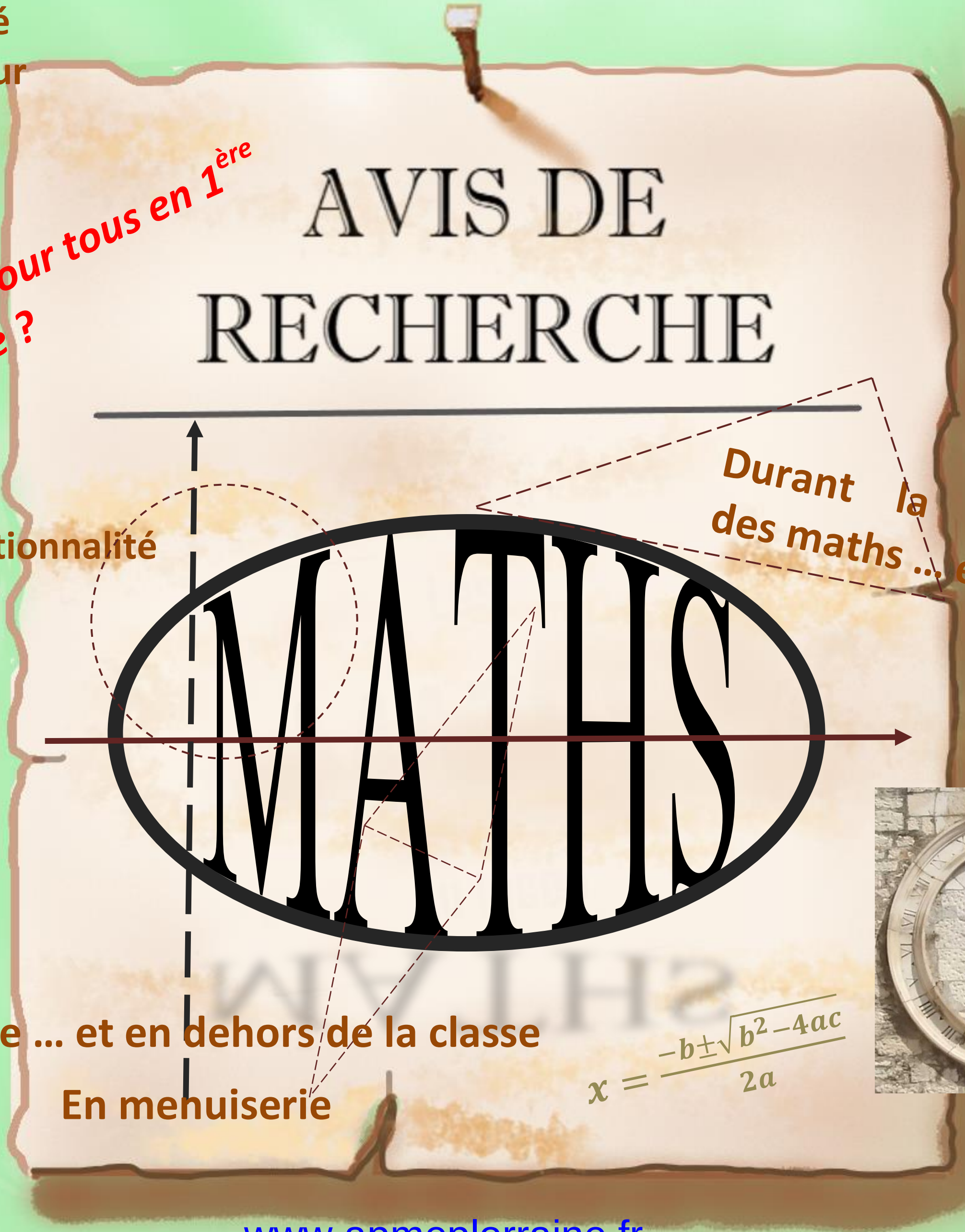
N° 150 Juin 2022

LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

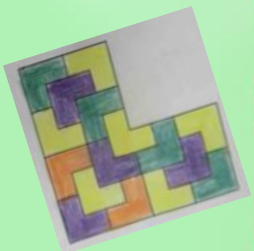
Le carré baladeur

Des maths pour tous en 1ère à la rentrée ?



Durant la semaine des maths ... et après

Proportionnalité



En classe ... et en dehors de la classe

En menuiserie

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

www.apmeplorraine.fr

SOMMAIRE

ÉDITORIAL

ARITHMOPHOBIE

Gilles Waehren

Les récentes élections ont été une nouvelle occasion pour une débauche de « chiffres » - puisque la synecdoque s'est imposée dans le langage courant. Les commentaires qui les accompagnent, à plus ou moins bon escient, dénotent souvent un malaise chez ceux qui les énoncent. Quelques infographies malheureuses, produites par des médias renommés, ont déferlé sur les réseaux sociaux avant que le mal n'ait pu être corrigé. La défiance semble grandir au fur et à mesure des années vis-à-vis des données numériques. Peut-être leur attribue-t-on un pouvoir qu'elles n'ont pas ? Elles servent à ceux qui savent les manipuler pour en imposer à leurs interlocuteurs. Elles représentent, pour certains qui les reçoivent, des concepts abstraits enfouis dans les recoins de traumatismes, scolaires ou autres.

L'enseignant de mathématiques a conscience des méfaits de contenus théoriques vides de sens. Une valeur isolée n'a souvent aucun intérêt ; sauf pour l'amateur de numérologie qui saura y voir des interprétations ésotériques. La maîtrise du calcul est un élément central de notre travail quotidien, mais nous devons être vigilants à la raccrocher, quand c'est possible, à ce qu'elle peut vraiment nous apporter. L'ordinateur est plus rapide et plus fiable dans ce travail calculatoire, mais il ne comprend pas ce qu'il fait. Gardons-nous de former des automates ! Plus que jamais, le calcul astucieux peut mettre en évidence notre supériorité sur la machine. L'analyse d'un énoncé pour formuler un calcul, l'interprétation d'un résultat pour construire un raisonnement sont loin d'avoir fait leur preuve dans les meilleurs algorithmes d'intelligence artificielle.

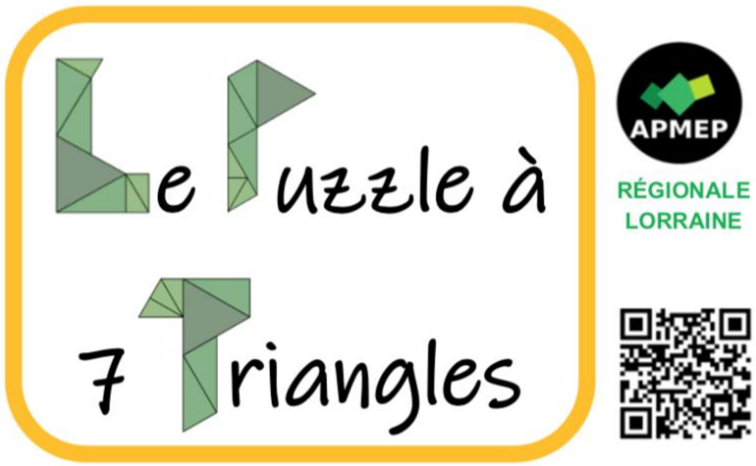
Le bilan que l'on peut aussi tirer des dernières élections est la place prépondérante qu'occupe l'école de la République dans la formation des citoyens. Celui qui est mal informé, qui ne peut pas exercer son esprit critique, celui que les sophistes veulent manipuler, est mal équipé pour voter en son âme et conscience. Le professeur de mathématiques peut aussi apporter sa pierre à cet édifice civique. Encore faut-il qu'il en ait les moyens. Ces deux dernières années, les programmes de mathématiques (mais ce ne sont pas les seuls) n'ont jamais semblé aussi difficiles à terminer. Pour y parvenir en Terminale, il a souvent fallu sacrifier le sens à la technique. Le temps de l'apprentissage doit, plus que jamais, être remis au centre des discussions sur l'éducation. C'est l'un des principaux leviers pour installer une vraie équité – bien mieux qu'une égalité technocratique. Ce temps doit être pensé dans le cursus de l'élève, afin de

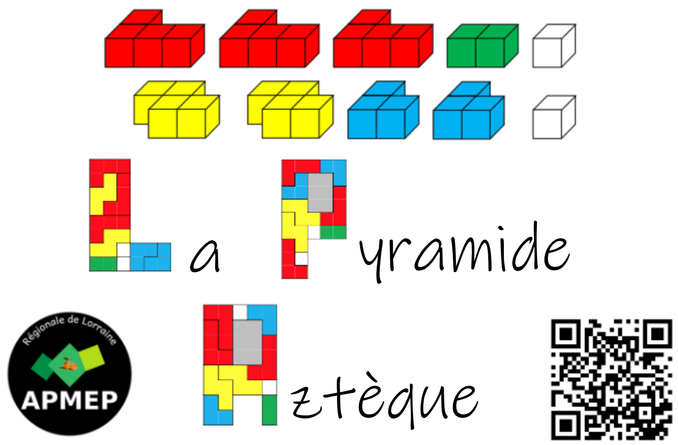
Retour au sommaire

le sortir des tiroirs des niveaux d'enseignement, mais aussi pour la place qu'on lui accorde. La norme est toujours plus intrusive : CP à 6 ans, Sixième à 11 ans et bac à 18 ans. Trop d'élèves ne peuvent pas se calquer sur ce triptyque. Trop d'élèves ont besoin d'un temps individualisé que notre système ne parvient pas à leur offrir : quid de la co-intervention ? Deux enseignants par cours, ça se fait déjà, mais il faudrait en recruter davantage pour le généraliser, et ce dès l'arrivée à l'école.

Chaque professeur attend avec impatience de dégel du point d'indice, mais cette mesure, certes importante, rendra-t-elle notre système plus équitable ?

Des produits de notre régionale à ne pas manquer !





En complément, des documents sont accessibles en utilisant le QR-code de l'étiquette ou le lien indiqué sur la feuille jointe aux pièces. Ces dossiers seront modifiés et complétés au fur et à mesure des envies et des propositions des utilisateurs.
Le puzzle à 7 triangles est vendu au prix de 5€, la pyramide aztèque 8€. Pour un envoi postal, il faut ajouter les frais de port (2 x 1,16 €).
Les commandes peuvent être envoyées à cette adresse .

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS
L'ARITHMÉTIQUE AU COLLÈGE

Dans le numéro 50 du Petit Vert figurait le programme de mathématiques de 1923 : « *Qu'apprenait-on en mathématiques, il y a trois quarts de siècle, quand on avait entre 11 et 14 ans et qu'on était au lycée (ce qui était le cas pour beaucoup d'enfants de la bourgeoisie, futures élites de la nation) ? Voici, extraits du Journal Officiel du 13 décembre 1923 (le B.O. n'existait pas encore), les programmes de mathématiques de la sixième à la troisième.* »

CLASSE DE QUATRIÈME : 2 heures.

Arithmétique

Partie aliquote commune à deux grandeurs. Définition du P.P.C.M. et du P.G.C.D. de deux nombres.
Nombres premiers. Règles pratiques pour la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, pour la recherche du P.P.C.M. et du P.G.C.D.
Exercices sur le système métrique, les fractions ordinaires ou décimales, les grandeurs directement ou inversement proportionnelles.

Remarquons au passage qu'il n'y avait que deux heures de mathématiques à chaque niveau du collège… Vous allez dire que le public était différent. Certes, le taux de scolarisation des garçons en classe de sixième dans les lycées et collèges n'atteignait pas 7% en 1923 et ce ne sont pas les filles qui gonflaient les effectifs !

Intéressons-nous au contenu de ce programme. Le mot « aliquote » nous surprend. Il ne fait plus partie de notre enseignement et est connu par peu d'entre nous. De quoi s'agit-il ?

I. — PARTIE ALIQUOTE D'UNE GRANDEUR

103. — Grandeurs divisibles ou continues. — Il existe, parmi les grandeurs, certaines d'entre elles qui peuvent être divisées, au moins par la pensée, en un nombre absolument quelconque de parties égales, par exemple : la longueur d'une pièce de ruban, la surface d'un champ, la quantité de vin contenue dans un tonneau, etc.

De telles grandeurs sont dites *divisibles* ou *continues*.

104. — Définition : ***Une grandeur continue est dite une partie aliquote d'une autre grandeur de même espèce, si la première grandeur est contenue un nombre entier de fois dans la seconde.***

Dans la figure 10, la longueur CD, contenue 3 fois dans AB, est une partie aliquote de AB.

On dit aussi que AB est un *multiple* de CD :

$$AB = 3CD$$

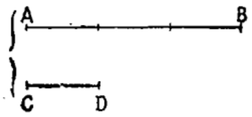


Fig. 10.

On dit encore que le nombre entier 3 *mesure* la longueur AB quand on prend CD pour unité.

Manuel d'arithmétique pour les classes de 4e et 3e dû à Anna et Élie Cartan (Cartan & Cartan 1934, p. 64).

- ALIQUOTE, adj. et subst.

Étymol. ET HIST. – 1. 1487 adj. math. « qui est contenu un nombre exact de fois dans une quantité ». (Chuquet, Le Triparty, 67dans Gdf. Compl. : Les parties aliquotes de 6 sont 1, 2, 3)

D'après le Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales

Retour au sommaire

Comment l'enseignement de l'arithmétique a-t-il évolué au cours du vingtième siècle ?
Très présent au début du siècle, il s'est peu à peu étiolé, réduit en collège à l'exploitation des notions de multiples et diviseurs d'un nombre. Il en est de même pour le lycée, les plus anciens d'entre nous se souviendront des virtuosités développées dans les sections scientifiques du baccalauréat.

Quel est-il maintenant ?
Au cycle 3, il est toujours question de manipuler des nombres en lien avec la mesure de grandeurs. C'est par exemple le cas pour les fractions « Utiliser des fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs ».

Si nous cherchons dans le programme de mathématiques en vigueur au cycle 4, le mot « arithmétique » n'apparait qu'une seule fois, cité en exemple dans une parenthèse « Le raisonnement, au cœur de l'activité mathématique, doit prendre appui sur des situations variées (par exemple problèmes de nature arithmétique ou géométrique …) ». Cependant, les notions de base de l'arithmétique sont bien travaillées en fin de collège comme l'indique cet objectif « Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers ».
En seconde le terme « arithmétique » n'apparaît plus. Nous revenons néanmoins sur les notions vues au collège pour les approfondir (« En liaison avec un approfondissement de l'étude des multiples et diviseurs, ils consolident la pratique du calcul sur les fractions ») et varier leur contexte d'utilisation, notamment à l'occasion de l'écriture d'algorithmes.

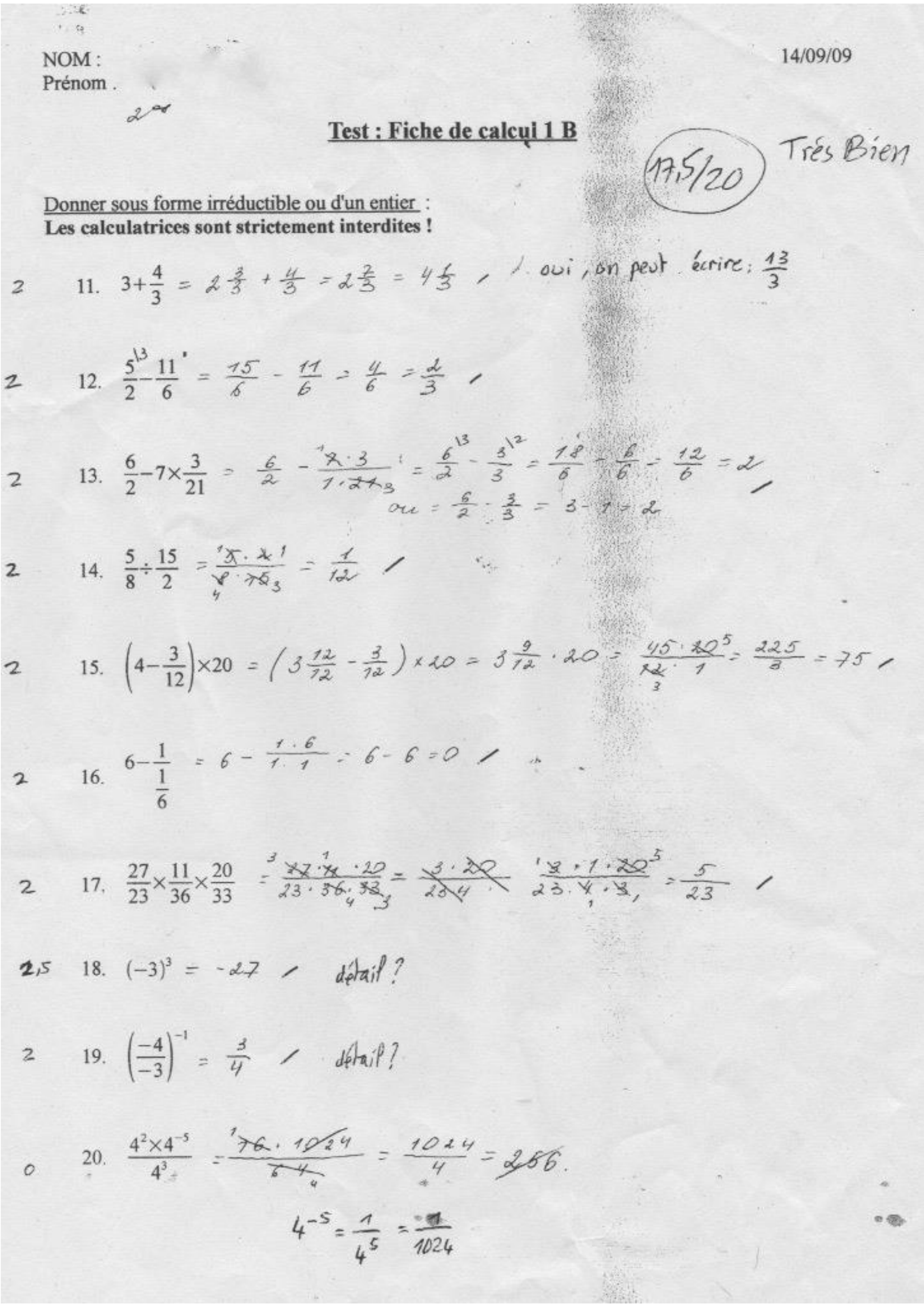
Plus aucune trace d'arithmétique en Première Spécialité Maths. Pas davantage dans la Spécialité en terminale, mais c'est dans l'option Mathématiques expertes que réapparaît, à part entière, l'arithmétique ; elle y occupe le tiers du programme.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL N'Y A PAS 25 ANS
L'UKRAINE, EN 2009, DEJÀ !

François DROUIN



NOM :
Prénom .
2nd

14/09/09

Test : Fiche de calcul 1 B

17,5/20 Très Bien

Donner sous forme irréductible ou d'un entier :
Les calculatrices sont strictement interdites !

2 11. $3+\frac{4}{3} = 2\frac{3}{3}+\frac{4}{3} = 2\frac{7}{3} = 4\frac{1}{3}$ oui, on peut écrire : $\frac{13}{3}$

2 12. $\frac{5}{2}-\frac{11}{6} = \frac{15}{6}-\frac{11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2 13. $\frac{6}{2}-7\times\frac{3}{21} = \frac{6}{2}-\frac{\cancel{7}\cdot 3}{1\cdot\cancel{21}_3} = \frac{6}{2}-\frac{3}{3} = \frac{18}{6}-\frac{6}{6} = \frac{12}{6} = 2$
ou $= \frac{6}{2}-\frac{3}{3} = 3-1 = 2$

2 14. $\frac{5}{8}\div\frac{15}{2} = \frac{\cancel{5}\cdot\cancel{2}}{\cancel{8}_4\cdot\cancel{15}_3} = \frac{1}{12}$

2 15. $\left(4-\frac{3}{12}\right)\times 20 = \left(3\frac{12}{12}-\frac{3}{12}\right)\times 20 = 3\frac{9}{12}\cdot 20 = \frac{45\cdot\cancel{20}^5}{\cancel{12}_3\cdot 1} = \frac{225}{3} = 75$

2 16. $6-\frac{1}{\frac{1}{6}} = 6-\frac{1\cdot 6}{1\cdot 1} = 6-6 = 0$

2 17. $\frac{27}{23}\times\frac{11}{36}\times\frac{20}{33} = \frac{\cancel{27}^3\cdot\cancel{11}^1\cdot 20}{23\cdot\cancel{36}_4\cdot\cancel{33}_3} = \cancel{\frac{3\cdot 20}{23\cdot 4}}\ \frac{\cancel{3}\cdot 1\cdot\cancel{20}^5}{23\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}} = \frac{5}{23}$

2,5 18. $(-3)^3 = -27$ détail ?

2 19. $\left(\frac{-4}{-3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$ détail ?

0 20. $\frac{4^2\times 4^{-5}}{4^3} = \frac{\cancel{16}\cdot 1024}{\cancel{64}_4} = \frac{1024}{4} = \cancel{256}.$

$4^{-5} = \frac{1}{4^5} = \frac{1}{1024}$

Retour au sommaire

En 2009, ce document produit par une élève récemment arrivée d'Ukraine avait intéressé et interpellé un de mes enseignants-stagiaires PLC2.
En septembre 2011, le Petit Vert n°107 avait fait une analyse de ce qui avait été proposé pour l'exercice 15.
En ce printemps 2022, il m'a semblé important de montrer l'ensemble du travail de l'élève car les méthodes utilisées vont certainement se retrouver très bientôt dans des classes.

Remarques

Il va falloir s'habituer à l'écriture fractionnaire proposée à l'exercice 11. Ne serait-ce pas une forme irréductible ? Quel est l'intérêt de la fournir ?
Doit-on exiger le détail des calculs lorsque l'usage de la calculatrice est interdit ?

Nous nous devons d'entendre et d'écouter les voix mathématiques et non mathématiques venues d'Ukraine.

« LE PETIT VERT » est le bulletin de la régionale APMEP Lorraine. Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin « Au fil des maths » et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la « vie mathématique » locale, et d'autre part de permettre les échanges « mathématiques » entre les adhérents. Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redaction-petivert@apmeplorraine.fr. Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Françoise Jean, Léa Magnier, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

PENDANT LA SEMAINE DES MATHÉMATHIQUES ET APRÈS…

La semaine des maths s'est tenue du 7 au 14 mars 2022 sur le thème « Mathématiques en forme(e) ».
Les ressources de la régionale ont été utilisées.

Au collège La Source à Amnéville, le Pi-Day a été fêté, trois adhérents de notre régionale sont venus faire jouer l'ensemble des élèves de quatrième du collège.
Les élèves ont évoqué cette journée dans le webjournal de l'établissement.
Le mercredi les ressources mosellanes ont été utilisées pour faire jouer les élèves du collège Verlaine de Maizières-lès-Metz. Dans son édition du 19 mars, le Républicain Lorrain a évoqué l'événement.

MAIZIÈRES-LÈS-METZ

Collège Verlaine : les élèves ont fait des maths… en jouant

Valérie Lorrain : « Un entraînement par le jeu contribue à l'apprentissage du raisonnement et à la structuration de la pensée. » Photo RL

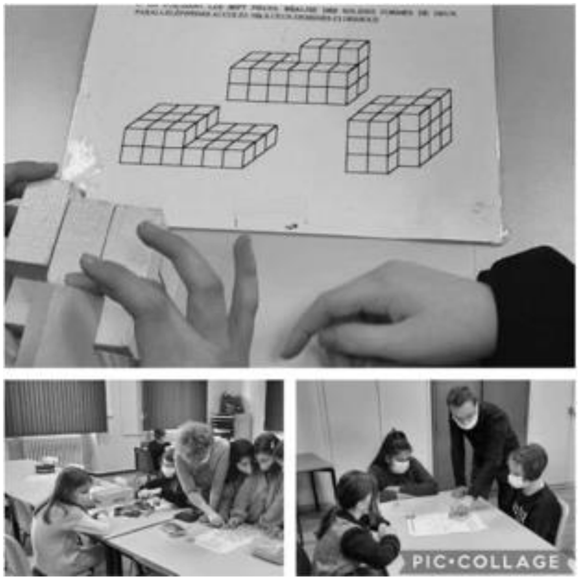
Dans le cadre de la Semaine des Mathématiques, près de deux cents élèves de 6ème et de 5ème du collège Paul Verlaine ont participé à des ateliers. Ces journées ont été organisées par Valérie Lorrain, professeure de mathématiques : « Je propose cet évènement depuis quatre ans - sauf l'année dernière, en raison de la pandémie, et il est très apprécié par les élèves. Les élèves sont encadrés par leurs professeurs de mathématiques et des membres de l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP). »

Ainsi, les collégiens ont découvert le jeu Pavage s, le cube Soma, les puzzles pentaminos et des circuits. Tous ont manipulé, réfléchi et cherché des solutions avec enthousiasme.

« C'est un plus pour leur apprentissage et leur développement, et s'ils repartent avec des idées de jeux à faire en famille, c'est encore mieux »

Les ressources ont été de nouveau utilisées au collège Louis Pasteur de Florange le lundi des vacances dans le cadre « École Ouverte ».

Retour au sommaire



Au collège Louis Armand de Petite-Roselle, les élèves se sont familiarisés avec les jeux disponibles dans l'établissement. Pour favoriser la liaison inter-degré, ils ont fait jouer l'ensemble des élèves de CM2 de la commune, le lundi à l'école Jacques-Yves Cousteau, le vendredi à l'école Vieille Verrerie.
Les photos ci-contre sont extraites du journal interne du collège.

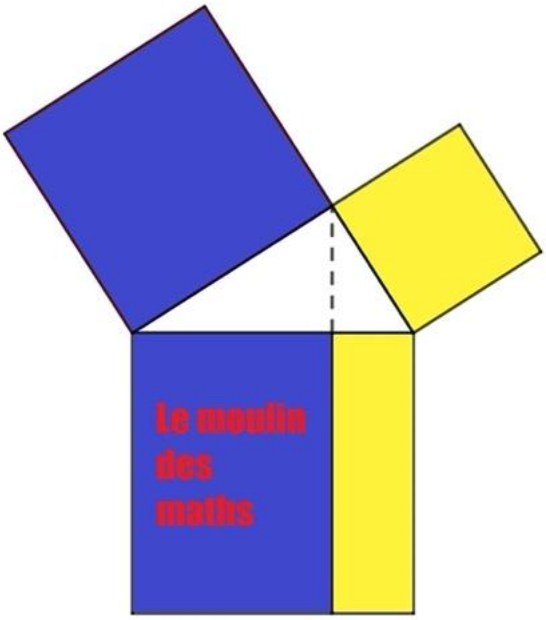
Le groupe "Maths & Jeux" de la régionale a proposé un jeu d'aventures et d'enquêtes pour faire vivre ou prolonger la semaine des mathématiques dans les classes de CM2 et/ou 6ème.

L'accès à ce jeu est toujours possible, il peut être utilisé à tout moment de l'année.

À travers ce jeu, les élèves d'une même classe se répartissent en équipes pour trouver des indices et résoudre des énigmes mathématiques en lien avec le thème sur les formes mathématiques.
Ces problèmes résolus, ils récupèrent les étapes d'un programme de construction, leur permettant d'effectuer des tracés à partir d'une croix latine (patron d'un cube), et découvrir que cette croix peut être aussi le développement d'un tétraèdre (pyramide à base triangulaire). Ce type de développement avait été évoqué dans le Petit Vert n°120.
Mi-avril, près de 2000 connexions ont été comptabilisées sur le site.

Retour au sommaire

Le 7 mars au collège Louis Armand de Moulins-les-Metz



Le Labo de Maths a organisé une rencontre entre les élèves de CM2 des écoles Verlaine et Cressot avec les élèves de sixième du collège. Trois ateliers ont été proposés : l'un d'eux utilisait le jeu d'aventures évoqué précédemment, les deux autres des jeux à manipuler issus des ressources de la régionale. C'était le premier jour de la semaine des mathématiques, le recteur de l'académie de Nancy-Metz et venu observer les élèves pendant leurs activités, échanger avec les enseignant.e.s et constater la dynamique mise en œuvre dans ce réseau d'échanges.

Réflexions à propos du jeu d'aventures

Les jeux de la régionale

Une classe de CM2 avec des CM1 de chaque école et une classe de 6ème ont participé le 7 mars. Les autres, c'est à dire une classe de CM2 de chaque école et deux classes de 6ème, sont venus au collège le 17 mars et ont eu droit aux mêmes animations.

Le 17 mars

Le jeu d'aventures et les stands présentant des objets à manipuler ont été animés par les étudiant.e.s de M1 (Master MEEF préparant aux métiers de l'enseignement) accompagnés de leurs deux formatrices et de joueurs de notre régionale.

Retour au sommaire

Le matin~~,~~ une prise en main du jeu d'aventures par les étudiant.e.s de M1 avait été proposée par leurs enseignantes.

L'après-midi, le jeu d'aventures a été mis en œuvre.

Les étudiant.e.s ont aussi animé l'utilisation des jeux de la régionale.

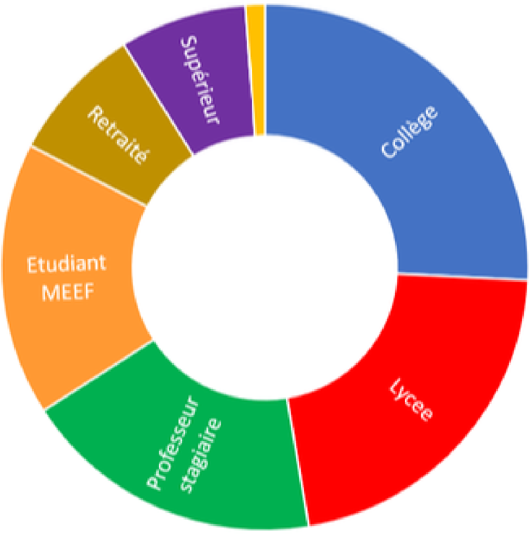
Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

JOURNÉE RÉGIONALE 2022 AU LYCÉE POLYVALENT RÉGIONAL STANISLAS DE VILLERS-LÈS-NANCY

Quelques statistiques

Environ 150 enseignants de mathématiques de la maternelle à l'université dont 31 professeurs stagiaires et 28 étudiants MEEF, inscrits au plan de formation ou auditeurs libres ont pu travailler et échanger sur leurs pratiques ce 23 mars 2022.



Le matin

L'accueil

La conférence

Pendant sa conférence « Fonder son enseignement sur la résolution de problèmes… mythe ou réalité ? » Marie Line Gardes, enseignante-chercheure en didactique des mathématiques à la Haute École Pédagogique du Canton de Vaud, Lausanne (Suisse) nous a présenté quelques résultats de travaux de recherche du groupe DREAMaths de l'IREM de Lyon. Les expérimentations ont été réalisées principalement avec des élèves de cycle 3, les prolongements évoqués nous ont montré que la résolution de problèmes avait tout à fait sa place au cycle 4 et au lycée.

Retour au sommaire

La pause-café

Les brochures et les jeux de l'association

Lors de l'assemblée générale les rapports d'activité et financiers ont été approuvés à l'unanimité. Carole Stamm (collège Louis Armand de Moulins-les-Metz) et Anne Wallpott (collège Val de Seille de Nomeny) ont rejoint le comité de la régionale.
Le repas n'a pas pu cette année être pris aux restaurants d'initiation du lycée, les élèves du secteur hôtellerie étaient en stage. La qualité de ce qui nous a été servi à la cantine nous a montré que l'ordinaire servi aux élèves méritait le détour…

L'après-midi

Les quatre commissions régionales se sont réunies : premier degré et collège , lycée, lycée professionnel, formation des maitres et enseignement supérieur.

Réunion de la commission collège

À propos de la rénovation de la voie professionnelle en lycée Professionnel

16 ateliers ont eu lieu dont un réservé aux étudiants de M1 Master MEEF mathématiques de Nancy (photo ci-contre). Le travail collaboratif de l'association et les ressources accessibles leur ont été présentés.

Retour au sommaire

Voici les ateliers dont les animateurs ont déposé un document sur le site de la régionale.

Match Point de Françoise Bertrand, retraitée.

Match Point, brochure du « groupe jeux » sortie en 2019, est consacrée à un seul jeu avec son matériel. Ses trente-cinq pièces colorées présentant chacune quatre nombres choisis parmi un, deux, trois, quatre ou cinq offrent une grande variété d'activités, de calcul mental et de raisonnement. Venez découvrir ses multiples possibilités d'emploi, en classe ou en dehors, de l'école au lycée.

Atelier autour du raisonnement en classe de seconde de Hélène Marx, lycée Saint-Exupéry de Fameck.

Présentation d'un atelier autour du raisonnement mené en classe de seconde. Sur trois ou quatre séances, description de la mise en place d'un atelier interactif pour travailler sur les bases d'un raisonnement, sans faire de mathématiques au départ, puis en faisant le lien avec les maths.

Le labo de maths et la CARDIE de Nathalie Braun, lycée Rosa Parks de Thionville.

Vous voulez découvrir ce qu'est un labo de maths. Vous avez envie de mettre en place un labo de maths dans votre établissement, la CARDIE, la Cellule Académique de Recherche, Développement, Innovation et Expérimentation peut vous accompagner. Présentations d'un labo de maths, de sa mise en place ainsi que de diverses actions au sein de ses labos. Vous pourrez également percevoir le rôle de la CARDIE pour valoriser ces actions. Présentation de la CARDIE et de divers projets ainsi que des échanges autours de vos idées et de vos réflexions.

Des nombres très, très, TRÈS grands, mais finis : introduction à la googologie de Rémi Peyre, maitre de conférences ès mathématiques appliquées à l'Université de Lorraine.

"Quel est le plus grand de tous les nombres (entiers) ?" : Voilà une question que presque tous les enfants ont posé un jour à leurs parents... ! Si on leur apprend, par la suite, que l'ensemble des entiers est non borné, leur question était pourtant plus subtile qu'il n'y parait : en effet, à la question pourtant très proche « Quel est le plus grand nombre fini /qu'on sache caractériser par une définition de taille raisonnable/ ? », la réponse est un champ de recherche dans lequel les mathématiciens n'ont aujourd'hui aucune réponse définitive, et n'en auront vraisemblablement jamais... ! Je vous propose donc une introduction à ce champ de l'étude des très très (très !) grands nombres, également appelée "googologie". Il me semble en effet que ce thème pourra ensuite, pour vous-mêmes, constituer une activité pédagogique intéressante auprès d'élèves de tous âges : un des atouts du thème étant qu'il demande peu de connaissances spécifiques en mathématiques mais surtout beaucoup d'imagination, tout en restant ouvert à de vraies questions de mathématiques de tous niveaux... !

Comment la transformation de la voie professionnelle a transformé nos pratiques en LP de Jean-Michel Bertolaso, Lycée Professionnel BTP de Montigny-lès-Metz.

L'avènement du bac pro en 3 ans avait déjà changé les programmes en 2010. Moins de dix ans plus tard, la transformation de la voie professionnelle s'est accompagnée de nouvelles directives, de nouveaux textes. Cet atelier a pour but de faire connaître à toute personne intéressée, la pratique de notre métier de professeur de mathématiques en lycée professionnel avec les contraintes horaires, les nouveaux programmes, la co-intervention, le chef d'œuvre et les nouvelles recommandations pédagogiques.

Retour au sommaire

Quelques photos prises pendant les ateliers

Le groupe échange.

Recherches individuelles.

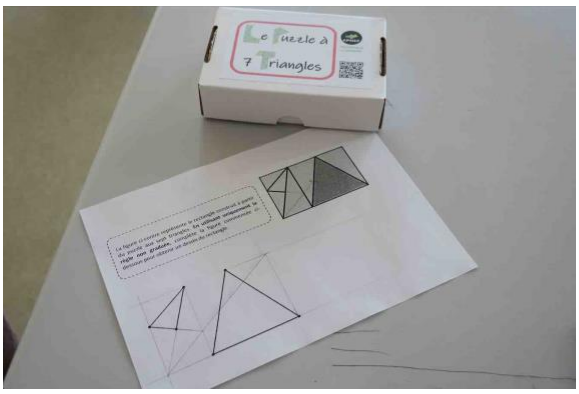
Partage de points de vue.

Un petit tour du côté des réseaux sociaux.

Des tasseaux pour des longueurs

On raisonne au lycée !

Le puzzle à sept triangles a du succés.



Une construction géométrique originale.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

RALLYE ACADÉMIQUE 2022

Annulé en 2020 et très réduit en 2021 pour cause de situation sanitaire, notre rallye 3ème/2nde a repris en douceur cette année. Pour cette dernière édition, 47 classes de troisième issues de 21 collèges de l'académie et 31 classes de 12 lycées ont participé. C'est le tiers des participations en 2019 … mais le triple de celles en 2020.

Merci aux collègues qui ont fait passer l'épreuve et nous ont communiqué les fiches réponses de leur classe par courrier postal.

Merci aussi à notre partenaire ALEPH qui a doté les 3 premiers de chaque catégorie (3ème et 2nde) d'une réquerre et/ou d'un rapporteur trigonométrique.
De plus, chaque élève classé dans les 3 premières classes recevra un « puzzle à 7 triangles » offert par l'APMEP Lorraine.

Vous pouvez retrouver les [énoncés] des 10 exercices, de la question subsidiaire et leurs [réponses] sur notre site.

PALMARÈS 2022

- **Lycée :**

1. 2nde 10 du lycée Saint-Exupéry à Fameck (57)
2. 2nde GT2 du lycée Stanislas à Villers-lès-Nancy (54)
3. 2nde 513 du lycée Loritz à Nancy (54)

- **Collège :**
- 3ème A du collège Jean de La Fontaine à Saint-Avold (57)
- 3ème A du collège Évariste Gallois à Algrange (57)
- 3ème B du collège du Ban de Vagney à Saulxures/Moselotte (88)

Retour au sommaire

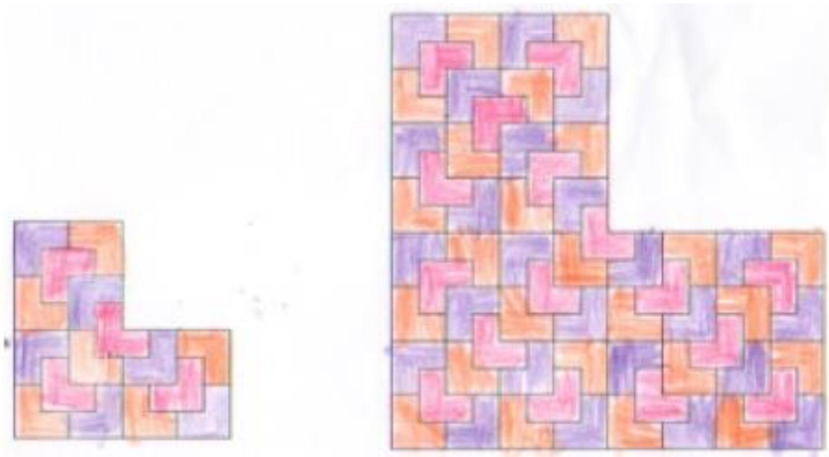
DANS NOS CLASSES

DES « PETITS L » EN CE2

François DROUIN

La classe de l'école de Sampigny est composée de 19 élèves de CE2. Edwige Vuillermoz, l'enseignante qui m'a accueilli, était présente avec moi dans la classe. Les activités ont été mises en œuvre un matin de novembre 2021, après la récréation.

Lors d'une [expérimentation faite en 2018] dans la même école, des coloriages symétriques étaient apparus lors d'une recherche d'un minimum de couleurs à utiliser (deux zones voisines ne peuvent être d'une même couleur).



L'idée était de reprendre cette activité de coloriage avec d'autres recouvrements de « Petits L » dessinés à différentes échelles et de proposer une activité de manipulation pouvant éventuellement faire apparaitre un assemblage symétrique.

Les élèves pendant l'activité de coloriage.

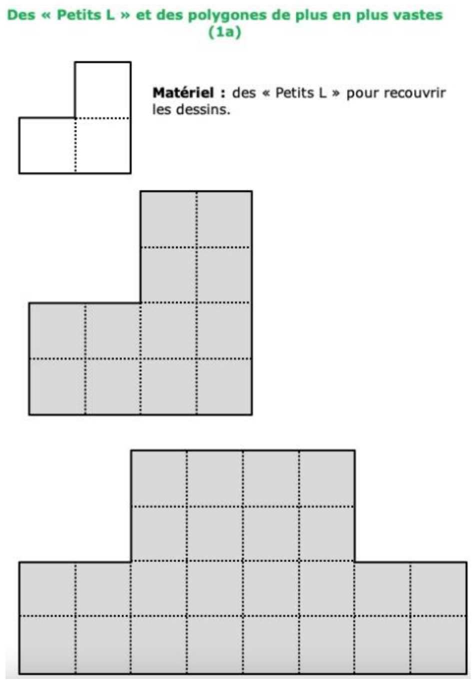
Prise en main du matériel

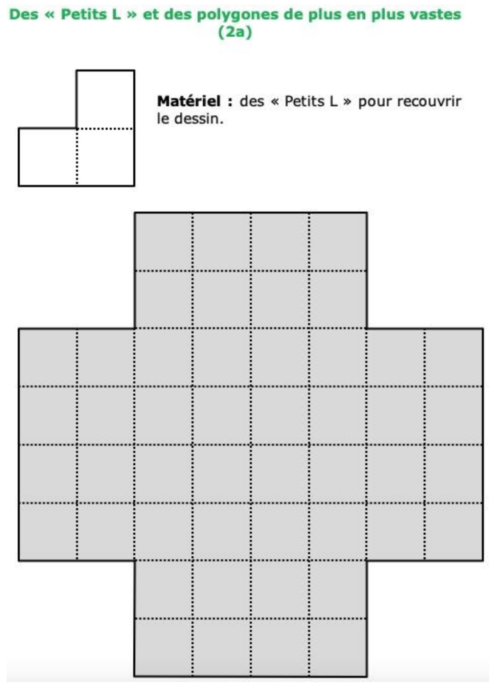
Les « Petits L » étaient rangés dans des sachets contenant seize pièces, ce qui a facilité leur distribution en début de séance puis leur rangement à la fin des activités proposées.
Il a été précisé que les faces laissant visibles trois carrés seraient utilisées. Les élèves ont rapidement repéré l'assemblage de deux pièces en un rectangle 2x3. Il leur a été montré et précisé oralement que deux pièces pouvaient être assemblées sans former de rectangle.

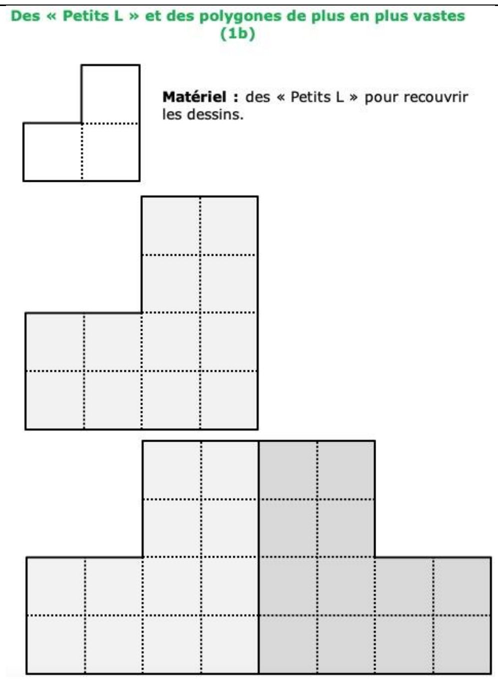
Retour au sommaire

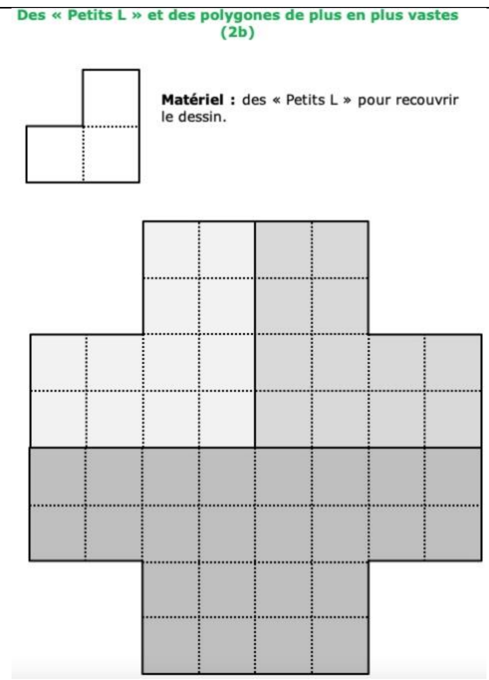
Première activité

Deux énoncés ont été proposés, partagés à peu près équitablement parmi les élèves.







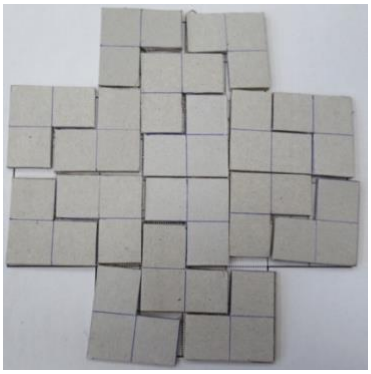


Les énoncés de la série « b » incitaient à effectuer le recouvrement zone par zone, en ayant la possibilité d'utiliser le regroupement fait auparavant.

La seule consigne donnée et rappelée oralement était de recouvrir les dessins proposés sur la feuille de papier.

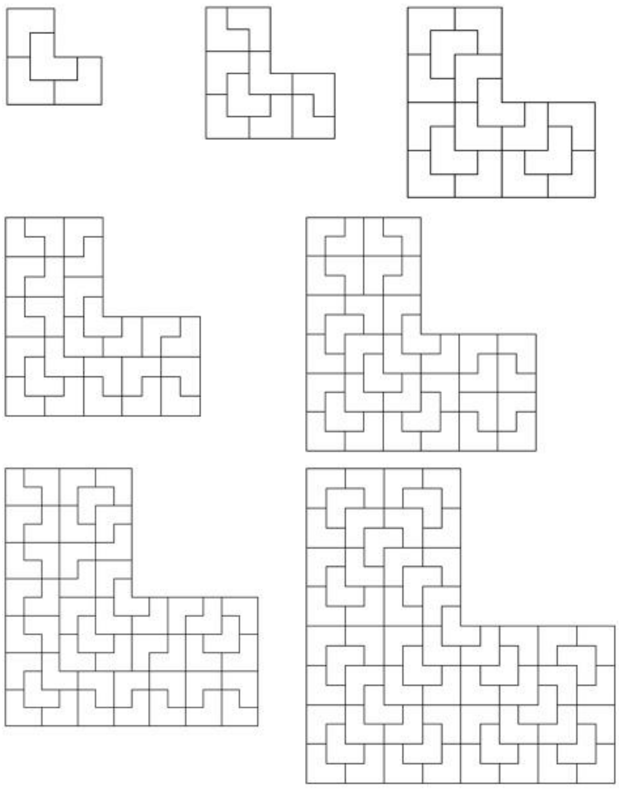
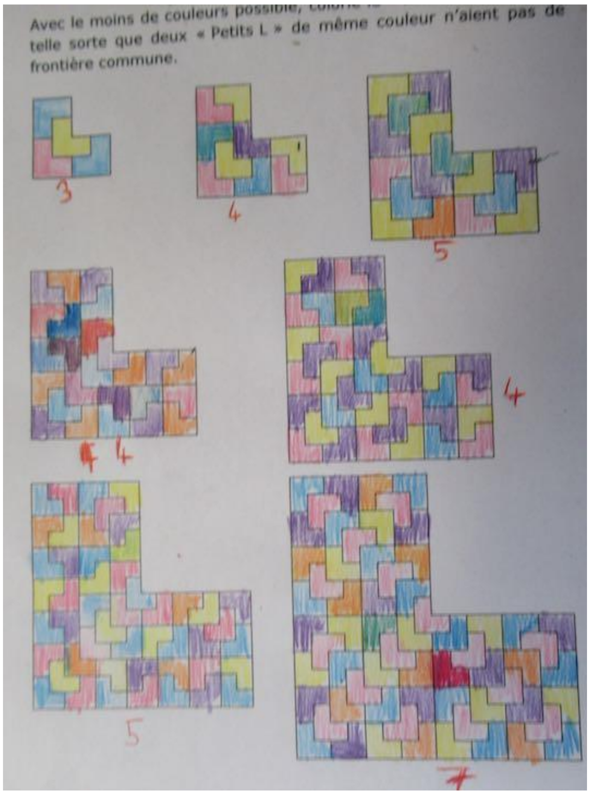
Il n'a pas été repéré de différence notoire lors de la mise en œuvre du recouvrement des dessins dans les différentes séries. Des solutions symétriques sont apparues sur des feuilles de la série « a » et des solutions non symétriques sur des feuilles de la série « b ».

Retour au sommaire

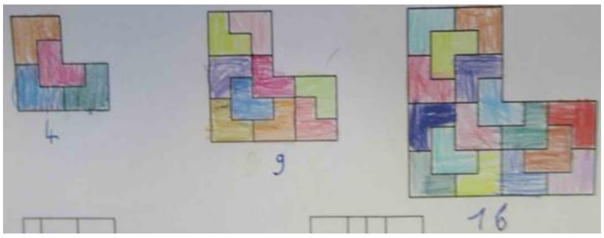

Les recouvrements réussis montrent une ligne de séparation horizontale et des solutions symétriques sont remarquées : le cerveau des élèves n'est pas à ce moment de l'activité complétement vierge de tout savoir.
La symétrie axiale commence habituellement à être étudiée en fin d'année de CE1. Ces photos de leurs réalisations de début d'année pourront leur être remontrées et analysées puisque le mot « symétrie » ne leur sera plus étranger. Les activités « b » pourront être alors être reprises en précisant cette fois l'ordre dans lesquelles les zones seront recouvertes.
Comme situation-problème, pendant le cycle 3, les élèves pourront réfléchir aux modifications à faire pour rendre symétriques des recouvrements non symétriques ou pour rendre non symétriques des recouvrements symétriques. Les axes de symétrie éventuels sont dans les directions des bords de leur feuille de papier, ils sont dans des directions qui leur sont familières.

Deuxième activité

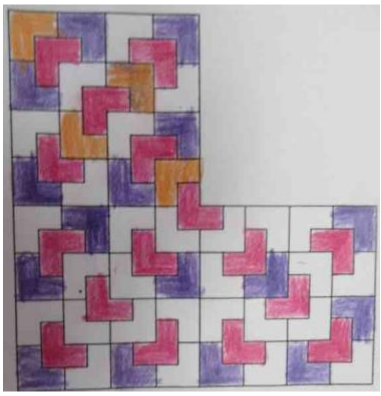
La consigne proposée était : Avec le moins de couleurs possible, colorie le « Petit L » dessiné de telle sorte que deux « Petits L » de même couleur n'aient pas de frontière commune. Il leur était demandé de tout faire pour que deux zones de même couleur ne se touchent même pas par un sommet et d'indiquer le nombre de couleurs utilisées.

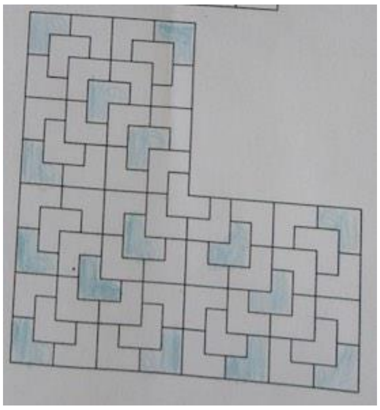
Retour au sommaire

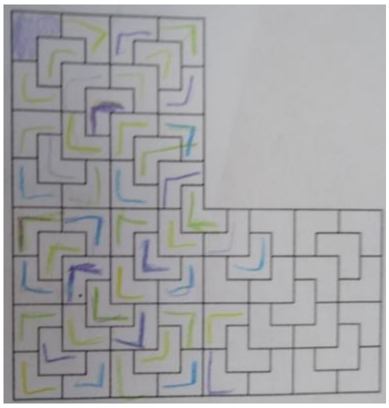


La consigne lue et redite oralement n'a pas toujours été comprise… Les deux adultes présents dans la classe étaient au courant du nombre minimum de couleurs possible (3 si contacts éventuels par les sommets, 4 sans ces contacts par les sommets), mais ces informations n'ont pas été fournies aux élèves.

Des photos prises en cours de coloriage montrent des stratégies différentes de coloriage.

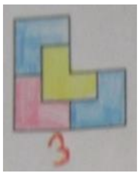


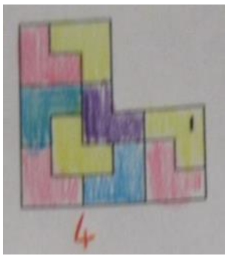


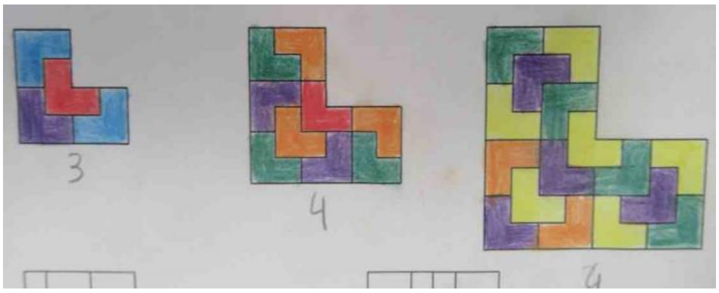


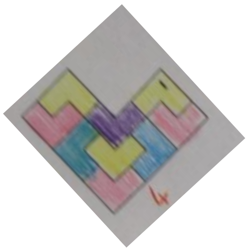
Cela conforte l'idée que prendre des photos « en cours de réalisation » est important pour ce type d'activité réalisée par des jeunes élèves qui ne sauront guère ensuite expliquer oralement les étapes de leur résolution de cette situation-problème. Ceci sera également valable lors des recouvrements demandés lors de l'activité précédente faisant manipuler les « Petits L ».

Les premiers dessins proposés ont montré des coloriages symétriques.



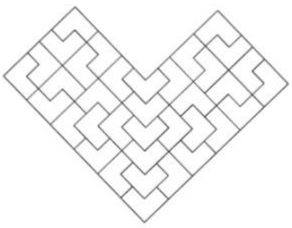


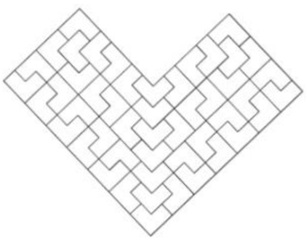




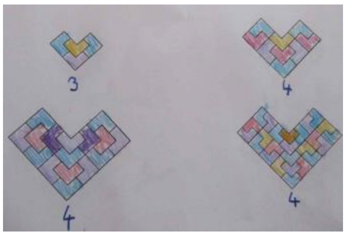
En fin de CE1, ces axes de symétrie ne seront pas repérés en examinant le coloriage réalisé car non « verticaux », cependant, il ne sera pas interdit à l'enseignant(e) de demander aux élèves de faire pivoter leur feuille pour rechercher l'éventuel axe de symétrie. Cette manipulation sera moins aisée à partir d'un écran d'ordinateur.

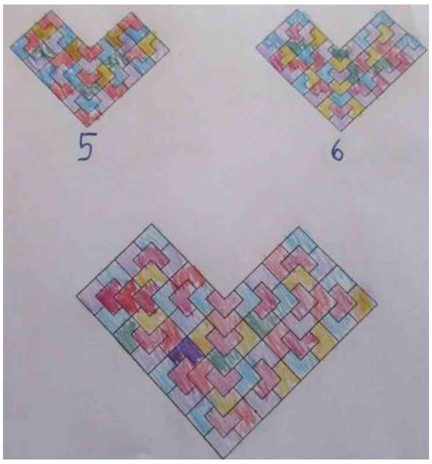
L'activité de coloriage a été quelques semaines plus tard avec des dessins à colorier présentant des axes de symétrie dans la direction des bords de la feuille de papier. Deux exemples sont montrés ci-dessous, une feuille élève est proposée sur notre site.





Retour au sommaire

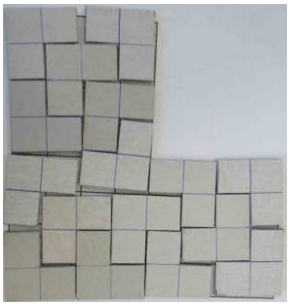


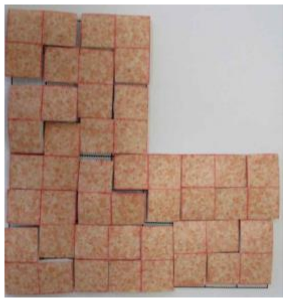


Des coloriages symétriques sont visibles dans les premiers dessins.
Pour qu'ils apparaissent également dans les autres, l'enseignante proposera de nouveau l'activité au troisième trimestre, en précisant cette fois son souhait d'obtenir un coloriage symétrique.

Troisième activité

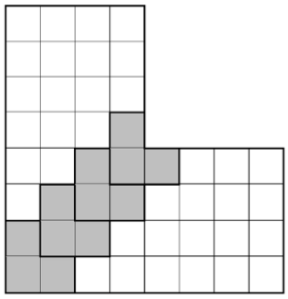
Des dessins de « Petits L » de plus en plus vastes étaient à recouvrir.





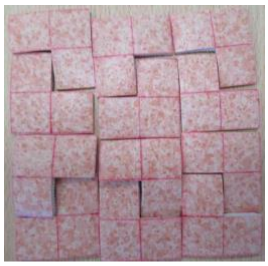
Des recouvrements symétriques des premiers dessins sont apparus. Concernant le dernier, les solutions ont été variées et non symétriques.

Pour le plus vaste des dessins, indiquer cette position de ces quatre pièces apportera des recouvrements symétriques.



Pour les plus rapides

La réalisation d'un carré avec douze « Petits L » a été proposée. Les solutions trouvées utilisaient des rectangles 2x3. La recherche a été relancée pour minimiser le nombre de ces rectangles. Elle devra être reprise à un autre moment.



En complément

Les documents contenant les activités utilisées et des pièces à dupliquer et découper sont téléchargeables.

Les collègues enseignant en cycle 3 pourront se reporter aux expérimentations faites en 2015 en classe de CM1 et CM2. L'aspect agrandissement et ses conséquences y sont évoqués.
D'autres situations-problèmes utilisant ces pièces avaient été proposées sur notre site pendant la première période de confinement.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

PROPORTIONNALITÉ

Valérian Sauton

Présentation

La séance se déroule dans deux classes de 4ème, en salle informatique pour travailler avec le tableur et avec GeoGebra.
Deux sujets différents sont proposés. La représentation d'un terrain de sport à l'échelle me semble trop complexe pour les élèves en difficulté. Il y a beaucoup d'informations à analyser afin de définir l'ordre de construction. Reproduire un drapeau « simple » permet de prendre en main GeoGebra tout en travaillant sur la mise à l'échelle et les coordonnées cartésiennes.
Dans le premier exercice, commun à tous, des calculs de *pourcentages à* l'aide du tableur sont à effectuer. Dans le second exercice il s'agit de calculs de vitesse avec une légère variante dans l'énoncé selon les sujets. Lors du troisième exercice les élèves les plus à l'aise avec la proportionnalité et en maths en général doivent représenter sur GeoGebra un terrain de tennis à l'échelle 1/90. Les autres doivent représenter le drapeau de la Colombie de 100x150 cm à l'échelle 1/8.

Cette activité est ma cinquième séance en salle informatique avec mes élèves de 4ème, qui ont découvert le tableur en septembre.

Origine

Pour initier mes élèves de 6ème à GeoGebra, je leur ai montré comment utiliser le logiciel pour représenter un drapeau simple comme celui de la France ou de l'Allemagne. Pour aller plus loin, j'ai continué avec des drapeaux de plus en plus compliqués et me suis rendu compte de toutes les notions mathématiques qu'il était possible de travailler sur ce thème : symétries, rotations, coordonnées, fractions, calcul littéral etc.

L'une de mes deux classes de quatrième est composée en majorité d'élèves en section sportive : football, handball et basketball. Pour travailler sur les échelles et sur GeoGebra, je me suis dit que représenter un terrain de sport devrait les motiver. J'ai choisi, pour commencer, un terrain « simple » afin de leur demander en devoir maison de représenter le terrain du sport qu'ils pratiquent.

Objectifs pédagogiques

Exercice 1 : revoir les automatismes mis en œuvre pour le calcul mental de pourcentages et réutiliser le tableur.

Exercice 2 : utiliser un tableau de proportionnalité pour déterminer une vitesse moyenne.

Exercice 3 : représenter à l'échelle, utiliser des coordonnées cartésiennes et prendre en main GeoGebra.

Déroulement de l'activité

Lors de la séance précédente, en classe, les élèves ont travaillé, sur papier, la représentation d'un drapeau à l'échelle et celle de quelques éléments d'un terrain de foot.

J'en ai profité pour présenter à l'aide d'un vidéoprojecteur le placement des points de coordonnées précises sur GeoGebra et quelques fonctions du logiciel : milieu, intersection, cercle centre-rayon etc. Étant donné le thème, la plupart des élèves étaient attentifs à la construction.

L'activité en elle-même : les élèves entrent en salle informatique et se connectent au réseau pendant que je leur distribue l'énoncé leur correspondant. Je modifie les binômes lorsque je n'ai pas prévu le même sujet pour les deux.

Si deux élèves ont formé un binôme alors que j'avais prévu des sujets différents pour eux, je demande à l'un d'entre eux de changer de poste ou de se mettre avec un élève que je lui indique. Si l'élève me demande la raison de ce changement je lui dis que je n'ai pas prévu le même sujet pour lui pour cette activité.

Les élèves travaillent ensuite en autonomie sur les ordinateurs en me sollicitant en cas de besoin.

Retour au sommaire

Matériel utilisé

Salle informatique de 16 postes.

Évaluation

Les élèves déposent à l'issue de la séance leurs fichiers tableur et GeoGebra dans un casier de dépôt sur l'ENT et me rendent leur compte-rendu écrit.

La plupart de mes séances de TP en salle informatique donnent suite à une note sur 10. Comme j'aide les élèves tout au long de la séance, ces notes sont souvent bonnes et permettent de valoriser l'implication des élèves. Les élèves en difficulté dans la discipline s'investissent vraiment car ils savent que cette note va remonter leur moyenne.

Bilan

Alors que les élèves ont l'habitude de diviser par 2 pour calculer 50 % d'une quantité, certains essaient d'utiliser le symbole % et il me faut leur rappeler à l'oral qu'ils ne doivent utiliser que les 4 opérations élémentaires pour trouver les quantités demandées. L'objectif n'était pas le calcul de tous les % mais seulement les pourcentages "facilement" calculables de tête : 50%, 10%, 25%, 20%, 5% etc.

L'idée était de dégager la ou les opérations élémentaires à effectuer pour calculer ces pourcentages avant d'engager plus tard des explications plus rigoureuses.

Une fois cela énoncé, seulement un binôme en très grande difficulté a tardé sur cet exercice.

L'exercice 2 a pris plus de temps que je ne l'avais prévu, en particulier la 2ème question. N'ayant pas encore traité le chapitre sur les grandeurs quotients, l'énoncé en a dérangé quelques-uns avec les termes « vitesse moyenne », « km/h ». Ayant déjà traité plusieurs fois ce type de problème en classe, je pensais que les élèves iraient plus vite. De nombreux élèves essaient d'ajouter des colonnes au tableau de la question 1 pour trouver la réponse.

Les élèves avaient hâte d'arriver à l'exercice 3 afin de représenter le terrain de tennis ou le drapeau. Les échanges avec les élèves sur l'utilisation des coordonnées ont été très intéressants, en particulier avec des élèves en difficulté qui voulaient vraiment réussir.

Ayant perdu du temps sur l'exercice 2, il a manqué une dizaine de minutes à la plupart des groupes pour terminer l'activité.

L'exploitation du travail de ce TP est prévue pour plus tard, lors du travail sur les transformations du plan. La réalisation de certains drapeaux, comme celui de la Turquie ou de la Chine, offre un cadre intéressant pour travailler sur ces notions mathématiques. J'ai en tête un projet où les élèves doivent représenter un terrain de sport avec à côté le drapeau des équipes qui s'affrontent.

Je suis très satisfait de cette activité car tous les élèves se sont lancés de suite dans l'activité, m'ont sollicité tout au long de la séance et ont regretté de ne pas avoir eu le temps de finir le terrain de tennis ou le drapeau. J'ai été surpris par certains élèves en difficulté que j'ai sentis très intéressés de comprendre comment utiliser les coordonnées cartésiennes et qui, après avoir compris, ont eu des remarques comme « c'est trop bien », « en fait c'est simple » etc.

Je proposerai certainement à nouveau avec quelques modifications dans l'énoncé. Dans l'exercice 1 je préciserai qu'il ne faut pas utiliser le symbole %.

Je modifierai l'exercice 2 afin d'éviter que les élèves ne soient pas tentés d'utiliser le premier tableau pour répondre à la 2ème question. Je pense ajouter un tableau avec seulement les en-têtes des lignes.

Retour au sommaire

Sujet 1 **TP 5 : Proportionnalité** **4ème**

À la fin de cette séance, vous devrez me rendre cette feuille ET déposer sur l'ENT le fichier tableur sur lequel vous avez travaillé ET le fichier GeoGebra.

Le fichier tableur sera nommé : TP5_NOM_proportionnalite

Chaque exercice sera traité sur une feuille différente nommée "exo1", "exo2" etc.

Pensez à enregistrer régulièrement votre travail.

Exercice n° 1

1. Complète les phrases suivantes.

- Pour calculer 25% d'une quantité, je divise par . . . . .
- Pour calculer 30% d'une quantité, je divise par . . . . . pour calculer 10% et je multiplie par . . . . .

2. Indique la formule à écrire sur le tableur afin d'obtenir l'information cherchée.

Information cherchée	Formule à écrire sur tableur	Résultat
50% de 493		
30% de 847		
25% de 6 324		
40% de 478		

Exercice n° 2

1. Après 7 minutes de course, la montre d'Ibrahim lui indique qu'il a parcouru 1,6 km.

En complétant le tableau de proportionnalité ci-dessous, calcule sa vitesse moyenne, en km/h.

Temps (en min)	7	1	60
Distance (en km)	1,6		

Réponse : . . . .

2. Ibrahim s'arrête de courir après 1h26. Il a parcouru 15,8 km.

(a) Pendant combien de minutes a-t-il couru ?

. . . .

(b) En utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, calcule sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours.

Réponse : . . . .

Retour au sommaire

Exercice n° 3

On souhaite représenter un drapeau de la Colombie de dimensions 150 cm x 150 cm à l'échelle $\frac{1}{8}$.

C'est un drapeau tricolore composé de trois bandes horizontales, jaune, bleu et rouge de haut en bas.

La hauteur de la bande jaune est égale à la moitié de la hauteur du drapeau.

La bande bleue et la bande rouge ont même hauteur.

<table>
<tr><td rowspan="3">
</td><td></td><td>Hauteur</td><td>Largeur</td></tr>
<tr><td>Longueur réelle (cm)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Longueur sur le schéma (cm)</td><td></td><td></td></tr>
</table>

1. Ouvrir GeoGebra et placer le point A de coordonnées (0, 0).

2. Enregistrer le fichier sous le nom : TP5_NOM_colombie

3. Indiquer les coordonnées des points suivants :

- B = (. . . . . , ...)
- C = (. . . . . , ...)
- D = (. . . . . , ...)

4. À l'aide du bouton « milieu » de GeoGebra, placer les points E, F, G et H.

5. Tracer les rectangles ABHG, EGHF et DEFC à l'aide du bouton « polygone » afin de pouvoir les colorier avec les bonnes couleurs.

Retour au sommaire

Sujet 2 **TP 5 : Proportionnalité** **4ème**

À la fin de cette séance, vous devrez me rendre cette feuille ET déposer sur l'ENT le fichier tableur sur lequel vous avez travaillé ET le fichier GeoGebra.

Le fichier tableur sera nommé : TP5_NOM_proportionnalite

Chaque exercice sera traité sur une feuille différente nommée "exo1", "exo2" etc.

Pensez à enregistrer régulièrement votre travail.

Exercice n° 1

1. Complète les phrases suivantes.

- Pour calculer 25% d'une quantité, je divise par . . . . .
- Pour calculer 30% d'une quantité, je divise par . . . . . pour calculer 10% et je multiplie par . . . . .

2. Indique la formule à écrire sur le tableur afin d'obtenir l'information cherchée.

Information cherchée	Formule à écrire sur tableur	Résultat
50% de 493		
30% de 847		
25% de 6 324		
40% de 478		
70% de 4 231		
72% de 54 623		

Exercice n° 2

1. Après 7 minutes de course, la montre d'Ibrahim lui indique qu'il a parcouru 1,6 km.

En complétant le tableau de proportionnalité ci-dessous, calcule sa vitesse moyenne, en km/h.

Temps (en min)	**7**	**1**	**60**
Distance (en km)	**1,6**		

Réponse : . . . .

2. Ibrahim s'arrête de courir après 1h26. Il a parcouru 15,8 km.

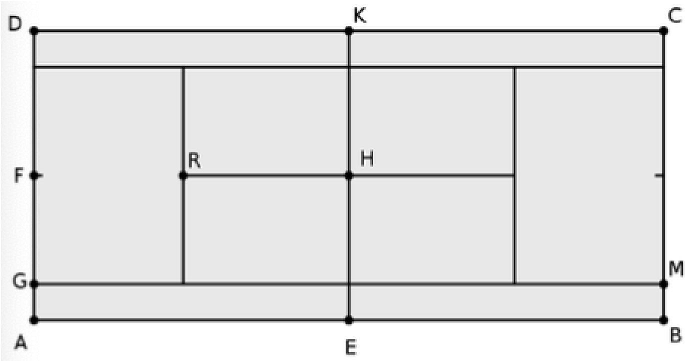
En utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, calcule sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours.

Réponse : . . . .

Retour au sommaire

Exercice n° 3

On souhaite représenter un terrain de tennis à l'échelle $\frac{1}{90}$.



AB = 23,77 m
AD = 10,97 m
AG = 1,37 m
RH = 6,4 m

1. Sur tableur, recopie et complète le tableau ci-dessous.

	AB	AD	AG	RH
Longueur réelle (m)				
Longueur réelle (cm)				
Longueur sur le schéma (cm)				

2. Annote le schéma ci-dessus avec les longueurs à **avoir sur le schéma**. Arrondis au mm.

3. Représentons maintenant le terrain de tennis à l'échelle sur Geogebra.

- Ouvre GeoGebra et place le point A de coordonnées (0, 0).
- Enregistre le fichier sous le nom : TP5_NOM_colombie

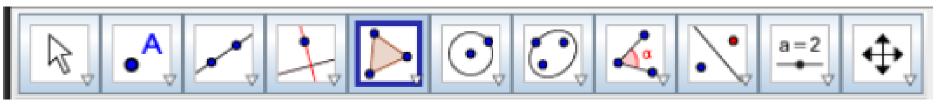
4. Indique les coordonnées des points suivants :

- B = (. . . . . , ...)
- C = (. . . . . , ...)
- D = (. . . . . , ...)

Place les points B, C et D en tapant leur coordonnées dans la barre de saisie en bas de l'écran.

ATTENTION ! : sur GeoGebra, il faut utiliser le point, pas la virgule, pour écrire un nombre décimal.

5. Trace le polygone ABCD et colorie-le en bleu. Mets l'opacité à 50.



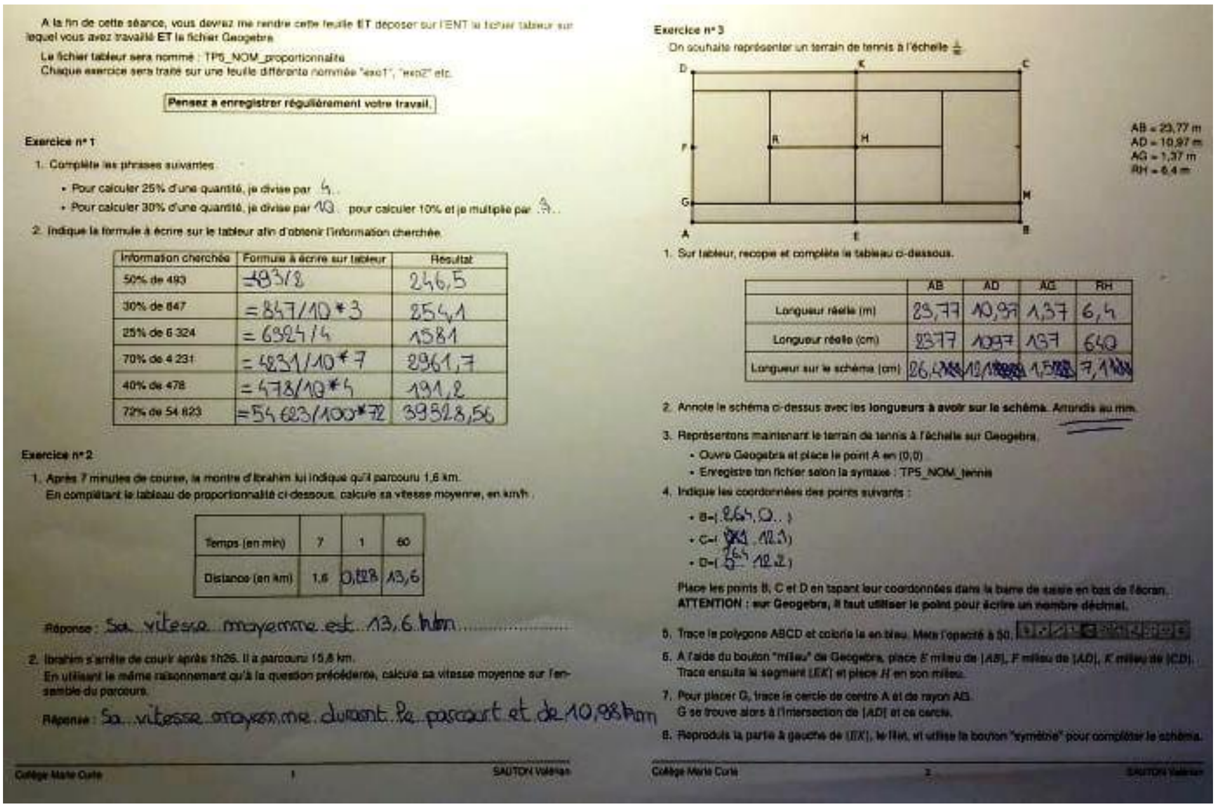
6. À l'aide du bouton "milieu" de GeoGebra, place E milieu de [AB], F milieu de [AD], K milieu de [CD]. Trace ensuite le segment [EK] et place H en son milieu.

7. Pour placer G, trace le cercle de centre A et de rayon AG. G se trouve alors à l'intersection de [AD] et ce cercle.

8. Reproduis la partie à gauche de [EK], le filet, et utilise la bouton "symétrie" pour compléter le schéma.

Retour au sommaire

Quelques productions d'élèves



A la fin de cette séance, vous devrez me rendre cette feuille ET déposer sur l'ENT le fichier tableur sur lequel vous avez travaillé ET le fichier Geogebra.

Le fichier tableur sera nommé : TP5_NOM_proportionnalite

Chaque exercice sera traité sur une feuille différente nommée "exo1", "exo2" etc.

Pensez à enregistrer régulièrement votre travail.

Exercice n° 1

1. Complète les phrases suivantes
   - Pour calculer 25% d'une quantité, je divise par 4.
   - Pour calculer 30% d'une quantité, je divise par 10 pour calculer 10% et je multiplie par 3.
2. Indique la formule à écrire sur le tableur afin d'obtenir l'information cherchée.

Information cherchée	Formule à écrire sur tableur	Résultat
50% de 493	=493/2	246,5
30% de 847	=847/10*3	254,1
25% de 6 324	=6324/4	1581
70% de 4 231	=4231/10*7	2961,7
40% de 478	=478/10*4	191,2
72% de 54 623	=54 623/100*72	39328,56

Exercice n° 2

1. Après 7 minutes de course, la montre d'Ibrahim lui indique qu'il parcouru 1,6 km. En complétant le tableau de proportionnalité ci-dessous, calcule sa vitesse moyenne, en km/h.

Temps (en min)	7	1	60
Distance (en km)	1,6	0,228	13,6

Réponse : Sa vitesse moyenne est 13,6 km/h

2. Ibrahim s'arrête de courir après 1h26. Il a parcouru 15,8 km. En utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, calcule sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours.

Réponse : Sa vitesse moyenne durant le parcourt et de 10,98 km

Exercice n° 3

On souhaite représenter un terrain de tennis à l'échelle $\frac{1}{100}$.

AB = 23,77 m
AD = 10,97 m
AG = 1,37 m
RH = 6,4 m

1. Sur tableur, recopie et complète le tableau ci-dessous.

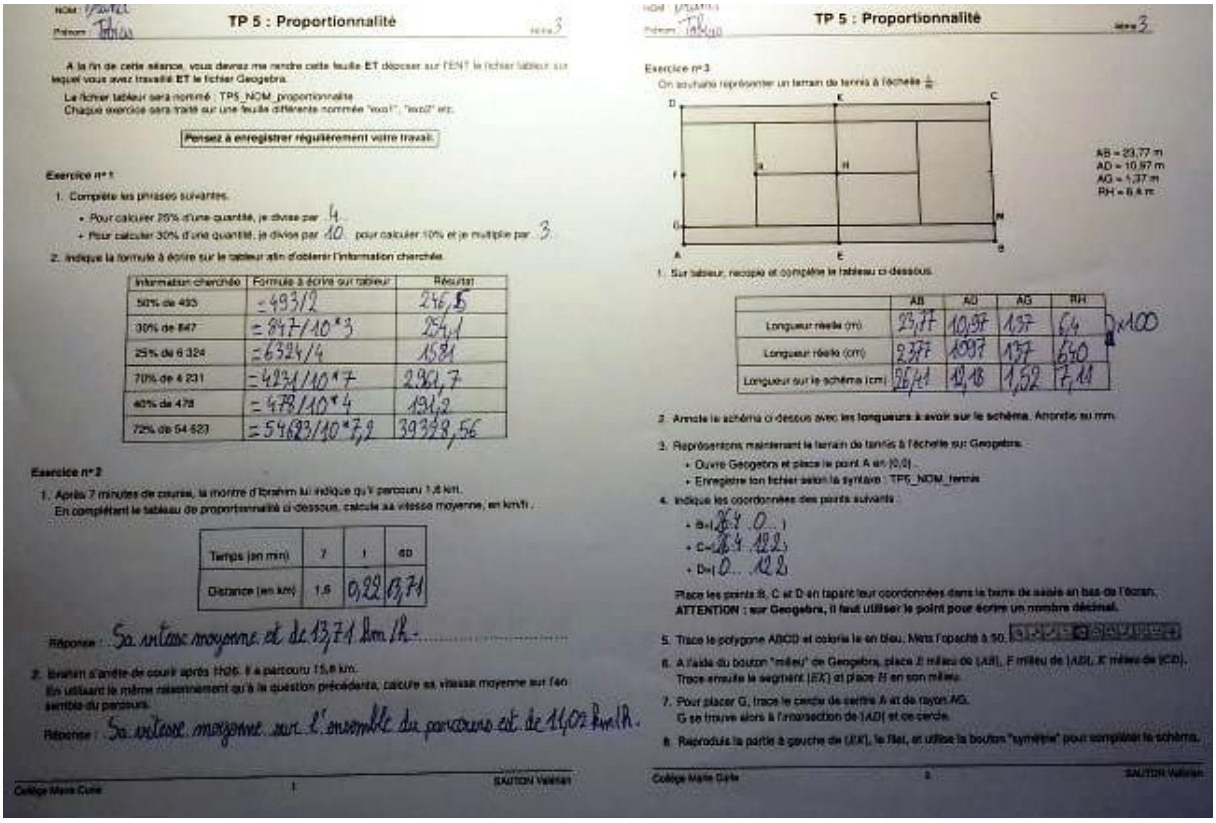
	AB	AD	AG	RH
Longueur réelle (m)	23,77	10,97	1,37	6,4
Longueur réelle (cm)	2377	1097	137	640
Longueur sur le schéma (cm)	26,4	12,1	1,5	7,1

2. Annote le schéma ci-dessus avec les longueurs à avoir sur le schéma. Arrondis au mm.
3. Représentons maintenant le terrain de tennis à l'échelle sur Geogebra.
   - Ouvre Geogebra et place le point A en (0;0)
   - Enregistre ton fichier selon la syntaxe : TP5_NOM_tennis
4. Indique les coordonnées des points suivants :
   - B=(26,4 ; 0)
   - C=(26,4 ; 12,1)
   - D=(0 ; 12,1)

Place les points B, C et D en tapant leur coordonnées dans la barre de saisie en bas de l'écran.
ATTENTION : sur Geogebra, il faut utiliser le point pour écrire un nombre décimal.

5. Trace le polygone ABCD et colorie-le en bleu. Mets l'opacité à 50.
6. A l'aide du bouton "milieu" de Geogebra, place E milieu de [AB], F milieu de [AD], K milieu de [CD]. Trace ensuite le segment [EK] et place H en son milieu.
7. Pour placer G, trace le cercle de centre A et de rayon AG. G se trouve alors à l'intersection de [AD] et ce cercle.
8. Reproduis la partie à gauche de (EK), le filet, et utilise le bouton "symétrie" pour compléter le schéma.

Collège Marie Curie 1 SAUTON Valérian — Collège Marie Curie 2 SAUTON Valérian



TP 5 : Proportionnalité

A la fin de cette séance, vous devrez me rendre cette feuille ET déposer sur l'ENT le fichier tableur sur lequel vous avez travaillé ET le fichier Geogebra.

Le fichier tableur sera nommé : TP5_NOM_proportionnalite

Chaque exercice sera traité sur une feuille différente nommée "exo1", "exo2" etc.

Pensez à enregistrer régulièrement votre travail.

Exercice n° 1

1. Complète les phrases suivantes.
   - Pour calculer 25% d'une quantité, je divise par 4.
   - Pour calculer 30% d'une quantité, je divise par 10 pour calculer 10% et je multiplie par 3.
2. Indique la formule à écrire sur le tableur afin d'obtenir l'information cherchée.

Information cherchée	Formule à écrire sur tableur	Résultat
50% de 493	=493/2	246,5
30% de 847	=847/10*3	254,1
25% de 6 324	=6324/4	1581
70% de 4 231	=4231/10*7	2961,7
40% de 478	=478/10*4	191,2
72% de 54 623	=54623/10*7,2	39328,56

Exercice n° 2

1. Après 7 minutes de course, la montre d'Ibrahim lui indique qu'il parcouru 1,6 km. En complétant le tableau de proportionnalité ci-dessous, calcule sa vitesse moyenne, en km/h.

Temps (en min)	7	1	60
Distance (en km)	1,6	0,22	13,71

Réponse : Sa vitesse moyenne et de 13,71 km/h.

2. Ibrahim s'arrête de courir après 1h26. Il a parcouru 15,8 km. En utilisant le même raisonnement qu'à la question précédente, calcule sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours.

Réponse : Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours est de 11,02 km/h.

Exercice n° 3

On souhaite représenter un terrain de tennis à l'échelle $\frac{1}{100}$.

AB = 23,77 m
AD = 10,97 m
AG = 1,37 m
RH = 6,4 m

1. Sur tableur, recopie et complète le tableau ci-dessous.

	AB	AD	AG	RH
Longueur réelle (m)	23,77	10,97	1,37	6,4
Longueur réelle (cm)	2377	1097	137	640
Longueur sur le schéma (cm)	26,41	12,18	1,52	7,11

x100

2. Annote le schéma ci-dessus avec les longueurs à avoir sur le schéma. Arrondis au mm.
3. Représentons maintenant le terrain de tennis à l'échelle sur Geogebra.
   - Ouvre Geogebra et place le point A en (0;0)
   - Enregistre ton fichier selon la syntaxe : TP5_NOM_tennis
4. Indique les coordonnées des points suivants :
   - B=(26,4 ; 0)
   - C=(26,4 ; 12,2)
   - D=(0 ; 12,2)

Place les points B, C et D en tapant leur coordonnées dans la barre de saisie en bas de l'écran.
ATTENTION : sur Geogebra, il faut utiliser le point pour écrire un nombre décimal.

5. Trace le polygone ABCD et colorie-le en bleu. Mets l'opacité à 50.
6. A l'aide du bouton "milieu" de Geogebra, place E milieu de [AB], F milieu de [AD], K milieu de [CD]. Trace ensuite le segment [EK] et place H en son milieu.
7. Pour placer G, trace le cercle de centre A et de rayon AG. G se trouve alors à l'intersection de [AD] et ce cercle.
8. Reproduis la partie à gauche de (EK), le filet, et utilise le bouton "symétrie" pour compléter le schéma.

Collège Marie Curie 1 SAUTON Valérian — Collège Marie Curie 2 SAUTON Valérian

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

MATHÉMATIQUES ET MENUISERIE

Jean-Michel Bertolaso

Le Bac Pro trois ans dans sa version 2010-2019 comptait dans le volume horaire des heures d'EGLS (Enseignement Général Lié à la Spécialité).

En bac pro TMA (Technicien Menuisier Agenceur), lors de l'année 2018/2019, au Lycée Professionnel Métiers du BTP de Montigny-lès-Metz, mon collègue Éric Ackel, professeur de menuiserie, et moi-même avons eu l'idée de travailler sur un projet de sièges en forme de polycubes dont la destination finale serait, par exemple, le hall d'entrée du bâtiment externat.

Un **polycube** est un solide formé de plusieurs cubes identiques reliés entre eux par au moins une face. On distingue :

- 1 dicube formé de 2 cubes.
- 2 tricubes formés de 3 cubes.
- 8 tétracubes formés de 4 cubes.
- 29 pentacubes formés de 5 cubes.
- 166 hexacubes formés de 6 cubes ...

Ci-contre, le choix des polycubes à construire ;
les couleurs sont celles de la façade du Lycée.

La contribution des mathématiques au projet a été d'étudier chaque polycube choisi pour en faire un siège, le dessiner en perspective, chercher la dimension des faces des différents cubes et pavés à réaliser en atelier pour les assembler. La dernière étape sera d'éditer une feuille de débit précise (document qui sert au professionnel à quantifier les matériaux utilisés dans la construction des pièces), détaillant les surfaces mais aussi la masse totale.

Travail individuel élève

J'ai un polycube miniature devant moi, je le représente en perspective.

Je détermine le nombre de solides (pavés ou cubes) que je devrai assembler pour obtenir mon polycube.

J'identifie chacune des faces de ces différents solides, je les représente en indiquant les cotes. (Je précise le nombre de faces identiques)

J'édite une feuille de débit à l'aide d'un tableur. Outre les dimensions, je calculerai la surface, le volume et la masse de chaque face à réaliser dans un panneau d'aggloméré de 22 ou de 18 (J'irai au préalable chercher la valeur de la masse volumique de l'aggloméré).

Je mentionnerai la masse totale de ce polycube une fois réalisé en négligeant la masse de colle nécessaire à assembler les solides.

Travail de groupe

Je recense les résultats des camarades ayant les autres polycubes.

Je détermine le nombre de découpes identiques à réaliser dans les panneaux d'aggloméré en minimisant les pertes.

Je fais valider le travail par le professeur d'atelier et, ensemble, nous construisons ces polycubes.

Retour au sommaire

Et voici le résultat final !

Comment réinvestir ce type de projet depuis les nouvelles dispositions post 2019 ?

La transformation de la voie professionnelle, mise en place en septembre 2019 a modifié encore une fois les programmes, mais aussi les horaires.

- Désormais, l'EGLS dans cette appellation, a disparu des grilles horaires mais…
- Des séances de co-intervention permettent de travailler conjointement avec le professeur d'enseignement professionnel (matières concernées dans l'attribution des moyens : les mathématiques d'une part et le français d'autre part). Chacun des deux professeurs doit proposer des séances qui lui permettent d'avancer dans son programme. Il faut donc trouver des points communs dans les deux « référentiels ».
- Dans leur formation, les élèves doivent proposer une réflexion, un travail qui pourrait déboucher sur la réalisation d'un tel objet dans ce qui est nommé le chef-d'œuvre.
- Par contre, les mathématiques ne sont pas systématiquement concernées dans l'attribution des moyens horaires dédiés au chef d'œuvre.

Retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

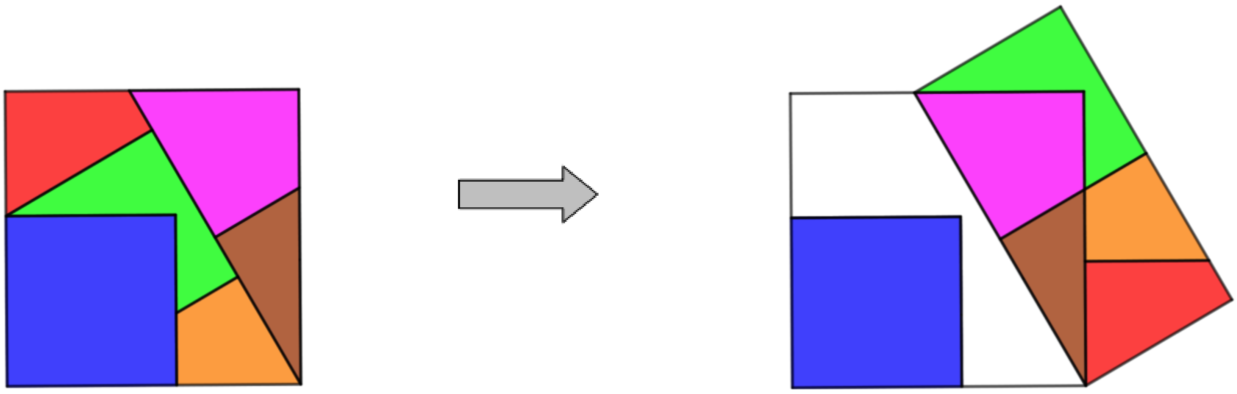
LA TRISECTION DU CARRÉ (PARTIE 1)

Fathi Drissi
Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

Comment découper un carré en trois carrés superposables et en un nombre minimal de morceaux ?

Ce problème de trisection du carré remonte au X^{e} siècle dont une première solution en neuf morceaux fut proposée par Abu'l-Wafa' et c'est seulement en 1891 que Henry Perigal publie la première solution connue en six morceaux.

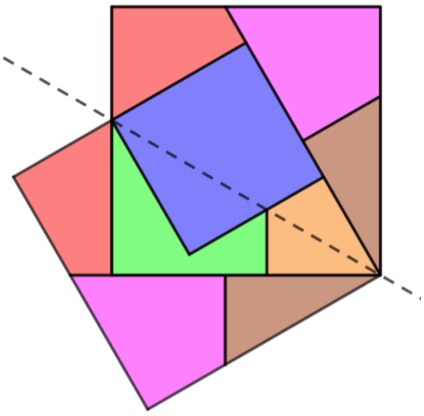
La conjecture que six est le nombre minimal de pièces n'est toujours pas démontrée et il est donc toujours intéressant de partager de nouvelles trisections comportant ce nombre de pièces. Alors, voici trois nouvelles trisections en six morceaux où l'un des trois carrés recherchés est formé d'une seule pièce.

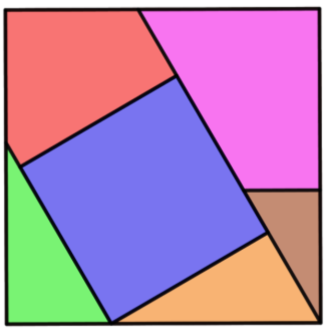


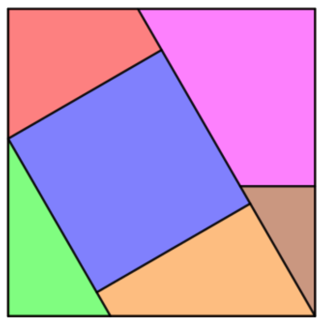
Un carré **Trois carrés superposables**

Les pièces orange, verte et le carré bleu forment un cerf-volant qui peut être retourné autour de son axe de symétrie et permettant ainsi au carré bleu d'occuper deux positions différentes comme le montre le dessin ci-contre.

Cette position du carré bleu à l'intérieur du grand carré a permis de trouver les deux autres trisections ci-dessous.



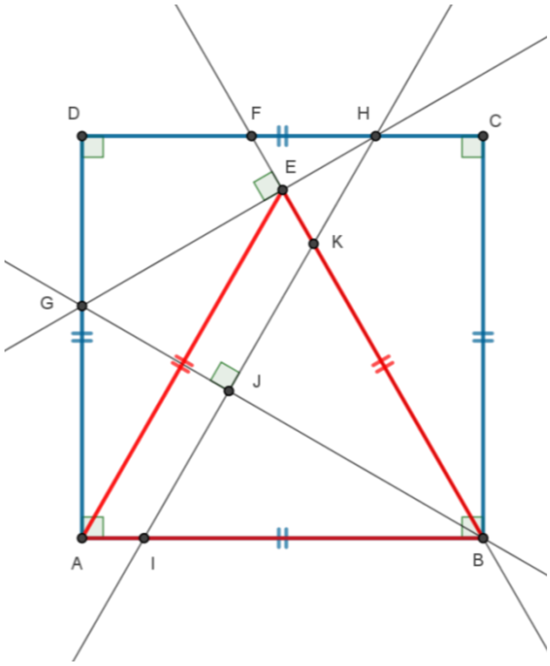




Retour au sommaire

Comment ces trisections ont-elles été trouvées ?

La première trisection présentée plus haut a été découverte en ayant observé que le triangle équilatéral construit à l'intérieur d'un carré et sur l'un de ses côtés permet de découper ce carré en quatre pièces : un quadrilatère ayant deux angles droits (le quadrilatère DFEG sur la figure ci-contre) et trois triangles rectangles superposables qui sont des moitiés d'un triangle équilatéral (les triangles ABG, BEG et BCF sur la figure ci-contre).

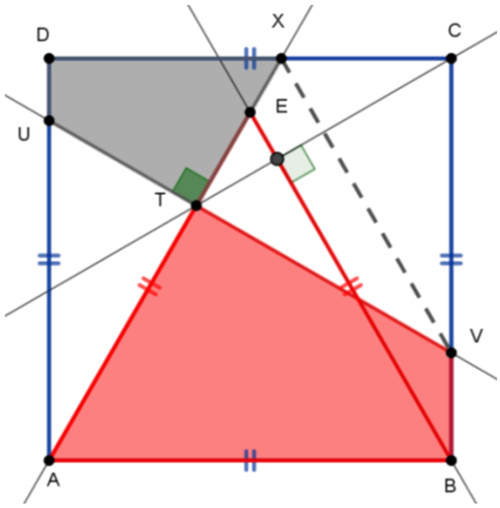


Découpage A

À l'aide de trois carrés superposables découpés comme ci-contre (**Découpage A**), on peut donc réaliser trois agrandissements de ces triangles dans le rapport $\sqrt{3}$. Il reste à réaliser un agrandissement du quadrilatère DFEG dans le même rapport avec les trois quadrilatères superposables restants.

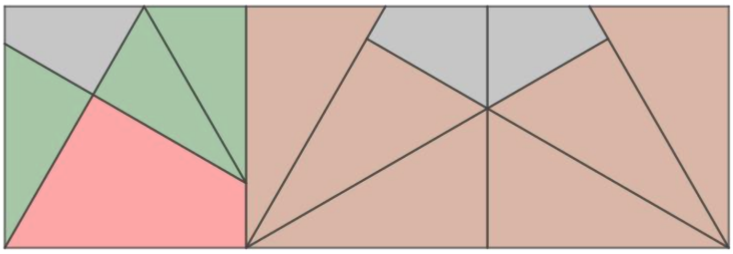
Toutefois, il existe un découpage du carré permettant d'obtenir directement l'agrandissement recherché.

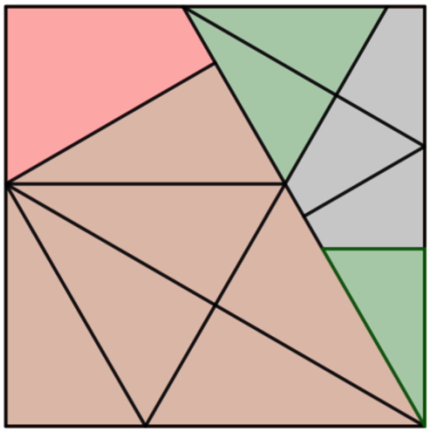
Le découpage ci-contre permet d'obtenir trois triangles rectangles (TAU, TVX et CVX sur la figure ci-contre) et deux quadrilatères dont un est l'agrandissement de l'autre dans le rapport $\sqrt{3}$ (DXTU et ABVT sur la figure ci-contre). De plus, DXTU et DGEF sont superposables. Remarquons aussi que le quadrilatère DXTU et le triangle TAU forment un triangle superposable au triangle ABG de la figure précédente (**Découpage A**).



Découpage B

Ainsi, en découpant trois carrés superposables comme indiqué ci-dessous, les pièces obtenues permettent de réaliser un carré d'aire trois fois plus grande que celle de l' un de ces trois carrés.

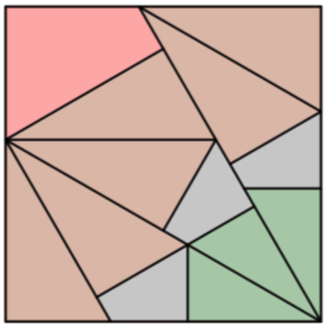




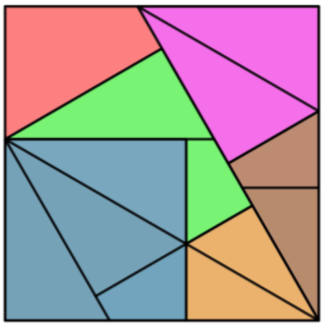
Retour au sommaire

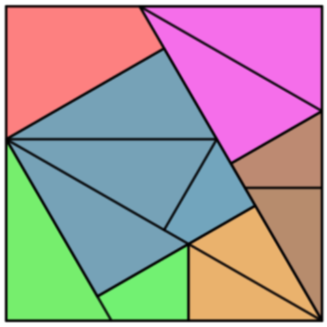
Ces pièces peuvent être réassemblées de différentes manières et certains assemblages permettent de minimiser le nombre de pièces.

Par exemple, les figures ci-dessous montrent des assemblages réduisant le nombre de pièces à six.

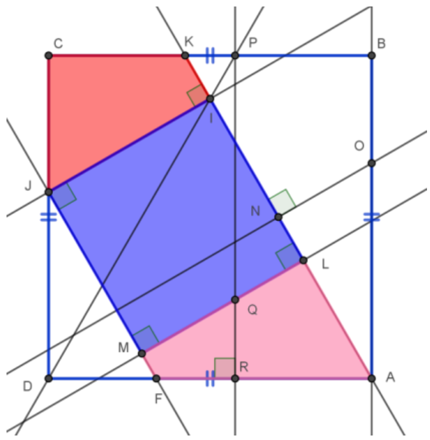


Le cerf-volant formé des pièces bleue, verte et orange admet un axe de symétrie, ce qui permet de placer le petit carré bleu sur les côtés du grand carré et d'obtenir une dissection de la surface en forme de L en deux carrés.

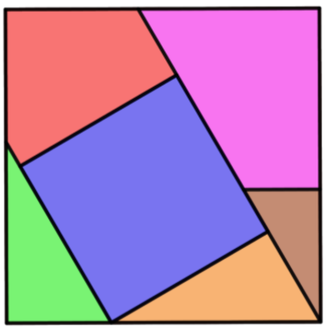


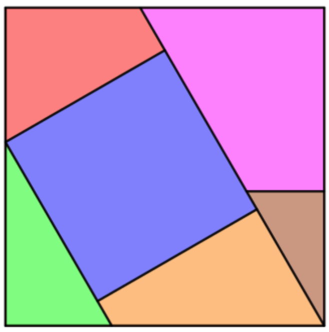


Par ailleurs, comme pour la trisection de Christian Blanvillain, le découpage ci-contre permet d'obtenir une infinité de solutions par glissement des pièces rouge, bleue et rose le long de la droite (AK).



Parmi ces solutions, on retiendra les deux trisections suivantes.

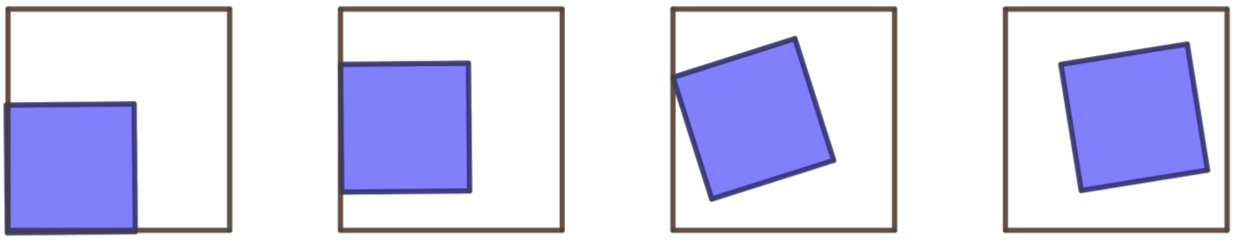




Pour conclure, les six pièces des trisections présentées dans cet article ne sont ni symétriques, ni de même aire mais ce sont les seules trisections en six pièces où l'un des trois carrés recherchés est formé d'un seul morceau, à l'intérieur du grand carré et non accolé au bord.
En 2010, Christian Blanvillain et János Pach ont publié une trisection du carré en six morceaux où toutes les pièces ont la même surface, et élégante par sa symétrie. Le Petit Vert n°139 l'avait évoquée, ainsi que deux autres trisections formées de six pièces.

Retour au sommaire

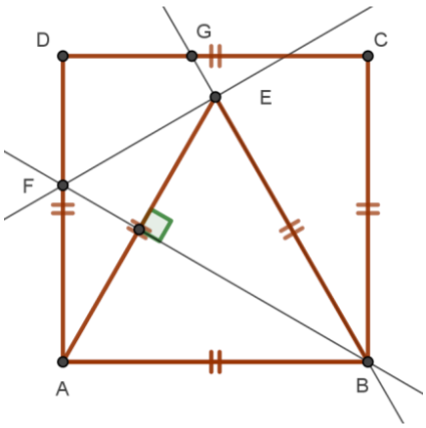
Dans leur article, les auteurs conjecturent qu'il n'est pas possible de réaliser une trisection du carré en moins de six pièces. Si une telle trisection était possible, alors on aurait nécessairement l'un des trois carrés recherchés en un seul morceau.
On peut donc se poser la question suivante : "En plaçant un carré à l'intérieur de son agrandissement dans le rapport $\sqrt{3}$ comme sur les figures ci-dessous, peut-on disséquer la surface restante qui l'entoure en deux carrés superposables au premier et en moins de cinq morceaux ?"

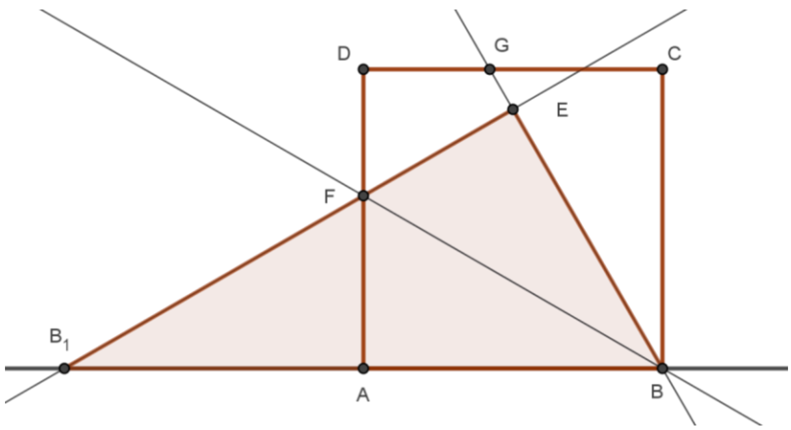


Quelques justifications

Découpage A

Sur la figure représentée ci-contre, ABCD est un carré de côté *a* et ABE un triangle équilatéral.
Le triangle BCG est rectangle en C avec $\widehat{CBG} = 30°$. Il s'en suit que $BG = 2CG$ et d'après le théorème de Pythagore, $BG = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$.
Le point F est l'intersection de la médiatrice de [AE] avec [AD]. Donc, ABF est un triangle rectangle avec $\widehat{ABF} = 30°$.
Et comme AB=BC, les triangles ABF et BCG sont isométriques.
Quant aux triangles ABF et BEF, ils ont un côté en commun et un angle de même mesure, $\widehat{ABF} = \widehat{EBF}$, compris entre deux côtés de même longueur. Ils sont donc isométriques.
Ainsi, les trois triangles ABF, BEF et BCG sont des demi-triangles équilatéraux et superposables.

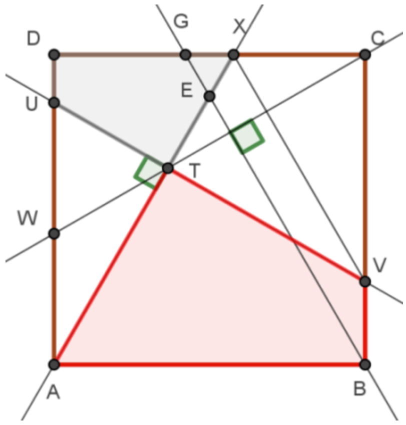




Le triangle BB_1E est formé de trois de ces triangles, c'est donc leur agrandissement dans le rapport $\sqrt{3}$.

Retour au sommaire

Découpage B



Pour ce découpage, on construit T à l'intersection de la perpendiculaire à (BE) passant par C avec [AE], puis on trace la perpendiculaire à (AE) passant par T qui coupe [BC] en V et [AD] en U.

Les triangles ADX et BCG sont des demi-triangles équilatéraux (des triangles rectangles dont un angle aigu mesure 30°).

La droite (CW) est perpendiculaire à (BE), donc elle coupe le triangle BCG en deux triangles rectangles qui lui sont semblables et il s'en suit que CDW est un demi-triangle équilatéral superposable à ADX et BCG. Par conséquent DX=DW et CX=AW.

Les triangles rectangles ATU et CDW ont un angle aigu de 30°, donc semblables et par conséquent les angles $\widehat{TUW}$ et $\widehat{TWU}$ mesurent 60°. Il en résulte que TUW est un triangle équilatéral et TWA isocèle en W.

De même, le triangle CXT est isocèle en X et CTV est un triangle équilatéral.

On en déduit que les triangles CVX, VXT et TAU sont superposables.

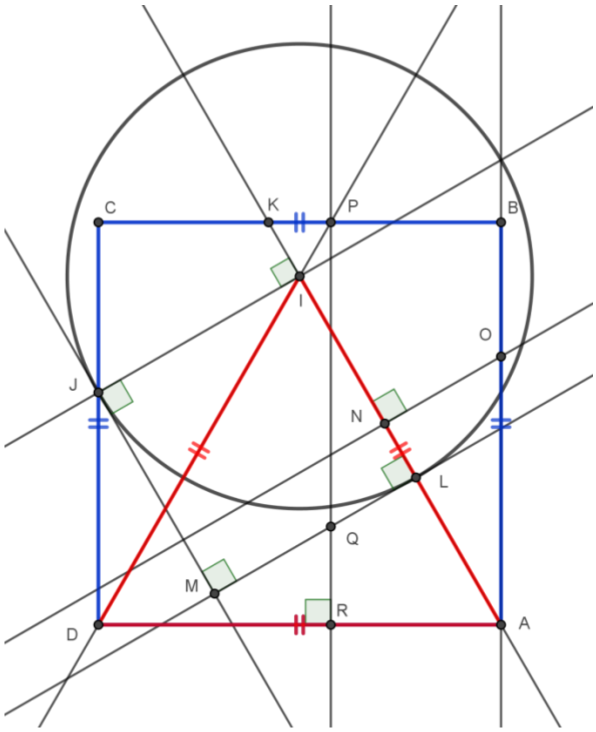
On a $CG = DX = \frac{BG}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, d'où $AB = DX\sqrt{3}$.

De plus, les quadrilatères DXTU et ABVT se décomposent en deux triangles, l'un rectangle et isocèle, l'autre rectangle dont un angle aigu mesure 15°, donc deux à deux semblables.

Ainsi, le quadrilatère ABVT est un agrandissement du quadrilatère DXTU dans le rapport $\sqrt{3}$.

Un programme de construction

Voici un programme de construction permettant de réaliser cette trisection.



Soit ABCD un carré.

1) Construire le triangle équilatéral AID. Les droites (DI) et (AI) coupent [BC] respectivement en P et K.
2) Tracer la perpendiculaire à (AK) en I. Elle coupe [CD] en J.
3) Tracer le cercle de centre I passant par J. Il coupe [AI] en L.
4) Tracer la perpendiculaire à (IJ) en J et la perpendiculaire à (AI) en L. Elles se coupent en M.
5) Tracer la médiatrice de [AK]. Elle coupe [AB] en O.
6) Tracer la perpendiculaire à (BC) en P. Elle coupe [ML] en Q et [AD] en R.

Note du comité de rédaction

Christian Blainvillain a intégré les récentes découvertes lorraines sur le [site](#) présentant les trisections de carré du 10ème siècle à aujourd'hui. On y trouve aussi de quoi réaliser les découpages en utilisant les possibilités d'un FabLab !

Retour au sommaire

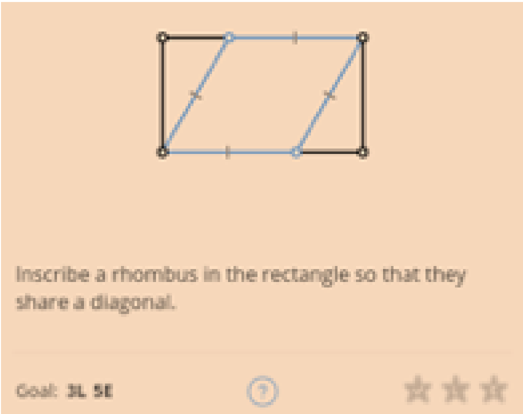
VU SUR LA TOILE

POINTAGE ET QUADRILLAGE

Gilles Waehren

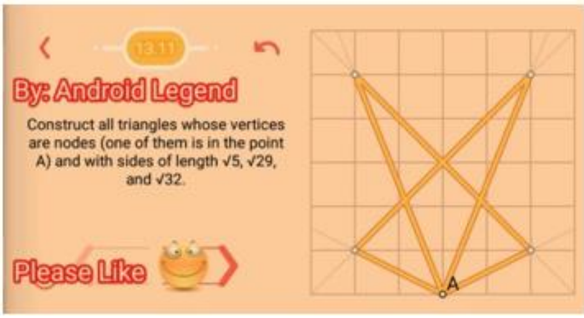
La géométrie classique s'est longtemps appuyée sur l'étude de figures planes tracées sur un support vierge. Les propriétés de la construction sont indiquées littéralement ou par un codage spécifique (pour lequel la quantité de symboles n'est pas toujours suffisante…). Le recours au quadrillage ou au réseau pointé est, en général, réservé à l'apprentissage. Pourtant, une figure sur quadrillage, ou réseau pointé, peut souvent se passer d'explications : l'unité de longueur et l'unité d'angle sont données par le support ; que le repère soit orthonormé ou non comme on le verra plus loin. Ainsi, les énoncés posés sur ce type de support peuvent-ils parfois se passer de question et ouvrir des voies vers des entrées de problèmes par l'image.
Pour les férus de la feuille blanche, on pourra recommander les problèmes d'Eulidea, une application disponible sur PC et sur smartphone. Euclidea est très progressif, construisant pas à pas les notions de géométrie élémentaire : triangle équilatéral, médiatrice, perpendiculaire… permettant d'ajouter aux outils élémentaires (règle, compas, point) de nouvelles fonctionnalités. Mais, pour le géomètre aguerri, ces exercices parfois élémentaires vont se corser si l'on veut les réussir complètement (obtenir les trois étoiles !). En effet, chaque construction peut être réalisée en un minimum de tracés, à vous de les trouver.

Dans l'exemple ci-contre, on s'efforcera d'inscrire un losange dans un rectangle en traçant 3 lignes et en procédant à 5 mouvements.



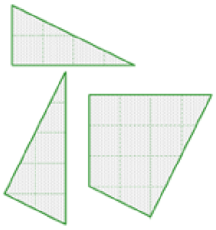
Dans certains cas, il est demandé de trouver toutes les méthodes possibles.
Pour passer à la catégorie supérieure (il y en a 15 pour un total de 120 niveaux), un minimum d'étoiles est requis.

Dans la même famille, sur support quadrillé, on peut installer Pythagorea (ci-dessus), uniquement sur smartphone pour celui-ci (Android ou IOS). Là encore, la progressivité est souvent bien calibrée et seuls les derniers exercices de chaque niveau peuvent donner du fil à retordre.



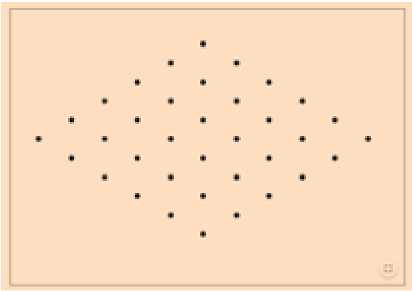
On utilisera ici le quadrillage pour créer des angles droits, des segments de même mesure, déterminer les milieux de segments et construire ainsi symétriques, losanges, triangles isocèles... dans des configurations loin d'être évidentes. Parfois, il faudra faire preuve d'une certaine finesse pour placer un point d'intersection. La figure du problème 13.11 donne la solution en segments jaunes, épais ; la plupart des solutions sont disponibles à cette adresse.

Retour au sommaire



Cette démarche sur quadrillage est depuis longtemps au centre des recherches du groupe Jeux de l'APMEP Lorraine, comme c'est le cas pour le puzzle à trois pièces ci-contre.

Vous pouvez retrouver des objets à découper et à manipuler sur le site de notre régionale, dans la rubrique Jeux et objets à manipuler, où figurent, entre autres, les puzzles de Fribourg ou de Saarlouis.



Le jeu de Hip est également un bon moyen de travailler, au crayon, sur un réseau pointé. Pour aller plus loin, on pourra s'exercer sur des parallélogrammes non rectangles. Là aussi, notre groupe Jeux a imaginé des défis et la possibilité de les résoudre en ligne.

Pythagorea 60 (lien vers une page pour tous les télécharger) reprend le principe de Pythagorea mais en s'appuyant sur des triangles équilatéraux. Beaucoup des thématiques sont communes (symétries, bissectrices, triangles isocèles…) mais le défi est de modifier sa vision pour percevoir les propriétés qui sont conservées dans ce type particulier de repère. Pour cette version, les solutions sont également disponibles.

Certains des problèmes de Pythagorea m'ont pris plus d'une heure. N'hésitez pas à les laisser mûrir ! D'autres sont d'une simplicité confondante ; pensons alors à nos élèves : cette apparente facilité ne pourra que les inciter à aller plus loin. En tout cas, voilà de quoi occuper nos prochaines vacances !

gilles.waehren@wanadoo.fr

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

CHARLIE, LE LUCHRONE DE BOURGES

Groupe Maths et Arts

À l'automne 2021, dès leur arrivée à Bourges pour les Journées nationales de l'APMEP, des adhérent.e.s de la régionale ont remarqué cette structure métallique sur la place de la gare : oh un tétradécaèdre, annonça l'une d'entre elles.

Oh, un cube tronqué, pensa quelqu'un d'autre. Il n'est pas régulier, ce n'est pas un solide de Platon.

Les photos échangées à la suite de ces Journées Nationales ne montrent pas l'éclairage de la structure : il avait cependant été repéré par les participant.e.s.

L'envie est venue d'en savoir un peu plus…

L'Encyclopédie de Bourges nous indique les tribulations de cette œuvre d'Alain Le Boucher. Installée en 1986, démontée des années plus tard pour être finalement réhabilitée et réinstallée en 2000.

Sur le site qui lui est consacré, Alain le Boucher est présenté comme le « sculpteur de lumière ». Il nous fallait donc partir à la recherche de ses réalisations jouant avec la lumière : les Luchrones. Rien de mieux que des vidéos pour percevoir les animations imaginées.

L'une d'entre-elles montre ce qui a été fait sur la structure « The Dice » semblable à celle réalisée à Bourges. « Charly » est le nom donné à l'œuvre par les habitants de Bourges, « le dé » aurait peut-être été plus conforme à ce qu'avait imaginé l'artiste.

L'œuvre « Trois dimensions d'incertitude » présente un éclairage différent, en hommage à Pierre Boulez.

Retour au sommaire

Quelques compléments

Alain Le Boucher reconnait avoir eu comme maître Henry Comby, artiste connu des élèves du lycée Louis Vincent à Metz car une de ses œuvres orne le hall d'entrée de leur établissement.

Le site mathscurve nous offre une série d'animations présentant la formation de polyèdres tronqués. Il nous met aussi sur la piste d'un très riche site allemand.

L'IREM de Paris-Nord utilise GeoGebra pour nous offrir une belle collection de polyèdres.

Pour certains dés en bois, les surfaces de contact avec le plan de jeu sont des disques. Dans ce cas, la modélisation n'est pas en cube tronqué mais une sphère tronquée à l'aide de trois paires de plan parallèles.
Il serait intéressant de savoir comment ces dés ont été fabriqués.

Retour au sommaire

VU POUR VOUS

PHOTOS ET MATHÉMATIQUES

Le 14 mars 2022, le jour de Pi (*Pi-Day* fêté le 3-14 dans le monde anglo-saxon), organisée par l'*International Mathematical Union* une collecte de photos évoquant les mathématiques avait été organisée. Plus de 3 200 clichés ont été fournis et sont accessibles.

Dans ce bel ensemble de photos, il y a de quoi étonner les élèves … et leurs enseignant.e.s
Aller voir sur place ces objets va fournir un intérêt supplémentaire à certains voyages.

N'hésitez pas à envoyer vos propres clichés au Petit Vert : il saura les accueillir.

Retour au sommaire

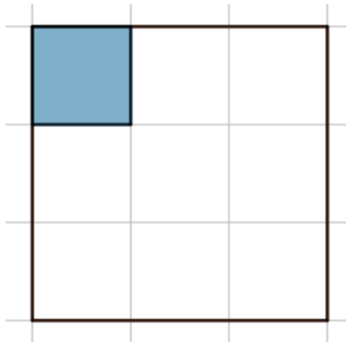
MATHS ET DÉCOUPAGE

LE CARRÉ BALADEUR

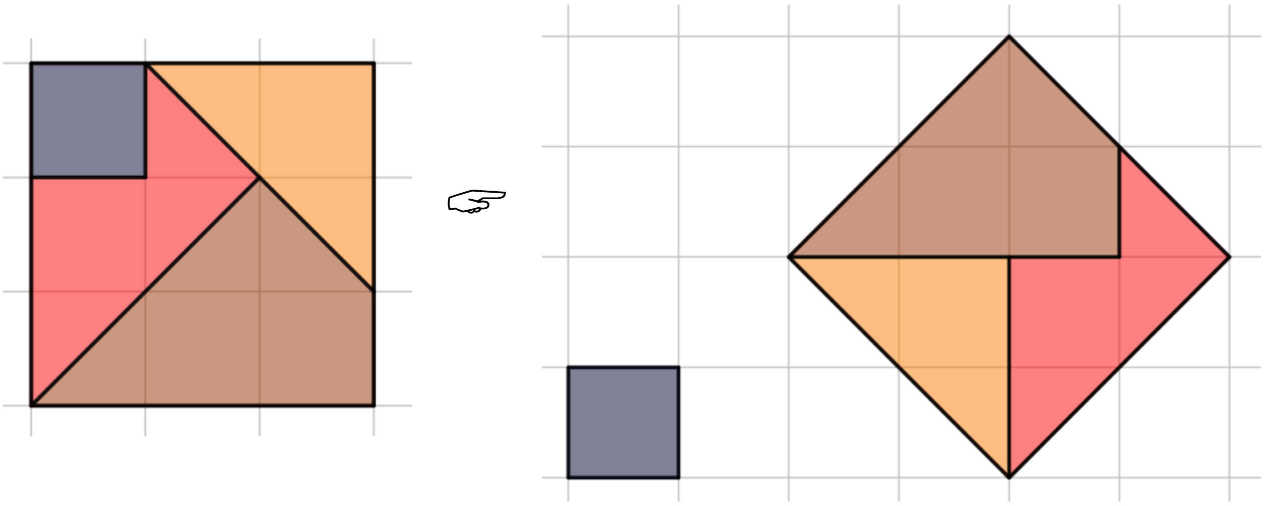
APMEP Lorraine - Groupe Jeux

Le Rallye Mathématique de Lorraine de 2022 proposait aux élèves de relever le défi suivant :

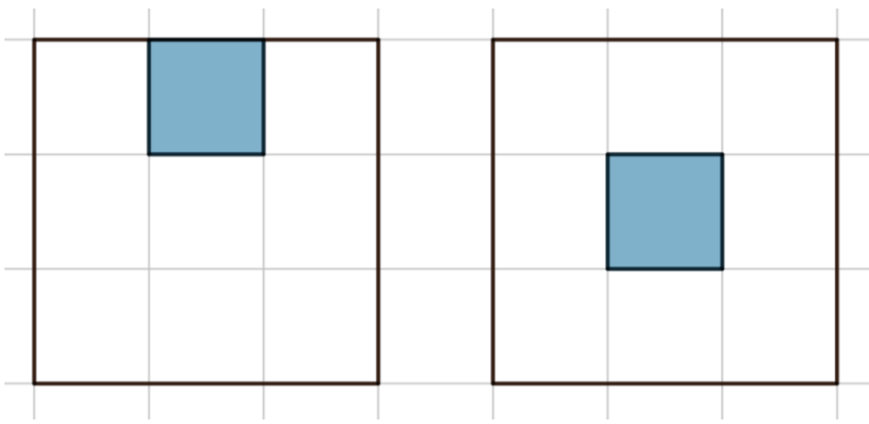
La figure ci-contre représente un carré 3×3 auquel on a enlevé le carré bleu dans l'un des coins.
Partager l'hexagone obtenu (« carré écorné ») en trois parties afin de reconstituer un carré de même aire.



Une solution pour ce défi utilise le découpage proposé par Manfred Pietsch.

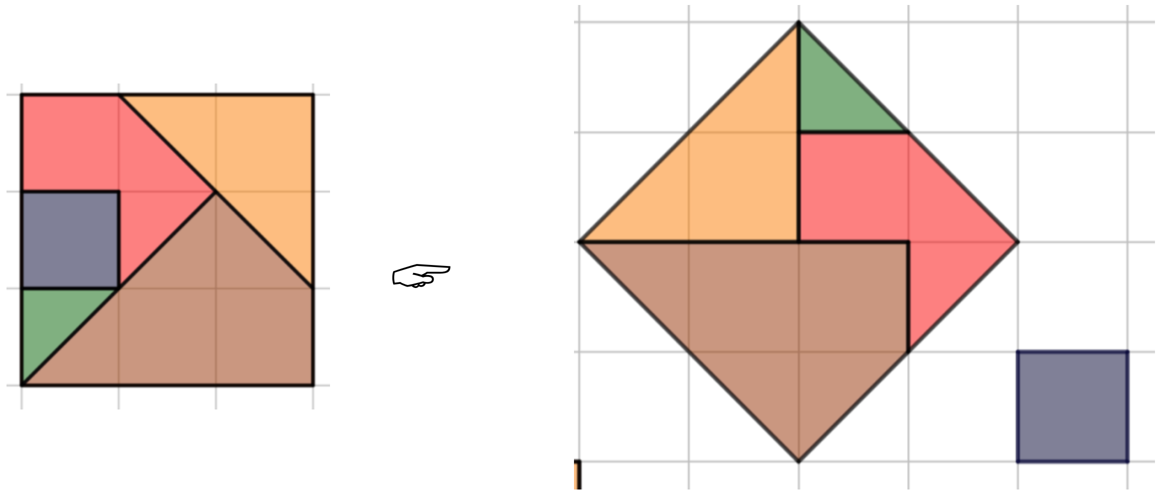


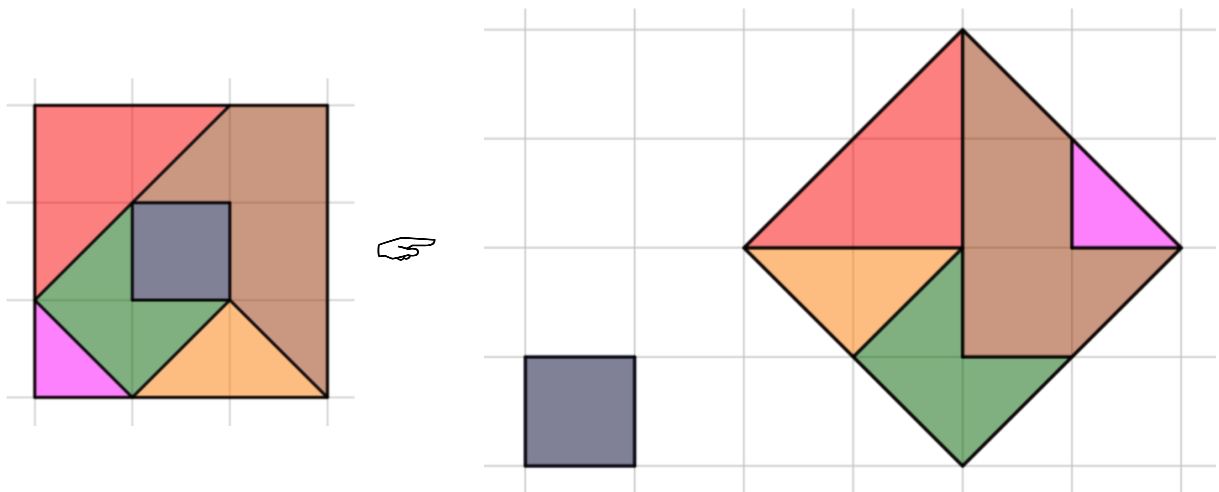
Qu' en est-il pour les deux autres positions possibles du carré bleu ?
En combien de morceaux minimum peut-on découper la surface restante et reconstituer un carré de même aire ?



Voici un découpage en cinq morceaux pour chacune des deux positions du carré bleu.

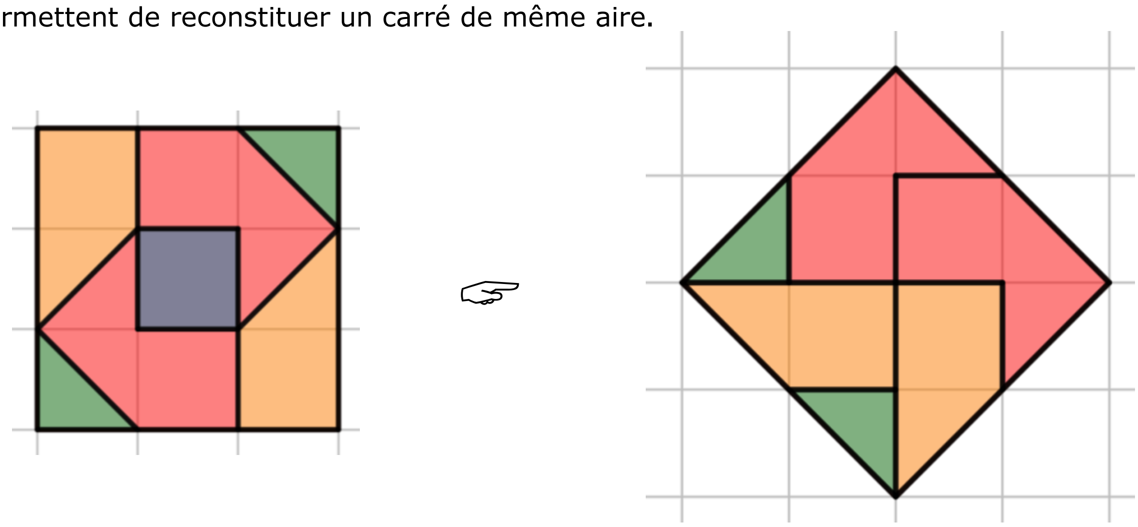
Retour au sommaire





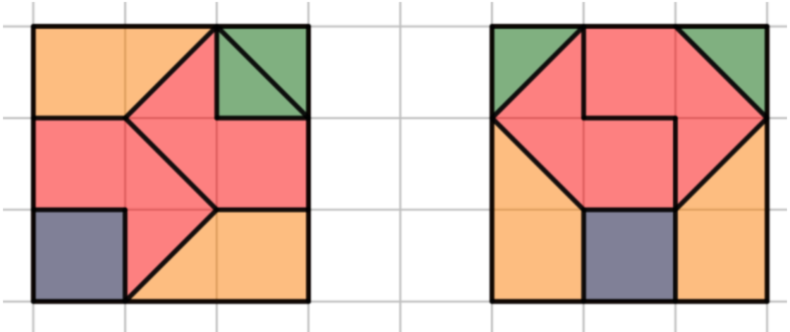
Pour le dernier découpage, on peut remarquer que l'hexagone formé par les pièces violette, verte et le carré bleu peut être retourné, ce qui permet au carré bleu de changer de position.

En enlevant le carré central, on peut découper la surface restante en six morceaux qui permettent de reconstituer un carré de même aire.



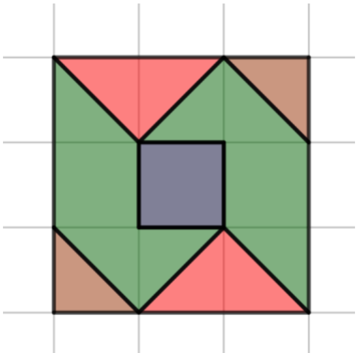
De plus, les pièces de ce découpage peuvent être réassemblées de différentes manières permettant au carré bleu d'occuper l'une des trois positions comme l'indique le dessin ci-dessous, d'où le titre de cet article.

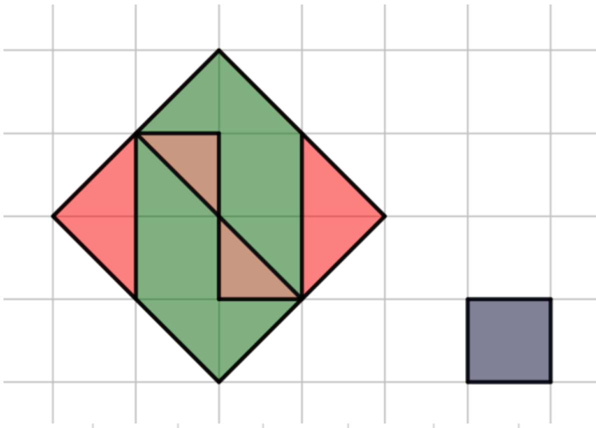
Retour au sommaire

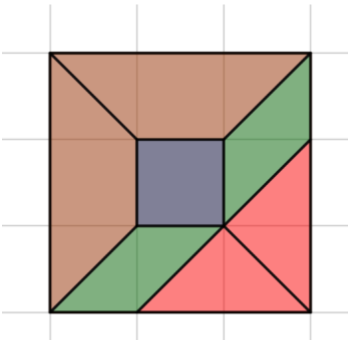


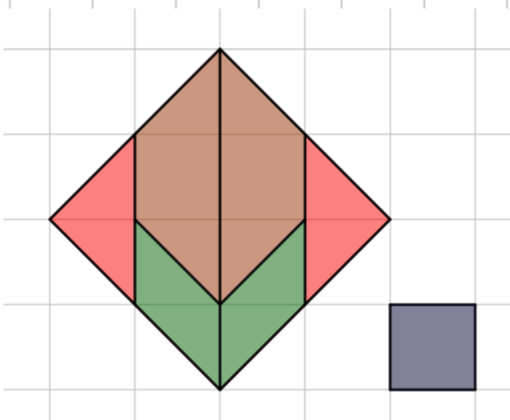
Existe-t-il un découpage en moins de six morceaux permettant de faire la même chose ?

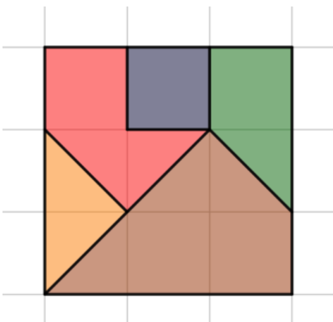
Pour compléter, voici d'autres découpages. Dans les deux premiers, des symétries sont très présentes.

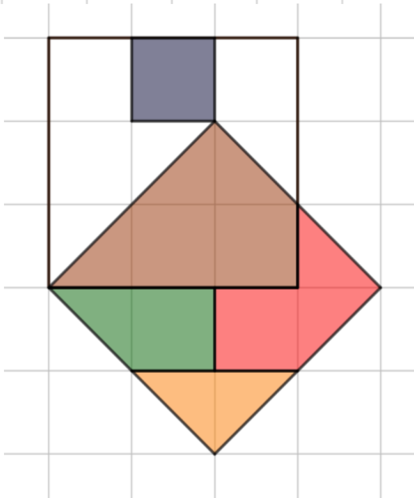












Les pièces de ces trois découpages peuvent-elles être réassemblées de différentes manières permettant au carré bleu d'occuper l'une des trois positions possibles ?

Retour au sommaire

MATHEMATIQUES ET JEUX

LE RETOUR DES CARRÉS DE FRANÇOIS BOULE

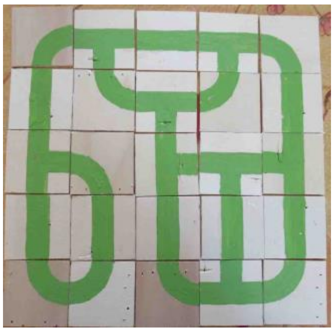
APMEP Lorraine
Groupe jeux

Le Petit Vert n°129 présentait des circuits obtenus avec les vingt-cinq carrés imaginés par François Boule. Des pièces prêtes à dupliquer sont accessibles sur notre site. En 2021, les joueuses et joueurs de la régionale ont eu envie de reprendre les recherches et ont exploré d’autres voies.

Des circuits fermés dans un carré 5x5

De nouveaux circuits dans des carrés 5x5 sont apparus, en voici trois exemples.

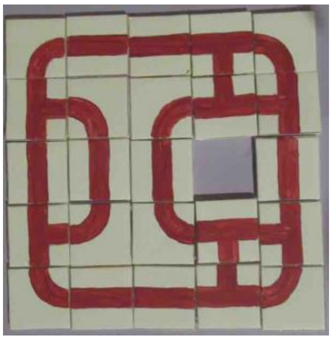
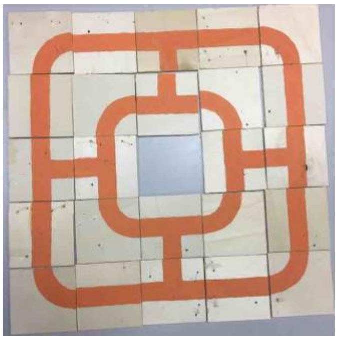




Des doubles circuits sont apparus. En 2017, nous n’avions pas envisagé cette possibilité.



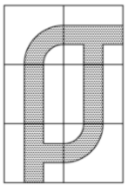
Des circuits symétriques dans le carré 5x5
Il est facile de se convaincre que la pièce en nombre impair doit être placée au centre du carré 5x5. Cette pièce n’admettant aucun élément de symétrie, nous ne pourrons pas réaliser de circuits symétriques dans ce carré, il va falloir laisser une « case » vide.

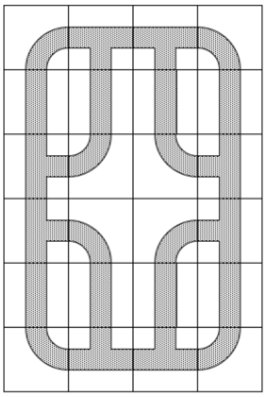
Cette configuration admettant un centre de symétrie et quatre axes de symétrie a été retrouvée en 2019 par un élève de collège mis en situation de de recherche pendant la « semaine des maths ».

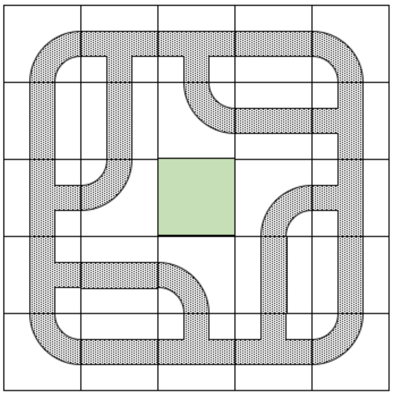
Retour au sommaire

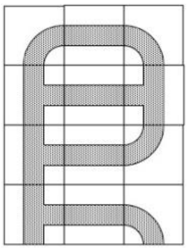
D’autres circuits symétriques



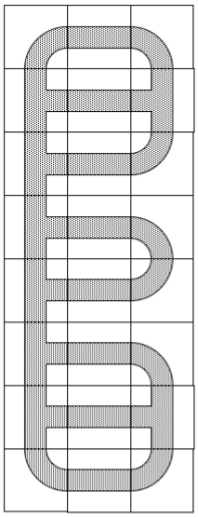
Des chemins symétriques sont créés en appliquant des symétries et des rotations à cet ensemble de six pièces.

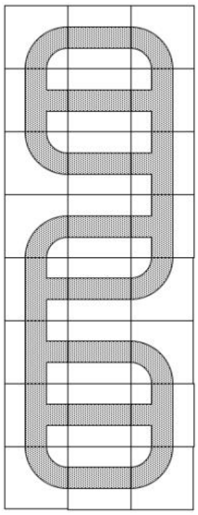






Des chemins symétriques sont créés en appliquant des symétries à cet ensemble de douze pièces.



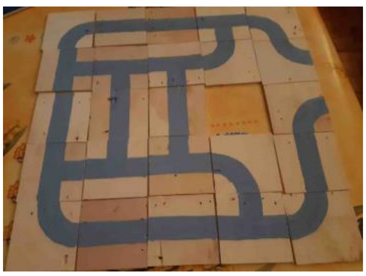


Avec de très jeunes enfants

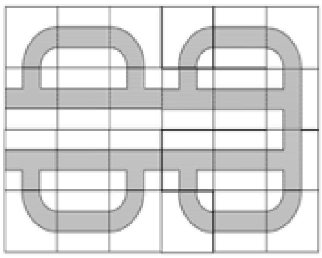
Les circuits automobiles fermés ne leur sont pas encore familiers. L’envie leur vient rapidement de prévoir une entrée et une sortie pour accéder et sortir du circuit.

Il nous a semblé intéressant d’exploiter cette nouvelle piste de recherche.

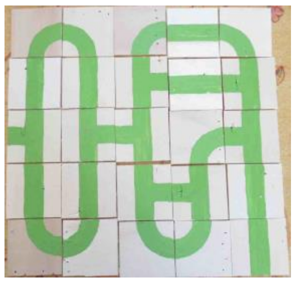
Des circuits ouverts



Avec 24 pièces



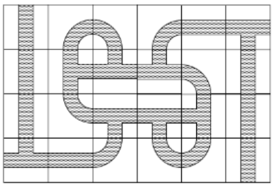
Avec 24 pièces



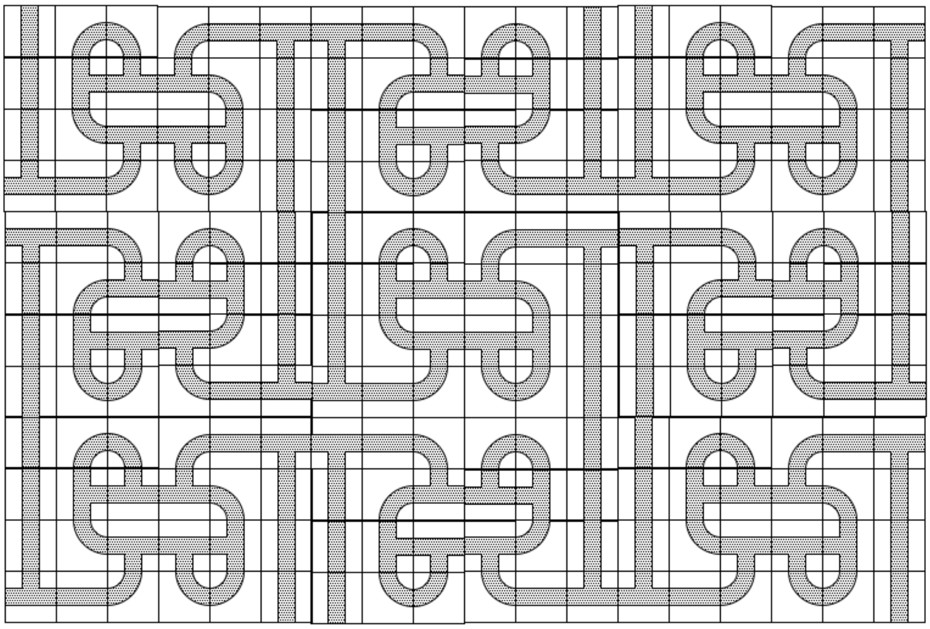
Avec les 25 pièces

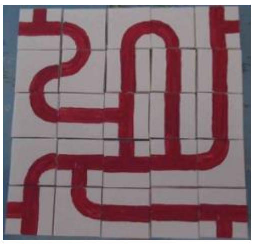
[Retour au sommaire](#)

En augmentant le nombre « d'entrées-sorties »

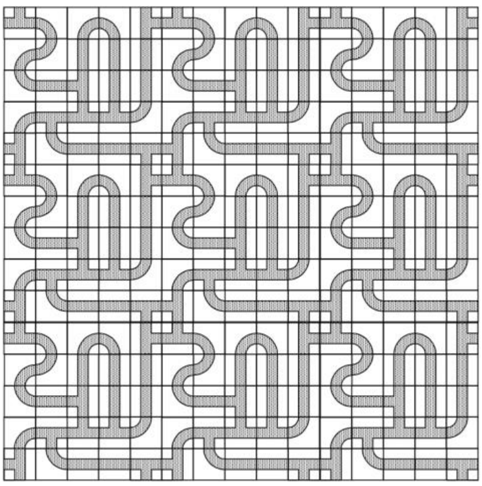


Prévoir une entrée-sortie sur chaque côté de ce rectangle nous fournit une tuile de pavage par symétrie axiale ou par symétrie centrale. L'exemple ci-dessous utilise des symétries axiales, le carreleur préférera sans doute des symétries centrales.

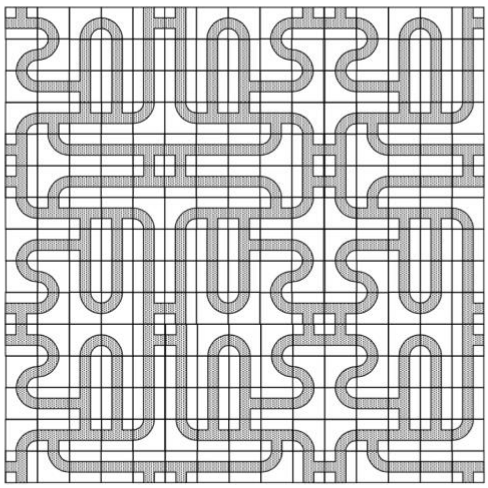




La disposition sur chaque côté du carré des deux entrées-sorties nous fournit une tuile de pavage par translations, symétries et rotations ou par combinaison de ces transformations.

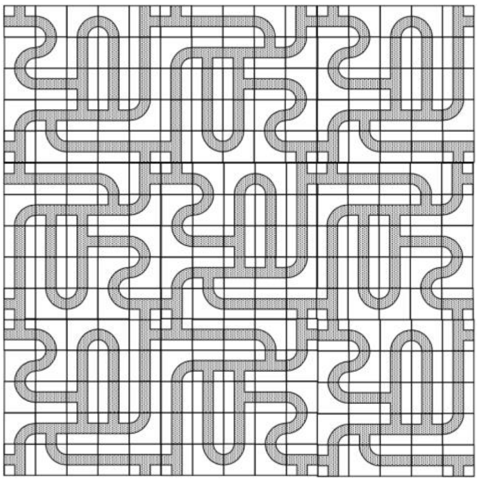


Pavage par translation

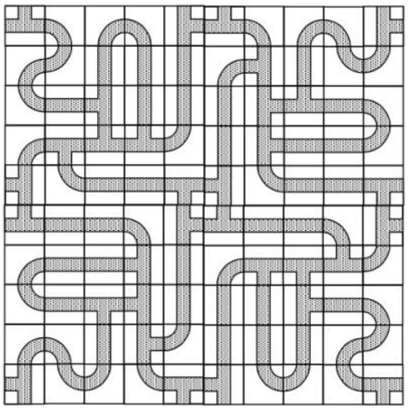


Pavage par symétries orthogonales

Retour au sommaire

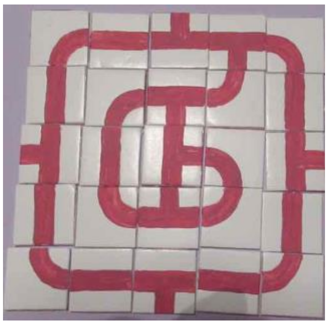


Pavage par symétries centrales



Pavage par rotations
Des symétries axiales ou des translations pourront ensuite être mises en œuvre.

Quels sont les nombres minimal et maximal d'entrées-sorties pour ces carrés 5x5 formant des tuiles de pavage ?



1 entrée-sortie
sur chaque côté

5 entrées-sorties
sur chaque côté

Des exemples de pavages obtenus avec ces tuiles (quatre « entrées-sorties » et vingt « entrées-sorties ») ont été déposés sur le site de la régionale.

Poursuite de la recherche en 2022 ?

Dans ce carré 4x4, il n'y a qu'une seule entrée-sortie.
Est-t-il possible de construire un carré 5x5 avec une seule entrée-sortie ou un nombre impair d'entrées-sorties ?
Si impossibilité il y a, peut-on le prouver ?

Pour l'instant, cet article n'évoque que des tuiles de pavage. En préalable avec les élèves, des frises pourraient être mises en avant.
La manipulation des carrés 5x5 photographiés ci-dessus nous a remis en mémoire les azulejos d'Eduardo Nery. Jorge Rezende les utilise pour une classification des pavages obtenus. L'IREM d'Aix-Marseille nous relate leur utilisation dans des classes de sixième. Les tuiles carrées formées des vingt-cinq pièces de François Boule inspireront peut-être d'autres projets en classe.
Pascal Peter nous donne accès à un logiciel libre qui facilitera sans doute certains dessins.

Sur le site de notre régionale se trouvent deux panneaux d'exposition évoquant les circuits fermés et les circuits ouverts pouvant être réalisés avec les carrés imaginées par François Boule.

Retour au sommaire

MATHS DANS LA VIE COURANTE

HI-HI-HI-HI OU YVES ?

Groupe Maths et Arts de l'APMEP Lorraine
François Drouin

Gare de Metz (57)

Cloitre Saint-Gengoult à Toul (54)

Dans un bureau à Saint-Mihiel (55)

Dans l'illustration d'une comptine allemande

À Lucerne (Suisse)

À Lisle-en-Barrois (55)

Faut-il écrire IIII ou IV en écriture utilisant les chiffres romains ? Les cadrans visibles sur les monuments français semblent privilégier IIII alors que d'autres utilisent IV.

Retour au sommaire

Il est à noter que les inscriptions repérées sur le fronton de la mairie de Lisle-en-Barrois utilisent IIII sur le cadran mais gardent IX pour l'indication de la date de construction.
La revue « Ça m'intéresse » nous fournit une explication retrouvée également sur d'autres sites. IIII et IV ont été longtemps utilisés sans qu'une écriture ne soit privilégiée. Sur les cadrans, IIII a ensuite été préféré à IV en horlogerie (en particulier franc-comtoise) pour des raisons esthétiques et pour éviter des confusions entre VI et IV vu « à l'envers ».

En Croatie

À Krk

À Split

Le cadran de l'horloge repérée à Krk (sur l'ile éponyme de la mer adriatique) indique les vingt-quatre heures du jour, midi est en haut du cadran, minuit est en bas du cadran. Les chiffres romains indiqués utilisent tous l'écriture additive : pas de IV, pas de IX.
Le cadran de l'horloge repérée à Split i(autre ville portuaire croate peu éloignée de la précédente) indique lui aussi les vingt-quatre heures du jour. Les chiffres romains utilisent IIII et IV.

Sur les tables d'ombre de certains cadrans solaires

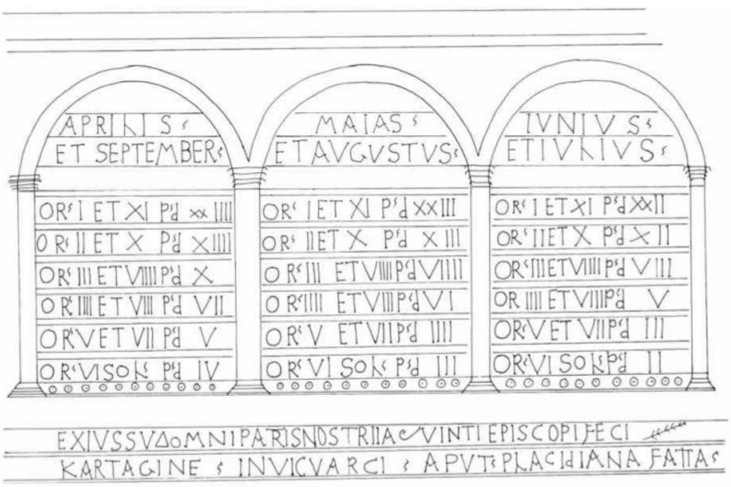


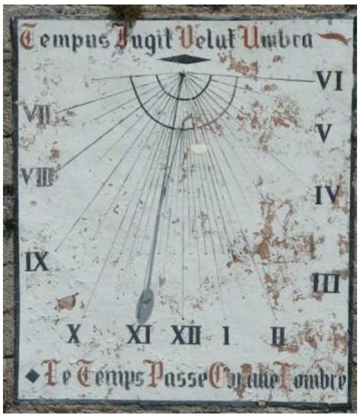
FIG. 9. – La table d'ombre, restitution de la partie conservée.

Les écritures IIII, VIIII et XIIII sont visibles sur cette table d'ombre retrouvée sur le site d'Ammaedara à Haïdra (Tunisie).

Retour au sommaire

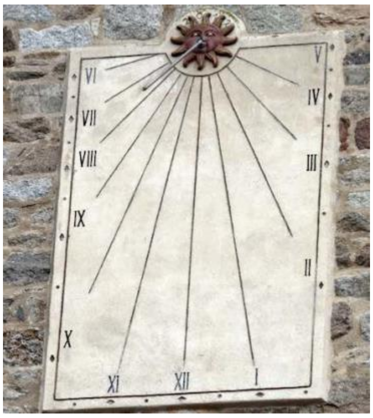
Sur des cadrans solaires repérés lors de balades en France

Concarneau (29)



Roscoff (29)

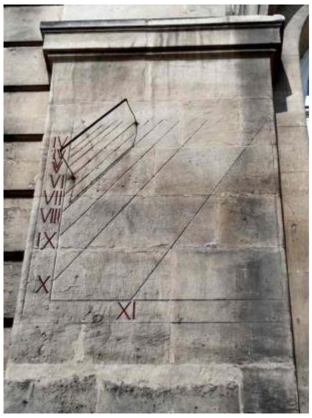
Pleumeur-Baudou (22)



Château-Chalon (39)

Metz (57)

Caen-Abbaye aux Hommes (14)



Parfondeval (02)

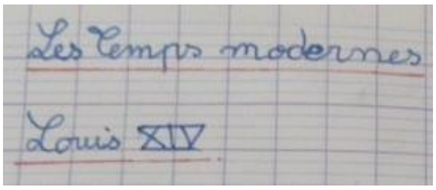
Ces cadrans solaires anciens utilisent « IV ».

Retour au sommaire

Ce cadran solaire installé récemment à Landerneau (29) utilise le chiffre « 4 ».

Un site est dédié aux cadrans solaires de Bretagne, il nous donne envie de faire des recherches dans les quatre départements lorrains.

Avec nos élèves



L'apprentissage du type d'écriture soustractive reste nécessaire pour lire les noms de ces trois rois de France : Henri IV, Louis IX et Louis XIV, mais présenter d'autres endroits, d'autres époques permettra de mieux comprendre ce système d'écriture issu du monde romain.

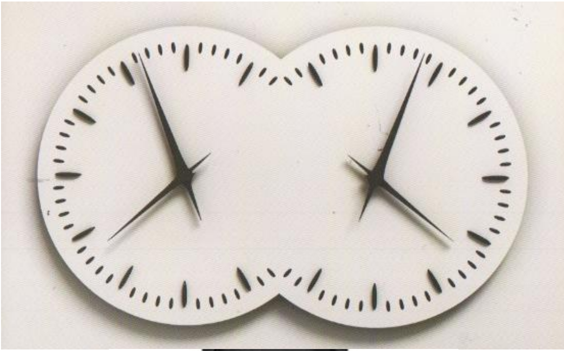
Hi-hi-hi-hi, des sourires provoqués par d'autres cadrans

Cette pendule était en vente en décembre 2021 dans un supermarché de Saint-Mihiel.
La numération utilisée est conforme à celle utilisée dans bien des magasins. Cependant le prix affiché n'était pas 9€99, mais 9€95. Elle a tout de même trouvé preneur.

Cette pendule s'ennuyait sur une étagère d'un lieu de travail à Sarreguemines. Les aiguilles tournent bien-sûr dans le sens contraire des aiguilles de votre montre.
Elle rappelle celles parfois accrochées sur les murs de certains salons de coiffure : il était ainsi possible de voir l'heure en regardant dans la glace placée devant le fauteuil. Sur ce cadran se trouve la référence à une société spécialisée dans la conception et la vente de matériel scientifique : ce n'est donc peut-être pas une « horloge de coiffeur ».

Retour au sommaire

Une horloge murale mathématique n ° 9*.



Le Petit Vert n°136 avait évoqué cette pendule à double cadran imaginée par l’artiste Esther Shalev-Gerz.
Des possibilités d’activités en classe avaient alors été imaginées.

Une montre* avec des calculs paraissant bien compliqués mais aux résultats bien simples.

* *On les trouve facilement sur un célèbre site de commande*

L’horloger et ingénieur Dieter Binninger a imaginé cette singulière horloge installée à Berlin. Un Blog nous en explique le fonctionnement.

Même si votre prénom n’est pas « Yves » mais si vous aimez sourire, si vous êtes curieux et si vous vous sentez une âme de poète, partez sur la piste de cadrans étonnants et partagez-vos découvertes avec nos lecteurs et lectrices.

Trouverez-vous « IV » ou « IIII » sur les cadrans des horloges des monuments publics rencontrés lors de vos escapades ?

Repérerez-vous « IIII » sur des pendules en vente en magasin ?

L’enquête continue …

Retour au sommaire

MATHS ET PHILO

JE NE SUIS PAS SI SIMPLE QU'IL PARAÎT ! UN N'EST PAS UN

Didier LAMBOIS

« Je pense, je suis » Pendant très longtemps, la philosophie a donné une place essentielle au « je », au sujet qui est « un », à l'unité de l'être, à l'individu. Je suis un, je suis un être, je suis un individu, et le mot « individu » insiste bien sur mon unité, et cette unité semble indéniable. Je suis **un** individu (*indivis*[1]), c'est-à-dire que je ne saurais être divisé sans être détruit. Pourtant, les philosophes utilisent principalement le mot « individu » pour désigner l'être « physique », par opposition au mot « personne » qui implique une dimension et une valeur morale.

Le mot « personne » est formé sur le latin persona qui désignait le masque de théâtre (mot lui-même dérivé du grec prosôpon qui désignait le visage et le masque théâtral, la chose munie d'yeux). De masque, il renvoya ensuite à l'idée de rôle attribué au masque, puis le sens glissa naturellement à personnage de théâtre, puis à caractère, personnalité. Ainsi la personne est l'homme en tant qu'il s'affirme, qu'il choisit et qu'il joue un rôle, un être qui doit assumer son rôle et qui a donc une dimension morale ; elle sera juridiquement reconnue comme responsable. La personne se distingue de l'individu par le fait que la personne est morale, volontaire, alors que l'individu est biologique. Kant oppose la dignité de la personne considérée comme fin en soi à la valeur relative et marchande de la chose qui n'est qu'un moyen.

Qu'en est-il de l'unité de notre être ? Sommes-nous vraiment **un** être ? De fait, l'unité n'est pas simple !

Pour métaphysique qu'elle paraisse, cette question fait aussi l'actualité des recherches dans les sciences biologiques. Il est en effet de bon ton de remplacer aujourd'hui le concept d'individu par celui d'holobionte.

Le mot « holobionte » est formé sur le grec *holo*, tout, et *bios*, la vie. Ce néologisme, forgé en 1991 par la biologiste américaine Lynn Margulis (1938-2011)[2], permet d'insister sur le fait que lorsque nous parlons d'un être vivant, un animal, une plante, vous et moi, nous parlons en réalité d'une multitude de microorganismes (le microbiote) qui sont associés à un hôte et sans lesquels ce dernier ne serait rien. Un holobionte est donc « **un hôte et tous ses microbes**, tels que ceux que vous hébergez au sein de votre intestin par exemple (environ 1 à 2 kg par adulte) ! » (INRAE)

[1] Ce terme latin, utilisé aujourd'hui en français (un héritage indivis, une propriété indivise) était l'équivalent du grec *atomos* et désignait ce qui ne pouvait être divisé, l'insécable.

[2] Lynn Margulis est aussi à l'origine, avec le climatologue James Lovelock, de la fameuse « hypothèse Gaïa », hypothèse selon laquelle la Terre (Gaïa était la déesse grecque personnifiant la Terre) serait un superorganisme comparable à un être vivant.

Retour au sommaire

Sur le plan biologique, l'être serait plutôt comparable à un écosystème qu'à un individu. Nous sommes un ensemble d'êtres vivants (biocénose) qui coexistent et qui interagissent dans un espace donné (biotope). Si nous sommes une entité, une unité, c'est au sens militaire du terme : pour créer une unité il faut de nombreux soldats… oui, mais pour faire une armée il faut plusieurs unités…

Si unité il y a, l'unité de notre être, de notre individu, n'est pas à chercher au niveau du corps. C'est ce que remarquaient déjà Arnauld et Leibniz dans leur correspondance[3] : « *ses parties* (il s'agit du corps) *ne sont unies entre elles que machinalement, et qu'ainsi ce n'est pas une seule substance corporelle, mais un agrégé de plusieurs substances corporelles. Il n'en est pas moins vrai qu'il est aussi divisible que tous les autres corps de la nature. Or, la divisibilité est contraire à la vraie unité. Il n'a donc point de vraie unité* » dit Arnauld (Lettre du 4 mars 1687). *« Je ne vois aucun inconvénient de croire que dans toute la nature corporelle il n'y a que des machines et des agrégés*[4] *des substances, parce qu'il n'y a aucune de ces parties dont on puisse dire en parlant exactement que c'est une seule substance. » (*Ibid*.)* Pour autant, Leibniz et Arnauld s'accordent sur le fait que pour qu'on puisse parler d'un être il faut qu'il soit **un**, quand bien même il ne serait que la somme d'infiniment petites substances. « *Pour trancher court,* dit Leibniz*, je tiens pour un axiome cette proposition identique qui n'est diversifiée que par l'accent, savoir que ce qui n'est pas véritablement* ***un*** *être n'est pas non plus véritablement un* ***être***[5] » (Lettre du 30 avril 1687).

$$x = \int dx$$

Le problème de l'infiniment petit, de l'infinitésimal, intéresse tous les penseurs du XVIIème siècle, et aussi les mathématiciens. Est-il possible de dire que la somme de quantités infiniment petites donne quelque chose de fini ? Mais Leibniz n'était pas mathématicien de formation. Ce n'est qu'à l'âge de 26 ans, en 1672, qu'il décide de s'intéresser à cette discipline, et lors d'un voyage à Paris il va frapper à la porte de Huygens pour que ce dernier devienne son maître. L'élève va très vite dépasser le maître.

Leibniz apprend vite ; après avoir assimilé les travaux de Cavalieri, de Pascal, Grégoire de Saint-Vincent, Fermat, Descartes… en échangeant avec les plus brillants scientifiques contemporains et en se tenant informé, par l'intermédiaire d'Oldenburg, des travaux menés en Angleterre par Newton, Leibniz est en mesure de publier, en 1684, sa *Nova Methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, et singulare pro illis calculi genus,* œuvre qui inaugure véritablement le calcul infinitésimal. D'aucuns accuseront Leibniz d'avoir volé à Newton cette invention, ils ont des arguments, mais sans entrer dans cette querelle, reconnaissons avec tous les plus grands mathématiciens, que le système de notation proposé par Leibniz était beaucoup plus efficace et c'est ce qui explique qu'il soit encore utilisé aujourd'hui.

L'unité de notre être ne peut donc venir, selon Leibniz et Arnauld, que de la pensée. Il n'y a « *de vraie unité que dans les natures intelligentes dont chacune peut dire moi* » dit Arnauld (*Lettre à Leibniz*, 4 mars 1687). C'est là une façon de donner raison à Descartes : ***cogito ergo sum***. Je suis, je suis un être, parce que je pense, je suis « un » et je suis « être » aussi longtemps que

[3] La correspondance de Leibniz (1646-1716) est un véritable trésor : quelques 20 000 lettres, un millier de correspondants dans 16 pays différents (nous pensions avoir inventé les réseaux !). Arnauld (1612-1694), philosophe, mathématicien, auteur de *La Logique ou l'art de penser*, est l'un de ces correspondants.

[4] À cet endroit de la lettre, Leibniz met en marge : « *s'il y a des agrégés de substances, il faut qu'il y ait aussi de véritables substances dont tous les agrégés soient faits*. »

[5] Leibniz reprend ici une formule qui vient de la philosophie antique et sur laquelle s'accordent l'hénologie (science de l'Un) et l'ontologie (science de l'être) : *Unum et ens convertuntur*, l'un et l'être sont réciproques.

Retour au sommaire

je pense. Sans pensée il n'y a plus ni être ni unité.
Nietzsche (1844-1900) refusera pourtant de s'incliner devant ces évidences cartésiennes. Le moi, qui serait un, n'est peut-être après tout qu'une illusion. Ce n'est peut-être qu'une illusion ancrée en nous par la grammaire qui nous fait dire « je », et ce sujet grammatical, singulier, viendrait renforcer l'illusion que nous sommes « un » et que nous sommes à l'origine de nos pensées. Nous pensons en effet que c'est notre conscience, le moi, qui décide de ce que nous pensons. Que nenni ! La conscience n'est pas la substance qui gouverne et donne des ordres, elle ne fait, en réalité, que les recevoir, les enregistrer, les exécuter. « *La conscience a l'illusion de régner, de décider, mais elle ne gouverne pas. Elle est l'instrument qui exécute des choix et des décisions déjà acquises en profondeur* » dit Nietzsche.

Ainsi le moi fluctue au gré des pensées qui nous viennent sans que nous n'y puissions rien, et le premier à décrire ce moi qui n'est jamais tout à fait le même, c'est Montaigne (1533-1592). « Moi à cette heure et moi tantôt sommes bien deux » dit-il. Le moi ne cesse de se déconstruire pour tenter de se reconstruire, mais son inconstance montre bien son manque de simplicité[6]. Nous portons en nous une multitude de facettes qui s'éclairent au gré des circonstances, nous changeons « comme cet animal qui prend la couleur du lieu où on le couche. (…) Ce n'est que branle et inconstance » dit Montaigne. « Nous sommes tous de lopins, et d'une contexture si informe et diverse que chaque pièce, chaque moment fait son jeu. Et se trouve autant de différence de nous à nous-mêmes que de nous à autrui. » Essais, Livre II, chap.1, La Pochothèque p.543.

Notre être psychologique n'est en rien plus simple que notre être physique. Si nous sommes **un**, ce qui ne fait pour nous aucun doute, c'est toujours dans la multiplicité. L'être singulier que nous sommes est un être pluriel.

Pour dire les choses en termes mathématiques, disons que « un » n'est pas égal à « un ». Il y a toujours de l'infini en « un », et si les mathématiciens inventent des unités qui sont simples, ce ne sont que des outils, des fictions qui nous permettent de penser. Dans les faits, il n'y a pas plus de « un » simple qu'il n'y a de « je » qui soit « un ».

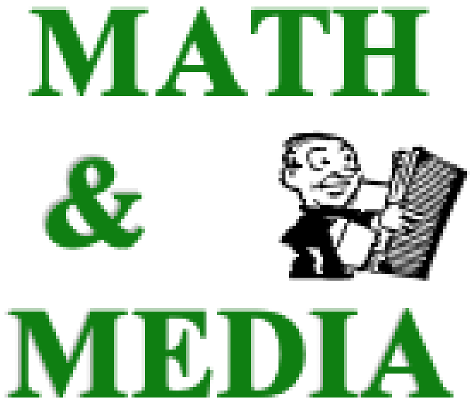
Même l'atome explose !

[6] Dire que nous avons une identité serait un abus de langage, ce serait dire que le moi reste toujours identique, or ce qui nous fait croire que quelque chose demeure identique malgré les changements, ce n'est peut-être que le pronom « je », qui lui reste toujours le même, et la carte d'identité qui vieillit dans notre poche.

Retour au sommaire

MATHS ET MEDIAS

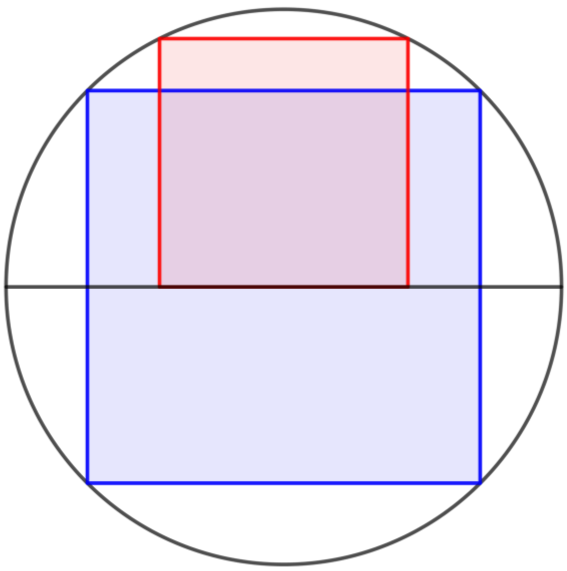
DANS LE PETIT VERT, DU N°100 AU N°149



Cette rubrique est alimentée par les envois de nos lecteurs. Qu'ils continuent à le faire en nous envoyant des scans de qualité, en précisant leurs sources.
Des commentaires et des activités possibles en classe sont toujours les bienvenus.
Jacques Verdier a été un grand contributeur de cette rubrique, suscitant des échanges au sein du comité de rédaction du Petit Vert.
Le comité de rédaction actuel continue de faire vivre cette rubrique source d'activités en classe.

Ce Petit Vert est le 150ème, c'est une bonne occasion pour offrir à nos lecteurs un lien vers un document qui permet d'arriver directement aux contenus « Maths & Médias » du Petit Vert. Actuellement, les numéros 100 à 149 ont été explorés, la collecte se poursuivra.

DÉFI N°150 – 1
« AIRES DE CARRÉS : AU RAPPORT ! »



Le carré bleu est inscrit dans un cercle et le carré rouge est inscrit dans un demi-cercle de même rayon.
Quel est le rapport des aires de ces deux carrés ?

Retour au sommaire

DÉFI N°150 – 2 « PERTE DE PUISSANCES »

Soient a et b deux nombres entiers naturels tels que :

$$4^a = 9$$
$$9^b = 256$$

Que vaut le produit $\boldsymbol{ab}$?

DÉFI ALGORITHMIQUE N° 150

Certaines énigmes du rallye mathématique de Lorraine auraient certainement été plus simples à résoudre à l'aide d'un petit programme informatique.

Nous vous proposons ici, comme défi, de résoudre l'exercice ci-dessous à l'aide d'un programme. L'exercice suivant avait été proposé en 2016.

L'année 2016 a commencé par un vendredi et se terminera par un samedi. Quelle sera la prochaine année qui commencera par un vendredi et se terminera par un samedi ?

On demande d'écrire une fonction bisRepetita(n) qui, pour une année n passée en paramètre, renvoie le plus petit rang d'année n'>n, dont le 1er janvier et le 31 décembre sont les mêmes jours de la semaine que n.

SOLUTION DÉFI ALGORITHME - RALLYE 149

Le défi algorithmique du PV 149 reprenait l'exercice 8 du Rallye 2015 et demandait d'écrire une fonction pour déchiffrer un message crypté avec le codage affine de clé (a,b).

La difficulté de trouver l'inverse de l'entier a modulo 26. Certes, l'algorithme de Bézout est une stratégie classique, mais peu aisée à mettre en œuvre dans le secondaire. On procédera donc à une recherche en étudiant tous les entiers jusqu'à trouver cet inverse. Ainsi, pour retrouver la lettre qui a été codée par 'N' dans le message en clair, on est amené à résoudre : 5x+12=13 soit 5x=1 qui n'a pas de solution entière. On essaie donc 5x=27 puis 5x=53 puis 5x=79 et enfin 5x=105 qui donne x=21, soit la lettre V. La première fonction, solution26, prend donc en paramètre a et un entier c et renvoie x tel que : ax=c[26]. Ceci étant acquis, on décode le message lettre par lettre. On associe à chacune son rang dans l'alphabet puis on détermine le rang de la lettre dont le rang est donné par la fonction solution26.

Pseudo-code :

Fonction solution26(a, c : entiers ; entier)
    tant que a ne divise pas c, **faire** :
        c ← c + 26
    finTantque ;
    renvoyer c/a

Retour au sommaire

Fonction decodage(crypte : chaîne, a,b : entiers ; message : chaîne)
alphabet ← "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ » ;
n ← longueur(crypte) ; *(nombre de caractères du message crypte)*
clair ← "" ; *(le message en clair)*
pour i **allant de** 0 **à** n-1, **faire** : (le premier caractère d'une chaîne est au rang 0)
lettre1 ← crypte[i] ; (lettre de rang i dans le message crypte)
si lettre1 ≠ " ", **alors** : (le caractère n'est pas une espace)
rang1 ← rang de lettre 1 dans l'alphabet ;
rang2 ← solution26(a, rang1-b) ; (rang de la lettre en clair)
lettre2 ← lettre de rang rang2 dans alphabet ;
sinon :
lettre2 ← " " ; (on remplace une espace par une espace)
finSi ;
message ← message + lettre2 ;
renvoyer message

Python

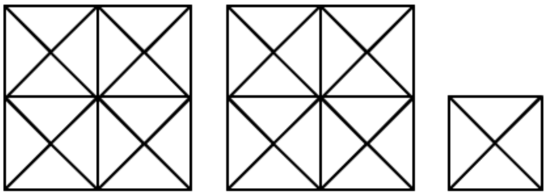
```
def solution26(a,c):
    """
    Fonction solution26(a,c : entiers; entier)
    renvoie le plus petit naturel x solution de ax=c[26]
    """
    while c%a >0:
        c = c + 26
    return c//a

def decodage(crypte,a,b):
    """
    Fonction decodage(crypte : chaîne, a,b : entiers; message : chaîne)
    renvoie le déchiffrage du message crypte par le codage affine de paramètres a et b

    """
    alphabet="ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ"
    n = len(crypte)
    message = ""
    for i in range(n):
        lettre1 = crypte[i]
        if lettre1 != " ":
            rang1 = alphabet.index(lettre1)
            rang2 = solution26(a,rang1-b)
            lettre2 = alphabet[rang2]
        else:
            lettre2 = " "
        message = message + lettre2
    return message
```

Retour au sommaire

SOLUTION DÉFI N°149 – 1
« AVEC LES 9 CARRÉS DE MACMAHON TRICOLORES »

Rappel de l'énoncé :
Les neuf pièces permettent la réalisation de deux carrés formés avec quatre pièces, une pièce restera isolée.

- Essayer d'en réaliser plusieurs différentes.
- Essayer, en respectant la règle des couleurs, d'assembler les trois carrés.

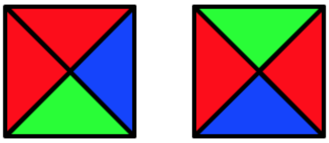


Toute pièce, parmi les neuf proposées, peut-elle être mise de côté avant de former ~~les~~ deux carrés de quatre pièces ?

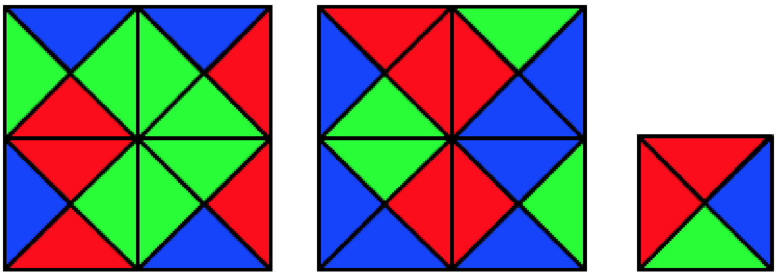
Première méthode

Mettre un carré de côté (9 possibilités) et réaliser deux carrés avec les huit restants. Neuf paires de carrés seront trouvées. Cette démarche pourra être mise en œuvre lors d'une recherche à plusieurs.

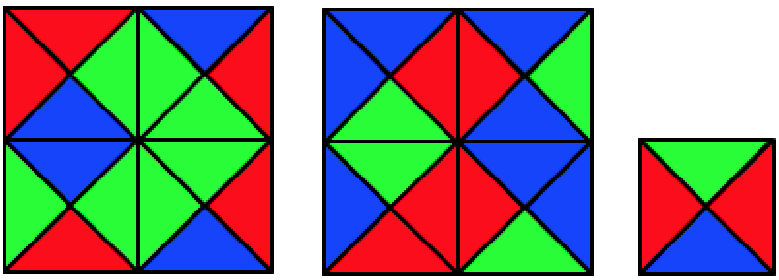
Deuxième méthode



Il existe deux types de pièces tricolores : celles où les deux zones de même couleur sont deux triangles adjacents par un côté (symétriques par rapport une diagonale du carré) et celles pour lesquelles les deux zones de même couleur se touchent par un sommet (symétriques par rapport au centre du carré).



J'isole une pièce du premier type et je réalise un rectangle avec les huit restantes.



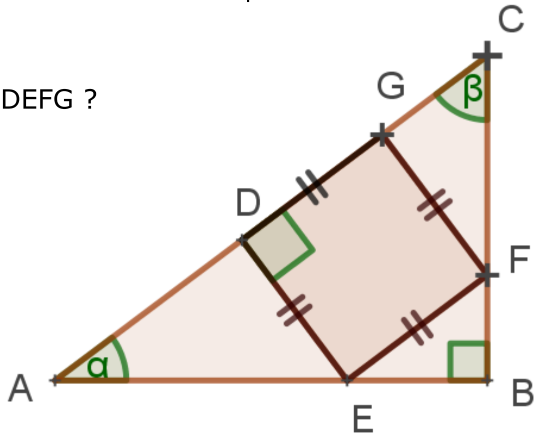
J'isole une pièce du second type et je réalise un rectangle avec les huit restantes.

Des permutations de couleur sur les carrés isolés et dans les assemblages réalisés me garantissent que toute pièce peut être isolée afin que les huit restantes s'assemblent pour former le rectangle attendu. Cette démarche pourra être mise en œuvre lors d'une recherche plus individuelle.

Retour au sommaire

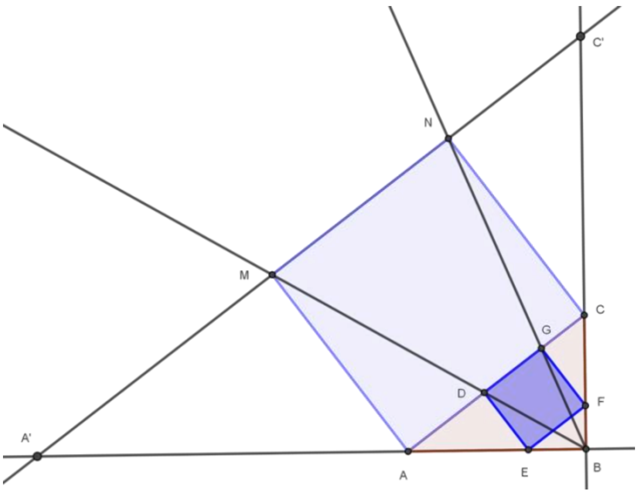
SOLUTION DÉFI N°149 – 2

Les sommets E et F du carré DEFG sont respectivement sur les côtés [AB] et [BC] du triangle rectangle ABC.
AB=4 et BC=3.
Quelle est l'aire du carré DEFG ?



Solution 1

Cette solution consiste à utiliser l'homothétie de centre B qui transforme le carré AMNC, construit sur l'hypoténuse du triangle ABC rectangle en B, en le carré EFGD répondant au problème posé. On doit cette construction au mathématicien Etienne Bézout dont la méthode élégante et astucieuse fournit une construction simple du carré EFGD : D et G sont les intersections des droites (BM) et (BG) avec l'hypoténuse [AB] du triangle ABC rectangle en B.



Déterminons le rapport de cette homothétie.
Les triangles ABC et CNC' étant semblables, on peut déduire que $\frac{CC'}{AC} = \frac{CN}{AB}$
soit $\frac{CC'}{5} = \frac{CN}{4}$
ou encore CC' = $\frac{25}{4}$.
D'où $BC' = BC + CC' = 3 + \frac{25}{4} = \frac{37}{4}$
L'homothétie de centre B transformant le carré AMNC en le carré EFGD transforme aussi le point C'en C, donc son rapport vaut $\frac{BC}{BC'} = \frac{3}{\frac{37}{4}} = \frac{12}{37}$.

Et par conséquent, $\mathrm{Aire(EFGD)} = \left(\frac{12}{37}\right)^2 \mathrm{Aire(AMNC)} = \frac{144}{1369} \times 25 = \mathbf{\frac{3600}{1369}}$

Solution 2

On pose AD = y, AE = z et DE = x.
Les triangles rectangles ABC, ADE, BEF et CFG étant semblables, on peut déduire que :
$\frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ d'où $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ et $z = \frac{5}{3}x$
$\frac{CF}{z} = \frac{x}{y}$ ou encore CF = $\frac{xz}{y}$
Il en résulte que CF = $\frac{3}{4}z$.
Par ailleurs, l'aire du triangle ABC est la somme des aires des triangles ADE, BEF, CFG et du carré DEFG.

Retour au sommaire

Ainsi $x^2+\frac{\boldsymbol{xy}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{x(5-x-y)}}{\mathbf{2}}+\frac{\boldsymbol{(4-z)\left(3-\frac{3}{4}z\right)}}{\mathbf{2}}=6$ ou encore $x^2+\frac{5x-x^2}{2}+\frac{(4-z)(12-3z)}{8}=6$

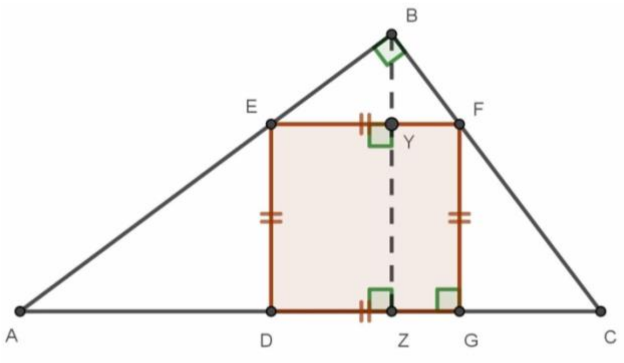
et $\frac{5x+x^2}{2}+\frac{3(4-z)^2}{8}=6$ soit $\frac{5x+x^2}{2}+\frac{3\left(4-\frac{5}{3}x\right)^2}{8}=6$ et $\frac{5x+x^2}{2}+\frac{(12-5x)^2}{24}=6$

d'où $\frac{60x+12x^2}{24}+\frac{144+25x^2-120x}{24}=6$ soit $\frac{144+37x^2-60x}{24}=6$ ie $37x^2-60x=0$ et enfin $x(37x-60)=0$

Puisque x est non nul, alors la seule solution possible est $\frac{60}{37}$.

Le carré DEFG a donc pour côté $\frac{60}{37}$ et son aire vaut $\left(\frac{60}{37}\right)^2=\frac{\mathbf{3600}}{\mathbf{1369}}$.

Solution 3



Le triangle ABC est rectangle en B avec AB = 4 et BC = 3.
J'utilise le théorème de Pythagore et j'ai BC=5.
Je calcule l'aire du triangle rectangle ABC de deux façons différentes pour calculer la hauteur BZ issue de l'angle droit.
J'obtiens BZ=2,4.

DE = EF = FG = GD = x
BY est la hauteur issue de l'angle droit du triangle EBF rectangle en B, j'ai
BZ = x + BY donc BY = 2,4 – x.
$\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BZ}}$ est le rapport des hauteurs des deux triangles rectangles semblables EBF et ABC.
On a $\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BZ}}=\frac{2{,}4-x}{2{,}4}$
Le rapport des aires des deux triangles rectangles semblables EBF et ABC est alors le carré de $\frac{2{,}4-x}{2{,}4}$ soit $\frac{\frac{x\times(2{,}4-x)}{2}}{6}=\frac{2{,}4-x}{2{,}4}\times\frac{2{,}4-x}{2{,}4}$

x >2,4 donc on peut simplifier par 2,4- *x* d'où $\frac{\frac{x}{2}}{6}=\frac{2{,}4-x}{2{,}4}\times\frac{1}{2{,}4}$

Cette équation du premier degré a pour solution $x=\frac{60}{37}$

On en conclut que l'aire du carré DEFG est égale à $\left(\frac{60}{37}\right)^2=\frac{\mathbf{3600}}{\mathbf{1369}}$

Solution 4

Les triangles ABC, ADE, EBF et CGF sont semblables. Posons DE=EF=FG=GD=*x*

On a : Aire EBF = $\left(\frac{x}{5}\right)^2\times$ Aire ABC = $\frac{6x^2}{25}$; Aire AED = $\left(\frac{x}{3}\right)^2\times$ Aire ABC = $\frac{6x^2}{9}$ et

Aire CGF = $\left(\frac{x}{4}\right)^2\times$ Aire ABC = $\frac{6x^2}{16}$ avec Aire DEFG = x^2.

Aire DEFG = Aire ABC - (Aire ADE + Aire EBF + Aire CGF) d'où $x^2=6-\left(\frac{6x^2}{25}+\frac{6x^2}{9}+\frac{6x^2}{16}\right)$

soit $x^2=6-\frac{4614}{3600}x^2$ ce qui nous donne $\boldsymbol{x^2}=\frac{\mathbf{3600}}{\mathbf{1369}}$

Une cinquième solution a été trouvée, faisant intervenir la trigonométrie dans les 3 triangles rectangles semblables.

Retour au sommaire

PROBLÈME 150 : RANDONNONS

Proposé par Philippe Févotte

Un randonneur parcourt un chemin et revient sur ses pas jusqu'à son point de départ. Le parcours a une durée d'une heure.
Montrer que pour toute durée, exprimée en heure, d inférieure ou égale à 1, il existe un instant t_0, tel que la position du marcheur soit même en t_0 et $t_0 + d$.

SOLUTION PROBLÈME 149 : POUR COMMENCER 2022

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour $n \geq 0$, $\frac{u_{n+2}}{u_n} = \frac{{u_{n+1}}^2+1}{{u_n}^2+1}$

1) Déterminer u_2, u_3 et u_4 puis conjecturer et démontrer une relation de récurrence de premier ordre définissant la suite (u_n).
2) Sans calculer d'autres termes de la suite (u_n), donner un encadrement d'amplitude 1 de u_{2022}
3) Montrer que $u_n \sim \sqrt{2n}$

Solution

Une solution a été proposée par Jacques Choné.

1) On a les valeurs $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $u_2 = \frac{5}{2}$, $u_3 = \frac{29}{10}$ et $u_4 = \frac{91}{290}$.
   On peut conjecturer la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$
   La relation est vérifiée pour $n = 0$
   Supposons-la vraie pour un entier n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$
   $u_{n+2} = \frac{{u_{n+1}}^2+1}{{u_n}^2+1} u_n = \frac{{u_{n+1}}^2+1}{\left(({u_n}^2+1)/u_n\right)} = \frac{{u_{n+1}}^2+1}{u_n+\frac{1}{u_n}} = \frac{{u_{n+1}}^2+1}{u_{n+1}} = u_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}}$.
   La relation de récurrence est donc bien vérifiée pour tout entier naturel n

2) On a donc pour tout entier $k \geq 1$, ${u_k}^2 = \left(u_{k-1} + \frac{1}{u_{k-1}}\right)^2 = {u_{k-1}}^2 + 2 + \left(\frac{1}{u_{k-1}}\right)^2 \geq {u_{k-1}}^2 + 2$
   On peut écrire ainsi n inégalités pour k prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, …, n.
   En sommant membre à membre ces n inégalités, on obtient : ${u_n}^2 \geq 1 + 2n$, c'est-à-dire :
   $$u_n \geq \sqrt{1+2n} \quad (1)$$
   Par conséquent, ${u_n}^2 = \left(u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 = {u_{n-1}}^2 + 2 + \left(\frac{1}{u_{n-1}}\right)^2 \leq {u_{n-1}}^2 + 2 + \frac{1}{2n-1}$.
   On en déduit que pour k prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, …, n, on obtient :
   $${u_k}^2 \leq {u_{k-1}}^2 + 2 + \frac{1}{2k-1}.$$
   En sommant membre à membre ces n inégalités pour k prenant successivement les valeurs 1, 2, 3, …, n, on obtient :
   $${u_n}^2 \leq 1 + 2n + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = 1 + 2n + S_n$$

Retour au sommaire

Soit H_n la série harmonique définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

On a alors $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2n}\right)$

Donc $S_n = H_{2n} - \frac{1}{2} H_n$

Or on sait que (résultat « classique ») : $\ln(k) \leq H_k \leq \ln(k) + 1$.

Par conséquent $S_n \leq \ln(2n) + 1 - \frac{1}{2}\ln(n)$, soit $S_n \leq \ln\left(2\sqrt{n}\right) + 1$

On peut donc en conclure que pour tout entier $n \geq 1$:

$$1 + 2n \leq u_n{}^2 \leq 1 + 2n + \ln\left(2\sqrt{n}\right) + 1$$

Par conséquent avec $n = 2022$, on obtient :

$$4045 \leq u_{2022}{}^2 \leq 4046 + \ln\left(2\sqrt{2022}\right)$$

Soit

$$4045 \leq u_{2022}{}^2 \leq 4050{,}5$$

D'où

$$63{,}6 \leq u_{2022} \leq 63{,}65$$

Jacques Choné utilise un encadrement moins précis, mais il énonce un résultat plus général ; il majore S_n par H_{2n} et obtient ainsi que :

$$u_n \leq \sqrt{2n + 2 + \ln(2n)}$$

Une étude de fonction montre que pour $n \geq 1$, $\sqrt{2n + 2 + \ln(2n)} \leq \sqrt{2n+1} + 1$

Par conséquent, pour $n \geq 1$, $\sqrt{2n+1} \leq u_n \leq \sqrt{2n+1} + 1$, ce qui répond à la question posée.

3) De l'encadrement ci-dessus, on tire rapidement que $u_n \sim \sqrt{2n}$

Deux remarques :

- On peut s'intéresser à la suite A073833 sur l'encyclopédie en ligne 0EIS
- On peut se passer pour la question 2) de la référence à la série harmonique. En effet, à partir de l'égalité $u_k{}^2 = \left(u_{k-1} + \frac{1}{u_{k-1}}\right)^2 = u_{k-1}{}^2 + 2 + \left(\frac{1}{u_{k-1}}\right)^2$, on peut encadrer, par exemple u_{10} , par sommation d'inégalités, puis en réitérant la méthode encadrer u_{2022}. On obtient un encadrement convenable, mais moins fin que par la méthode proposée ici s'appuyant sur les résultats connus de la série harmonique. De plus ce procédé ne permet pas de trouver l'équivalent de la suite (u_n).

Retour au sommaire