue n°20, IREM de Lyon (mai 1982),
- Le nombre d'or dans la nature et dans la cathédrale de Metz (IREM de Lorraine, 1980)

Quel rapport y a-t-il entre les trois exercices qui suivent ?

1. Une construction géométrique



2. Euclide



3. Suite de Fibonacci

Choisir deux nombres A_1 et A_2. Le nombre suivant sera la somme de A_1 et A_2 : $A_3 = A_1 + A_2$.
Le nombre suivant sera la somme des deux derniers écrits : $A_4 = A_2 + A_3$.
Et ainsi de suite : $A_5 = A_3 + A_4$, …
Par exemple, avec $A_1 = 2$ et $A_2 = 1$, on obtient la suite 2, 1, 3, 4, 7, 11, 19, 29 …

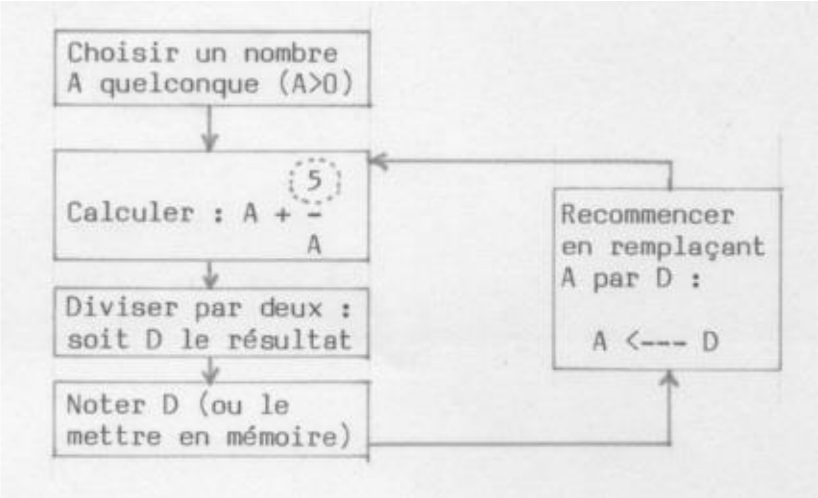
Diviser chaque nombre par celui qui le précède, et inscrire la suite des résultats obtenus (avec au moins 7 décimales exactes).

Recommencer avec d'autres valeurs de A_1 et A_2.

FICHE n° 18

RACINE CARRÉE

1. **Un algorithme** (dû à Al Khiwarizmi)



Que se passe-t-il si on poursuit cet algorithme ?
Et si on était parti d'un autre nombre A ?
Au bout d'un certain temps, D est-il égal à A ? Peut-on le prouver ?

Et si, au lieu de prendre le nombre 5 au numérateur, on avait pris au autre nombre (7, par exemple, ou 8, ou 9, ou 5.824…) ?

2. **Fractions continues**

$$A_1 = 2 + \frac{1}{2} \qquad A_2 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2 + A_1}$$

$$A_3 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + A_2}$$

$$A_4 = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} \qquad \text{etc...}$$

Ecrire sous forme de fractions irréductibles A1, A2, A3…
En donner une valeur décimale approchée.

FICHE n° 19

- Combinaisons linéaires
- Equations linéaires

LES CARRÉS DE BOTSCH

O. Botsch, dans un article paru en 1966 dans « Praxis der Mathematik », envisage les 8 carrés suivants :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$E = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On utilise sur ces carrés deux opérations « naturelles », l'addition de deux carrés et la multiplication d'un carré par un nombre. Par exemple :

$$A + D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 3F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad A + D + 3F = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Par ces opérations, les carrés restent toujours « magiques ».

1°) Montrer qu'un des carrés de Botsch peut s'exprimer en fonction des 7 autres (on pourra d'abord montrer que la somme de quatre d'entre eux est égale à la somme des quatre autres).

2°) Dans une gravure d'Albrecht Dürer (La Mélancolie, 1514), on aperçoit ce carré magique, formé des 16 premiers nombres entiers :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Vérifier que ce carré est bien une combinaison des 7 premiers carrés de Botsch.

3°) G. Baratt a fait parvenir à T.J. Flechter (Université de Nottingham) un carré magique qui, dit-il, n'est pas une combinaison linéaire des 7 premiers carrés de Botsch :

-1	2	0	-1
0	0	0	0
0	0	0	0
1	-2	0	1

Qu'en pensez-vous ?

4°) Dans un article de 1966, O. Botsch affirme que tout carré magique est combinaisons linéaire des 8 carrés qu'il a proposés. Qu'en pensez-vous ?

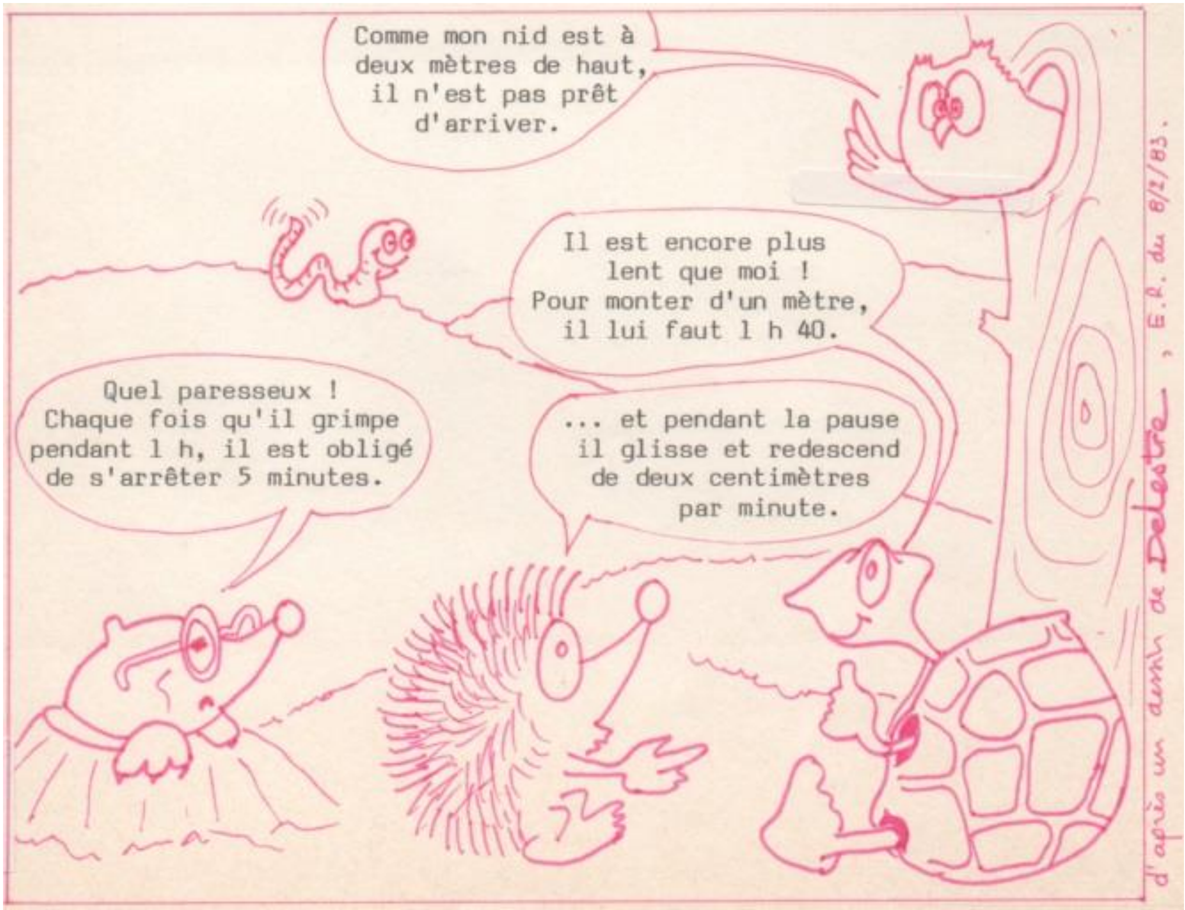
FICHE n° 20

- Cinématique
- Représentations graphiques

DE L'INTERPRÉTATION DES ENONCÉS ET DE LA MATHÉMATISATION DES PROBLÈMES

Voici une des questions proposées au concours de l'EST REPUBLICAIN, le 8 février 1983. Y a-t-il plusieurs façons d'interpréter les énoncés ?
Résoudre le problème posé et en donner une représentation graphique (hauteur où se trouve le vermisseau en fonction du temps écoulé).

Tandis que la famille DELEST, sac au dos, fait une joyeuse randonnée, dans la campagne les animaux se livrent à un grave débat. Le vermisseau que l'on voit, tout frétillant, au centre du dessin, est amoureux d'une chouette. Il voudrait bien la rejoindre mais, hélas, la belle est perchée dans un arbre et, pour un vermisseau qui n'a aucune vocation d'alpiniste, c'est dur, dur…
Combien de temps mettra-t-il pour atteindre le nid de la chouette ? Chacun des animaux (y compris la belle ensorceleuse) a son avis là-dessus. Mais un avis partiel, tant et si bien que vous seul, en faisant la synthèse des quatre déclarations de la taupe, du hérisson, de la tortue et de la chouette, pouvez découvrir le temps nécessaire à l'ascension.
La bonne solution figure parmi les quatre proposées ci-dessous. Laquelle est-ce ? Cochez le numéro retenu sur votre bulletin réponse.
Solution n°1 : 3 h 55 min. Solution n°2 : 4 h. Solution n°3 : 4 h 05 min. Solution n°4 : 4 h 10 min.



FICHE n° 21

- Calcul numérique, pourcentages
- Plan et rédaction

EMPRUNTER OU ÉPARGNER ?

Le problème

Une personne, qui ne dispose aujourd'hui que d'une certaine somme (par exemple 1 000 F) voudrait acheter une machine à laver (qui coute, par exemple 3 500 F).
Deux solutions s'offrent à elle :

- Acheter la machine à laver à crédit, pour pouvoir en disposer tout de suite ; en contrepartie, il lui faudra payer des intérêts.
- Mettre de l'argent de côté (à la Caisse d'épargne, par exemple, ce qui lui rapportera des intérêts) jusqu'à ce qu'elle ait assez pour acheter la machine. Mais il lui faudra attendre pour en disposer et, en outre, le prix de la machine risque d'augmenter pendant ce temps (inflation).

Le travail à faire

Etablir un « rapport » destiné à être utilisé par des tierces personnes (*), où – après avoir élaboré un « plan de financement » correspondant à chacune des deux solutions – vous comparerez les avantages et les inconvénients de ces solutions et conclurez.

(*) Ce rapport peur être conçu comme un article à faire publier dans une revue de consommateurs, ou comme un panneau d'information à afficher dans la salle de V.S.F.[6], etc.

Documents qui vous sont joints en annexe :

- Un barème de crédit « Libre service familial » de la banque « Crédit mutuel enseignants » en date du 01/09/83
- Un barème expliquant le calcul des intérêts de la Caisse d'épargne
- La reproduction d'un travail d'élèves sur ce même thème (29/01/79)
- Un article de « Que choisir ? » sur le crédit et le leasing (numéro de mars 1978).

Note de 2014 : ces documents ne sont pas reproduits ici.

[6] Vie Sociale et Familiale (note de 2014)

FICHE n° 22

- D'après une fiche de Pascal V, Yveline D.,
  M.-Stéphane B. et Thierry M, 2e T1 Rouen, nov. 1977

- Documentation à consulter :
  Encyclopaedia Universalis, entrée « Equations algébriques »

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

1. Essayez de comprendre l'article de l'encyclopédie citée en référence, paragraphe 1, troisième exemple.

2. Le but de ce T.D. est d'arriver à résoudre un système linéaire (c'est-à-dire du premier degré) de *n* équations à *n* inconnues.
Par exemple, résoudre :

$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 0 \\ x + 2y + 2z - t = -5 \\ -x + 7y - z + 2t = -9 \\ 3x + 5y - 3z + t = 7 \end{cases}$$

Essayer une méthode semblable à celle des chinois.

3. Observer et comprendre l'algorithme suivant :

► 1ère étape :
- Tirer *x* de la première équation (en fonction des autres inconnues)
- Remplacer *x* par cette valeur dans les trois autres équations (on ne « touchera » plus à la première équation)

► 2ème étape :
- Tirer *y* de la seconde équation
- Remplacer *y* par cette valeurs dans les deux équations suivantes (on ne « touchera » plus aux deux premières équations)

► Et ainsi de suite…

Que se passera-t-il à la fin de la quatrième étape ?

Résoudre le système précédent en utilisant cet algorithme (c'est la méthode dite de « TRIANGULARISATION »).

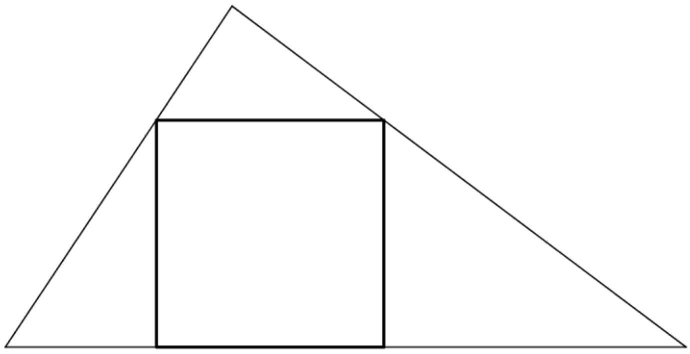
4. Comparer les avantages et les inconvénients ces deux méthodes
Peut-on résoudre aisément un système linéaire de *n* équations à *n* inconnues ?

FICHE n° 23

Objectifs

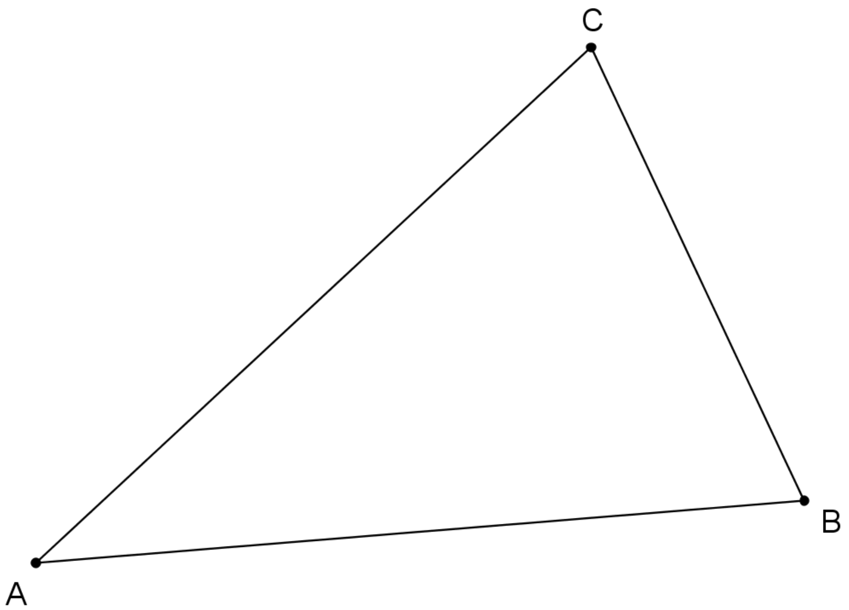
- Développer l'aptitude à l'observation et à la recherche
- Réinvestir des méthodes de géométrie, d'analyse ou de calcul, sur un situation de recherche.

CARRÉ et TRIANGLE



ABC est un triangle donné ci-dessous (ses trois angles sont aigus).

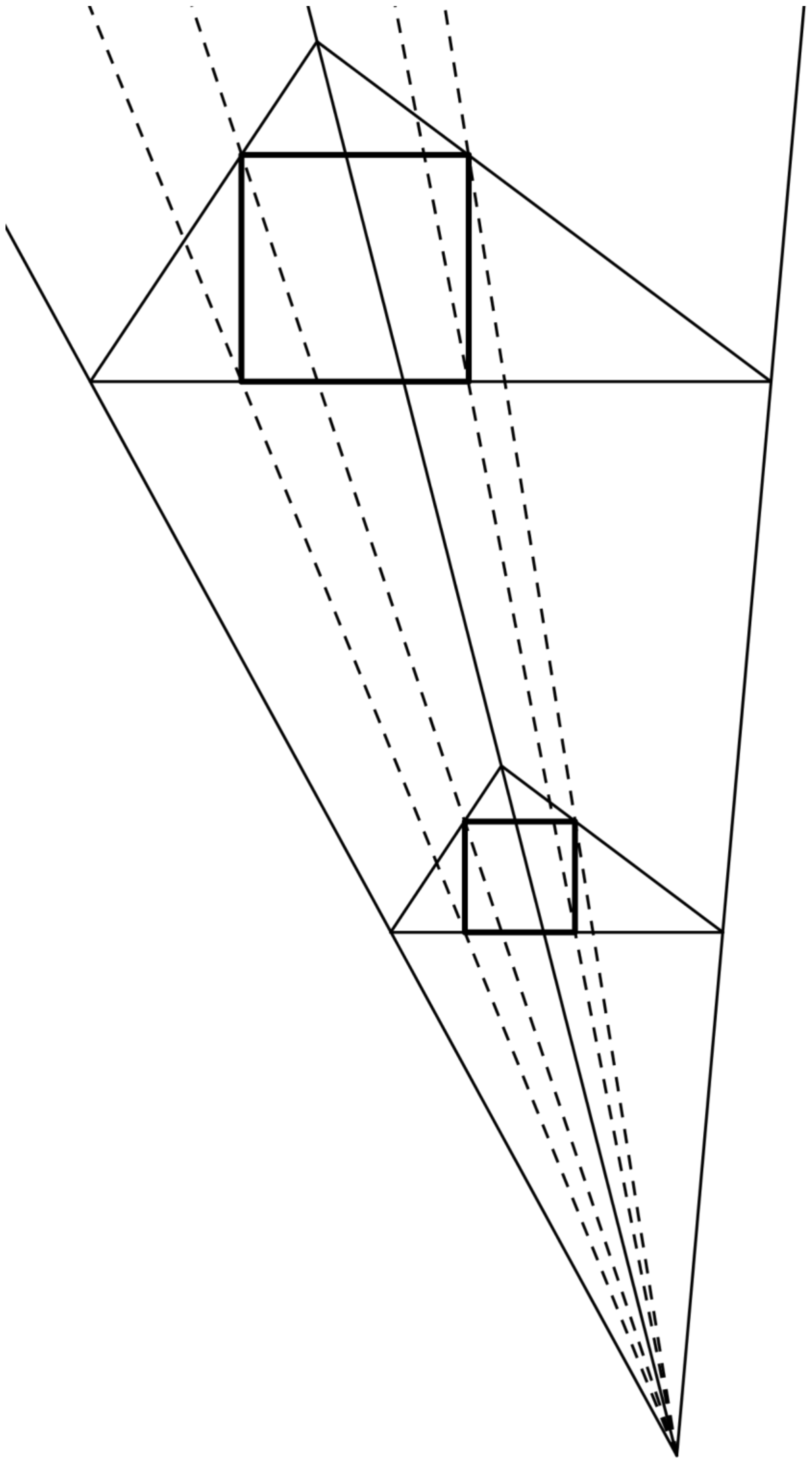
Comment peut-on inscrire un carré dans ce triangle de sorte qu'un côté de ce carré soit porté par [AB] et que les deux autres sommets soient respectivement sur [AC] et [BC] ?



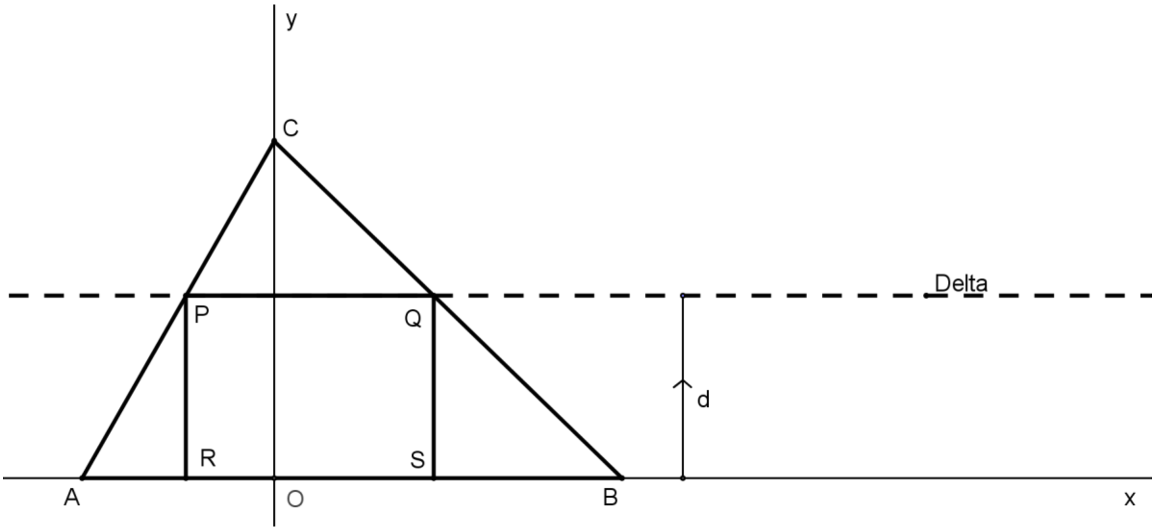
En cas de difficulté, consultez une des deux fiches d'aide

Fiche d'aide n°1

Au lieu de mettre le carré dans le triangle, pourquoi ne pas mettre le triangle « autour » du carré ?



Fiche d'aide n°2



Coordonnées dans le repère (Ox,Oy) :
A(a,0) ; B(b,0) ; C(0,c). Avec $a < 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

Équation de la droite Δ : $y = d$.

Ecrire l'équation de (AC) et celle de (BC).

Calculer les coordonnées des points P, Q, R et S.

Le rectangle PQSR sera un carré si et seulement si PQ = RS : en déduite la valeur de d.

Vérifier qu'on a bien alors $0 < d < c$.

Si on note H la hauteur du triangle et B sa base, on a $\frac{d}{H} = \frac{B}{H+B}$.
D'où une construction géométrique (en utilisant Thalès).

FICHE n° 24

• Calculs d'aires (triangles, secteurs circulaires)

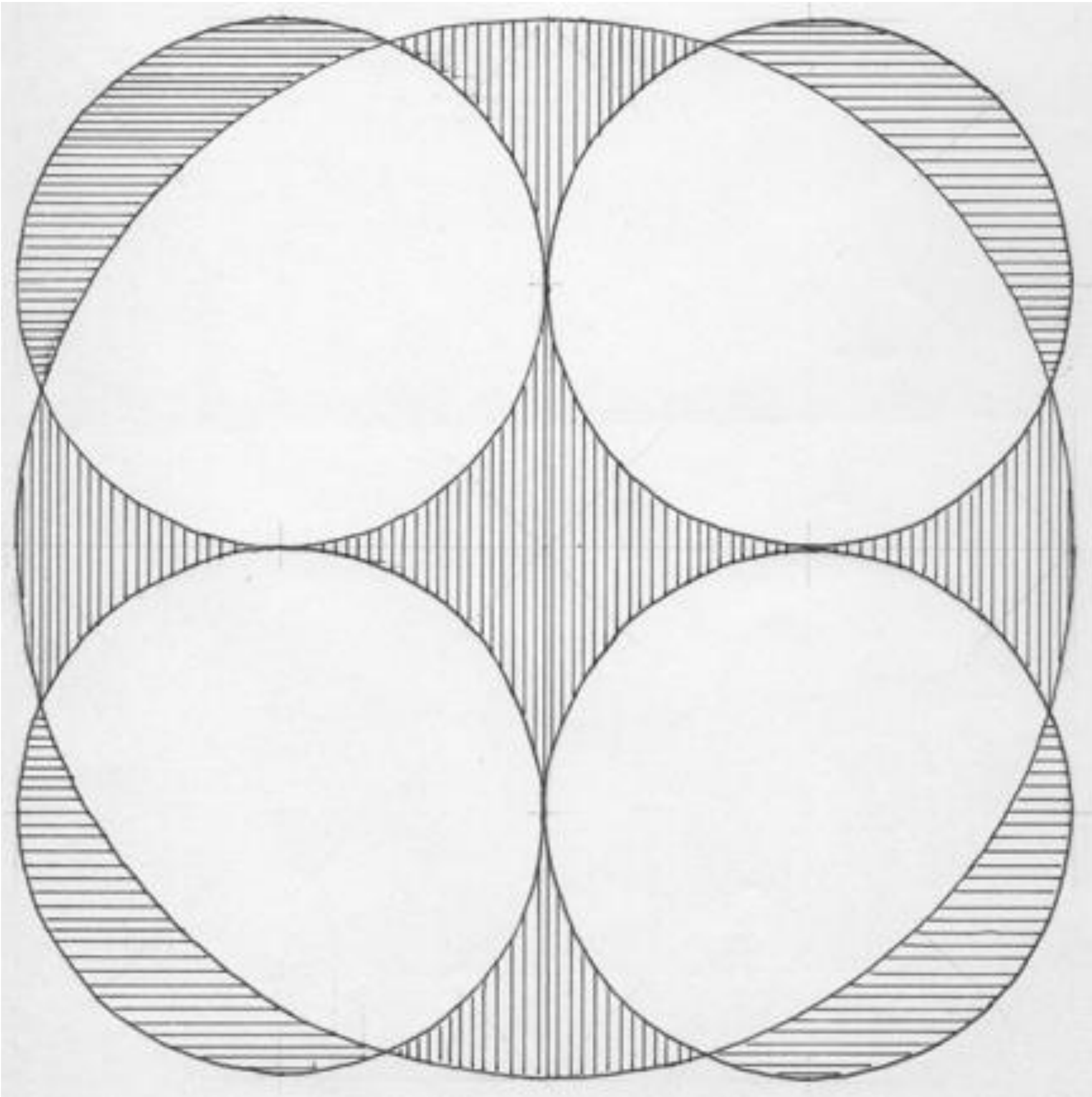
D'après un texte du C.R.D.P. de Montpellier
(Réflexions sur les nouveaux programmes)

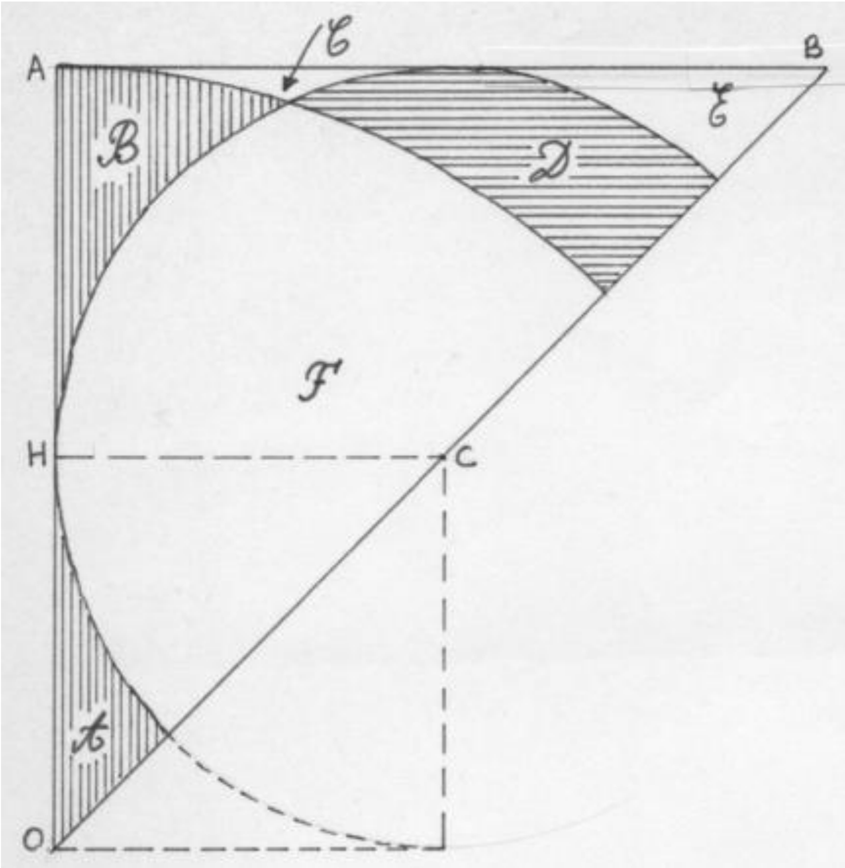
LA MÊME AIRE (sic)

Objectifs :

Développer l'aptitude à analyser en termes simples une situation apparemment complexe, et à y réinvestir des acquis élémentaires.

Démontrer que l'aire de la « croix » hachurée verticalement est égale à l'aire hachurée horizontalement.





Aide n°1

Considérons la figure ci-contre, qui vaut un huitième de la figure initiale.

O est le centre du grand cercle, et C celui du petit cercle.
On note $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ les mesures des surfaces.

Il s'agit de montrer que $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{D}$ (on pourra prendre OH comme unité).

Aide n°2

On peut aisément calculer $\mathcal{A}$, puis $\mathcal{E}$,
$\mathcal{B} + \mathcal{E}$ (ensemble),
$\mathcal{D} + \mathcal{C} + \mathcal{E}$ (ensemble).
Ce qui permettra de calculer, par exemple, $\mathcal{D} - \mathcal{B}$.

NOTE (qui ne figure pas sur la fiche-élève)

Il y a une solution « évidente » au problème posé, l'aire du grand disque étant égale à l'aire des quatre petits disques…

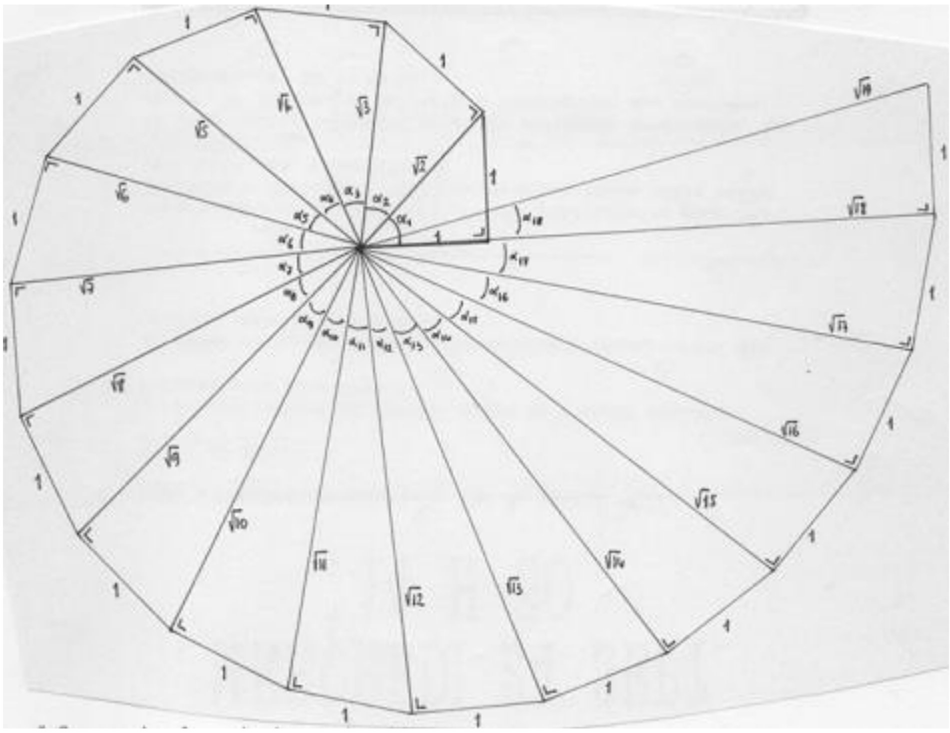
Mais si on donne tout de suite cette piste à l'élève, il n'y a plus de problème !!! Et pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ? (devise des Shadoks).

FICHE n° 25

• Géométrie (niveau troisième)
• Algorithmique

Arthur ENGEL, « Mathématique d'un point de vue algorithmique », page 196. CEDIC, 1979.

LA SPIRALE QUADRATIQUE



Comprendre le mode de fabrication de cette spirale.

Démontrer que les longueurs successives des « rayons » sont bien $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, etc.

Peut-on déterminer les angles α_1, α_2, α_3, α_4, α_5… (utiliser leur tangente dans les triangles rectangles, et la touche INV TAN de la calculatrice).

Pour quelle valeur de *n* la spirale a-t-elle fait 1 tour ? 2 tours ? 3 tours ? … 10 tours ?

Recherche : pour chaque tour, de combien augmente approximativement le rayon ?

N.B. Il faudra utiliser une calculatrice programmable ou, mieux, les ordinateurs de la salle info si vous savez les programmer.

Présenter clairement la méthode de recherche de cette « augmentation » (analyse du problème et, éventuellement, organigramme).

FICHE n° 26

• Géométrie euclidienne
• Arithmétique
• Optimisation

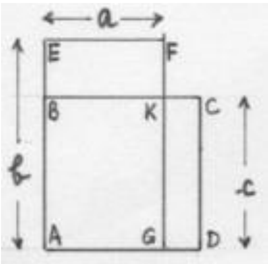
D'après un problème du PETIT ARCHIMEDE, novembre 1980.

LES PETITES BOITES DANS LES GRANDES…

On veut construire une caisse en bois ou en carton pour y ranger un certain nombre de petites boites toutes identiques (par exemple : un carton de 48 paquets de lessive, ou une caisse contenant 120 paquets de 205 g de café).

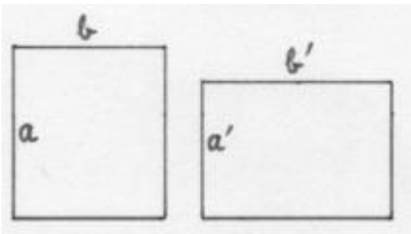
Tout d'abord, il faudra démontrer (ou admettre : à négocier avec le professeur) quelques théorèmes de géométrie euclidienne qui seront très utiles pour résoudre ce problème.

Théorème 1
Si un rectangle et un carré ont la même aire, c'est le carré qui a le plus petit périmètre.



Hypothèses (voir figure) : le carré ABCD a pour côté c ; le rectangle a pour côtés a et b (avec a < b). On a $c^2 = a.b$.
Démonstration : montrer tout d'abord que BE.BK = GD.GK, et en déduire que BD > GD. Comparer alors les périmètres du rectangle et du carré.

Théorème2
De deux rectangles de même aire, c'est celui dont la forme est la plus proche du carré qui a le plus petit périmètre.



Hypothèses : $a.b = a'.b'$ et $b - a < b' - a'$.
Démonstration : élever au carré l'inégalité $b - a < b' - a'$, et comparer $b + a$ et $b' + a'$.

Théorème 3
Si un pavé et un cube ont le même volume, c'est le cube qui a la plus petite aire.

Démonstration analogue au théorème 1.

Théorème 4
De deux pavés de même volume, c'est celui dont la forme est la plus proche du carré qui a la plus petite aire.

Conclusion (qui va servir de point de départ à la recherche de la solution di problème initial) :

Pour que la construction d'un boite, de volume donné, utilise le moins de matériau possible (c'est-à-dire que l'aire de la boite soit la plus petite possible), **il faut qu'elle soit cubique**.

MAIS… encore faut-il que les dimensions concordent avec les dimensions des petites boites qu'elle doit contenir.

Premier exemple

Construire une caisse contenant 120 boites identiques de dimensions 24 cm x 15 cm x 10 cm.

Le volume total est de 432 000 cm^3, ce qui correspond à un cube d'environ 75,6 cm de côté (au fait, comment trouve-t-on ce résultat ?).
Mais une telle boite cubique ne pourrait pas contenir les 120 boites ci-dessus.
Il faut donc construire une caisse dont les dimensions soient multiples de 24 cm, 15 cm et 10 cm.

Résoudre ce problème.

Deuxième exemple

Comment « encaisser » 144 boites cylindriques de petits pois dont les dimensions sont : diamètre 7,5 cm ; hauteur : 10,5 cm ?

Plus compliqué

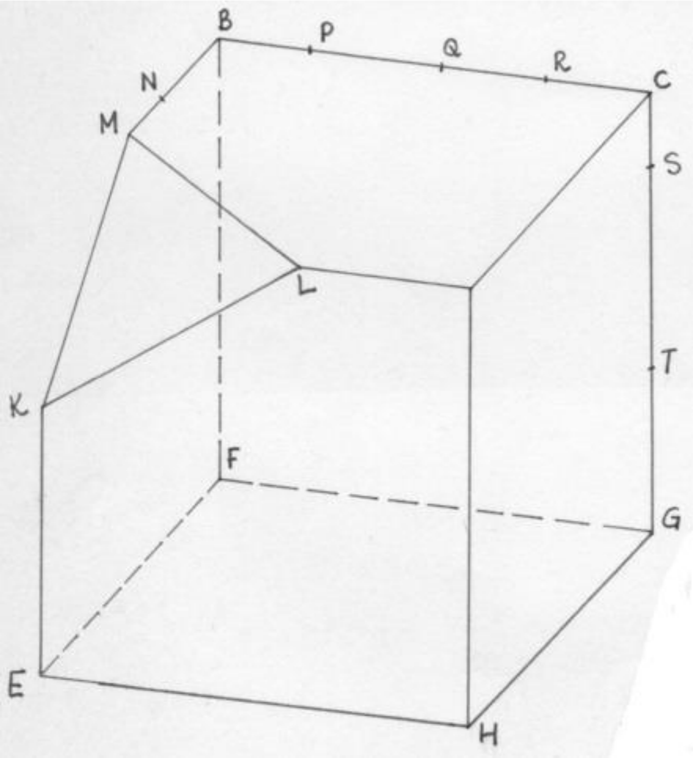
Peut-on faire une analyse théorique de ce problème, afin de le donner à résoudre à un ordinateur ?
Entrées : dimensions de la boite et nombre de ces boites.
Sorties : dimensions de la caisse et disposition des boites dans la caisse.

FICHE n° 27

• Géométrie dans l'espace

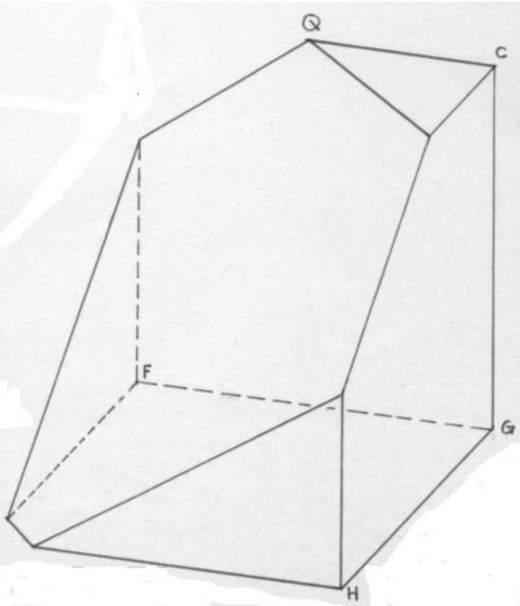
D'après les premiers exercices de la brochure « DESSINER L'ESPACE,
60 exercices pour les élèves de seconde », publication IREM de Lorraine, 1983.

DESSINER L'ESPACE



La figure ci-contre représente un cube dont un coin a été coupé par un plan. Tracer, en couleurs différentes, les intersections successives de ce cube par les plans parallèles au plan (KLM), plans passant respectivement par les points N, B, P, Q, R, C, S et T.

Voici, par exemple (et sans aucune explication sur la façon dont on l'a trouvée), l'intersection de ce cube par les plan parallèle à (KLM) et passant par Q.



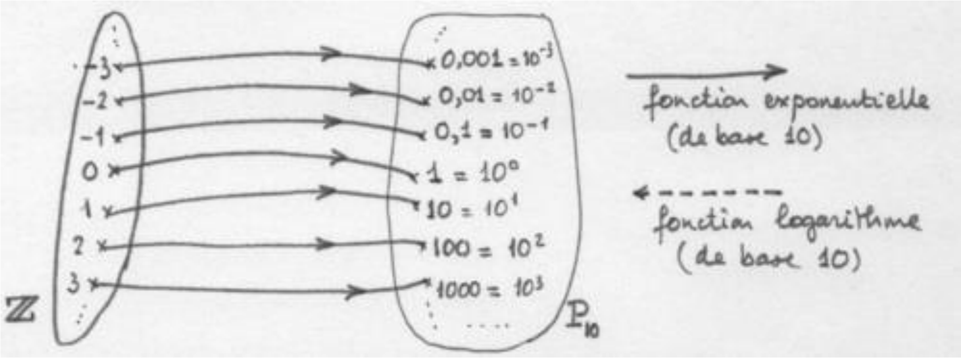
FICHE n° 28

• Isomorphisme de groupes
• Logarithmes

D'après une idée de José MARIA (Nice)

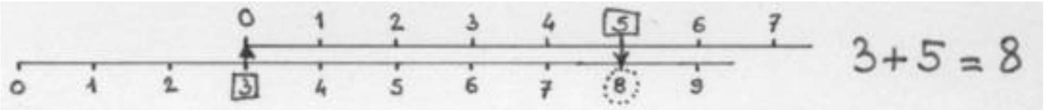
CONSTRUCTION D'UNE RÈGLE A CALCUL

1. Observe et démontre les propriétés de l'application suivante : $n \to 10^n$ (de **Z** dans **R**)



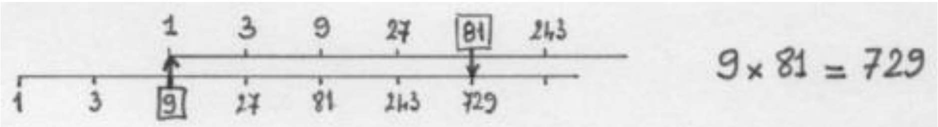
L'ensemble d'arrivée, P_{10}, est l'ensemble des puissances de 10 ; il est inclus dans $\mathbf{R}_+$.

2. Observe comment, à l'aide de deux bandes de papier que l'on fait glisser l'une par rapport à l'autre, on effectue des additions dans **N** (on peut prolonger à **Z** ou à **R**).



Comment effectue-t-on les soustractions ?

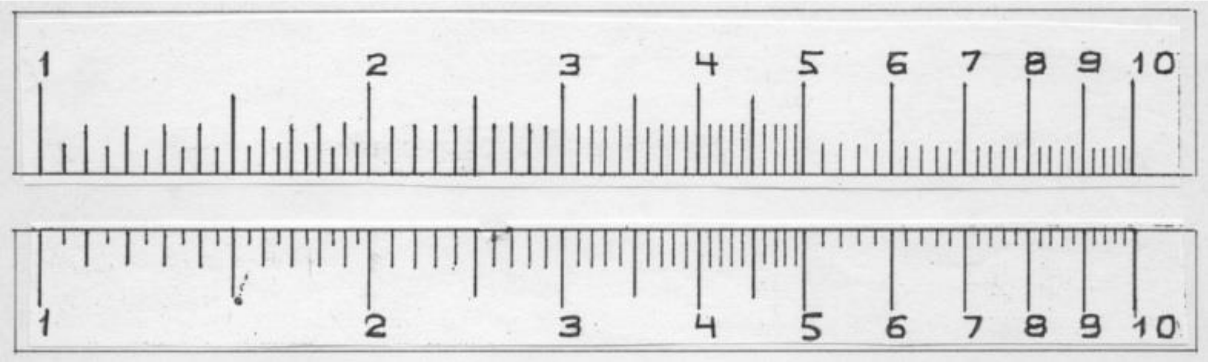
3. Construis une règle en carton permettant, selon le même principe, de multiplier les puissances de 3 :



Explique son fonctionnement.

…/…

4. Utilise la règle en carton ci-dessous pour faire des multiplications. Comment fonctionne-t-elle ? Comment a-t-elle été construite ?



5. Procure-toi une règle à calcul (à la médiathèque, par exemple). Comment fonctionne-t-elle, et pourquoi ?

FICHE n° 29

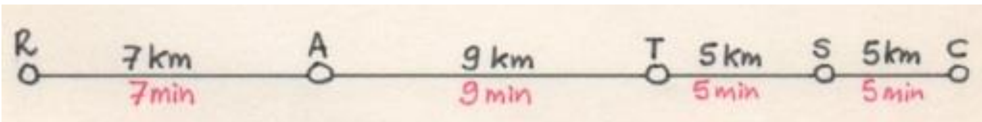
• Représentations graphiques

D'après une idée d'Elisabeth C. et Pascale M,
élèves de 2nde T4, 1979.

CROISEMENT DE TRAINS

De Remiremont (R) à Cornimont (C) [Vosges], les trains circulent sur une voie unique. Leur croisement n'est possible que dans les gares : Saint-Amé (A), Thiéfosse (T) et Saulxures (S).

Les distances entre les gares sont indiquées ci-dessous :



On supposera une vitesse moyenne de 60 km/h sur chaque tronçon, ce qui donne les temps de parcours indiqués en rouge sur le schéma ci-dessus. Les arrêts dans les gares intermédiaires sont de 2 minutes. Les arrêts en gares extrêmes ne sont pas limités : ils peuvent durer plus de 2 minutes). En outre, il ne peut pas y avoir plus de deux trains à la fois en gare de Cornimont.

Essayer de construire un horaire de chemin de fer qui permette de faire circuler le plus souvent possible des trains dans les deux sens.

FICHE n° 30

• Equations, inéquations
• y = ax+b

CHOISIR SON TARIF DE GAZ

Voici les tarifs de gaz à Nancy au 1er janvier 1985 :

GAZ DE FRANCE CENTRE DE DISTRIBUTION DE NANCY Tél. : 83.37.02.01			TARIFICATION GAZ NATUREL USAGE DOMESTIQUES (T.V.A. 18,6 % comprise)
TARIF	CODE	Prix du kWh « Gaz » en centimes	Redevance d'abonnement par an, en Francs
B0	711	31,90	249,77
B1	712	22,40	944, 15
3Gb	727	de 21,12 à 21,54 suivant la commune	1 161,90

Travail à faire :

Suivant votre consommation annuelle (en kWh), quel tarif avez-vous intérêt à choisir ?

FICHE n° 31

• Mathématisation
• Fonctions affines
• Inéquation du premier degré

INDEMNISATION DU CHOMAGE

Dans la « LETTRE DE CONJONCTURE » publiée par la B.N.P., et arrivée au lycée le 15 mars 1984, on peut lire ceci :

Les perspectives pour 1984

La poursuite de la baisse des effectifs devrait se traduire par une poussée non-négligeable du chômage.
En novembre et décembre 1983, la statistique des demandes d'emploi a augmenté de 7,9 %, le chômage touchant 2 118 600 personnes. Il n'est plus guère à attendre des contrats de solidarité pour freiner la hausse du chômage. Mais la poussée du nombre des allocataires du F.N.E. ([7]) et des bénéficiaires des garanties de ressource peut y contribuer. Enfin, le protocole d'accord sur l'indemnisation du chômage passé entre les partenaires sociaux aura des effets difficiles à prévoir. Une plus grande sévérité dans l'attribution des prestations (durée, montants) jouera dans le sens d'une baisse de la statistique des demandes d'emploi. En sens inverse, certains pourront opter pour l'indemnité de chômage plutôt que pour l'allocation du F.N.E. (7).
(…)

(…)
(7) Sachant d'une part que l'allocation F.N.E. équivaut à 65 % du salaire sous plafond et 50 % au-delà, montant dont il faut déduite 5,5 % de cotisation maladie, et sachant d'autre part que la prestation UNEDIC équivaut à 60 % du salaire antérieur diminué d'une cotisation sociale de 1 % seulement, on peut faire apparaitre un seuil au-delà duquel la prestation UNEDIC dépasse celle du F.N.E.
(…)

Travail à faire

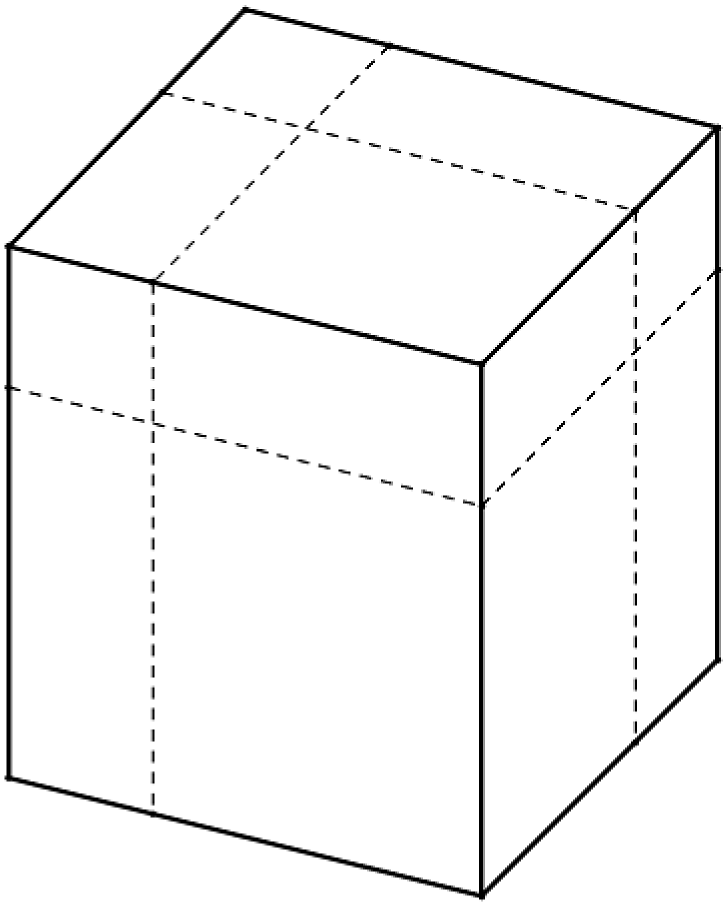
Analyser et traduire sous forme mathématique cette note (7).
Déterminer ce « seuil », à la fois par le graphique et par le calcul.
N.B. Au 1.1.84, le salaire plafond était de 8 110 F.

[7] F.N.E. = Fonds National pour l'Emploi, dispositif fermé en 2011 (note de 2014).
Note au lecteur actuel : ce texte est évidemment caduc !

FICHE n° 32

D'après une idée d'Y. GUENOUN, de Marseille

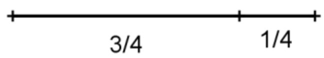
SCIONS LE CUBE



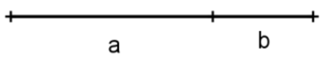
On coupe un cube suivant trois traits de scie (voir figure).

Les segments déterminés sur les 12 arêtes sont égaux, par exemple :

On pourra supposer que chaque arête a été partagée dans le rapport (3/4 ; 1/4) [hypothèse 1] :



ou que chaque arête a été partagée dans le rapport (a/b), avec a > b [hypothèse 2] :



Dénombrer et classer, par ordre de volume, les « morceaux » sciés.

Calculer le volume de chacun des morceaux. Comparer leur somme au volume initial du cube.

Calculer l'aire latérale de chacun des morceaux. Quelle est l'aire latérale totale ?
Le résultat serait-il le même si les arêtes avaient été coupées dans un autre rapport ?
Pouvait-on prévoir ce résultat sans calculer l'aire de chacun des morceaux, et pourquoi ?

AIDE

Voir la fiche représentant, en perspective, les morceaux légèrement écartés.
On pourra faire une figure semblable, mais en écartant beaucoup plus les morceaux.

N.D.L.R. Cette fiche n'est pas reproduite ici.

FICHE n° 33

• Équation du second degré

D'après « … Égale zéro », publication de l'IREM de Dijon,
S.D.D.P.

HISTOIRE À LIRE AU SECOND DEGRÉ

Document n°1 : tablette babylonienne, 3000 ans av. J.-C. environ

Traduction littérale de la tablette	Ecriture moderne	
	De la tablette	Généralisation
11 fois la surface du carré plus 7 fois le carré donnent 6 $\frac{1}{4}$	$11x^2+7x = 6\ 1/4$	$mx + px = q$
Multiplie 11 par 6 $\frac{1}{4}$	11 x 6 ¼ = 68 ¾	$m.q$
Partage 7 en deux	7/2	$\frac{p}{2}$
Et multiplie par lui-même	7/2 x 7/2 = 12 ¼	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$
Ajoute ces deux nombres	68 ¾ + 12 ¼ = 81	$mq + \frac{p^2}{4}$
Tu as un nombre carré	81 = 9²	$\left(\sqrt{mq + \frac{p^2}{4}}\right)^2$
Retranche de ce nombre la moitié de 7	9 – 7/2 = 5 1/2	$\left(\sqrt{mq + \frac{p^2}{4}}\right)^2 - \frac{p}{2}$
Divise ce résultat par 11	5 ½ / 11 = 1/2	$\frac{1}{m} \times \left(\sqrt{mq + \frac{p^2}{4}}\right)^2 - \frac{p}{2}$
Le côté est $\frac{1}{2}$	½	

Document n°2 : Al Khiwarizmi, mathématicien arabe, IXe siècle

Al Khiwarizmi n'envisage que des nombres positifs, d'où trois types d'équations du second degré : $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ et $x^2 + q = px$.

Méthode de résolution de $x^2 + px = q$:

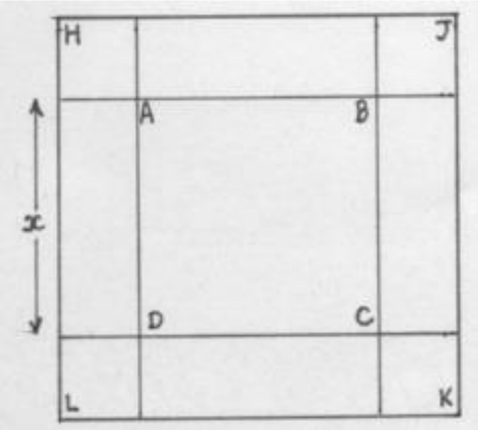
On borde la carré ABCD de côté x par des bandes de largeur $p/4$

Le côté du carré HJKL est alors $x + \frac{p}{2}$

La somme des deux aires peut s'écrire :

$x^2 + 4\left(\frac{p}{4}x\right) + 4\left(\frac{p}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$. D'où : $x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

D'où $q + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$ et $x = \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2}$



Document n°3 : Règle apprise par l'escholier pour résoudre l'équation

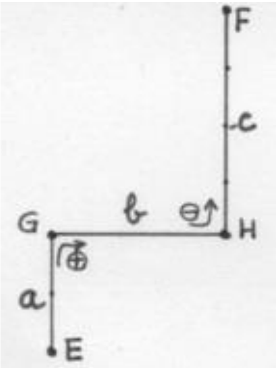
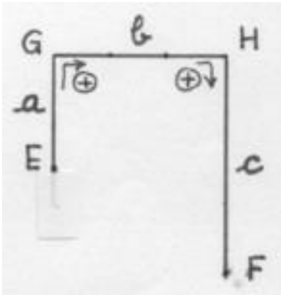
Si res et census numero quoaequantur, a rebus dimidio sumpto censum procedere debes, addereque numero cujis a radice totiens tolle semis rerum, census latusque redibit.

Traduction de ce document datant du moyen-âge : Si un multiple de la chose et le carré valent ensemble un connu, tu dois élever la moitié du multiple au carré et ajouter le connu, puis à la racine de cela retrancher la moitié du multiple, viendra alors ce que tu cherches.

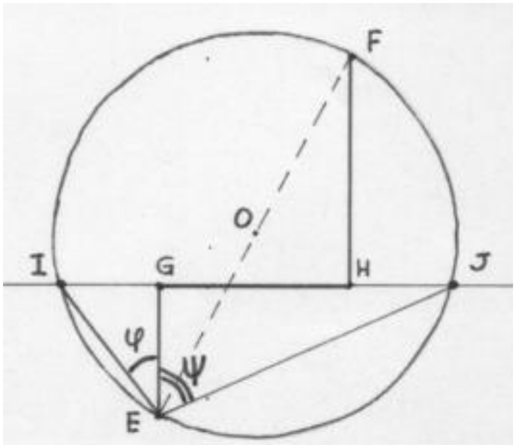
Document n°4 : orthogone de Lill (publié en 1867, Autriche)

Résolution a $ax^2 + bx + c = 0$.
Le sens « positif » est celui des aiguilles d'une montre. On porte à la suite trois segments de longueurs a, b et c. Quand le nombre suivant est positif, on « tourne à droite », sinon on « tourne à gauche ».

Exemples

a = 2, b =3, c = -4	a = 2, b = 3, c = 4
	

Le cercle de diamètre [EF] coupe (éventuellement) la droite (GH) en I et en J.
Dans ce cas, les solutions de l'équation sont les tangentes des angles $\varphi = IEG$ et $\psi = GEJ$.



Dans le cas où le cercle de diamètre [EF] ne recoupe pas la droite (GH), l'équation n'a pas de solution.

FICHE n° 34

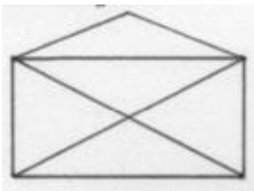
• Topologie

D'après une idée d'Élisabeth C. et Pascale M.,
élèves de 2nde T4, 1979.

SANS LEVER LE CRAYON

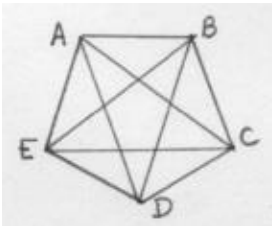
▶ Utiliser l'article « GRAPHES » de l'Encyclopaedia Universalis, (pages 952-953, surtout le § 3).

Vous devez certainement connaitre le jeu qui consiste à dessiner cette enveloppe d'un seul trait de crayon, sans lever le crayon ni passer deux fois dur le même segment. ⇨



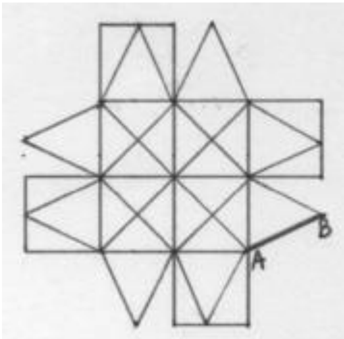
Soient 5 points A, B, C, D et E ; joignez-les de manière à construire cette figure, selon le procédé énoncé ci-dessus. ⇨

Vous constaterez qu'in peut la réaliser en partant de n'importe quel point.

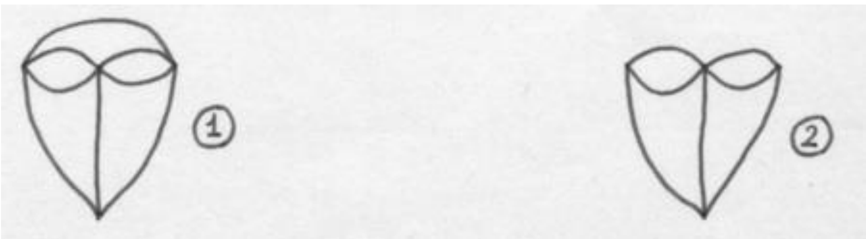


Faire la même chose avec cette figure. ⇨

Si on enlève le segment AB, peut-on toujours tracer cette figure sans lever le crayon ?



On peut tracer la figure (1) ci-dessous, mais si on lui enlève un segment (figure 2), on ne peut plus… Pourquoi ?



Y a-t-il une règle ?

FICHE n° 35

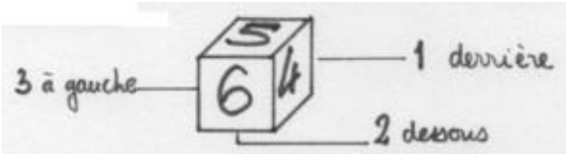
• Structure de groupe

D'après une fiche rédigée par Carine C. et Jocelyne C.,
inspirées par un travail de deux élèves de Marcel Dumont (Rouen).

LES MOUVEMENTS DU CUBE
(ou LE B.A.BA DE L'ALGÈBRE)

Construire un cube, et le numéroter comme un dé à jouer. On le pose sur un carré tracé devant soi. La position du cube est parfaitement déterminée par la donnée :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{- de la face supérieure}\\ \text{- de la face qui est devant vous}\end{array}\right\} \text{ ex : } \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix} \text{pour le cube ci-dessous.}$$



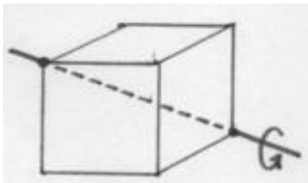
Question 1

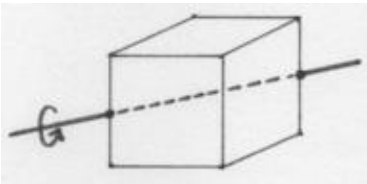
Combien y a-t-il de façons différentes de poser le cube ?

Question 2

On utilise deux « gestes », et deux seulement, qui permettent de modifier la position du cube.

Geste A : 1/3 de tour autour de cette diagonale (toujours dans le même sens)





Geste B : 1/2 tour autour de l'axe horizontal passant par ces deux milieux d'arêtes opposées

Quelles sont, à partir de la position $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$, toutes les positions que l'on peut obtenir en combinant les gestes A et B ? Représenter cela sur un schéma simple.

Question 3

Si on fait deux fois de suite le geste B, on revient à la position initiale : on notera BB = 1
De même AAA = 1.
Certaines combinaisons sont équivalentes, par exemple AABABBAAA = AB (l'expression AABABBAAA « se simplifie »).
Combien y a-t-il de combinaisons « irréductibles » distinctes ?
Etudier la table de combinaisons ce celles-ci (table de Pythagore).

Question 4

Si, au lieu de la position $\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ de départ, on partait d'une autre position, que donneraient les compositions de gestes A et B ?

Table des fiches publiées

Table des mots-clés

N.D.L.R. Cette liste de mots-clés ne figurait pas dans la brochure éditée en 1986. Nous l'avons ajoutée en 2014 pour faciliter vos recherches.