Sommaire

LE PETIT VERT

(BULLETIN DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N°CPPAP : 2 814 D 73 S. N°ISSN : 0760-9825. Dépô t légal : Septembre 2004.

Imprimé au siège de l'Association :

IREM (Faculté des Sciences). BP 239. 54506-VANDOEUVRE

Ce numéro a été tiré à 450 exemplaires.

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 5,80 €.

L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :

ADRESSE :

Signature :

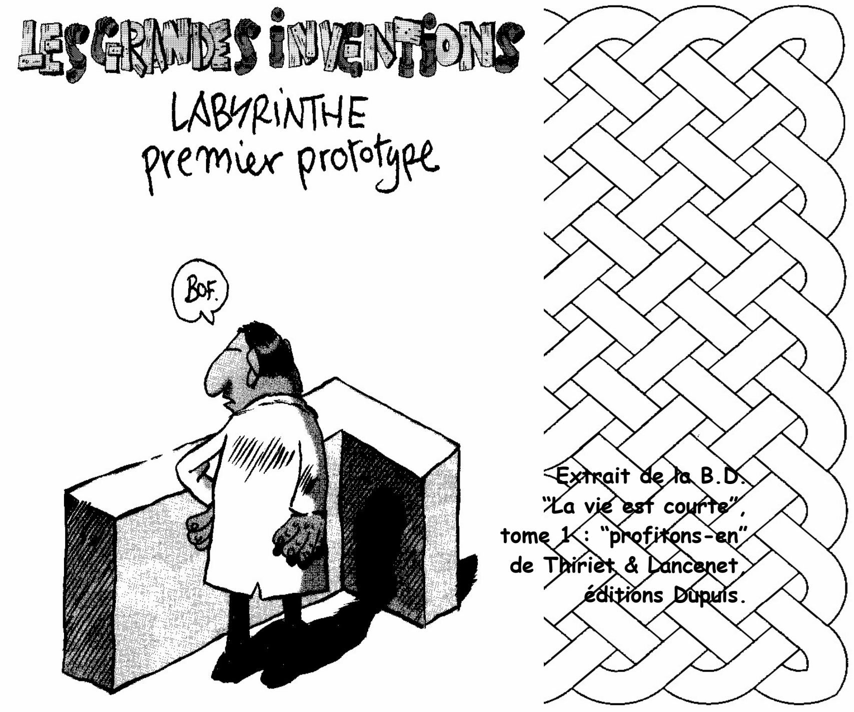
Désire m'abonner pour un an (année civile) au "PETIT VERT"

LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N°79	SEPTEMBRE 2004	Abonnement 4 nos par an : 5,80 €



Extrait de la B.D. "La vie est courte", tome 1 : "profitons-en" de Thiriet & Lancenet, éditions Dupuis.

Consultez notre site :
http://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep

JOURNÉES A.P.M.E.P.
PROCÉDURES D'AUTORISATION D'ABSENCE

1. Journées nationales d'Orléans (24-25-26 octobre 2004)

Ces journées ayant lieu pendant les vacances de la Toussaint, vous n'avez pas besoin d'autorisation d'absence pour y participer. Cependant, si vous êtes en activité, nous vous conseillons vivement, pour pouvoir être couvert en cas " d'accident de travail ", de vous inscrire au P.A.F. (avant le 26/09/04), et bénéficier ainsi d'un " ordre de mission " (sans remboursement de frais) : code stage 04A0120116 module 8227.

2. Journée régionale de Nancy (16 mars 2005)

Si vous êtes en activité, il **faudra** vous inscrire au PAF pour pouvoir bénéficier d'une autorisation d'absence ; code stage 04A0120875 module 9594. **ATTENTION** : les inscriptions au PAF seront fermées le 26/09/04.
Adresse URL : http://ciel5.ac-nancy-metz.fr/mission_formation_continue/
Cependant, nous allons essayer de négocier avec la DIFOR pour qu'il y ait, comme l'an passé, réouverture d'une " fenêtre " spécifique d'inscription auprès des chefs d'établissement, probablement début février ; cela permettrait de contacter en particulier les non-adhérents, qui n'ont pas ce **PETIT VERT** entre les mains.
Une fois les inscriptions enregistrées, la DIFOR établira, au nom de Recteur, des " invitations " à participer à cette journée. Votre chef d'établissement sera alors habilité à transformer cette " invitation " en un ordre de mission sans frais, qui vous autorisera à vous absenter et couvrira votre déplacement comme " temps de travail ".
Parallèlement, pour notre organisation " interne " (gestion des groupes de discussion, des ateliers et des repas), vous devrez envoyer à la Régionale - comme tous les ans, dès que vous aurez reçu le bulletin de présentation -un bulletin où vous porterez vos vœux.

APPEL À ATELIERS

La prochaine "Journée régionale des mathématiques" aura lieu le mercredi 16 mars 2005 à Nancy.
Un des gages de réussite de cette journée est la présentation d'" ATELIERS " variés et nombreux. Nous lançons donc un appel auprès de tous les collègues qui voudraient en présenter un. Ces ateliers se dérouleront l'après-midi, durant 1 h 30, et pourront rassembler de 15 à 30 participants.
Envoyez vos propositions le plus rapidement possible au président régional Apmep : pierre-alain.muller@wanadoo.fr. MERCI.

Solution du problème n° 78

Voir sur le site… … merci.

http://perso.club-internet.fr/jfgilles/mathematiques/bibliotheque/euclide/

The ethic of geometry, a genealogy of modernity – **D. R. Lachterman:** http://lattice.linguist.jussieu.fr/article.php3?id_article=33

De l'arithmétisation des grandeurs géométriques chez Stevin – **G. Waldegg :** http://www.peiresc.org/New%20site/Actes.Dhombres/Waldegg.pdf

FONCTIONS AU COLLEGE

En 2003-2004 la commission Collège de la Régionale a travaillé sur le thème des fonctions. L'ensemble des réflexions et idées d'activités a donné lieu a un document de 24 pages A4, intitulé " **A propos des fonctions** ", consultable et téléchargeable sur notre

Problème du trimestre n°79

proposé par Pol LE GALL, de Courcelles-Chaussy

En troisième on présente deux algorithmes de recherche du PGCD : l'algorithme d'Euclide et l'algorithme des différences (utilisant le fait que PGCD $(a, b) = \text{PGCD}(a, a-b)$).
La plupart du temps ce deuxième algorithme est nettement plus lent que le premier. Mais existe-t-il des paires de nombres pour lesquelles les deux algorithmes sont équivalents du point de vue de la rapidité et aboutissent après

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à

Pol LE GALL, 2 place du Chaussy, 57530 COURCELLES.

Solution de problème du trimestre n°78

proposé par Benoît CADO, de Nancy

Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Que vaut le produit des distances $A_1A_2 \times A_1A_3 \times \ldots \times A_1A_n$?

Voir solution page suivante

édito

56 ans

Cinquante-six ans passés à l'école ; d'abord à user mes fonds de culotte sur ses bancs, puis de l'autre côté de la "barrière" pendant 38 ans.
C'est pendant l'été qui séparait math-sup de math-spé que j'ai opté pour l'enseignement : je mettais alors une croix sur une "carrière" d'ingénieur, quittant le lycée Poincaré à la rentrée de septembre pour me retrouver à la fac. Je ne le regrette pas.
Au C.P.R. (équivalent de l'actuelle 2e année d'I.U.F.M.), j'ai adhéré "en bloc" à la MGEN, à la MAIF, au SNES et à l'APMEP ... comme (presque) tout le monde à cette époque !
J'ai milité de longues années au syndicat, dans un courant d'opposition que l'on pourrait qualifier "d'autogestionnaire", avant d'opter pour "l'autre" syndicat (le SGEN). A l'A.P.M.E.P., j'étais simplement "abonné", et je lisais consciencieusement le bulletin (l'unique bulletin, le "gros" vert).
Au collège, puis au lycée, j'ai tout de suite été tenté par l'innovation pédagogique et par le travail interdisciplinaire avec mes collègues, et je m'y suis fortement investi. A tel point que l'on a fini par me proposer des fonctions de formateur, voire d'administratif ... j'ai refusé ces dernières et, en ce qui concerne la formation, je n'ai jamais voulu m'y engager à temps complet : j'avais besoin de garder quelques classes, et d'y travailler avec les collègues. Je ne le regrette pas non plus.
A l'APMEP de Nancy, il ne se passait pas grand chose, et c'est peut-être pour réveiller cette régionale moribonde qu'avec quelques autres adhérents, il y a exactement 20 ans, le jour d'une A.G. mémorable, nous nous sommes "associés" pour nous y investir.
De là sont nés : **LE PETIT VERT** que vous avez entre les mains (et dont j'ai gardé la responsabilité depuis), la décision d'organiser les Journées nationales à Metz (13 ans avant Gérardmer) et des journées régionales annuelles, de concevoir des actions de formation, etc.

Depuis le 1er septembre de cette année, je suis en retraite. Je vais bien sûr continuer à consacrer une partie de mon temps libre à l'APMEP. Mais je vais regretter le travail avec mes collègues enseignants, que ce soit un travail interdisciplinaire ou un travail centré sur le programme d'une classe (comme celui du groupe que j'animais il y a deux ans à l'IREM sur la classe de 1e L, et qui a débouché sur la réalisation la brochure " Dé-chiffer par les maths ").
De toute ma carrière, c'est ce travail en équipe qui me paraît être le point le plus positif, et qui m'a permis de surmonter les inévitables moments de découragement (les élèves ne se comportent pas souvent comme on avait prévu qu'ils le feraient, et quelquefois "sabotent" nos beaux échafaudages...).

Puisse l'APMEP, et en particulier la régionale Lorraine, vous fournir – comme elle me les a fournies - ces occasions de rencontres, d'échanges, de réflexion et de travail en commun.

Jacques VERDIER

Une façon de rendre plus “ agréable ” le calcul littéral en classe de 3ème.

Christophe **WALENTIN**
Collège Les Avrils, Saint Mihiel (55)
christophe.walentin@wanadoo.fr

Ce document est inspiré d’une activité (Françoise BRASSENX) disponible sur le site internet MATHSENLIGNE (www.mathsenligne.com).

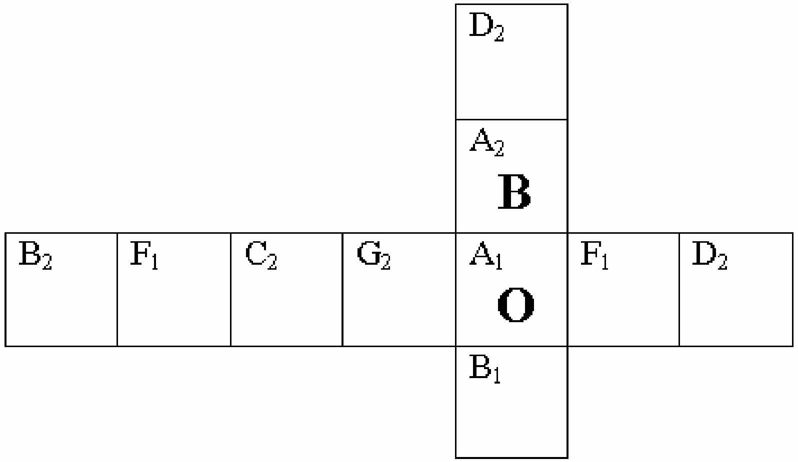
Brève description de l’activité…

L’élève est amené à trouver la forme réduite de plusieurs expressions littérales. Puis, pour chacune d’entre elles, le coefficient de chaque monôme est considéré sans son signe et associé à une lettre de l’alphabet (1 à A, 2 à B, 3 à C, 4 à D, etc.), ce qui permet à l’élève de remplir une grille de mots préalablement préparée par l’enseignant.

Exemple…

Pour l’expression A = $(x - 3)^2 - (8 + 9x - x^2)$, l’élève aboutit à la forme réduite A = $\mathbf{2}x^2 - \mathbf{15}x + \mathbf{1}$, ce qui lui fournit les coefficients suivants : $A_2 = 2$, qui correspond à la lettre B ; $A_1 = 15$, qui correspond à la lettre O ; $A_0 = 1$, qui correspond à la lettre A.

L’élève remplit alors au fur et à mesure une grille qui se présente ainsi, en remplaçant chaque coefficient par sa lettre correspondante :
La création de telles grilles et des expressions associées peut nécessiter un certain



6 selon la nature et le nombre de leurs solutions. Descartes propose pour celles-ci diverses méthodes de résolution et rappelle celles de ses prédécesseurs (Cardan, Tartaglia). Il lui apparaît de plus en plus clair que le respect des règles d’homogénéité complique l’écriture d’équations elles-mêmes assez difficiles à résoudre.

Descartes donne alors un autre exemple de problème géométrique qu’il va encore une fois résoudre par l’algèbre et les méthodes qu’il a exposées auparavant. Au sein de cette étude il en vient à résoudre un petit exercice dans lequel les dimensions entre les quantités ne sont clairement pas les mêmes.
"Tout de même si on veut diviser l’angle NOP, ou bien l’arc ou portion de cercle NQPT en trois parties égales, faisant NO = 1 pour le rayon du cercle, et NP = q pour la subtendue de l’arc donné, et NQ = z pour la subtendue du tiers de cet arc, l'équation vient : $z^3 = 3z - q$ " (on aura bien sûr remarqué le changement de statut de la lettre z qui est à nouveau l’inconnue).
L’égalité obtenue, du point de vue des dimensions, oppose un volume à différence d’une aire par une longueur. La rupture avec la géométrie des Anciens est entièrement consommée…

C’est la dernière étape d’un long processus d’abstraction où l’on est passé de la résolution géométrique d’un problème du plan à une résolution exclusivement numérique. Les quantités numériques ont pris, dans les calculs, la place des quantités géométriques, des grandeurs. L’analogie est complète entre les deux catégories.

Bien entendu – et Descartes soulèvera le problème sans le régler – les équations algébriques possèdent des solutions ("sourdes" ou "fausses") qui n’ont pas d’interprétation géométrique possible. Le champ des nombres dépasse, en fin de compte, largement celui des grandeurs.
"Cette géométrie de Descartes est une *Algèbre des longueurs*. Même s’il ne se prononce pas clairement sur la nature du rapport géométrique (est-il un nombre ou pas ?) ou plutôt, […], même s’il maintient la distinction entre nombre et rapport géométrique, l’avancée sur le plan de la numérisation des rapports est importante." (E. Cousquer)

Des sources d’inspiration largement citées…

La Géométrie – **Descartes –** Editions Jacques Gabay
De la théorie des proportions à la notion de nombre réel – **E. Cousquer :**
http://www.lille.iufm.fr/labo/cream/ressources/savoirPlus/R/Ch94/Ch94.pdf
La Géométrie de Descartes - **P. Debart :**
http://perso.wanadoo.fr/debart/geometrie/geom_descartes_interactif.html
Eléments – **Euclide :**

Etude d'un cas particulier.

Après la résolution dans le cas général, vient l'étude d'un cas particulier. Descartes utilise alors un repère d'origine A, l'axe des abscisses étant la droite horizontale (AG) ; l'axe des ordonnées dans la direction BC faisant un angle de 60° avec l'horizontale, orienté vers le bas (même figure qu'à la page précédente). (suivent les valeurs des différents paramètres de la résolution générale)

La quantité "d'homogénéité" z disparaît alors remplacée par la valeur 1. Descartes obtient alors des expressions comme celle sous le symbole racine

Et si on veut expliquer toutes les quantités données par nombres, en faisant par exemple EA = 3, AG = 5, AB = BR, BS = $\frac{1}{2}$ BE, GB = BT, CD = $\frac{3}{2}$ CR, CF = 2CS, CH = $\frac{2}{3}$ CT, et que l'angle ABR soit de 60 degrés, et enfin que le rectangle des deux CB et CF soit égal au rectangle des deux autres CD et CH; car il faut avoir toutes ces choses afin que la question soit entièrement déterminée; et avec cela, supposant AB = x, et CB = y, on trouve par la façon ci-dessus expliquée.

$$y^2 = 2y - xy + 5x - x^2,$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}x^2},$$

si bien que BK doit être 1, KL doit être la moitié de KI; et pourceque l'angle IKL ou ABR est de 60 degrés, et KIL qui est la moitié de KIB ou IKL, de 30, ILK est droit. Et pourceque IK ou AB est nommée x, KL est $\frac{1}{2}x$, et IL est $x\sqrt{\frac{3}{4}}$, et la quantité qui étoit tantôt nommée z est 1, celle qui étoit a est $\sqrt{\frac{3}{4}}$, celle qui étoit m est 1, celle qui étoit o est 4, et celle qui étoit p est $\frac{3}{4}$, de façon qu'on a $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pour IM, et $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pour NM;

(1 + 4x) pour laquelle les règles d'homogénéité n'appliquent plus : la somme d'une longueur et d'une aire… La quantité z revient toutefois dans la conclusion générale du problème.

Le livre troisième

Il s'ouvre sur une classification des équations algébriques allant jusqu'au degré

temps.
C'est ce temps que l'on se propose de vous faire gagner…

Tout d'abord, nous allons donner une liste d'expressions qui génère une cinquantaine de coefficients (chaque lettre étant générée environ 2 fois). On donnera ensuite un exemple de préparation de grille.

A = $(3x - 2)^2 + 12$
B = $(x + 1)(4x - 2) - 2(8-3x)$
C = $(x + 7)^2 + 3(2x^2 - 10) + 1$
D = $(5x - 2)^2 + (2x - 3)(x + 2) - x^2$
E = $(2x - 4)^2 + x(x - 1)$
F = $(3x^2 - 4) - (2x^2 - 7x + 3) - (-10 + x)$
G = $3(2x^2 - 4x) + 2(x^2 - 5x - 12)$
H = $(5x - 2)^2$
I = $(10x^2 - 10x + 10) - (9x^2 - 8x - 7)$
J = $(3 - 3x)(1 + 5x)$
K = $-3x(6x - 2) - 5(-2 - 3x)$
L = $(3 - 5x)(3 + 5x)$
M = $(2x + 5)^2 + (x^2 - 9x - 12)$
N = $(2x - 1)(1 - 7x) - (6 - 14x)$
O = $2x^2 - 7x - 11 - 10 - 10x + 4x^2$
P = $(3x + 4)^2 + (2x)^2 + (-3)^2$
Q = $(4 - 3x)^2 + (x^2 + 5x + 6)$

L'expression A fournit les coefficients A_2, A_1, A_0, l'expression B les coefficients B_2, B_1, B_0, etc.
Le tableau suivant fournit, pour chaque lettre de l'alphabet les coefficients correspondants et par suite les expressions à sélectionner :
Exemple de préparation de grille…

Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients		Lettre	Coefficients	
A	F_2	I_2	**F**	F_1	O_2	**K**	M_1	P_0	**P**	A_0	E_0	**U**	O_0	K_1
B	D_0	I_1	**G**	N_0	C_2	**L**	A_1	J_1	**Q**	O_1	I_0	**V**	G_1	Q_0
C	J_0	F_0	**H**	B_1	G_2	**M**	P_2	M_0	**R**	K_2	B_0	**W**	N_1	
D	B_2	H_0	**I**	A_2	L_0	**N**	C_1	N_2	**S**	D_1	Q_1	**X**	G_0	P_1
E	E_2	M_2	**J**	Q_2	K_0	**O**	E_1	J_2	**T**	C_0	H_1	**Y**	H_2	L_2
												Z	D_2	

On forme une grille avec des mots :
En utilisant le tableau précédent, on remplace les lettres par les coefficients correspondants :

				M	E	T	Z
	O			I			
D	R	U	I	**D**	E		
				I			

(dans cet exemple, H_0 et B_2 représentent la lettre D).

				P_2	E_2	H_1	D_2
	E_1			A_2			
$\mathbf{H_0}$	K_2	O_0	A_2	$\mathbf{B_2}$	E_2		
				A_2			

Il suffit alors de donner cette grille à l'élève ainsi que les expressions nécessaires :
$P = (3x + 4)^2 + (2x)^2 + (-3)^2$
$E = (2x - 4)^2 + x(x - 1)$
$H = (5x - 2)^2$
etc.

Remarques…

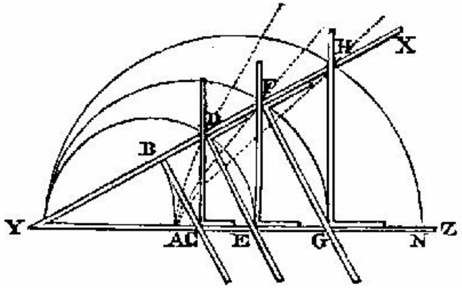
(Suite page 7)

" La vie n'est bonne qu'à deux choses : découvrir les mathématiques et enseigner les mathématiques "
Siméon Denis POISSON (1781-1840), mathématicien.

supposer le problème résolu, désigner par des lettres quelques longueurs bien choisies (connues ou non) puis exprimer les autres longueurs en fonction de ces dernières. Le problème géométrique est ainsi ramener à un problème algébrique :
"Premièrement, je suppose la chose comme déjà faite, et pour me démêler de la confusion de toutes ces lignes je considère l'une des données, et l'une de celles qu'il faut trouver, par exemple AB et CB, comme les principales et auxquelles je tâche de rapporter ainsi toutes les autres."
Descartes met ainsi en place son système de repérage : on va exprimer en fonction de deux longueurs CB et AB toutes les autres, compte tenu des positions particulières des différents points de la figure. Ceci étant bien sûr possible du fait que les droites AB et CB ont des directions différentes.
"Que le segment de la ligne AB, qui est entre les points A et B, soit nommé x ; et que BC soit nommé y ; et que toutes les autres lignes données soient prolongées jusques à ce qu'elles coupent ces deux aussi prolongées, s'il est besoin, et si elles ne leur sont point parallèles ; comme vous voyez ici qu'elles coupent la ligne AB aux points A, E, G, et BC aux points R, S, T".

<u>Expression des différentes longueurs du problème.</u>

Les longueurs de base étant données, on peut maintenant déterminer les autres en tenant compte des rapports de proportionnalité évoqués dans l'énoncé du problème. Ces rapports censés être connus sont donc désignés par des lettres du début de l'alphabet : a, b, c, d … pour les distinguer des longueurs inconnues désignées par des lettres de la fin de l'alphabet : x ou y.
Cependant la lettre z qui apparaît dans la suite ne joue pas à proprement parler le rôle d'une inconnue.
"Puis à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnés, la proportion qui est entre les côtés AB et BR est aussi donnée, et je la pose comme de z à b, de façon que AB étant x, RB sera bx / z…"
La variable z est introduite pour respecter les règles d'homogénéité de Viète. Elle sera remplacée par 1 dans l'étude d'un cas particulier dans la suite de la résolution. Elle donne, en quelque sorte, l'unité de longueur choisie. C'est la longueur 1 du segment avec lequel on pouvait construire le produit ou le quotient de deux longueurs.
Son existence, toujours sous-entendue en géométrie analytique, est pourtant indispensable à la construction d'un repère quel qu'il soit. Les graduations des axes y sont rapportées, les distances à l'origine du repère en dépendent.
De ce fait, elle apparaît dans l'expression de toutes les longueurs de la figure.
"… et la toute CR sera $y + bx / z$ à cause que le point B tombe entre C et R […]. Tout de même les trois angles du triangle DRC sont donnés, et par conséquent aussi la proportion qui est entre les côtés CR et CD, que je pose comme de z à c, de façon que CR étant $y + bx / z$, CD sera $cy / z + bcx / z^2$ "…

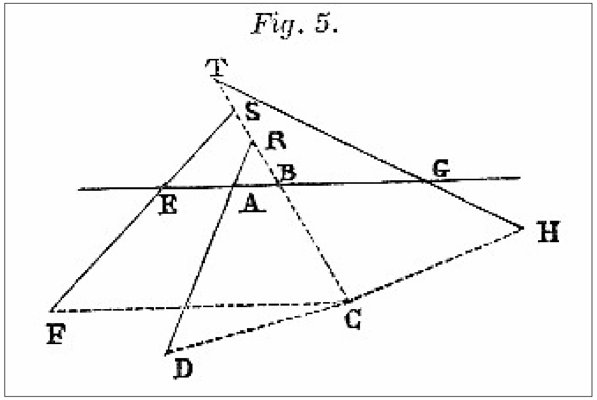


trouvée limitée par le choix des instruments choisis pour sa résolution : la règle et le compas. Si ces instruments sont bien adaptés pour résoudre des équations du second degré, ils ne le sont plus pour des équations de degré supérieur à 2.
Il propose alors un traceur de courbe de son invention (*voir figure ci-dessus*), instrument de mécanique et non de géométrie si l'on s'en tient à la classification des "Anciens" et qui serait moins "orthodoxe".

Mais la résolution de ce problème millénaire, si elle aboutit sur la construction des différentes coniques, se fera essentiellement par le calcul.

<u>Rappel de l'énoncé</u>

(*voir fig. 5*) "Soit AE, AD, EF, GH, etc., plusieurs lignes données par position, et qu'il faille trouver un point, comme C, duquel ayant tiré d'autres lignes droites sur les données, comme CB, CD, CF et CH, en sorte que les angles CBA, CDA, CFE, CHG, etc., soient donnés, et que ce qui est produit par la multiplication d'une partie de ces ligues soit égal à ce qui est produit par la multiplication des autres, ou bien qu'ils aient quelque autre proportion donnée, car cela ne rend point la question plus difficile."



Un énoncé que l'on pourrait aussi formuler ainsi dans le cas où les angles CBA, CDA … sont droits : "On donne quatre droites d_1, d_2, d_3, d_4 et un point M que l'on projette orthogonalement en A, B, C et D sur ces droites. On demande alors de trouver tous les points M tels que $MA \times MB = \alpha\, MC \times MD$."

<u>Mise en place d'une résolution</u>

La méthode adoptée est celle qui a été proposée dans les pages précédentes :

- Afin de favoriser le travail personnel de l'élève (et d'éviter certaines dérives…), il peut être utile au sein d'une même classe de proposer différentes grilles, ou de proposer une seule grille mais avec des expressions associées différentes, possibilité offerte puisque chaque lettre est générée par deux coefficients.
- Lorsque l'élève aboutit à la forme réduite d'une expression, un seul coefficient lui est parfois utile ; aussi, le fait de découvrir une lettre juste ne garantit en rien l'exactitude du calcul. Faire travailler les élèves par groupes homogènes peut s'avérer nécessaire.
- Prolongement : demander aux élèves de créer leurs propres grilles…

Une grille toute prête…

Les mots formant **la grille de la page suivante** concernent la géographie sud-meusienne, plus particulièrement les alentours de Vaucouleurs….

$A = (3x - 2)^2 + 12$ $B = (x + 3)(4x - 2) - 3(4 - x)$
$C = (x + 7)^2 + 3(2x^2 - 10) + 1$ $D = (5x - 2)^2 + (2x - 3)(x + 2)$
$E = (2x + 4)^2 + x(x - 1)$ $F = (3x^2 - 4) - (2x^2 + 3) - (-10 + x)$
$G = 3(2x^2 - 4x) + 2(x^2 + 2x)$

(Suite page 8)

Commission " Histoire des mathématiques "

La première réunion de cette commission de travail de l'APMEP-Lorraine pour 2004-2005 aura lieu le

mercredi 13 octobre 2004 de 14 h 15 à 17 h

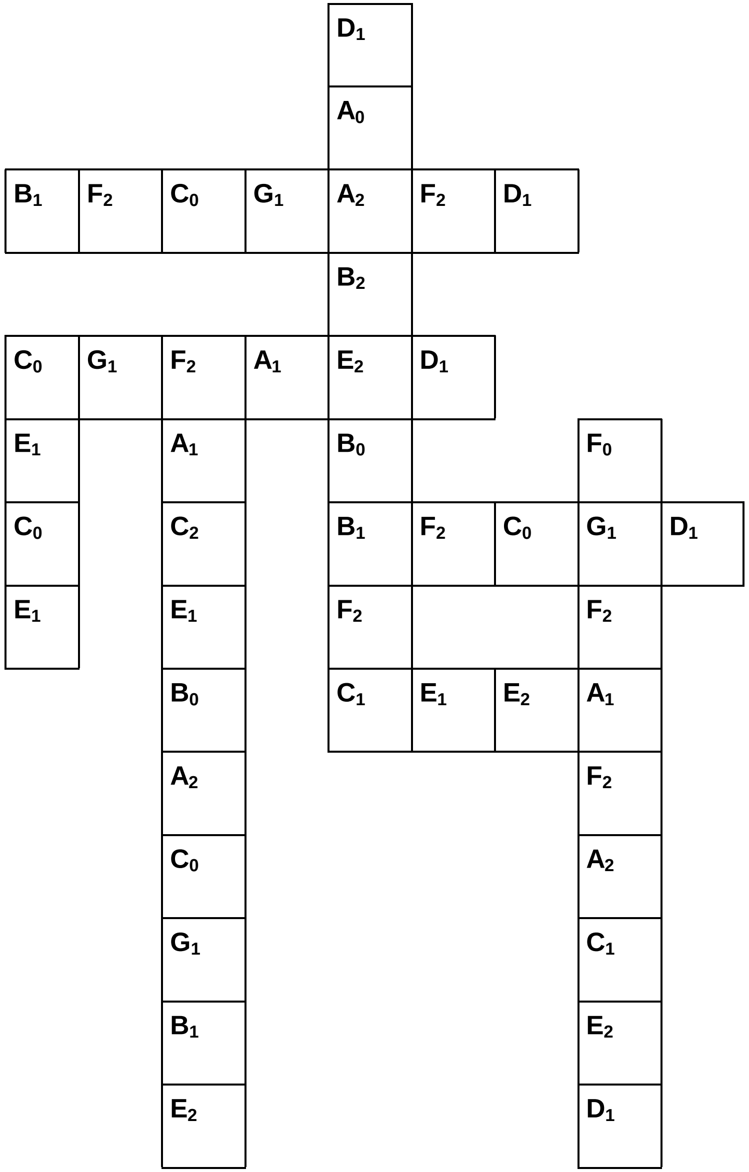
à l'IREM de Lorraine (Vandoeuvre, Faculté des sciences, bâtiment du 1er cycle).

A cette première réunion, Gilles Waehren nous présentera les mathématiques babyloniennes, puis nous établirons le programme de travail de l'année.

Venez nombreux, même si vous n'avez jamais travaillé pour vous ou pour vos élèves l'histoire des mathématiques.

Pour tout contact s'adresser à Maryvonne MÉNEZ-HALLEZ, 10 Grand'Rue, 54120 DENEUVRE. Tél 03 83 75 56 12 Mèl : <u>maryvonne.hallez@ac-nancy-metz.fr</u> ou <u>philodonon@wanadoo.fr</u>

(Suite de la page 7)



constructibles à la règle et au compas. "*Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule.*" On peut ainsi résoudre des problèmes géométriques exclusivement par des calculs par des mises en équations.

Alors que, chez les mathématiciens arabes, l'usage était de mettre la géométrie au service de l'algèbre dans le cadre de la résolution d'équations algébriques. Le processus inverse est ici mis en place et va offrir de nouvelles perspectives aux mathématiques. Mais on est encore loin de la fluidité que permettent la notation symbolique et les simplifications utilisées dans les mathématiques actuelles.

Les règles d'homogénéité de Viète

Des théories grecques, Viète a conservé la loi des homogènes : on ne peut additionner et soustraire que des grandeurs homogènes. Le produit de deux grandeurs homogènes (ou non), donne une grandeur d'une autre dimension. De même la division de grandeurs, est définie en référence à la notion grecque.

Dans un premier temps, afin de respecter les règles énoncées par Viète dans le cadre de l'écriture littérale, Descartes fait apparaître dans ses calculs le segment de longueur 1 évoqué précédemment. Il s'agit de mettre en opposition des grandeurs ayant les même unités : "Afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple : AB = 1, GH = a, BD = b etc. […] Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord […] donner des noms à toutes les lignes […] aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres". Cette accumulation de lettres peut d'ailleurs compliquer la lecture de l'ouvrage. "Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimension l'une que l'autre lorsque l'unité n'est pas déterminée en la question" en introduisant des lettres supplémentaires dans ses calculs. Ainsi, Descartes propose-t-il de résoudre : $z^2 = -az + b^2$ (ou $zz = -az + bb$ comme il a plus souvent coutume de l'écrire) où la quantité positive est désignée par b^2 pour que toutes les quantités de l'équation aient la même dimension.
"…mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue par tout où il y a trop ou trop peu de dimensions : comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même". On se dirige doucement vers une simplification des règles par des sous-entendus.

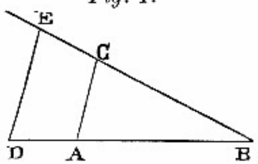
Début de la résolution du problème de Pappus

La résolution du problème de Pappus commence par un rappel de l'énoncé et des ébauches de solutions apportées dans certains cas simples. Descartes considère que la résolution de ce problème dans un cadre plus général s'est

On a : (BA/BD) = (BC/BE) donc BE = (BC$\times$BD) / 1.
Le segment BE a une longueur égale au produit des longueurs BC et BD, or, au sens strict, un produit de longueurs est une grandeur d'aire. On obtient donc un segment qui mesure une aire, notion inconcevable encore à l'époque d'Archimède. Bien sûr, tout cela reste correct dans la mesure où l'on s'est donné un segment de longueur 1 ([AB]) qui apparaît dans le résultat : les quantités mises en oppositions sont homogènes.

Soit, par exemple, AB (*fig. 1*) l'unité, et qu'il faille multiplier BD par BC,

Fig. 1.



je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

La Division

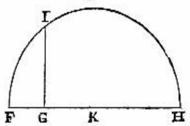
"Ou bien s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division". On peut aussi écrire : BC = BD/BE. Comme on a pu le constater ci-avant, le résultat de la division des longueurs BE et BD est la longueur BC, qui, a priori, est une grandeur sans unité !! Dans l'égalité précédente, la longueur BA, égale à 1, n'a pas été mentionnée.

L'extraction de racine suscite le même genre de remarque :
FIG et IGH sont semblables donc : (GF/GI) = (GI/GH) d'où $GI^2 = GH \times 1$.

Cette introduction de la *Géométrie*, qui peut servir de support à de bons exercices de troisième, n'est pas une fin en soi, mais plutôt la justification des calculs qui seront faits par la suite. Descartes s'assure ainsi que les résultats de ces calculs, notamment dans la résolution du problème de Pappus, sont

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH (*fig. 2*), je lui ajoute en ligne

Fig. 2.



droite FG, qui est l'unité, et divisant FH en deux parties égales au point K, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée.

CONCOURS MATHÉMATIQUE 2005

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), régionale de Lorraine, propose, pour l'année scolaire 2004/2005, un concours intitulé " Concours mathématique 2005 ".

Ce concours, doté de prix pour un montant total d'environ 400 €, est ouvert à tous les établissements scolaires de l'académie de Nancy-Metz. Le thème choisi cette année est :

LES UNITÉS DE MESURE

(ici et ailleurs ; hier, aujourd'hui et ... demain)

Pour y participer, il faudra fournir une contribution sur ce thème. Aucune piste n'est interdite quant au fond, mais le jury privilégiera les contributions collectives qui auront été prétexte à une réelle activité mathématique. La forme pourra prendre divers aspects : plaquette, exposition, production artistique, création de pages internet…
Le cadre de cette réalisation pourra être : travail en classe, travaux croisés ou itinéraires de découverte, travaux personnels encadrés, activité d'un club mathématique, etc.

Les productions devront être adressées au plus tard le **15 mai 2005** à l'adresse suivante :

Concours A.P.M.E.P.
C/o Pierre-Alain MULLER
10 rue des Roses
57200 – SARREGUEMINES

ou bien être déposées au secrétariat de l'IREM (éviter l'envoi postal à cet Institut).

Les professeurs qui souhaitent participer à ce concours sont priés de se faire connaître le plus tôt possible par courrier, téléphone ou mail auprès du président de l'APMEP-Lorraine :
Pierre-Alain MULLER, Tél : 03.87.28.75.51, pierre-alain.muller@wanadoo.fr

André VIRICEL n'est plus.

C'est avec une grande tristesse que nous avons appris, très tardivement, le décès d'André, décédé en 2003. Le Comité régional et la rédaction du Petit Vert lui rendront hommage dans le numéro de mars 2005, spécial " 20ème anniversaire ".

Le site du trimestre

Le Café Pédagogique ÉDITION SCIENCES : journal en ligne d'informations intéressant les enseignants de sciences (maths, physique-chimie, SVT). **http://www.cafepedagogique.net**

Extraits du numéro 47 du 9 mars 2004 :

1) Une équipe allemande a annoncé la factorisation du nombre :
1881 9881292060 7963838697 2394616504 3980716356 3379417382 7007633564 2298885971 5234665485 3190606065 0474304531 7388011303 3967161996 9232120573 4031879550 6569962213 0516875930 7650257059, connu sous le nom de RSA-576 (il possède en effet 576 chiffres en binaire).
La preuve : 3980750 8642406493 7397125500 5503864911 9906436234 2526708406 3851895759 4638895726 1768583317 × 4727721 4610743530 2536223071 9730482246 3291469530 2097116459 8521711305 2071125636 3590397527...
Pas très rassurant quant à la sécurité de nos cartes bancaires, basée sur le dit codage RSA !
Voir http://www.rsasecurity.com/rsalabs/challenges/factoring/rsa576.html

2) La découverte du 40ème nombre de Mersenne premier a été annoncée en décembre 2003 par le GIMPS (Great Internet Mersenne Primality Search), un groupe associant des volontaires pour réaliser du calcul partagé grâce à Internet. Ce nombre, 2 puissance 20996011 - 1, possède 6 320 430 chiffres.
C'est le plus grand nombre premier connu, et il fournit aussi le 40ème nombre parfait pair.
Le calcul a été réalisé en utilisant le test de Lucas-Lehmer.
Voir http://www.mersenne.org/
et http://mathworld.wolfram.com/Lucas-LehmerTest.html

Extrait du numéro 48 du 26 mars 2004 :

Charles-É. Jean, est l'auteur du site **Récréomath** qui nous vient du Québec.
C'est un "passionné de mathématiques et de divertissements intellectuels". Il a publié nombre livres et articles sur le sujet. D'après notre confrère Toth, “ *Récréomath regroupe des énigmes mathématiques "cryptarithmiques" follement récréatives, des défis logiques irrésistibles et des jeux de société du meilleur aloi...* ” Ce site contient effectivement une très large banque de problèmes récréatifs, et une section "méthodes" où figure en particulier un glossaire des termes utilisés. Nous y avons compté 684 énigmes (toutes résolues)... Il n'y a que l'embarras du choix !
Voir http://www.recreomath.qc.ca/

Extrait du numéro 50 du 18 mai 2004 :

Résultats de **l'évaluation des compétences en Sixième** :
Le MEN publie les résultats de l'évaluation de Sixième 2003. On pourra y noter que, en 2003, les élèves ont réussi en moyenne 49 items sur les 78 proposés, soit un score moyen global de réussite de 62,3%. Comme on pouvait s'y attendre, "on a constaté qu'en mathématiques, comme en français, les variables les plus discriminantes pour le score sont la PCS (profession et catégorie socioprofessionnelle) du chef de famille et l'âge de

(Suite page 11)

dit, au sein même de la catégorie des grandeurs, distinguait-on celles qui sont *commensurables*, qui ont "la même raison que deux nombres", de celles dites *incommensurables*, l'opération de division permettant le tri entre les deux classes. Deux grandeurs sont donc dites commensurables s'il est possible de trouver une grandeur finie capable de les mesurer simultanément. Les raisons des grandeurs commensurables ont alors un comportement semblable à celui des raisons numériques et il est possible de faire le lien entre grandeur et nombre.

La révolution apportée par Stevin

Quand il veut introduire sa notation décimale, Stevin, dans *La Disme*, considère les fractions de 1 comme nombres, en rupture avec la pratique de la mathématique grecque.
Pour Stevin, le nombre est un moyen de rendre la quantité évidente. Les nombres ne sont pas des quantités discrètes : "*QUE NOMBRE N'EST POINT QUANTITÉ DISCONTINUE*" et "*QUE L'UNITÉ EST UN NOMBRE*", peut-on lire.
Les nombres et les grandeurs, poursuit Stevin, ont tant de choses en commun qu'ils pourraient paraître presque identiques ; par conséquent, il y a quelque chose dans le nombre qui doit correspondre à ce que le point est aux grandeurs. Stevin conclut que l'unité n'est pas au nombre ce que le point est au segment. Le nombre qui est équivalent au point pour la droite est 0.

Les calculs géométriques chez Descartes.

(Les citations dans les paragraphes qui suivent sont toutes extraites de *La Géométrie*)

Au XVIIème siècle encore, la géométrie se pratique encore sans unité de mesure, mais la dimension de chaque grandeur est prise en compte scrupuleusement dans tous les calculs. Il faut aussi savoir qu'à cette époque, en France et partout ailleurs, on connaît autant d'étalons de longueurs qu'il y a de seigneuries de par le Royaume. La toise est une unité de longueur plus ou moins grande selon que le seigneur est plus ou moins généreux.
On ne peut donc prétendre proposer des résultats généraux en privilégiant la toise de Paris par rapport à celle de Lyon. L'uniformisation ne viendra qu'à la fin du XVIIIème siècle avec la généralisation du système métrique.

Descartes va mettre définitivement en place le lien entre nombre et grandeur de la manière suivante : à partir d'un segment dit "de longueur 1", on construit des segments dont la longueur est le résultat d'une opération arithmétique, que ce soit une multiplication, une division ou une extraction de racine. On opère donc de la même manière sur les longueurs que sur les nombres.

<u>La Multiplication</u> :

Sur les rapports de longueurs dans "La Géométrie" de Descartes.

Gilles ***WAEHREN***
Lycée Mangin, SARREBOURG
Commission " Histoire " de la régionale Lorraine.

Publiée en 1637, la *Géométrie* de Descartes s'inscrit dans la rupture avec ce qu'il appelle lui-même "la géométrie des Anciens", celle des *Eléments* d'Euclide. Les mesures de grandeurs deviennent des nombres à part entière ; des nombres sur lesquels on peut faire toutes les opérations arithmétiques usuelles. Les longueurs des segments constituent alors les inconnues d'équations à résoudre. Mais l'apport majeur de Descartes à cette réforme est l'introduction d'un repère pour étudier un problème géométrique et le résoudre par le calcul et non plus par une méthode purement géométrique.
Qu'en est-il du calcul sur les longueurs à l'époque de Descartes ?
Comment résout-il lui-même certaines équations par des procédés géométriques ?
Comment gère-t-il le passage des grandeurs géométriques à leur représentation numérique ?

La distinction entre nombre et grandeur dans la mathématique grecque.

A l'époque d'Aristote (IV$^{\text{ème}}$ s. avant notre ère) un nombre est une quantité *discrète*. On est encore très proche du nombre qui permet de compter les moutons dans un pâturage ou qui détermine les parts d'un héritage : c'est un naturel ou un rationnel positif. Par contre une grandeur est une quantité *continue*, c'est-à-dire mesurable, que l'on veuille estimer la longueur d'une route ou le poids d'un sac de blé.

Ainsi un nombre (naturel) ne peut être divisé qu'une finitude de fois jusqu'à obtenir 1 ; au-delà, il perd son sens : comment pourrait-on diviser un homme en deux ou en trois sans toucher à son intégrité, son unité ? Une grandeur, elle, peut être mesurée donc elle est indéfiniment divisible. On pourra diviser un segment à volonté, la plus petite partie possible étant le point. Pour les mathématiciens grecs, le point jouait le même rôle en géométrie que le nombre 1 en arithmétique.

Il faut cependant noter que l'infinie divisibilité d'une grandeur implique qu'il n'y a pas d'unité de mesure qui soit naturelle. Ces choix d'unités seront laissés aux arpenteurs, aux "agrimenseurs" ; les géomètres, quant à eux, savent que l'on n'additionne pas des longueurs à des volumes. On verra, par la suite, comment Descartes s'est accommodé de ces problèmes d'unités.

Il est donc normal de constater que, dans les *Eléments*, les livres consacrés à l'arithmétique soient bien séparés de ceux traitant de géométrie, exception faite du livre 5 qui donne des énoncés relatifs aux grandeurs commensurables. Autrement

FORMATION CONTINUE : les F.I.L.

Les moyens accordés aux stages à inscription individuelles du P.A.F. (plan académique de formation) se réduisent d'année en année comme une peau de chagrin.
Le rectorat (qui a 'repris' à l'I.U.F.M. la maîtrise d'ouvrage de la formation continue) incite les personnels à mettre en place des " Formations d'Initiative Locale " (F.I.L.). Ces formations sont organisées à la demande d'une équipe d'au moins une dizaine de professeurs d'un établissement (ou de quelques établissements voisins), qui se concertent et rédigent leur demande au service formation, via le chef d'établissement : c'est lui qui est " responsable " de la demande.
Pour tous ceux que les longs déplacements vers Nancy rebutent, n'hésitez pas à contacter vos collègues des établissements voisins afin de profiter de ces formations plus " légères " mais d'égale qualité.

(Suite de la page 10)
l'élève"... Très bien faite, cette excellente plaquette de six pages téléchargeable mérite d'être lue, comme d'ailleurs la plupart des publications de la DEP (Division de l'Evaluation et de la Prospective).
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/dpd/noteeval/eva0406.pdf

Extrait du numéro 52 du 24 juin 2004 :

CultureMath fait partie des Sites Ressources DESCO-ENS. Son objectif est d'enrichir régulièrement (tous les quinze jours environ) une base de documents intéressants pour l'enseignement secondaire. Par exemple, cette quinzaine, le site propose une introduction rapide (par Hatem Zaag, CNRS/ENS) aux problématiques qui se posent aux mathématiciens qui s'intéressent à la biologie : "*Pourquoi les équations aux dérivées partielles interviennent-elles en biologie ?*" Les documents sont réalisés, pour la plupart, par des chercheurs et des élèves des ENS Ulm, Lyon et Cachan. Beaucoup sont des documents originaux, réalisés spécialement pour ce site ; certains sont issus de documents déjà existants, qui sont alors cités et référencés. Examinez en particulier la rubrique "Dossiers", qui est une mine d'idées. CultureMath est subventionné par la DESCO (Direction de l'Enseignement SCOlaire du Ministère de l'Education Nationale) et hébergé par l'Ecole Normale Supérieure. Ce remarquable site est géré par Farouk Boucekkine, qui est en poste au DMA (Département de mathématiques et applications de l'ENS).
http://www.dma.ens.fr/culturemath/

Abonnement (gratuit) au Café Pédagogique :
http://www.cafepedagogique.net/mailing.php3
Le " café " est servi chaud tous les 15 jours

MATH & MEDIA

Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à la faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.
Envois par la poste à Jacques Verdier, 46 rue de la Grande Haie, 54510-TOMBLAINE, ou par courrier électronique à

Lu dans le bulletin de l'association Pénombre[1], sous la plume de René Padieu :

“ **19 % des habitants de la Terre représentent 91 % des utilisateurs d'internet** ”. Pour l'éditorialiste du Monde Diplomatique (n° 598, janvier 2004), cela démontre que la "fracture numérique" s'aggrave. On ne voit pas l'argument.

Deux lectures possibles :

1 - soit les Terriens utilisateurs d'internet (qui sont 19 % des Terriens) forment 91 % des utilisateurs d'internet. Il reste 9 % d'utilisateurs qui n'habitent pas sur la Terre : on aimerait savoir où ils vivent ;

2 - soit tous les usagers d'internet étant Terriens, si l'on en prend 91 %, par exemple, et que cela fait 19 % de la population mondiale, cela veut dire que les 9 % restants (soit à peu près dix fois moins) représentent 1,9 % de cette même population. Dès lors, 100 % des usagers d'internet font 19 + 1,9 = 20,9 % de tous les Terriens : disons 21 % en arrondissant. Information intéressante (si elle est exacte) et qu'on pouvait donner directement sous cette forme, mais dont on ne voit pas qu'elle étaye le concept de "fracture" et moins encore son aggravation.

Rien dans l'article ne permet d'élucider la signification de ces chiffres ni de s'assurer de leur valeur.

[1] L'association Pénombre (créée en 2003) propose un espace public de réflexion et d'échange sur l'usage du nombre

Lu dans des manuels

Problèmes “ CONCRETS ”

Extraits de manuels scolaires nord-coréens (fournis par "RzECzPOSPOLITA" de Varsovie, traduits par le Courrier International n°712 du 24 au 30 juin 2004) :

Sur un champ de bataille, douze enfants tirent sur un chacal d'Américain. Trois d'entre eux ratent leur tir : calcule combien d'entre eux ont visé juste (niveau CM1).
Pendant la guerre de Libération de la Patrie, un soldat nord-coréen veut réduire en morceaux 87 Américains. Il en tue 51, et fait prisonnier les autres. Combien en a-t-il attrapé vivants ? (niveau CM2).
Dans une ville Corée du Sud occupée par ces chacals d'Américains, 2 350 enfants ne peuvent pas fréquenter l'école. Un nombre X d'enfants travaillent comme cireurs de chaussures et les autres doivent mendier pour manger. Si X = 1 578, combien d'enfants doivent mendier ? (niveau 6e).

Vous trouvez peut-être surprenants ces énoncés. Nous vous proposons aussi, extrait de "Mathématique appliquée et impertinente" (Jean Louis FOURRIER, Documents Payot, 1993) :

Dans la même position depuis 1507, la Joconde a des crampes et souhaiterait étirer les bras. Les dimensions du cadre : 77 cm de haut sur 53 cm de large, ne le lui permettent pas.
Quelle doit être la surface du tableau pour que la Joconde puisse étendre ses bras horizontalement, sachant qu'elle a une envergure de 1,80 m ?

N.D.L.R. Le travail à propos de problèmes que certains nomment concrets n'est pas toujours politiquement neutre et nous avouons préférer les cas où se glisse quelque humour.

Perles du bac

Question (1ère L, épreuve anticipée de math-info) :
a) Combien de chefs d'exploitation agricole ont strictement moins de 45 ans ? strictement moins de 55 ans ?
b) Expliquer pourquoi l'âge médian des chefs d'exploitation agricole est nécessairement entre 45 ans et 55 ans.

Réponse de deux candidat(e)s :
“ L'âge médian des chefs d'exploitation agricole se situe entre 45 et 55 ans car il est nécessaire de bien connaître le métier pour être chef ”.
“ L'âge médian est nécessairement entre 45 et 55 ans car l'agriculture était traditionnelle à leur époque, [*et*] aujourd'hui industrialisée ”.