PETIT VERT N°51. SEPTEMBRE 1997

LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 51	SEPTEMBRE 98	Abonnement 4 n^{os} par an : 30 F

Zéro

Voir page 4

AVIS DE RECHERCHE (1)

Chacun d'entre nous a, une fois au moins dans son année scolaire, construit de lui-même un énoncé de problème, un petit exercice, une fiche d'activités...

Nous sommes à la recherche de tels documents : si vous en avez « inventés[1] », envoyez-les nous !

Quel usage en sera fait ?
d'une part cela permettra d'alimenter la Banque d'Énoncés de l'association (cf. BGV de rentrée) ;
d'autre part, certains seront publiés dans notre petit bulletin vert régional, ou seront utilisés pour faire « avancer » certains groupes de travail, de recherche...

N'HÉSITEZ PAS ! ENVOYEZ CES FICHES OU ÉNONCÉS TELS QUE VOUS LES AVEZ DONNÉS A VOS ÉLÈVES... NOUS ATTENDONS DE TRÈS TRÈS NOMBREUSES RÉPONSES

AVIS DE RECHERCHE (2)

Vous avez certainement des élèves qui ont passé un concours ou un examen pour entrer dans la fonction territoriale, les transports, la santé, ou dans tout autre organisme ou entreprise.
Dans ce concours, il y avait une épreuve de mathématiques. Et le programme de cette épreuve n'avait absolument rien à voir avec ce que l'on enseigne actuellement dans les collèges ou dans les lycées.
Si vous connaissez de tels cas, et si vous disposez du sujet ou du programme (le *ou* n'est pas exclusif), faites-les parvenir à la Régionale (François DROUIN, 2 allée du Cerisier, 55300-CHAUVONCOURT).

Au niveau National, l'A.P.M.E.P. pourra aussi intervenir (auprès des services publics) pour qu'ils se mettent un peu à jour sur les connaissances et capacités exigées actuellement des élèves.

MERCI D'AVANCE.

[1] ou si vous vous êtes inspiré d'un sujet déjà publié, mais que vous l'avez profondément remanié (il faut alors citer votre source de référence).

édito

DES PROGRAMMES À LA PRATIQUE...

Quand à la rentrée nous échoit un nouveau niveau d'enseignement, vite on va au C.D.I. regarder les différents manuels correspondant ; et - si l'on en a le temps - on lit le programme officiel.

A la lecture (partielle, forcément) des différents spécimens, on pourrait croire que la présentation de telle ou telle notion est décidément triviale et que le problème, s'il s'en présente un, est bien vite réduit à quelques antagonismes rudimentaires : plus de cours / moins d'activités ; plus de T.D / moins de problèmes...

Or la réalité dans la classe est à peu près inverse. Il suffit de se placer au niveau pratique pour constater en quoi la présentation d'une notion peut être diverse, exigeante, et même productrice de concepts.

Le contraste devient vite saisissant entre le programme, enchaîné à ses contraintes multiples mais indispensables, et la vie mathématique de la classe, comme si l'un et l'autre fonctionnaient de façon autonome, voire divergente.

Cette cassure-là deviendrait vite néfaste si l'on n'y prenait garde...

C'est au dessus de ces « fractures » que l'on s'emploie jour après jour à jeter des passerelles - chacun dans sa classe - , loin des simplifications ambiantes.

Et si, entre notre réflexion personnelle et les expériences nombreuses et riches des collègues, l'A.P.M.E.P. (à travers son PETIT VERT est ses autres publications) jouait le rôle d'un providentiel cordon ombilical ?

Jean-Marie PROVIN,
Lycée Mendès-France,
ÉPINAL

Depuis juillet, la Régionale sur le Web :
http ://www.ac-nancy-metz.fr/enseign/maths/apmep

PETIT VERT N°51. SEPTEMBRE 1997

Mise à mort de l'I.R.E.M. ?

Le 2 juin 1997 (au lendemain de second tour des législatives), le Ministre (c'était encore M. Bayrou) envoyait aux Recteurs et aux Chefs des M.A.F.P.E.N. une lettre, dont nous vous extrayons l'essentiel :

Objet : ***La formation continue et les IREM***
(...)
Les résultats [d'une enquête demandée par le ministère] *font apparaître que les IREM reçoivent de votre part une enveloppe non négligeable en crédits, emplois, heures supplémentaires. Si ces moyens sont employés dans le cadre de la formation continue (paiement des formateurs IREM intervenant dans les stages académiques, notamment) il n'en reste pas moins qu'ils sont également employés au titre de la recherche pédagogique (...).*

Je vous rappelle que les moyens qui vous sont délégués (...) sont exclusivement destinés à la formation continue des personnels de l'éducation nationale. En aucun cas ils ne doivent être employés au titre de la recherche pédagogique. Il n'y a pas lieu de financer, par exemple, les réunions internes aux IREM.
(...)

L'année dernière (1996/97), l'IREM de Lorraine recevait de la MAFPEN 60 HSA, destinées à rétribuer les groupes de recherche. Pour cette année, prévoyant quelques restrictions budgétaires, M. KERVIEL, chef de la MAFPEN, avait fait savoir - lors de la réunion de la commission mathématique de la MAFPEN, le 4 juin dernier- qu'il octroierait 55 HSA pour 1997/98. Le 28 juin nous apprenions que le nombre de ces heures était réduit à zéro...

Vous avez bien lu : **zéro**.

C'est dire combien le ministère juge inutile ou inefficace le travail de l'IREM…
Mais à quoi servent ces groupes de recherches ? pour la presque totalité d'entre eux, ils débouchent, au bout d'un ou deux ans, sur des formations que l'IREM propose au PAF (la majorité des formations du PAF, en mathématiques, sont d'ailleurs proposées par des animateurs IREM). Si les groupes IREM ne disposent plus de moyens (même minimes) de recherche, que se passera-t-il ? Les individus ne s'y investiront plus, les groupes se déliteront, et les formations proposées dans quelques années ne s'appuieront plus sur une recherche pédagogique approfondie. La MAFPEN pourra alors se choisir des « formateurs » qui n'auront plus aucun passé « didactique », qui n'auront pas fait de recherches en commun, qui n'auront pas élaboré et publié des fichiers-élèves longuement travaillés (et retravaillés après expérimentations)…

Remarque de dernière minute (02/09/97) : *il semblerait que seuls les Recteurs de Nancy et de Lille aient interprété ainsi cette circulaire du 2 juin ; partout ailleurs, les IREM auraient conservé des heures de recherche, cette recherche étant un préalable aux formations.*

Que pouvons-nous faire, nous, Régionale A.P.M.E.P. ?

Peut-être pas grand-chose.
Déjà, le 4 juillet, nous avons écrit à Monsieur le Recteur la lettre que nous reproduisons ci-dessous.
Par ailleurs, nous vous demandons de signer, et faire signer par de nombreux collègues, l'appel du Collectif» DÉFENSE DES IREM » que nous reproduisons page suivante.
Il est prévu de discuter de la suite éventuelle de notre action lors du prochain comité régional, le 17 septembre. Nous vous tiendrons au courant.

Lettre de la Régionale à Monsieur le Recteur :

Monsieur le Recteur,

Nous avons été alertés par Monsieur le Directeur de l'I.R.E.M. au sujet de la suppression des moyens de fonctionnement des groupes de recherche de l'I.R.E.M.
Nous nous étonnons de cette décision. Siégeant es-qualité à la Commission Mathématique de la M.A.F.P.E.N., nous pouvons témoigner de l'importance des travaux conduits à l'I.R.E.M. de Lorraine dans l'offre de formation continue des professeurs de mathématiques de l'académie.

Nous pouvons par ailleurs vous taire part de l'attachement de nos adhérents à ce lieu de recherche. Les mathématiques sont la seule matière bénéficiant d'une structure de recherche ouverte aux enseignants de base, et ils peuvent à l'I.R.E.M. travailler avec des universitaires et des didacticiens. Il serait dommage que ce dispositif, envié par d'autres matières et dans d'autres pays, ne puisse plus fonctionner correctement.
En conséquence, pour maintenir le bon fonctionnement de la formation continue en mathématiques, qui découle de cette recherche pédagogique, nous vous demandons de bien vouloir reconsidérer votre position.

En vous remerciant à l'avance pour l'attention que vous voudrez bien accorder à notre demande, je vous prie de croire. Monsieur le Recteur, en l'expression de ma haute considération.

François DROUIN

APPEL DU COLLECTIF « DEFENSE DES I.RE.M. »

La Direction des Lycées et des Collèges (D.L.C.) programme la mort des I.R.E.M. sous couvert de nouvelles modalités de démarche contractuelle.

Comme l'a confirmé une entrevue récente entre 1'A.D.I.R.E.M. et les représentants de la D.L.C., le Directeur de la D.L.C. s'oppose à l'attribution aux I.R.E.M. par les M.A.F.P.E.N. des moyens nécessaires pour que les professeurs des lycées et collèges puissent travailler au sein des groupes de recherche I.R.E.M. ; nationalement, les commissions Inter-IREM ne sont plus reconnues et disparaissent ; des moyens restent accordés individuellement sur des thèmes proposés par la D.L.C. et revus tous les deux ans.

Nous tenons à sauvegarder l'outil de travail original que sont les I.R.E.M.

• parce que la recherche qui y est menée, s'appuyant à fa fois sur une réflexion théorique et sur des pratiques enseignantes, permet une réflexion à long terme sur l'enseignement des mathématiques et les relations des mathématiques avec les autres disciplines scientifiques, mais aussi avec la philosophie, l'histoire ou les sciences humaines ;
• parce que cette recherche, sans cesse confrontée au réel, nourrit et dynamise une formation continue apte à penser et à intégrer les changements imposés par la société ;
• parce que le travail en commun, à partir de leurs compétences et au delà de tout rapport hiérarchique, de professeurs de l'enseignement secondaire et d'universitaires est essentiel pour la recherche sur renseignement ;
• parce que la structure nationale en réseau permet d'aborder globalement la plus grande partie des questions posées par l'enseignement des mathématiques.

L'histoire de ces dernières années a montré que les retombées du travail accompli par les I.R.E.M. profitent à un grand nombre d'enseignants et à l'école tout entière ; en particulier c'est parce que les I.R.E.M. mènent dans les commissions une recherche suivie qu'ils peuvent répondre à des commandes du Ministère de l'Éducation Nationale.
Alors que de nombreux enseignants étrangers ont mis ou voudraient mettre en place une telle structure de travail dans leur pays, est-il raisonnable de remettre en cause l'existence des I.R.E.M. ? Ne vaudrait-il pas mieux étendre ce type d'institution à d'autres disciplines ?

Le Collectif demande que soient reconsidérées les décisions du Directeur de la D.L.C. et que soit sauvegardée la structure de travail des I.R.E.M,
II appelle à s'associer à cette demande.

Signez et faites signer cet appel (*page suivante*) ➔

APPEL DU COLLECTIF « DÉFENSE DES I.R.E.M. »

Les soussignés déclarent souscrire à cet appel en date du 26/06/97

NOM, prénom, signature	Fonction, établissement d'exercice

Signez nombreux cet appel et retournez cette page à :
A.P.M.E.P.-LORRAINE / I.R.E.M.
B.P. 239
54506 VANDOEUBRE-LES-NANCY CEDEX

L'élastique

par le Groupe I.R.E.M.

« Calculatrices au lycée »

La société TEXAS INSTRUMENTS envoie régulièrement, dans tous les lycées, des cahiers de T.P. proposant aux professeurs des fiches d'activités nécessitant l'utilisation de calculatrices. Dans le « Cahier de travaux pratiques pour la classe de seconde » (couverture orange), réalisé par Alain LADUREAU et Michel GOUY, notre groupe s'est plus particulièrement intéressé à l'activité de la page 13, intitulée l'élastique.

Nous avons fait, en groupe, ce que tout professeur fait quand il « tombe » sur une fiche toute prête : nous l'avons analysée, et nous l'avons modifiée pour qu'elle soit à notre convenance (pensant, bien évidemment, que ces modifications sont des améliorations).

Pour la facilité de lecture de cet article, il serait préférable que les lecteurs qui la possèdent se reportent à cette fiche du fascicule TEXAS, car nous ne reproduirons pas ici l'original, mais seulement (en annexe) la fiche dans sa version modifiée.

Tout d'abord, nous avons choisi un objectif de travail : permettre aux élèves **d'aborder la notion de valeur minimale d'une fonction** (par ***lecture graphique*** associée à la construction de ***tables de valeurs***). Cela présuppose que les élèves ont déjà « rencontré » des fonctions autres que des fonctions affines, et qu'ils sont familiarisés avec des graphes qui ne sont pas des droites. Pour ce T.P., nous supposons aussi qu'ils savent représenter graphiquement une fonction sur l'écran de leur calculatrice. Par contre, aucune notion concernant les « Zooms décimaux » (1) n'est pas nécessaire et, s'ils ne le savent pas encore, ils découvriront dans ce T.P. comment obtenir une table de valeurs « automatique ».

(1) Voir l'article « Résolution approchée d'une équation avec la calculatrice graphique dans le Petit Vert de juin (n° 50). Les mêmes problèmes se poseraient ici si on utilisait des zooms et la fonction **TRACE** : c'est pourquoi nous ne l'avons pas fait … chaque chose en son temps !

Nous gardons la première question telle, avec simplement deux modifications mineures : nous précisons que dans tout ce T.P. l'unité est le cm., et nous appelons d la distance MA+MB (pour ne pas qu'il y ait de confusion possible entre la lettre l et le chiffre 1).

Pour la question 2, nous ne gardons que 2a) : exprimer la longueur AM en fonction de x. En effet, tout le reste présuppose que les élèves remplaceraient $\sqrt{x^2+4}$ par x + 2. Et la question 2b) inciterait même plutôt les élèves à faire cette faute. Il ne faut pas tout faire à la fois, et c'est l'objet d'un autre T.P. (plus précoce dans l'année) que de travailler sur la comparaison de $\sqrt{a^2+b^2}$ à a + b, et de $\sqrt{u}+\sqrt{v}$ à $\sqrt{u+v}$. Cependant nous avons modifié la formulation de la question 3) pour que les élèves ayant fait des erreurs de ce type puissent cependant poursuivre : nous leur faisons comparer les valeurs qu'ils ont obtenues par la « formule » à celles qu'ils avaient mesurées ; en cas de désaccord, c'est le professeur qui leur indiquera la marche à suivre (en particulier se reporter aux résultats déjà vus concernant les radicaux)

Dans la question 4, à part quelques améliorations mineures, nous avons seulement supprimé une question « Dans quel ensemble d prend-il ses valeurs ? », car il est impossible d'y répondre avant d'avoir terminé le T.P. et trouvé la valeur minimale de d ; à moins que les auteurs n'aient pensé à la réponse « $\mathbf{R}^{+}$ » qui n'a alors aucun intérêt.

Bien évidemment cette fiche, proposée par TEXAS, suppose que tous les élèves ont une calculatrice de cette marque. Pour la préparation des tables de valeurs, le professeur pourra réaliser de petites fiches « mode d'emploi » ; nous signalons simplement ici que pour les élèves qui possèdent des CASIO récentes (même bas de gamme comme la fx6910), la table de valeurs s'obtient très simplement grâce à l'icône . Cependant ce T.P. nécessite que **tous** les élèves puissent obtenir ces tables de valeurs automatiques (au besoin, les faire travailler deux par deux).

Pour la question 5) il est nécessaire de faire tracer la courbe sur papier millimétré (ou à la rigueur sur quadrillage 5x5), c'est pourquoi nous supprimons le petit morceau de quadrillage du bas de la page 14. Il faut préciser aux élèves de graduer l'axe des ordonnées entre **9** et 12 (sinon, il faudrait une feuille de 60 cm de haut !).

Mais la suite de la question 5) ne peut pas être conservée telle quelle : comment un élève de seconde, qui n'est pas totalement familiarisé avec le tracé des courbes de fonctions, pourrait-il répondre à la question « **Pourquoi** on ne peut joindre les points avec une règle » ; la propriété concernant les milieux (suggérée comme piste de réponse) n'est pas exploitable ici : sur le graphique, les milieux des segments joignant deux points consécutifs **semblent** être à peu près sur la courbe (à l'épaisseur du trait de crayon près) ; et le calcul algébrique est impensable avec une telle expression de d.

Nous suggérons donc un débat en classe, arbitré par le professeur, sur la meilleure

PETIT VERT N°51. SEPTEMBRE 1997

façon de s'y prendre pour tracer une courbe. Et nous y rajoutons une question 5c) : comparer le résultat obtenu sur papier millimétré avec la courbe obtenue sur l'écran de la calculatrice en prenant comme Xmin = 0 ; Xmax = 6 ; Ymin = 9 et Ymax = 12.

La question 7 doit être aussi fondamentalement modifiée : car à ce stade les élèves ne possèdent encore pas de méthode pour effecteur une recherche systématique de l'abscisse du minimum. On se rend bien compte que le graphique sera inefficace si on veut une réponse à 10^{-2} près, mais l'énoncé initial laissait les élèves dans la confusion la plus totale quant à la démarche à utiliser. C'est pourquoi nous avons modifié cette question. Le graphique suggère de rechercher le minimum entre 1 et 2 : c'est pourquoi nous proposons de balayer cet intervalle avec un pas de 0,1. Voici le résultat obtenu : . La plus petite valeur est obtenue pour x = 1,7 ; ce qui ne veut pas dire que c'est la réponse cherchée ! On va ensuite balayer l'intervalle [1,6 ; 1,8] avec un pas de 0,01, et obtenir ceci : . On a alors deux « candidats potentiels » x = 1,71 et x = 1,72. Là encore, il faudra un débat en classe, pour faire le bilan sur cette démarche, et notamment amener les élèves à se rendre compte que si on poursuit dans cette voie, jamais on n'obtiendra la valeur exacte de l'abscisse recherchée (on pourra obtenir une meilleure précision, c'est tout).

X	Y1	
1.4	9.2354	
1.5	9.2268	
1.6	9.2216	
1.7	9.2196	
1.8	9.2207	
1.9	9.2247	
2	9.2316	

Y1=√(X²+4)+√((6…

X	Y1	
1.69	9.2196	
1.7	9.2196	
1.71	9.2195	
1.72	9.2195	
1.73	9.2196	
1.74	9.2196	
1.75	9.2197	

Y1=√(X²+4)+√((6…

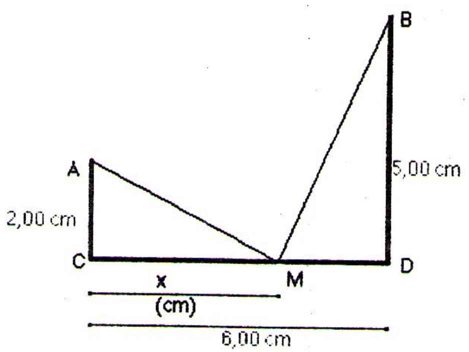
La quatrième page permet de déterminer la valeur exacte de x_0 : il faut se rendre compte qu'on est là en présence d'un cas tout à fait exceptionnel, puisque l'on a une méthode géométrique permettant de déterminer cette valeur (et c'est tout l'intérêt de cet exemple « classique »). Il ne faudrait cependant pas que les élèves s'imaginent que de telles démarches sont toujours possibles. Prenons un autre « classique » de recherche de maximum : la boite que l'on obtient en amputant les quatre coins d'une feuille rectangulaire de carrés de côté x (la volume obtenu est une fonction polynôme du troisième degré en x) ; il est impossible - en seconde du moins - d'obtenir autre chose que des valeurs approchées de l'abscisse du minimum.

Les modifications que nous avons apportées à cette dernière page sont pour la plupart mineures ; la plus important concerne la figure proposée, où nous ne faisons pas figurer les tracés concernant la position minimisant d : nous laissons la question ouverte, pendant que la première question devrait mettre les élèves sur la voie.

Voir fiche en annexe pages suivantes ➔

L’élastique

Un élastique fixé en A et B est passé dans un anneau qui coulisse entre C et D.
Le but de cette activité est d’étudier les variations de la longueur de cet élastique suivant la position de M sur [CD], et de chercher la position du point M pour laquelle cette longueur est minimale.



Dans tout ce T.P., l’unité de longueur est le cm

1) Refaire la figure ci-dessus à l’échelle 1 sur le cahier.
Mesurer sur la figure la longueur de l’élastique lorsque x vaut 0, 1, 2

x	0	1	2	3
d = AM + MB (à 0,1 cm près)				

puis 3. Compléter alors le tableau ci-dessous :
2) Exprimer la longueur AM en fonction de x :

AM =

3a) Exprimer d = AM + MB en fonction de x :

d = AM + MB =

Peut-on simplifier cette expression ? Si oui, donner l’expression simplifiée :

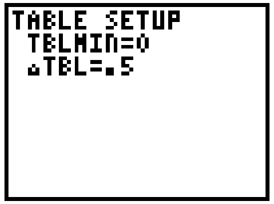
d = AM + MB =

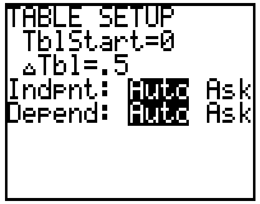
3b) Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3
Valeur de d calculée d’après l’expression ci dessus (à 0.1 près)				
Valeur de d mesurée à la première question				

En cas de désaccord entre les valeurs trouvées dans ce tableau, **appelez votre professeur** avant de continuer.

4) On souhaite réaliser un graphique qui rende compte des variations de d en fonction de x lorsque le point M décrit le segment [BC].
4a) Dans quel ensemble x prend-il ses valeurs ?
4b) Dans votre calculatrice, placer dans Y_1 (menu **Y=**) l’expression de d en fonction de x trouvée à la question 3.
4c) Préparer la « table de valeurs » de la calculatrice : appuyez sur et réglez les paramètres comme suit :





Appuyez alors sur **TABLE** pour faire apparaître les valeurs de d.
Remplir le tableau ci-dessous en prenant des valeurs approchées à 10^{-2} près :

5) Représentation graphique.
5a) En utilisant une feuille de papier millimétré et en prenant 2 cm

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
d													

comme unité sur l’axe des abscisses et 5 cm comme unité sur l’axe des ordonnées, placer avec précision tous les points de coordonnées (x ; d) du tableau ci-dessus. On graduera de 0 à 6 en abscisse, et de 9 à 12 en ordonnée.
5b) Tracer la courbe à main levée le plus soigneusement possible.
Débattre avec la classe et avec le professeur de la légitimité de joindre

les points à la règle.
5c) Comparer cette courbe tracée à la main avec celle que l'on obtient sur l'écran de la calculatrice graphique (prendre $X_{min} = 0$; $X_{max} = 6$; $Y_{min} = 9$ et $Y_{max} = 12$).

6) Utiliser ce graphique pour lire les valeurs approchées des réponses aux questions suivantes :
6a) Quelle est la longueur d pour x = 4,75, pour x = 0,8 et pour x = 2,8 ?

x	4,75	0,8	2,8
d			

6b) Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles on a : d = 9,5 ; d = 9 ; d = 11,5 ; d = 10 ; d minimale ?

d	9,5	9	11,5	10	d minimale
x					

7) Recherche de la valeur x_0 de x pour laquelle d est minimale. Le but de cette question est d'essayer de déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.
a) En utilisant la calculatrice, refaire un tableau de valeurs pour x compris entre 1 et 2 avec un pas de 0,1 :

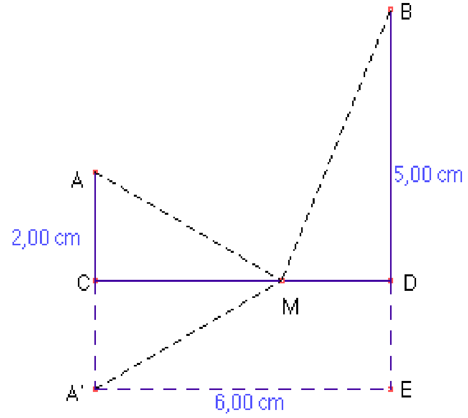
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
d											

b) Refaire un tableau pour les valeurs de x entre 21,6 et 1,8 avec cette fois un pas de 0,01 ; quelle valeur approchée de x_0 peut-on maintenant prendre ?

x	1,6	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,69
d										
1,7	1,71	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,77	1,78	1,79	1,8

BILAN EN CLASSE AVANT DE PASSER
A La FEUILLE SUIVANTE

RECHERCHE DES VALEURS EXACTES DE x_0 ET DE LA DISTANCE MINIMALE d_0



Observer la figure ci-contre. A' est le symétrique de A par rapport à (CD).
Démontrer que A'M + BM est égal à AM + BM :
....
....
....
Pour quelle position de M sur [CD] a-t-on la longueur d la plus petite ?
....
....
....
En déduire la valeur **exacte** de x_0 :
....
....
....
....
Comparer cette valeur exacte à la valeur approchée déterminée en bas de la page 3.

Calculer alors la valeur **exacte** de la distance minimale d :
....
....
....

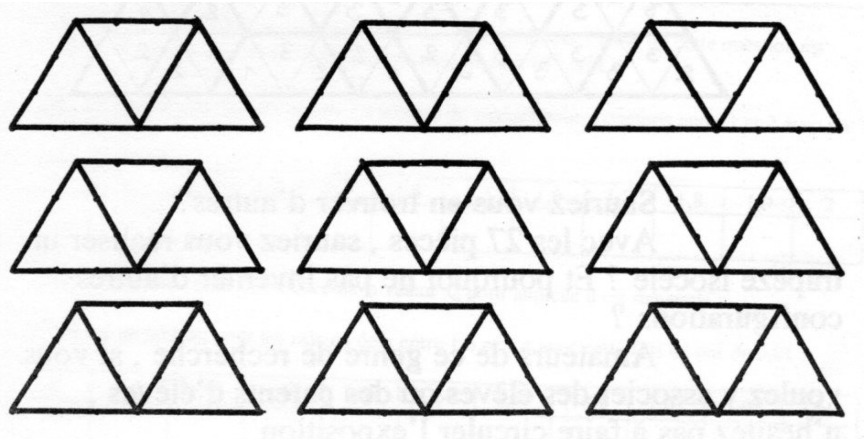
Comparer cette valeur exacte à la valeur approchée déterminée dans le tableau du bas de la page 3.

COMPLÉMENT : tableau indiquant les variations de d en fonction de x.
Compléter le tableau ci-dessous, en indiquant les valeurs **exactes**.

x	0		....		6
d	....	↘	....	↗	....

DES TRAPEZES COLORÉS

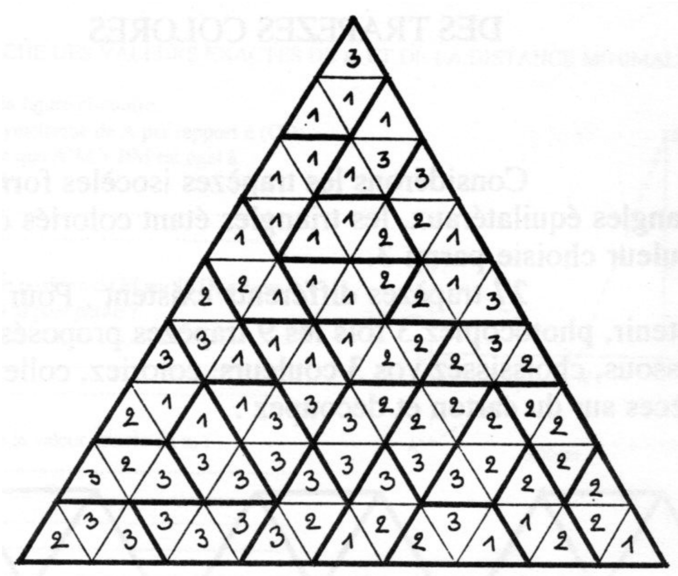
Considérons les trapèzes isocèles formés de 3 triangles équilatéraux, les triangles étant coloriés d'une couleur choisie parmi 3.
27 trapèzes différents existent. Pour les obtenir, photocopiez 3 fois les 9 trapèzes proposés ci-dessous, choisissez vos 3 couleurs, coloriez, collez vos pièces sur du carton et découpez.



Vous pouvez maintenant chercher des assemblages de ces pièces. Les arêtes ou portions d'arêtes communes à deux trapèzes doivent être de même couleur.
Avec les 27 pièces, vous pourrez réaliser un triangle équilatéral.

PETIT VERT N°51. SEPTEMBRE 1997

K.H.Koch propose cette solution dans *...lege Spiele* (Dumont Taschenbücher).
Sauriez-vous en trouver d'autres ?



Avec les 27 pièces, sauriez-vous réaliser un trapèze isocèle ? Et pourquoi ne pas inventer d'autres configurations ?
Amateurs de ce genre de recherche, si vous voulez y associer des élèves ou des parents d'élèves, n'hésitez pas à faire circuler l'exposition

OBJETS MATHEMATIQUES

dans vos établissements (ou ailleurs ..,). Les conditions de prêt figurent dans le Petit Vert n° 48 et peuvent être demandées, par les nouveaux adhérents en particulier, à

François DROUIN
2 Allée du Cerisier
55300 CHAUVONCOURT
☎ 03.29.89.06.81

Problème du trimestre n°51
Énoncé proposé par Bernard PARZYSZ

On dispose d'un disque de 21 cm de diamètre, découpé dans une feuille de papier format A4.
Quelle est la dimension maximale d'un cube dont le patron (en un seul morceau) peut être réalisé dans ce disque ?
N.B. On ne tiendra pas compte des « languettes » d'assemblage.

Envoyez vos solutions, ainsi que toute proposition de nouveau problème, à
Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Solution du problème n°50
Énoncé proposé par F. PÉTIARD de BESANÇON

Soit $\{u_n\}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{11}{2} \\ u_1 = \dfrac{61}{11} \\ u_{n+2} = 111 - \dfrac{1130}{u_{n+1}} + \dfrac{3000}{u_n . u_{n+1}} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Étudiez la convergence de cette suite
1°) à l'aide da la calculatrice
2°) sans elle.
Pouvez-vous proposer une autre suite « du même genre » ?

Malgré les vacances, quatre réponses ont été envoyées, par Bernard CHRETIEN (55 Verdun), Geneviève D'ANDREA (57 Thionville), Pol LE GALL (57 Rombas) et Jacques VERDIER (54 Tomblaine).

1- Étude de la suite à l'aide de la calculatrice.

Tous les correspondants ont remarqué le comportement étrange de cette suite récurrente, programmée sur leur calculatrice :
- sur Casio fx-7700 G, elle croît lentement de 5,5 à 5,879... (pour $n = 9$), puis "saute" en quelques bonds ($u_{14} = 9{,}850$ ...) jusqu'au voisinage de 100, atteint pour n = 21;
- avec le tableur Excel, elle croit lentement jusqu'à 5,897... ($n = 13$), puis passe ensuite par quelques valeurs "erratiques" ($u_{14} = 5{,}647$..., $u_{15} = 0{,}968$..., $u_{16} = -507{,}321$..., $u_{17} = 107,\ 120$ ...), et semble ensuite converger vers 100 (atteint pour $n = 28$);
- sur TI 92 (mode "calcul séquentiel automatique"), même type de phénomène : croissance lente jusqu'à 5,848... ($n = 10$), puis "vagabondage" pour $11 \le n \le 14$, et enfin convergence apparente vers 100.

2- Étude théorique (B. Chrétien, G. d'Andrea).

(On peut tout d'abord chercher les limites possibles a priori, en résolvant l'équation $l = 111 - \dfrac{1130}{l} + \dfrac{3000}{l^2}$ qui admet les 3 solutions 5, 6 et 100.)

L'examen des premiers termes de la suite permet de faire la conjecture que le terme général peut s'écrire $u_n = \dfrac{6^{n+1} + 5^{n+1}}{6^n + 5^n}$ pour tout entier naturel n, conjecture que l'on démontre ensuite sans difficulté grâce à un raisonnement par récurrence.

On peut alors écrire u_n sous la forme $u_n = \dfrac{6 + 5 \times \left(\frac{5}{6}\right)^n}{1 + \left(\frac{5}{6}\right)^n}$, ce qui montre que la suite converge vers 6 (qui est bien l'une des valeurs possibles). La théorie indique donc que la suite converge vers 6, tandis que, nous l'avons vu, les calculatrices montrent que les termes successifs "sautent" par-dessus la valeur 6, pour sembler converger vers 100. Alors ???

3- Comment expliquer cette (légère !) différence ?

J. Verdier s'est intéressé à cette question, et voici son analyse, basée sur la TI 92 (voir ci

-après les 15 copies d'écran qu'il fournit). Nous lui laissons donc la parole :

Ce que l'on obtient avec une TI 92 (ou une Voyage 200) ne diffère aucunement, quand on utilise le mode "calcul séquentiel automatique", de ce que donnent les autres calculatrices (voir plus haut). Par contre, si on utilise les possibilités de la TI 92 pour calculer les valeurs exactes de u_n sous forme fractionnaire (sans utiliser la méthode automatique), on obtient les valeurs que l'on peut lire sur les écrans 1 à 6 (N.B.: j'ai appelé a_i les résultats pour que, stockés en mémoires, ils ne "percutent" pas les u_i). J'ai ensuite demandé les valeurs approchées de ces fractions a_i, et on peut lire les résultats sur les écrans 7, 8 et 9 (cela semble confirmer la convergence vers 6). Les écrans 10, 11 et 12 correspondent au calcul automatique en mode « séquentiel ». Les écrans 13 et 14 permettent de bien voir le décalage qui se produit, à partir du 12^e rang, entre les a_i (calculés "comme à la main") et les u_i (calculés en mode séquentiel automatique).

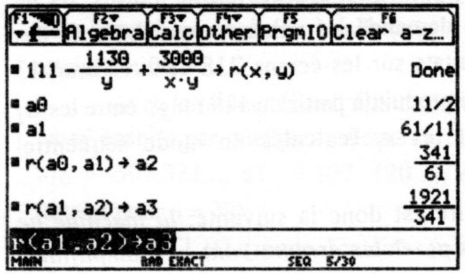
L'hypothèse, que l'on peut faire est donc la suivante : ***la machine ne calcule pas les valeurs exactes des*** u_i***, et les erreurs vont en s'amplifiant, finissant par atteindre des proportions considérables***.

Théoriquement (voir ci-dessus), on démontre que, selon les valeurs choisies pour u_0 et u_1, la suite peut converger, soit vers 5, soit vers 6, soit vers 100. En prenant des valeurs initiales un peu au hasard, sans méthode, on constate que la calculatrice finit toujours par amener les termes à 100. Mais, en choisissant $u_0 = u_1 = 5$ (suite stationnaire), la machine ne se trompe pas, car les divisions par 5 et 25 tombent juste, et la machine les fait exactement. Par contre, en choisissant $u_0 = u_1 = 6$ (autre suite stationnaire), on s'aperçoit que la machine donne des résultats différents de 6 (voir écrans 15 à 18)... qui finissent par aller vers 100 ! Essayons donc de voir d'un peu plus près ce qui est en fait calculé.

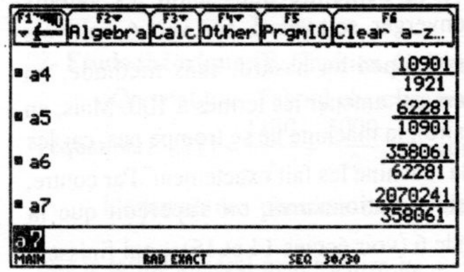
La TI 92 travaille avec 14 chiffres significatifs dans ses registres. Ce qui fait que, par exemple, le calcul de $-\frac{1130}{6}$ donne – 188,333 333 333 33 (11 chiffres **3** derrière la virgule), et que le calcul de $\frac{3000}{36}$ donnera 83,333 333 333 333 (12 chiffres **3** derrière la virgule). Ce qui conduira, pour $111-\frac{1130}{6}+\frac{3000}{36}$, à $u_2 = 111 -$ 188,333 333 333 33 + 83,333 333 333 333 = 6,000 000 000 003.
Ce n'est déjà plus 6…

L'erreur, ici de 3×10^{-12}, est donc due uniquement au nombre de chiffres utilisés dans les registres internes de la calculatrice. Pour un autre modèle, le même type d'erreur se

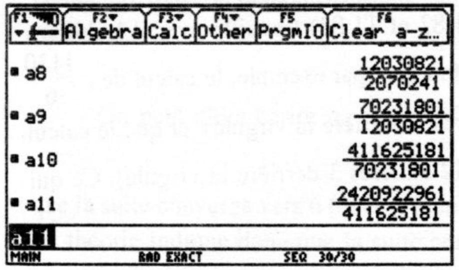
COPIES D'ÉCRANS
(T.I.92)
PROBLÈME DE PETIARD
(BESANÇON)



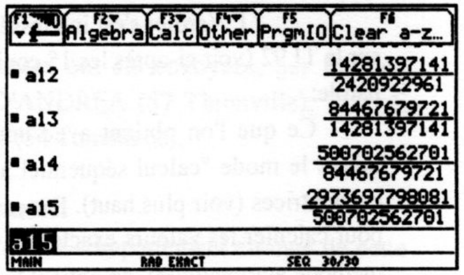
1



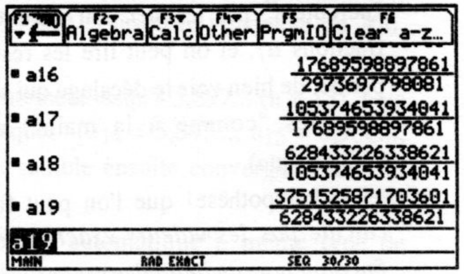
2



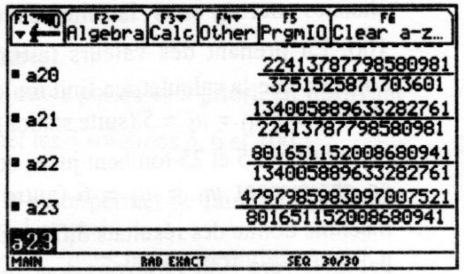
3



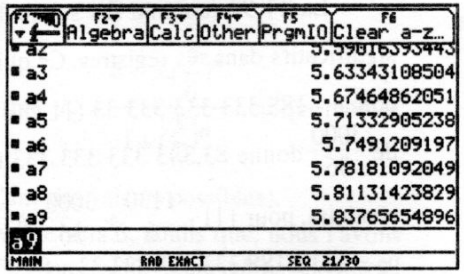
4



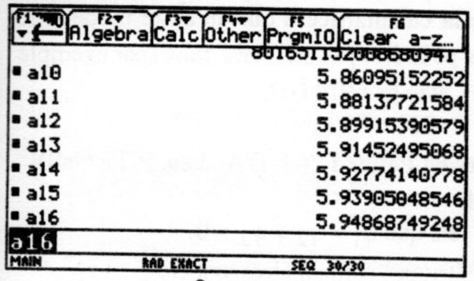
5



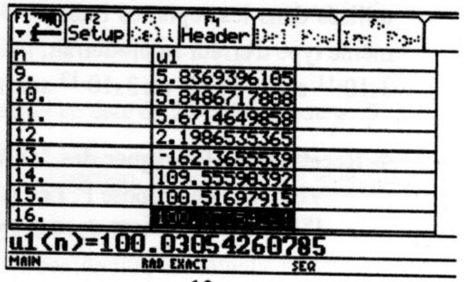
6



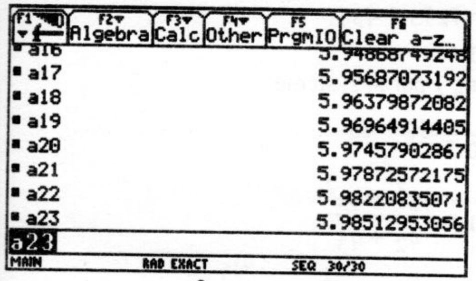
7



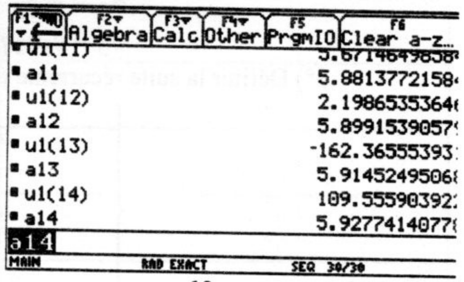
8



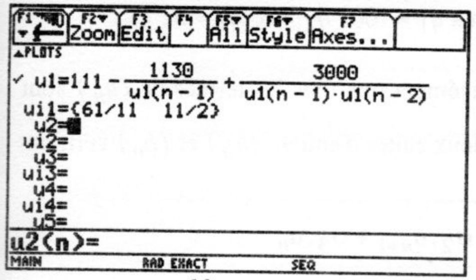
12



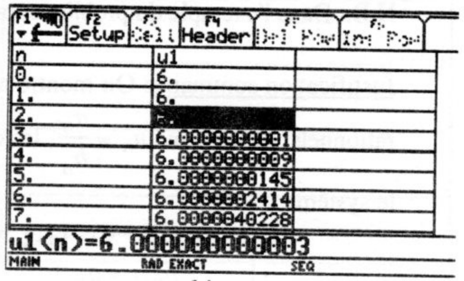
9



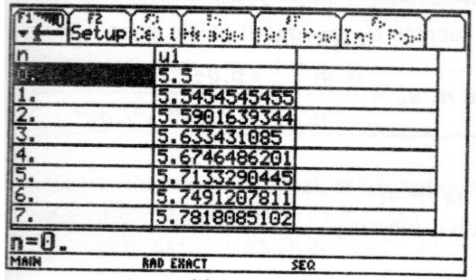
13



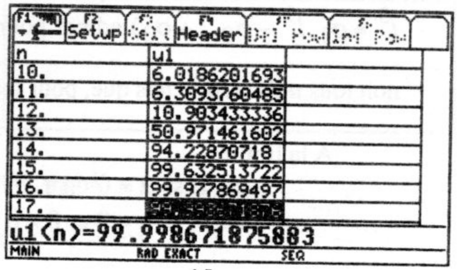
10



14



11



15

produirait, mais pas nécessairement au même rang (par exemple 3×10^{-11} sur la TI 82, ou 3×10^{-13} sur la Casio fx-G6910).

4- Recette pour fabriquer des « suites de Pétiard » (G. d'Andréa, P Le Gall)

Voici ce que propose Pol Le Gall :

1°) Choisir trois entiers q_1, q_2 et q_3 tels que $q_1 > q_2 > q_3 > 0$.
2°) Calculer les polynômes symétriques élémentaires associés :

$$\sigma_1 = q_1 + q_2 + q_3$$
$$\sigma_2 = q_1 q_2 + q_3 q_1 + q_2 q_3$$
$$\sigma_3 = q_1 q_2 q_3$$

3°) Définir la suite récurrente $\{u_n\}$ par le système :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{q_2 + q_3}{2} \\ u_1 = \dfrac{q_2^2 + q_3^2}{q_2 + q_3} \\ u_{n+2} = \sigma_1 - \dfrac{\sigma_2}{u_{n+1}} + \dfrac{\sigma_3}{u_n \times u_{n+1}} \end{cases}$$

N.B. Dans l'exemple du problème, on avait $q_1 = 100$, $q_2 = 6$ et $q_3 = 5$.

Justification sommaire :
On montre aisément que tous les termes de $\{u_n\}$ sont rationnels, de la forme $u_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, les deux suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} a_{n+3} = \sigma_1 . a_{n+2} - \sigma_2 . a_{n+1} + \sigma_3 . a_n \\ b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

Par construction, l'équation caractéristique de la première relation (soit $l^3 = \sigma_1 . l^2 - \sigma_2 . l + \sigma_3$) admet pour racines q_1, q_2 et q_3. Il existe donc trois réels non tous nuls α, β, et γ tels que, pour tout n, $u_n = \dfrac{\alpha . q_1^{n+1} + \beta . q_2^{n+1} + \gamma . q_3^{n+1}}{\alpha . q_1^n + \beta . q_2^n + \gamma . q_3^n}$.
A la limite :
- cas 1 : si $\alpha \neq 0$, on a $\lim(u_n) = q_1$;
- cas 2 : si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, on a $\lim(u_n) = q_2$.

Pour ne pas se trouver dans le cas 1, il faut donc que l'on ait $\alpha = 0$.
On peut, par exemple, se proposer de déterminer u_0 et u_1 tels que $(\alpha,\beta,\gamma) = (0,1,1)$. On prend alors $u_0 = \dfrac{q_2+q_3}{2}$ et $u_1 = \dfrac{q_2^2+q_3^2}{q_2+q_3}$.
Comme on l'a vu plus haut, le comportement de la suite à la calculatrice repose sur le cumul des erreurs d'arrondis, en particulier pour u_0 et u_1. Si u_1 n'est pas décimal, la calculatrice en prend une valeur décimale approchée, ce qui revient à avoir un cœfficient α « pas tout à fait nul ». On tombe alors sur le cas 1 au lieu du cas 2 théoriquement attendu, et on obtient q_1 (le plus grand des trois entiers choisis) pour limite en lieu et place de q_2. Il convient donc, pour qu'un tel « dysfonctionnement fonctionne », que u_0 et u_1 ne soient pas décimaux (au sens de la calculatrice).

Extensions possibles :

On peut, au lieu d'un triplet (q_1, q_2, q_3), partir d'un n-uplet $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ (avec $n \geq 4$) et procéder de manière analogue. Ainsi, pour $n = 4$, on obtiendra le système :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{q_2+q_3+q_4}{2} \\ u_1 = \dfrac{q_2^2+q_3^2+q_4^2}{q_2+q_3+q_4} \\ u_2 = \dfrac{q_2^3+q_3^3+q_4^3}{q_2^2+q_3^2+q_4^2} \\ u_{n+3} = \sigma_1 - \dfrac{\sigma_2}{u_{n+2}} + \dfrac{\sigma_3}{u_{n+2}\times u_{n+1}} - \dfrac{\sigma_4}{u_{n+2}\times u_{n+1}\times u_n} \end{cases}$$

On peut, au contraire, chercher une version « minimaliste » en partant d'un couple (q_1, q_2). En posant comme à l'accoutumée $q_1 + q_2 = s$ et $q_1.q_2 = p$, on obtient cette fois le système :

$$\begin{cases} u_0 = q_2 \\ u_{n+1} = s - \dfrac{p}{u_n} \end{cases}$$

On a alors une situation de récurrence homographique :
Si q_2 n'est pas décimal (au sens de la machine), on retrouve le cas étudié précédemment. La situation est alors plus classique ; elle rejoint celle de la suite

(Suite page 13)

En feuilletant les anciens bulletins de l'A.P.M.

Dans le bulletin de mars **1911** on peut y lire les propositions de programmes faites par l'A.P.M. pour les lycées déjeunes filles.
Il est à noter que la scolarité des jeunes filles en lycée n'était prévue que sur cinq années (correspondant aux six classes de 6e à 1e chez les garçons). Les programmes proposés ici par l'A.P.M. correspondent à la préparation du baccalauréat « latin-langues ». Pour celles qui voudraient passer le baccalauréat « sciences-langues », l'A.P.M. propose de substituer aux programmes de 4e et 5e année ci-dessous, les programmes correspondants de 2nde D et 1e D des lycées de garçons (respectivement 4 h et 5 h hebdomadaires de mathématiques).
Voici quelques extraits de ce bulletin :

1e ANNÉE. 2 heures par semaine :
1°. *Arithmétique.* - Calcul des nombres entiers et décimaux. Fractions. Système métrique. Racine carrée (règle pratique). Règle d'intérêt.
2°. *Géométrie.* - Révision des notions acquises dans les classes primaires (construction par pliage et découpage des principales figures : carrés, rectangles, triangles, cubes, prismes, pyramides). Constructions simples avec la règle et le compas. Mesure des surfaces et des volumes.

2e ANNÉE. 2 heures par semaine :
Révision des cours précédents. Recherche des caractères de divisibilité par 2 et 5, 4 et 25, 9 et 3.
Recherche directe du P.g.c.d. (règle pratique).
Nombres premiers. Définition. Décomposition d'un nombre en facteurs premiers.
P.g.c.d. et P.p.c.m.
Rapports et proportions. Construction de figures à différentes échelles. Exercices sur le système métrique.
Introduction de lettres dans la résolution de problèmes.

3e ANNÉE. 2 heures par semaine :
1°. *Géométrie.* - Des angles. Des triangles. Cas d'égalité. Perpendiculaires et obliques.
Cas d'égalité des triangles rectangles.
Droites parallèles. Somme des angles d'un triangle.
Du parallélogramme. Rectangle, losange, carré.
Cercles. Arcs et cordes. Tangente au cercle. Mesure des angles.
Polygones réguliers : hexagone, carré.
Exemples d'assemblages formés avec des polygones réguliers.
Longueur de la circonférence (règle pratique).
Mesure des aires. Rectangle, parallélogramme, triangle, trapèze, polygone, cercle.
Relation entre les aires des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle rectangle.
2°. *Algèbre :* Notions très sommaires de calcul algébrique.
Résolution des équations numériques du premier degré.

4e ANNÉE. Section A. 1 heure par semaine :
1°. *Géométrie :* Révision du cours de 3e année. On y ajoutera :
Ligne proportionnelles. Triangles et polynômes semblables.
Notions très élémentaires et expérimentales sur la géométrie dans l'espace.
Définition des lignes trigonométriques d'un angle.
2°. *Algèbre.* - Révision du cours de 3e année.

4e ANNÉE. Section B. 3 heures par semaine dont une réservée aux interrogations.
1°. *Géométrie :* Révision du cours de 3e année. On y ajoutera :
Lignes proportionnelles. Propriétés de la bissectrice. Homothétie. Figures semblables.
Théorème des sécantes menées d'un point à un cercle. Polygones réguliers.
Rapport des aires de deux polygones semblables.
Définition des lignes trigonométriques d'un angle.
2°. *Algèbre.* - Révision du cours de 3e année. On y ajoutera :
Équation du premier degré.
Variation de ax + b et de (ax+b)/(a'x+b'). Représentation graphique.
Équation du second degré. Signe du trinôme.

5e ANNÉE. - *Cosmographie.* 1 heure par semaine pendant un semestre pour toutes les élèves :
Le système de Copernic.
Le soleil.- Dimensions, distance à la Terre. Rotation, taches, constitution physique.
Lumière zodiacale.
Notions sommaires sur les planètes.
La Terre. - Forme, dimensions. Rotation, pôles. Equateur. Longitude, latitude.
Mouvement autour du soleil. Saisons.
La lune. - Mouvement. Phases. Constitution physique.
Notions sur les éclipses. Notions sur les comètes.
Des étoiles. Principales constellations. Nébuleuses. Voie lacté. Étoiles doubles. Étoiles variables et temporaires.

5e ANNÉE. - *Mathématiques. Cours facultatif. - 2* heures par semaine.
Géométrie dans l'espace. - Du plan. Droites et plans perpendiculaires. Droites et plans parallèles. Angles dièdres. Plans perpendiculaires. Angles polyèdres. Angles trièdres.
Prisme. Parallélépipède, Pyramide. Cylindre et cône de révolution à base circulaire.
Sphère.
Algèbre. - Révision du cours de 4e année. On y ajoutera :
Progressions. Logarithmes.
Arithmétique. - Numération. Opérations sur les nombres entiers.
Divisibilité. Caractères de divisibilité. Recherche directe du P.g.c.d. de plusieurs nombres. Recherche directe du P.p.c.m. de plusieurs nombres.

PETIT VERT N°51. SEPTEMBRE 1997

Nombres premiers.
Fractions. - Nombres décimaux. Conversions des fractions ordinaires en fractions décimales.
Carré et racine carrée.
Rapports, proportions.

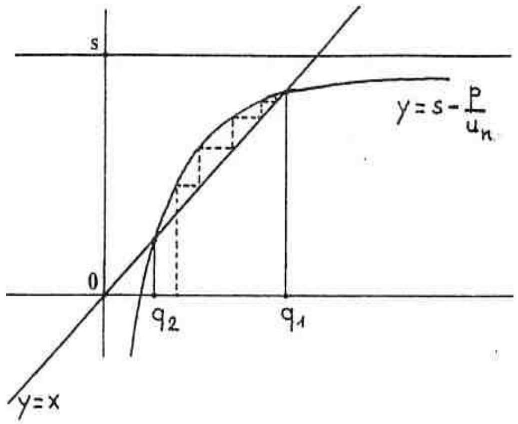
Il fallait aussi que les jeunes filles qui le désiraient puissent entrer en sixième année, pour préparer la seconde partie du baccalauréat, ou se préparer à l'École Normale de Sèvres. Mais pour cela, il aurait fallu faire encore quelques modifications dans la structure des études. Voici ce que proposait notre Association :

(...) Encore faudrait-il que les cours de littérature ancienne et étrangère soient facultatifs comme ils l'étaient autrefois. Ces cours donnent beaucoup de travail aux élèves par les lectures qu'ils nécessitent ; plus d'une jeune fille renonce aux mathématiques faute de temps, parce que les mathématiques et une langue étrangère sur deux sont, avec le dessin, la couture, le solfège et la gymnastique, les seuls cours facultatifs.

(Suite de la page 12)
"chaotique" définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0,7 \\ u_{n+1} = \dfrac{10}{3} u_n (1-u_n) \end{cases}$$

, suite théoriquement stationnaire, mais qui diverge sur la calculatrice par suite de l'arrondi que celle-ci effectue sur $\dfrac{10}{3}$.



AVIS DE RECHERCHE (3)

Tout collègue qui aurait des renseignements, quels qu'ils soient[1], sur l'enseignement des probabilités et des statistiques (niveau collège et lycée) dans un quelconque pays d'Europe serait bienvenu de le faire savoir à Bernard PARZYSZ (3 rue Marie Sautet, 57000-METZ, e-mail : parzysz@poncelet.univ-metz.fr) ou à Jacques VERDIER (46 rue de la Grande Haie, 54510-TOMBLAINE ; e-mail : j.verdier@ac-nancy-metz.fr).

Ces informations permettront d'alimenter le travail de recherche d'un groupe I.R.E.M. sur le thème « Enseignement des probabilités et des Statistiques en Europe ».

MERCI D'AVANCE

GRAND CONCOURS

La maquette de la première page (et de la dernière) du Petit Vert date d'il y a plus de 12 ans[3].

NOUS VOUS PROPOSONS D'IMAGINER UNE NOUVELLE MAQUETTE !

Les contraintes :

Respecter le format actuel (A4 à l'italienne, la page 1 étant dons sur la colonne de droite) et un certain nombre d'indications : en page 1, le titre, le sous-titre, le n° ISSN, la date et le numéro ; en dernière page, « l'OURS » (ce rectangle avec des tas d'inscriptions officielles) et le bulletin d'abonnement.

Réaliser un document Word6 ou Word7 sous Windows pour PC (Mac exclus !)

Envoyer version papier plus disquette à Pol LE GALL, 2 place de Chaussy, 57530-COURCELLES, ou bien par e-mail avec fichier annexé à p.le-gall@ac-nancy-metz.fr.

QU'EST-CE QU'ON GAGNE ?

Le gagnant aura bien sûr la satisfaction de voire sa proposition reproduite en autant d'exemplaires que l'on imprime de PETIT VERT, et ce pendant de nombreuses années.

Il sera bien évidemment convié à boire le champagne avec le Comité Régional pour fêter cet événement !

---

[1] programmes, manuels, items d'évaluation, cahiers d'élèves, articles de presse, etc., en français ou en V.O.

[2] seul changement notoire : le sommaire, qui était auparavant dans le cadre noir de la page 1, est maintenant en dernière page, et une illustration remplit le cadre.

SOMMAIRE

LE PETIT VERT

(BULLETIN DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

Directeur de la publication : Jacques VERDIER

N° CPPAP : 2 814 D 73 S. ISSN : 0760-9825. Dépôt légal : 1997.

Imprimé au siège de l'Association :

IREM (Faculté des Sciences), Boulevard des Aiguillettes, VANDOEUVRE

Ce numéro a été tiré à 500 exemplaires.

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 20 FRANCS (*)

NOM :

ADRESSE :

Désire m'abonner pour un an (année civile) au "PETIT VERT"

Signature :

Joindre règlement à l'ordre de : APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)

(*) L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents l'A.P.M.E.P.