

DANS NOS CLASSES

Équations du second degré au Moyen-Orient

Anne Gaydon,
Gilles Waehren,
commission histoire APMEP Lorraine

Note de la rédaction : pour des raisons de place, les deux parties de cet article vous seront proposées dans deux numéros distincts du Petit Vert

Introduction générale : objectifs et mode de fonctionnement

Dans le cadre de la commission « histoire et épistémologie », nous avons travaillé sur une approche historique de la résolution des équations. Dans nos classes respectives (seconde et première S) nous avons proposé des activités (voir en annexe) sur ce thème.

Les objectifs étaient multiples :

- donner une perspective historique au travail effectué en lycée sur les équations du second degré ;
- mettre en évidence l'existence de méthodes variées pour résoudre ces équations (autres que la factorisation utilisée en seconde ou la méthode du discriminant vue en première) ;
- envisager la résolution de problèmes algébriques à l'aide d'une construction géométrique.

Les activités ont été proposées en classe (travail de groupe ou individuel avec mise en commun). Chacun de nous a élaboré des fiches de travail différentes dont l'exploitation en classe a nécessité entre une heure et demie et trois heures selon le document utilisé.

Première partie : équations babyloniennes

Le contexte historique

A partir de la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, les archéologues de plusieurs nations engagent des fouilles assez poussées dans l'ancienne Mésopotamie. Ils exhument alors de nombreuses tablettes d'argile frappées de la légendaire écriture cunéiforme. Ce n'est qu'au cours du XX^{ème} siècle que l'on a commencé à transcrire les tablettes relatives aux écrits mathématiques. Les productions babyloniennes jouissent de moins de popularité que les papyrus égyptiens ; pourtant les découvertes

mathématiques en Mésopotamie sont tout aussi riches sinon plus et souvent bien antérieures.

En - 4000 avant notre ère, se développent les premières cités de l'humanité : Sumer, Babylone, Uruk... La taille de ces ensembles et les mouvements qu'ils créent nécessitent des outils efficaces pour la gestion et le commerce : les mathématiques. On pense même qu'elles ont pu précéder la naissance de l'écriture. C'est alors que l'on produit des mathématiques appliquées à la finance, à la construction...

La transmission de ce savoir de premier ordre passe alors par la formation de scribes-mathématiciens ; formation qui débouchera parfois sur une recherche moins utilitaire et des mathématiques moins concrètes comme la construction de tables de calcul dédiées aux logarithmes ou **la tablette Plimpton 322** donnant certains triplets pythagoriciens ou la résolution de problèmes du second degré. Cependant, les recherches n'ont pas permis, à notre connaissance, d'exhiber la genèse des méthodes calculatoires proposées. On ne sait pas si les mathématiciens babyloniens ont effectivement vu la nécessité de justifications ; le principe de démonstration, ébauché par les Egyptiens, ne sera vraiment assis que par les Grecs vers - 500.

Dans les années 1930 les textes retrouvés ont été traduits (parfois reconstitués) et commentés (en particulier par Thureau-Dangin) ; certains proposent des problèmes du second degré.

Ces problèmes sont en général présentés sous la même forme.

Les données sont énoncées à la première personne, puis, le texte passe à la deuxième personne pour indiquer les opérations à effectuer et trouver le résultat, sans justification de la méthode.

Les nombres utilisés sont positifs et les problèmes abordés ont une seule solution positive.

Les expressions « côté d'un carré » ou « surface du carré » sont utilisées mais en général aucune unité n'est mentionnée.

L'extraction de la racine carrée est utilisée mais l'expression « racine carrée » n'apparaît pas : on reconnaît qu'un nombre donné est le carré d'un autre nombre. Les mathématiciens babyloniens utilisaient probablement des tables donnant les carrés des nombres entiers.

L'expérimentation en classe

Dans deux classes de seconde un texte a été proposé accompagné de questions.

L'objectif du travail était notamment d'apprendre aux élèves à lire et comprendre un texte dont la formulation est inhabituelle, le transcrire en utilisant l'écriture mathématique actuelle et leur montrer comment l'évolution du langage mathématique peut aider à justifier un programme de calcul.

Dans la classe de Gilles le texte était le suivant

" La longueur ajoutée à la largeur est 14. La surface est 48. Les dimensions sont inconnues.

14 fois 14 est égal à 3.16

48 fois 4 est égal à 3.12

Tu soustrais 3.12 de 3.16 et il reste 4

4 est quel nombre multiplié par lui-même ?

2 fois 2 est égal à 4.

Tu soustrais 2 de 14 et il reste 12.

12 fois 0,30 est égal à 6

6 est la largeur.

Tu ajoutes 2 à 6, cela fait 8.

8 est la longueur."

Note On peut ici choisir de donner, ou non, les nombres en notation sexagésimale et de les faire transcrire dans le système décimal. De toute façon, malgré la formulation assez inhabituelle du texte, la plupart des termes mathématiques, très imagés chez les babyloniens ("croiser" pour "multiplier"), ont déjà été traduits.

La classe a tout d'abord essayé les méthodes de résolution des systèmes et des équations du premier degré pour constater qu'elles ne permettaient pas de résoudre le problème posé (autrement qu'en essayant de deviner les solutions comme ont pu s'en apercevoir certains élèves). Ainsi, après avoir nommé x , la longueur du rectangle, et y sa largeur, on aboutit au système suivant, système duquel on peut dégager une équation du second degré qu'on ne sait pas résoudre avec les seuls outils de troisième.

Les élèves se décident alors à prendre en compte la méthode babylonienne. La lecture, personnelle, se fait dans un premier temps, en essayant de vérifier les résultats intermédiaires et finaux. Mais le texte semble encore assez obscur, c'est pourquoi il peut être intéressant de proposer une explication graphique (voir document 1 dans les annexes).

Elle permet de débloquent les incompréhensions sur le texte initial et a clairement guidé certains élèves dans leur approche du texte. Il peut alors

être bon de signaler que cet "algorithme" géométrique reste, à l'heure actuelle, la seule explication que l'on ait pour l'origine de cette méthode de résolution.

Dans un deuxième temps, on va compléter le développement graphique par une justification algébrique, en transcrivant, pas à pas, les étapes de

l'algorithme avec l'écriture littérale. Cela permet de comprendre en quoi la cinquième ligne du texte n'est pas une instruction mais une question ; c'est le passage le plus difficile, puisque l'identité remarquable n'est repérée que par certains élèves.

En effet, la transcription algébrique des lignes donne

$$L1 \quad (x + y)^2 = 196$$

$$L2 \quad 4xy = 192$$

$$L3 \quad (x + y)^2 - 4xy = 4$$

$$L4 \quad x^2 - 2xy + y^2 = 4$$

$$L5 \quad x - y = 2$$

$$L6 \quad x + y - (x - y) = 12$$

$$L7 \quad y = 12 \times 0,5$$

$$L8 \quad y = 6$$

$$L9 \quad x = y + x - y$$

$$L10 \quad x = 8$$

Il n'y a pour ce problème qu'un couple de solutions positives, étant donné le contexte. Le passage à l'étape 5 ne sera possible que si le résultat de l'étape 4 est positif c'est-à-dire si le discriminant de l'équation est positif. Ainsi, en plus d'un cas d'application que les élèves réussissent facilement, nous avons pensé qu'il serait judicieux de fournir un cas où les données mèneraient à une situation sans solution comme $x + y = 5$ et $xy = 8$ (à expérimenter).

Dans le cadre de ce travail, essentiellement algébrique, la traduction d'un texte d'origine ancienne en langage algébrique, plus contemporain, est d'une grande richesse. De par sa formulation inhabituelle, l'algorithme incite les élèves à comprendre ce qui est dit, certes, mais aussi à chercher une justification.

Dans la classe d'Anne, un autre problème a été proposé :

« J'ai additionné la longueur et la largeur de mon rectangle $6^{\circ}30'$; sa surface $7^{\circ}30'$ »

On cherche la longueur et la largeur du rectangle.

Voici la solution donnée

Tu fractionneras en deux $6^{\circ}30'$: $3^{\circ}15'$. Tu croiseras $3^{\circ}15'$ et $3^{\circ}15'$: $10^{\circ}33'45''$.

Tu soustrairas $7^{\circ}30'$ de $10^{\circ}33'45''$: $3^{\circ}3'45''$. C'est le carré de $1^{\circ}45'$.

Tu ajouteras $3^{\circ}15'$, que tu as croisé, à $1^{\circ}45'$: 5° . C'est la longueur.

Tu retrancheras de $3^{\circ}15'$, que tu as croisé, $1^{\circ}45'$: $1^{\circ}30'$. C'est la largeur.

Le problème est proposé aux élèves, avec la solution, en notation sexagésimale mais sans écriture fractionnaire (c'est ce que l'on trouve dans les tablettes), la notation dms (degré – minutes – secondes) n'est bien sûr pas celle des tablettes et n'a été utilisée que pour faciliter la lecture du texte par les élèves. Ces derniers ont d'abord « traduit » la solution en écriture décimale sans rencontrer de problème particulier. Ils ont ensuite utilisé la même méthode pour résoudre un problème similaire.

Les problèmes présentés ont toujours une solution (positive). La seule question posée fut celle des unités puisqu'il s'agit de longueurs une élève s'est interrogée sur l'unité de mesure à utiliser mais, très vite, toute la classe est tombée d'accord sur le fait que la solution du problème est valable quelle que soit l'unité employée.

Ensuite il est demandé aux élèves d'explicitier les formules mises en œuvre et d'en justifier l'utilisation. Certains ont gardé les valeurs numériques en parallèles des expressions littérales, d'autres ne donnent que la forme littérale.

Une élève présente au tableau son travail. Voilà les formules qu'elle obtient :

$$\text{Longueur} = \frac{(x+y)}{2} + \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4} - xy} \quad (1); \quad \text{Largeur} = \frac{(x+y)}{2} - \sqrt{\frac{(x+y)^2}{4} - xy} \quad (2)$$

Ensuite, elle factorise l'expression sous le radical et constate que $\frac{(x+y)^2}{4} - xy = \frac{(x-y)^2}{4}$. Elle en déduit que $\sqrt{\frac{(x+y)^2}{4} - xy} = \sqrt{\frac{(x-y)^2}{4}}$ d'où

$$\sqrt{\frac{(x+y)^2}{4} - xy} = \frac{x-y}{2}; \quad \text{l'écriture } x-y \text{ (x étant la longueur et y la largeur)}$$

donne un résultat positif.

Il suffit alors d'ajouter $\frac{(x+y)}{2}$ et $\frac{x-y}{2}$ pour obtenir la valeur de x et de

soustraire pour obtenir y. Lorsqu'on connaît la somme et la différence de deux nombres il est facile de trouver leurs valeurs

Elle constate que "ça marche" puisque, après simplification, la première expression donne x et la seconde y! Elle en déduit que le calcul des Babyloniens donne bien les valeurs cherchées.

Les élèves estiment que l'on a justifié la méthode proposée dans l'exercice. A aucun moment, ils ne se sont posé la question de l'existence d'une solution ; le fait de pouvoir la calculer suffit pour prouver qu'elle existe.

Les élèves se sont alors demandés « Mais comment ils ont fait pour trouver ça ? »

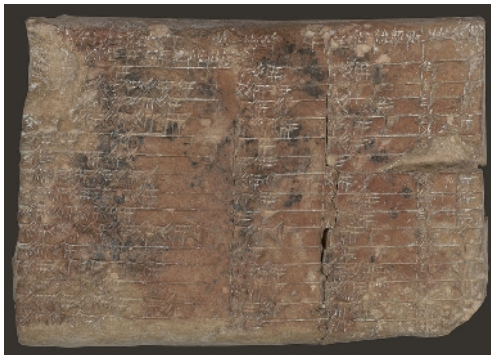
La justification géométrique vue dans la première classe est proposée aux élèves en précisant qu'aucun texte n'en fait mention mais que cette démarche graphique constitue une explication possible de la méthode utilisée.

Devant le graphique, un élève – Antoine - a essayé de résoudre le problème autrement : il le met en équation et obtient une expression du second degré (qu'il ne sait pas résoudre) dont il ne sait pas calculer les racines ; mais lors du travail sur les fonctions il a été amené à résoudre graphiquement des équations, il décide donc d'utiliser cette méthode et trace la courbe représentant la fonction trinôme du second degré associée à l'équation obtenue et obtient les solutions par lecture graphique (cette méthode n'est pas sans rappeler celle développée par Omar Al-Khayyam au XI^{ème} siècle pour résoudre l'équation : $x^3 + r = qx$ il avait, pour cela, étudié l'intersection de la parabole d'équation $x^2 = \sqrt{q}y$ avec l'hyperbole d'équation $x^2 - \frac{r}{q}x = y^2$).

Les deux problèmes babyloniens proposés aux élèves faisaient appel à l'égalité $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$. On peut déterminer deux nombres dont on connaît la somme et le produit et, pour ce faire, on utilise l'identité précédente pour calculer la différence des deux nombres.

Voir pages suivantes, en annexe, les documents de travail fournis aux élèves.

La suite de cet article (2^{ème} partie : méthode d'Al-Kwarizmi) paraîtra dans notre prochain numéro.



Tablette de
Plimpton

Annexes - Les documents de travail donnés aux élèves

Document 1 (classe de Gilles, 1^{ère} partie).

Résolution d'équation du second degré chez les Babyloniens quatre mille ans avant notre ère.

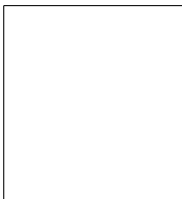
Énoncé du problème : On considère un rectangle. La longueur ajoutée à la largeur est 14. La surface est 48. Les dimensions sont inconnues.

a) On pose x la longueur et y la largeur. Traduire l'énoncé à l'aide de deux équations.

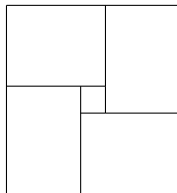
b) Par substitution, éliminer y dans une des équations et l'écrire sans quotient. Une telle équation est appelée équation du second degré.

Résolution suggérée par le texte babylonien :	Questions
<p>14 fois 14 est égal à 196 48 fois 4 est égal à 192 Tu soustrais 192 de 196 et il reste 4 4 est quel nombre multiplié par lui-même ? 2 fois 2 est égal à 4. Tu soustrais 2 de 14 et il reste 12. 12 fois 0,5 est égal à 6 6 est la largeur. Tu ajoutes 2 à 6, cela fait 8. 8 est la longueur.</p>	<p>a) Quelle remarque peut-on faire concernant la transition entre la 4^{ème} et la 5^{ème} ligne ? b) Traduire chacune des lignes de la résolution à l'aide d'égalités dépendant de x et y. Exemple $14 \times 14 = 196$ correspond à $(x + y) \times (x + y) = 196 \dots$ c) Appliquer la méthode précédente au problème suivant "La longueur ajoutée à la largeur est 16. La surface est 60. Les dimensions sont inconnues".</p>

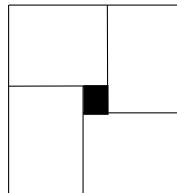
On peut faire des figures pour les différentes étapes de la résolution :



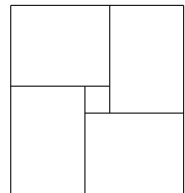
La longueur ajoutée à la largeur est 14 (et un carré de côté 14 a pour aire 196)



Dans ce carré, on peut construire 4 rectangles d'aire 48 soit une aire totale de 192



L'aire du carré central est 4 donc c'est un carré de côté 2



On en déduit que la largeur des rectangles est 6 et que leur longueur est 8

Document 2 (classe d'Anne, fiche 1)

Comment résoudre des équations du second degré ? Les calculs babyloniens

L'histoire des équations du second degré remonte à une période très lointaine.

Dans les textes mathématiques babyloniens que l'on a retrouvés et qui datent de deux mille ans avant notre ère, figurent des problèmes concernant l'activité économique (poids et mesures, calcul d'impôts et d'intérêts, superficie d'un domaine..) et l'astronomie (calendrier..). Certains de ces problèmes concernent des équations du second degré.

Les textes retrouvés sont écrits en écriture cunéiforme sur des tablettes d'argile ; ils proposent des problèmes avec leurs solutions numériques sans donner de démonstration ou de justification.

Le problème suivant provient de la tablette YBC 4663.

« J'ai additionné la longueur et la largeur de mon rectangle $6^{\circ}30'$; sa surface $7^{\circ}30'$ »

Les Babyloniens utilisaient une numération de position sexagésimale (en base 60), c'est à eux que nous devons l'utilisation de ce système dans la mesure du temps et des angles.

L'unité ($^{\circ}$) est divisée en 60' donc $30' = 0,5^{\circ}$.

Si on utilise la numération décimale l'énoncé du problème devient

J'ai additionné la longueur et la largeur de mon rectangle et j'obtiens 6,5. Sa surface est égale à 7,5.

On cherche la longueur et la largeur du rectangle.

Voici la solution donnée

Tu fractionneras en deux $6^{\circ}30' : 3^{\circ}15'$. Tu croiseras $3^{\circ}15'$ et $3^{\circ}15' : 10^{\circ}33'45''$.

Tu soustrairas $7^{\circ}30'$ de $10^{\circ}33'45'' : 3^{\circ}3'45''$. C'est le carré de $1^{\circ}45'$.

Tu ajouteras $3^{\circ}15'$, que tu as croisé, à $1^{\circ}45' : 5^{\circ}$. C'est la longueur.

Tu retrancheras de $3^{\circ}15'$, que tu as croisé, $1^{\circ}45' : 1^{\circ}30'$. C'est la largeur.

Ici, « croiser » signifie « multiplier ».

1. Ecrire la solution proposée en notation décimale.
2. En utilisant la même méthode, calculer les dimensions d'un rectangle dont l'aire est 112 et le demi périmètre 22.

Document 3 (classe d'Anne, fiche 2)

Compléter le tableau suivant.

On note x et y les dimensions du rectangle

Solution donnée dans le texte babylonien	Traduction à l'aide d'égalités contenant x et y
J'ai additionné la longueur et la largeur de mon rectangle : 6,5	
Sa surface : 7,5	
Tu fractionneras en deux 6,5 : 3,25	
Tu croiseras 3,25 et 3,25 : 10,5625	
Tu soustrairas 7,5 de 10,5625 : 3,0625	
C'est le carré de 1,75	
Tu ajouteras 3,25, que tu as croisé, à 1,75 : 5 C'est la longueur.	
Tu retrancheras de 3,25, que tu as croisé, 1,75 : 1,5 C'est la largeur	

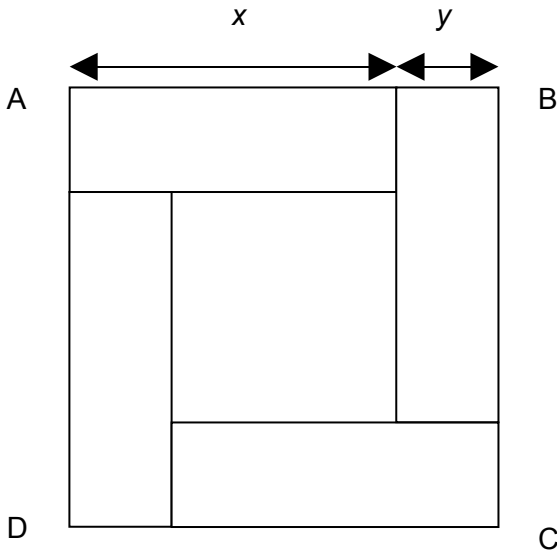
Donner les formules permettant de calculer x et y lorsqu'on connaît $S = x + y$ et $P = xy$.

Document 4 (classe d'Anne, fiche 3)

Les tablettes qui nous sont parvenues ne proposent que des calculs sans figures mais on peut imaginer que les Babyloniens connaissaient une justification géométrique de leurs calculs.

On cherche les dimensions x et y d'un rectangle dont le demi périmètre vaut 6,5 et l'aire 7,5.

On considère le carré ABCD dont le coté est égal à $x + y = 6,5$.
Dans le carré ABCD on a construit quatre rectangles de longueur x et de largeur y .



1. Quelle est la nature du quadrilatère se trouvant au centre du carré ?
2. Quelle est la valeur de l'aire du quadrilatère se trouvant au centre du carré ?
3. Exprimer l'aire de ce quadrilatère en fonction de x et de y .
4. Quelle est la valeur de $x - y$?
5. Peut-on déduire de ce qui précède les valeurs de x et y ?