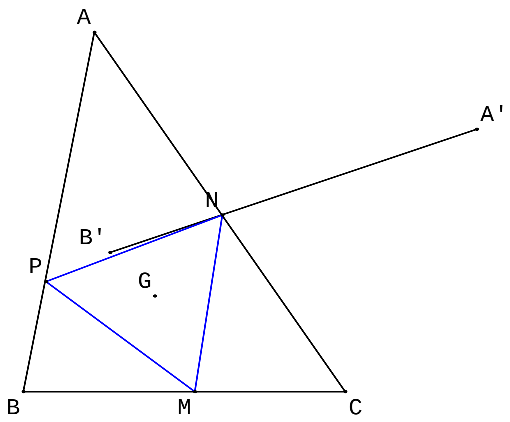
Problème du timestre n°67, proposé par Gabriel BORGÉ

Rappel de l'énoncé : Soit ABC un triangle quelconque. On veut y " inscrire " un triangle MNP, équilatéral, tel que $M \in [BC]$, $N \in [CA]$ et $P \in [AB]$.
Quel est l'ensemble des centres de gravité de tous les triangles MNP possibles ?

Solution proposée par Pol LE GALL

On place le triangle tel que B soit l'angle le plus grand et A le plus petit.
La mesure de B est supérieure ou égale à 60°, celle de A est inférieure ou égale à 60°.
Soit M un point de [BC] pour lequel la construction est possible. Si on considère la rotation de centre M et d'angle –60°, le point N est l'intersection de [AC] et de l'image de [AB] par cette rotation.
On obtient ensuite le point P en complétant le triangle équilatéral.



On va démontrer que le point G parcourt un segment quand M prend toutes les positions possibles. Pour cela on va utiliser une méthode analytique mais en se dispensant des calculs.

Le point G est l'image de N par une similitude de centre M.
Si on se place dans un repère d'origine B, où M a pour coordonnées (t,0). Considérons que les points A et C ont pour coordonnées A(a,b) et C(0,1).
On peut déterminer l'équation de (AC) qui ne dépend pas de t, puis celle de (A'B') qui est du type : Ax+By= Ct car la pente de la droite ne dépend pas de M.
Le point N a donc des coordonnées qui sont des fonctions affines de t (résolution d'un système de Cramer pour lequel t n'intervient " qu'à droite ").
Donc le point G, obtenu comme image de N par une similitude de centre M aura également des coordonnées fonctions affines de t.
Par élimination de t entre les deux coordonnées, G est sur une droite ne dépendant que des points A, B, C.
Pour connaître les extrémités du segment parcouru, on considère les positions limites :
Le cas où M est en B et le cas où B' est sur (AC). (c'est pour cela que l'on a fait le choix de l'angle B supérieur à 60° et de l'angle A inférieur à 60°). *Figures page suivante.*

Il reste à voir si ce segment est quelque chose d'intéressant… c'est presque un segment de bissectrice.

RAISONNEMENT EN PROBABILITÉ

*Michel **BRISSAUD***
Lycée Jean Lurçat
88600 BRUYERES)

INTRODUCTION

L'enseignement des probabilités est considéré depuis longtemps par de nombreux professeurs de lycée comme manquant de rigueur. L'apparition des arbres de probabilités dans les programmes de terminale en 1998 (utilisés comme "outils de démonstration") et celle plus récente de l'énoncé "vulgarisé" de la loi des grands nombres dans les nouveaux programmes de première ne règlent pas le malaise, au contraire.

Pourtant, il est tout à fait possible de présenter un exposé "rigoureux", mais à condition d'avoir bien conscience que dans l'étude d'un phénomène aléatoire, il y a inévitablement une phase de raisonnement qui ne ressort pas de la déduction mathématique, mais qui se place dans le cadre d'une attitude scientifique, avec sa propre rigueur.

Ceci n'est pas toujours bien compris et il en résulte des confusions qui trainent dans l'enseignement des probabilité depuis des dizaines d'années ; il est grand temps d'en sortir.

Je me place pour la suite uniquement dans le cas étudié pour l'instant en lycée, où l'univers (ensemble des résultats possibles) est fini et je présente à la fin une façon simple d'aborder certaines situations élémentaires que l'on voudrait étudier dans l'enseignement secondaire.

LA THÈSE FONDAMENTALE DES PROBABILITÉS

La première question qui se pose lors de l'étude d'un phénomène aléatoire (ou plutôt d'un phénomène que l'on veut étudier avec la théorie des probabilités) est celui du choix de la loi de probabilité sur l'ensemble des résultats possibles.

Elle peut facilement être présentée avec le célèbre problème de la punaise (tombera-t-elle ou pas sur la tête ?). Si on fait plusieurs séries d'un "grand" nombre de lancers, on constate obtenir à chaque fois des fréquences voisines, ce qui n'est pas le cas pour quelques lancers. D'où on peut raisonnablement espérer obtenir encore des fréquences voisines si on refaisait une série d'un grand nombre de lancers. Ceci n'est évidement pas démontrable. C'est un énoncé (une thèse) accepté à la lumière de résultats expérimentaux réels. Et on prend alors comme probabilité une <u>estimation prévisionnelle</u> de cette fréquence espérée.

Ce point de vue permet d'introduire dès la classe de seconde la notion théorique de probabilité, même si on ne dispose pas des règles axiomatiques de calcul. On peut ensuite présenter plus clairement la simulation de quelques expériences avec un générateur de nombres pseudo-aléatoire.

Mais comment faire cette estimation de fréquence espérée?

DES STAT AUX PROBA : UN RAISONNEMENT INDUCTIF

La démarche qui permet de passer de résultats statistiques ou de considérations physiques (pièce équilibrée...) au choix d'une loi de probabilité n'est pas dans le domaine du raisonnement déductif du mathématicien.

Il s'agit d'un raisonnement inductif : on veut "poser" des hypothèses et non en déduire des conséquences. Ce raisonnement peut être guidé par des règles acceptées par l'ensemble de la communauté scientifique (on ne fera pas n'importe quoi, on n'ira pas consulter de voyante même extra-lucide !). On se trouve là dans la position du scientifique qui devra argumenter son choix et non pas le prouver logiquement, ce qui est impossible. En retour, le modèle étant choisi, des conséquences logiques issues de la théorie devront être confrontées de nouveau (si c'est possible) à la réalité.

On trouve ici tout simplement la "démarche scientifique" à laquelle les enseignants de mathématiques ne sont pas habitués. Dans la plupart des exercices traités au lycée, le modèle mathématique est contenu dans l'énoncé (tirage au hasard, dé équilibré, donc équiprobabilité, ce "donc" ne signifiant d'ailleurs pas une déduction mathématique). Cette phase de raisonnement est alors presque systématiquement occultée.

Dans le cas où on choisit la probabilité à partir de résultats statistiques, il faut remarquer aussi qu'il n'y a pas unicité du modèle mathématique. Ainsi avec le problème de la punaise, on peut prendre comme probabilité les fréquences observées lors de 100 lancers, mais on pourrait aussi bien la lancer 1000 fois.

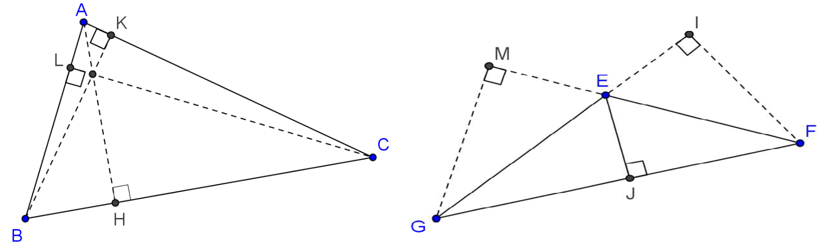
Ce sont d'autres constations expérimentales, plus compliquées car avec un autre niveau de paramètrage, qui montrent (mais ne démontrent pas) que le modèle sera meilleur avec 1000 plutôt qu'avec 100. Les nouveaux programmes de classe de seconde veulent aborder cet aspect à travers l'étude de la "fluctuation d'échantillonnage", sans déboucher sur la notion mathématique de probabilité qui n'est vue qu'en première.

ADÉQUATION THÉORIE - RÉALITÉ ET LOI DES GRANDS NOMBRES

Le choix des axiomes est fait évidemment pour avoir une théorie en accord avec la réalité observée, et il est facile de montrer aux élèves de lycée que la formule P(A $\cup$B) = ... s'inspire d'une relation semblable entre les fréquences à travers le raisonnement du scientifique qui dégage une loi générale à partir de l'étude de la réalité.

C'est la démarche du physicien par exemple avec la loi d'Ohm : issue de constatations expérimentales répétées, elles devient ensuite "axiome" dans une théorie de l'électricité.

What is big, grey, fast and have 16 wheels ?



In the triangles ABC and FEG, the heights are drawn. The following exercises are independent.
Two measures are given in each case and you are asked to calculate a third one.
Cross out the boxes that contain your answers.
When you finish, print the remaining letters in the boxes at the bottom of the page.
The lengths are in **cm** and the areas in **cm².**

1	BC = 4.7, AH = 3.6, area ?	**5**	AH = 9.3, area = 55.8, BC ?
2	AC = 4.2, BK = 3.5, area?	**6**	AB = 5.8, CL = 2.7, area ?
3	MG = 4.1, EF = 2.8, area ?	**7**	EG = 3.2, area = 2.24, IF ?
4	GF = 12.5, area = 15, EJ ?	**8**	EF = 5.6, area = 12.6, MG ?

ANSWERS

the	ame	ord	is	le	pha	us	nto
2.4	5.14	7.83	8.46	4.9	6.35	4.5	6.42
nro	pre	een	lle	rska	ave	onn	tes
5.2	7.35	5.74	10.7	11.52	12	1.4	3.16
