DANS NOS CLASSES

Équations du second degré au Moyen-Orient (suite)

Anne Gaydon,
Gilles Waehren,
commission histoire APMEP Lorraine

La première partie de cet article est parue dans le Petit vert n° 92 de décembre 2007. Elle traitait des équations babyloniennes.

Introduction générale : objectifs et mode de fonctionnement

Dans le cadre de la commission « histoire et épistémologie », nous avons travaillé sur une approche historique de la résolution des équations. Dans nos classes respectives (seconde et première S) nous avons proposé des activités (voir en annexe) sur ce thème.
Les objectifs étaient multiples :
- donner une perspective historique au travail effectué en lycée sur les équations du second degré ;
- mettre en évidence l'existence de méthodes variées pour résoudre ces équations (autres que la factorisation utilisée en seconde ou la méthode du discriminant vue en première) ;
- envisager la résolution de problèmes algébriques à l'aide d'une construction géométrique.

Les activités ont été proposées en classe (travail de groupe ou individuel avec mise en commun). Chacun de nous a élaboré des fiches de travail différentes dont l'exploitation en classe a nécessité entre une heure et demie et trois heures selon le document utilisé.

Deuxième partie : les équations du second degré chez Al-Khwarizmi

Al-Khwarizmi est un mathématicien arabe du IX$^{\text{ème}}$ siècle de notre ère. Il exerce principalement à Bagdad où il compose sa grande œuvre, "Précis de calcul de al Jabr' et al-Muqābala", dans laquelle il pose les bases du calcul algébrique nécessaire à la résolution des équations. Pour les problèmes du second degré, il établit une liste de cinq équations qui se résolvent chacune par une méthode spécifique. Comme cela se pratique encore à l'époque, les problèmes algébriques ont tous leur pendant géométrique, héritage de la tradition grecque ainsi qu'on le constate dans cette première méthode.

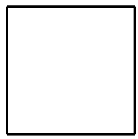
Retour sommaire

La démarche d'Al-Kwarizmi est différente de celle des Babyloniens :
- il fait un inventaire des équations du second degré et montre qu'elle se ramènent à l'une des équations suivantes : $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $x^2 + bx = c$; $x^2 + c = bx$; $bx + c = x^2$;
- il utilise pour cela deux opérations :
  - "al jabr" transposition des termes négatifs dans l'autre membre ;
  - "al muqabala" réduction de termes semblables dans les deux membres ;
- il propose une justification géométrique de chaque résolution (ce qui correspond à la mise sous forme canonique).

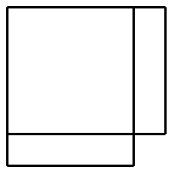
Dans la classe de Gilles

Concernant la résolution des équations de la forme $x^2 + bx = c$, Al-Khwarizmi suggère un cas particulier du type "Résoudre $x^2 + 4x = 32$".
La démarche à suivre ressemble à celle-ci

On considère un carré de côté x

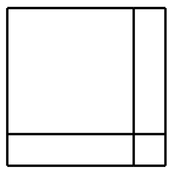


On le complète par deux rectangles de dimensions x et 2
L'aire de la figure obtenue est $x^2 + 4x$.



Le petit carré d'aire 4 complète la figure en un grand carré d'aire $(x + 2)^2$ ou 32 + 4.

Donc il faut résoudre $(x + 2)^2 = 36$ … ou $(x + 2)^2 - 36 = 0$.



Dans ce cas, la méthode géométrique est historiquement avérée. Les conditions d'utilisation mieux définies et les étapes plus claires rendent l'algorithme plus accessible aux élèves, si ce n'est la mise en équation finale qui semble triviale… *a posteriori*. En effet, il faut pour cela bien avoir en mémoire les différentes phases du raisonnement. La solution négative est, une fois encore, écartée alors que le problème n'impose pas de quantités positives *a priori*. Rappelons ici que, si l'on sait opérer sur les nombres négatifs au moins depuis le premier siècle de notre ère, ces nombres ne seront acceptés que tardivement comme solution d'un problème (en Europe, Cardan qui au début du XVIème siècle admettra l'existence de racine

Retour sommaire

négative d'une équation). On peut penser que les solutions négatives d'une équation ne faisaient pas partie des mathématiques d'Al-Khwarizmi.
Comme pour les équations babyloniennes, les élèves ont réinvesti sans difficulté la méthode pour résoudre d'autres équations du même type $x^2 + bx = c$; mais il ne leur a pas été proposé d'équation sans solution ni d'autres types d'équations parmi celles étudiées par Al-Kwarizmi.

D'autre part, il est intéressant de noter que, si cette activité fonctionne bien avec des élèves de seconde, elle illustre aussi parfaitement le passage à la forme canonique en première (dans les cas appropriés) guidant même certains élèves dans la recherche de cette expression, surtout quand ils manquent d'affinités avec les identités remarquables !
Sur l'exemple précédent, on peut déterminer la forme canonique de $x^2 + 4x - 32$ puisque, la figure totale ayant comme aire $(x + 2)^2$, l'aire du gnomon (le grand carré et les deux rectangles) est l'aire totale amputée de celle du petit carré soit $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$ d'où $x^2 + 4x - 32 = (x + 2)^2 - 36$.

Conclusion

En général, nos élèves sont familiarisés avec la mise en équation de problèmes géométriques qui devient parfois un prétexte pour calculer. Le problème babylonien en est un exemple. Ce qui est moins banal dans leur formation, c'est d'envisager que la résolution d'une équation puisse passer par une construction géométrique. L'algorithme graphique s'impose alors comme une évidence ; il est ensuite consolidé par le travail algébrique.

Dans la classe de Anne

Le problème (voir annexes, document 6) extrait du manuel d'Al-Khwarizmi propose la résolution de l'équation $x^2 + 21 = 10x$.

La solution utilise les formules $x' = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ et $x'' = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ où b est le coefficient de x dans le second membre de l'équation et c le coefficient constant ; ces formules de calcul sont celles utilisées pour résoudre en classe de première une équation du second degré (qui correspondent à la résolution de l'équation $x^2 - 10x + 21 = 0$).
Les élèves lisent le texte et écrivent en langage mathématique actuel les calculs effectués.

Retour sommaire

L'obtention d'une solution les satisfait en général et l'expression « Si tu le désires ajoute cela à la moitié des racines … » conduit certains à penser qu'il n'est pas nécessaire de déterminer une autre solution.
Certains élèves ne voient pas la nécessité de déterminer toutes les solutions. Historiquement, la recherche exhaustive des solutions est une démarche relativement récente.

En utilisant la même méthode ils essayent de résoudre deux autres équations dont l'une n'a pas de solutions réelles.

Une heure est consacrée au bilan du travail.
On vérifie les solutions trouvées pour les deux premières équations.
Pour la troisième équation il y a un problème : un réel négatif n'a pas de racine carrée dans **R** ; doit-on en déduire que la méthode ne marche pas ou bien qu'il n'y a pas de solution ? On va alors rappeler la remarque d'Antoine et suggérer aux élèves une vérification graphique. La résolution graphique proposée par Antoine pour le problème babylonien va permettre de répondre à la question. Les élèves tracent la courbe d'équation $y = x^2 - 4x + 10$ et cherchent son intersection avec l'axe des abscisses.
Le problème de l'existence de solutions est alors posé (et l'observation des courbes permet de donner une réponse) ; si la lecture graphique ne donne pas avec exactitude les solutions d'une équation, elle permet aux élèves de justifier l'existence ou non de solution.

Bilan

Les textes historiques, au premier abord déroutants, suscitent en fait l'envie d'une recherche et d'un approfondissement afin de valider et de s'approprier une méthode inhabituelle ; les élèves ont ainsi l'impression de participer au mystère de la genèse d'une idée en mathématiques et réalisent que les mathématiques ne constituent pas un ensemble de règles fixées (et figées) mais évoluent.
Les différentes approches (algébriques, géométriques voire analytiques) suggérées par ces textes permettent de mobiliser les connaissances de seconde, d'ouvrir leur esprit sur l'existence même de plusieurs méthodes pour un seul problème ; ils les invitent à se questionner et à se rendre compte de la valeur de leur questionnement dans un domaine où ils ne sont pas considérés comme des experts.

Retour sommaire

Annexes - Les documents de travail donnés aux élèves

Document 5 (classe de Gilles, 2ème partie).

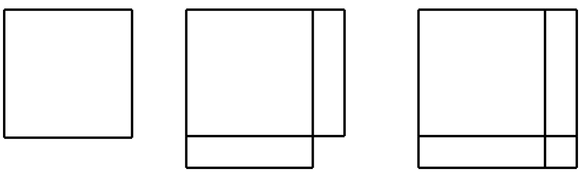
Résolution d'équation du second degré chez les Arabes au IXème siècle. La méthode d'Al-Kwarizmi.

Enoncé du problème : On considère un rectangle. La longueur ajoutée à la largeur est 14. La surface est 48. Les dimensions sont inconnues.
a) On pose x la longueur et y la largeur. Traduire l'énoncé à l'aide de deux équations.
b) Par substitution, éliminer y dans une des équations et l'écrire sans quotient. Une telle équation est appelée équation du second degré.

Résolution suggérée par le texte babylonien :	**Questions**
14 fois 14 est égal à 196 48 fois 4 est égal à 192 Tu soustrais 192 de 196 et il reste 4 4 est quel nombre multiplié par lui-même ? 2 fois 2 est égal à 4. Tu soustrais 2 de 14 et il reste 12. 12 fois 0,5 est égal à 6 6 est la largeur. Tu ajoutes 2 à 6, cela fait 8. 8 est la longueur.	a) Quelle remarque peut-on faire concernant la transition entre la 4ème et la 5ème ligne ? b) Traduire chacune des lignes de la résolution à l'aide d'égalités dépendant de x et y. Exemple $14 \times 14 = 196$ correspond à $(x + y)\times(x + y) = 196$ … c) Appliquer la méthode précédente au problème suivant : "La longueur ajoutée à la largeur est 16. La surface est 60. Les dimensions sont inconnues".

Exemple : La résolution de $x^2 + 4x = 32$.

On peut faire des figures pour les différentes étapes de la résolution :



1. On construit un carré de côté x. Son aire est …
2. Sur deux côtés de ce carré, on construit deux rectangles dont l'autre dimension est 2. La somme de leurs aires est …. L'aire de la surface obtenue est ….

Retour sommaire

3. On complète la figure ainsi obtenue en un carré en ajoutant le carré de côté 2.
L'aire totale de la figure est donc ….

La somme des aires du carré de côté x et des deux rectangles est ...
On en déduit l'égalité $x^2 + 4$ =...
Comment peut-on trouver cette égalité autrement ?
Résoudre $x^2 + 4x = 32$ revient donc à résoudre $(x + 2)^2 = 36$.
Résoudre cette équation et procéder de même avec $x^2 + 12x = 45$.

Document 6 (classe d'Anne, fiche 4)

La méthode d'Al Kwarizmi

Le mathématicien Muhammad Al Kwarizmi (780 – 850) a travaillé à Bagdad. Dans la première partie de son traité d'algèbre figurent ses travaux sur les équations du premier et du second degré.
Il indique comme les babyloniens les calculs à effectuer pour trouver les racines (les solutions) de l'équation.
Voici un exemple de résolution proposé par Al Kwarizmi

Résolution de l'équation $x^2 + 21 = 10x$
« Divise en deux les *racines* ce qui donne 5 ; multiplie 5 par lui-même tu obtiens 25 ; retire les 21 qui sont ajoutés au *carré* [de x] il reste 4 ; extrais la racine – cela donne 2 – et retire- la de la moitié des *racines*, c'est-à-dire de 5 il reste 3 ; c'est la racine que tu cherches. Si tu le désires ajoute cela [i.e. $\sqrt{4} = 2$] à la moitié des *racines* cela te donne 7 qui est la racine que tu cherches »

Vocabulaire le mot *racine* désigne le nombre x cherché, « diviser en deux les *racines* » signifie « diviser en deux le coefficient de x »

1. Ecrire en langage mathématique les calculs que l'on doit effectuer pour obtenir la solution. Combien de solutions obtient-on ?
2. En utilisant la même méthode résoudre l'équation $x^2 + 45 = 14x$.
3. Peut-on résoudre de la même façon l'équation $x^2 + 10 = 4x$?
4. Quelle méthode de résolution propose Al Kwarizmi pour les équations du second degré de la forme $x^2 + c = bx$?

Retour sommaire