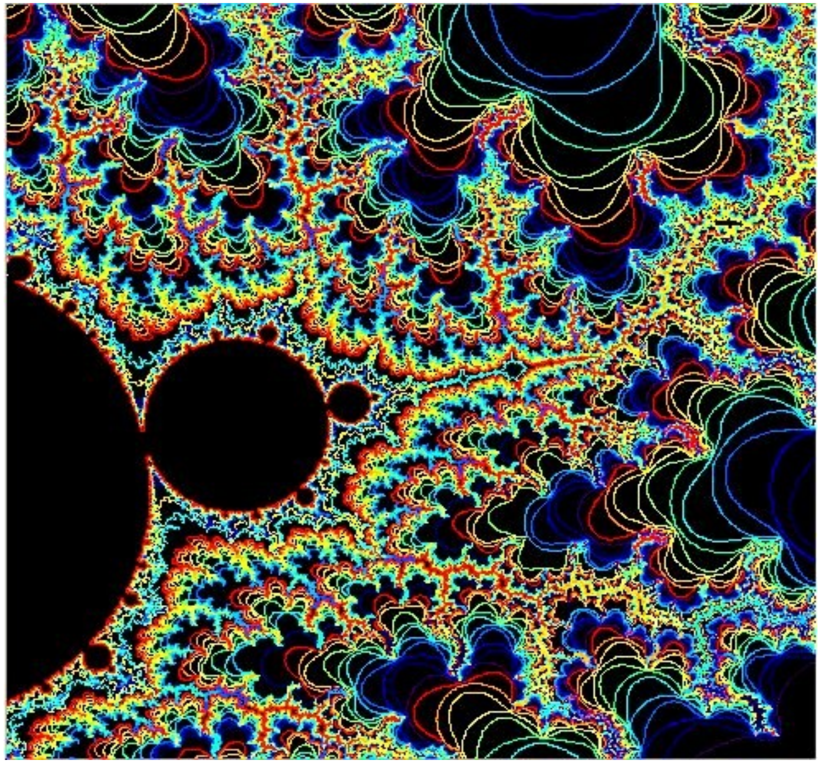
LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 50 | JUIN 1997 | Abonnement 4 n^os^ par an : 30 F



Une regrettable erreur de manipulation a fait « disparaître » du PETIT VERT de mars l'annonce suivante, présentant la dernière née des brochures de la régionale... Mais il est encore largement temps de se la procurer : tout n'a pas été vendu le 19 mars !

Une nouvelle brochure publiée par la Régionale Lorraine :

TROISIÈME DEGRÉ ET IMAGINAIRES

ou

Comment la recherche des solutions des équations du troisième degré a permis la découverte des nombres imaginaires ; l'évolution du statut de ces nombres.

Au neuvième siècle, dans le monde arabe, AL KWARIZMI « inventait » l'algèbre pour résoudre les équations du second degré. A partir de ce moment, les « savants » arabes, puis européens, ont cherché des méthodes pour résoudre les équations du troisième degré : la première « formule » algébrique connue est attribuée à CARDAN.

Peu après, BOMBELLI a osé poursuivre les calculs avec des nombres « impossibles », passant outre les « interdictions ». Les nombres imaginaires étaient nés... Il a fallu attendre l'époque de DESCARTES pour que l'on ose dire que toute équation polynomiale de degré n devait avoir n racines.

Mais il a fallu encore des décennies pour que ces nombres aient un véritable statut mathématique, et que le corps C prenne enfin structure.

C'est cette histoire qui est relatée dans ces pages...

Cette brochure est destinée aux enseignants de mathématiques, d'une part pour enrichir leur culture personnelle dans ce domaine de l'histoire des mathématiques, mais aussi, et surtout, pour leur faire pointer du doigt l'historique de certaines difficultés conceptuelles : certaines difficultés de nos élèves peuvent en effet trouver une explication dans l'étude de l'épistémologie des mathématiques.

Prix : 25 Francs (port non compris).
Pour se procurer cette brochure de 44 pages, format A4, deux solutions :
Vous vous rendez à l'I.R.E.M. à Vandoeuvre, où elle est en dépôt-vente.
Vous la commandez par correspondance à Roger CARDOT grâce au bon de commande de brochures inséré dans ce bulletin n°49 de juin. Mais là, il faudra ajouter les frais de port (8 F).

En guise d'éditorial...

Marseille, le 27 octobre 1997

Cher Boris,

Hier soir, nous nous sommes retrouvés avec toute une bande de collègues à Callelongue, où nous avons soupé dans un petit restaurant fort sympathique ; le repas fut copieux et bien arrosé, aussi c'est en bus que nous sommes rentrés au centre-ville. La photo de la carte postale représente d'ailleurs ce petit « village » de pêcheurs, tout au bout de Marseille... on ne peut pas aller plus loin.

Le voyage en train s'est fort bien passé : partis de Nancy vendredi soir à 21 h 42, nous sommes arrivés à 6 h 24 à la gare Saint Charles, où nous attendait le comité d'accueil de la Régionale : café, croissants.... En couchette, j'ai dormi comme un loir, bercé par le léger balancement du wagon ; je n'ai commencé à ouvrir un œil que pour regarder le lever du soleil sur l'étang de Berre. Et tout ça pour 265 F seule-ment ! Ça ne valait pas le coup de prendre l'autoroute, de conduire et dormir chacun à tour de rôle comme pour Albi, et de somnoler pendant toute la première matinée.

Car la première conférence, je ne te dis pas... Un gars hyper-fort (j'ai oublié son nom, et je n'ai pas le programme sous la main) : des maths de haut niveau, à la pointe de la recherche, mais passionnantes. Tout s'enchaînait de façon logique et on avait l'impression de tout comprendre ; enfin, sur le coup, parce que s'il fallait que je te réexplique... de toutes façons, tu n'avais qu'à venir, au lieu d'attendre Gérardmer.

J'ai revu Jérôme, qui est venu avec toute sa régionale brestoise en autocar (je ne sais pas s'ils ont bien dormi pendant leur voyage, mais Jérôme semblait en pleine forme), ainsi que Joël (celui qui était parti en Savoie il y a quelques années). Et des tas d'autres collègues lointains avec qui on avait déjà sympathisé à Albi, à Grenoble, à Brest ou au Futuroscope.

Mais là, il y avait un plus, vraiment formidable : tout était regroupé dans l'hyper-centre de la ville, à deux pas de notre hôtel (simple, mais propre et confortable, et surtout pas trop cher), on pouvait aller au bistrot entre deux ateliers ; enfin je dis «on» pouvait... car moi, j'ai surtout déambulé autour des stands des éditeurs, des I.R.E.M., des démonstrateurs de logiciels. Et Marseille est vraiment une ville accueillante, où il est agréable de flâner, avec quelques petites rues bien sympathiques, parfois exotiques ; et les marchandes de poissons sur le Vieux Port, elles existent en vrai : ce n'est pas que du « vu à la télé ».

Je vais arrêter là mon dithyrambe, d'autant que je ne t'ai rien dit sur une des principales raisons qui me font participer à toutes les Journées de l'A.P.M. : les ateliers. Mais ça, je t'en reparlerai à la rentrée, car ça m'a donné plein d'idées pour des activités en classe, et pour présenter certaines choses autrement. Alors attends toi à quelques soirées de travail intensif la semaine prochaine !

Amicalement, Alexandre.
(P.C.C. Jacques VERDIER)

COMITÉ DE LA RÉGIONALE
(élu le 19/03/97)

Marie-José BALIVIERA [3], lycée Louis Geisler à RAON L'ÉTAPE (tél. 03.29.41.16.07) : responsable "Lycées Professionnels".

Michel BARDY [2] lycée Louis Lapicque à ÉPINAL (tél. 03.29.34.02.10).

Michel BONN, I.R.E.M. de Lorraine, (03.83.53.26.34) : responsable post-bac et formation des maîtres.

Roger CARDOT [3], lycée Stanislas à VILLERS-LES-NANCY (tél. 03.83.75.84.53) : trésorier adjoint chargé de la vente des brochures

Farida CHAIBAI [3], collège Albert Camus à JARVILLE (tél.03.83.35.27.56).

Martine DECHOUX, collège Robert Schuman à HOMBOURG-HAUT (tél. 03.87.91.22.51) : responsable "Premier cycle".

Pierre DORIDANT, retraité du lycée professionnel J.C. Pellerin à ÉPINAL (tél. 03.29.82.41.04).

François DROUIN, collège Les Avrils à SAINT-MIHIEL (tél. 03.29.89.06.81) : président.

Jacqueline EURIAT, IUFM de Lorraine, site d'ÉPINAL (tél. 03.29.35.71.77) : chargée de la bibliothèque régionale.

Dominique GEGOUT, collège de La Haie Griselle à GERARDMER (tél. 03.29.63.13.26) : vice-président.

Pol LE GALL [2], lycée Julie Daubié à ROMBAS (tél. 03.87.64.14.76) : trésorier.

Geneviève LEMERCIER, retraitée (tél. 03.83.98.74.50) : secrétaire.

Bernard PARZYSZ [1], IUFM Université de METZ (tél. 03.87.75.19.26)

Jean-Marie PROVIN, lycée P. Mendès-France à ÉPINAL (tél. 03.03.29.67.21.80) : responsable « Second Cycle ».

Daniel VAGOST, IUT de METZ, dépt. STID (tél. 03.87.73.09.31) : trésorier adjoint.

Jacques VERDIER [3], lycée Arthur Varoquaux à TOMBLAINE (tél. 03.83.20.94.72) : responsable "Petit Vert".

[1] membre du comité national de l'APMEP, « sortant » en juin 1997
[2] membres du comité national de l'APMEP
[3] membres du comité national de l'APMEP, « entrant » en juin 1997

"Le fil des maths" passe par la Lorraine

Durant toute cette année scolaire, une classe de 4ème du collège A. Camus à Jarville travaille dans le cadre d'un projet intitulé « le fil des maths » en partenariat avec la Cité des Sciences et de l'Industrie. Il s'agit, à partir de thèmes transversaux, de replacer les mathématiques dans un contexte culturel et historique.

Tout en restant une discipline de base, on peut apporter à l'enseignement des mathématiques des éléments d'ouverture pour motiver les élèves et susciter leur curiosité. Il n'y a pas à aller bien loin, parfois, pour trouver des idées d'ouverture. Ainsi, en septembre dernier, les éditions SERPENOISE ont publié, sous la direction de Jean-Louis GREFFE, le tome « Sciences Exactes » de « L'encyclopédie illustrée de la Lorraine ».

On y découvre aussi bien Albert GIRARD, né vers 1595 à Saint-Mihiel, que Charles MESSIER (1730-1817), originaire de Badonviller, astronome célèbre pour son « Catalogue » des galaxies. Quant au général PONCELET, il commence ses écrits mathématiques en captivité à Saratov, pendant la campagne de Russie. Et bien sûr, plus près de nous, une large part est faite au savant universel que fut Henri POINCARÉ.

A partir de cet ouvrage clair et bien documenté, les élèves ont pu appréhender des éléments d'histoire des sciences et découvrir ces personnages aux noms familiers dans la région.

Farida CHAIBAI

Les recherches et travaux de cette classe seront présentés au public sous la forme d'une exposition au Collège durant la première quinzaine de juin.

Collège Albert CAMUS
3 rue de la République
54140-JARVILLE
Tél. 03.83.51.11.50

PETIT VERT N°50. JUIN 1997

ANALYSE DES SUJETS DE BACCALAURÉAT

Comme chaque année, nous invitons tous les adhérents de la Régionale a faire un petit travail d'analyse des sujets de baccalauréat.

Pour toutes les séries, il s'agit de donner d'abord une impression globale sur le sujet (en particulier : conformité à l'esprit et au texte du programme, adaptation au niveau des élèves), et de fournir toute indication sur les résultats obtenus.
Ne pas hésiter ensuite à détailler, question par question, les bons et les mauvais côtés des exigences des énoncés. Ne pas oublier les impressions ressenties lors de la réunion «d'harmonisation» : accords et désaccords.

Une **réunion** de synthèse aura lieu dans les locaux de l'I.R.E.M. **le samedi 28 juin 1997 à 14 heures** : vous êtes tous fortement conviés à y participer.
S'il vous est impossible de vous déplacer ce jour-là, envoyez au préalable votre analyse des sujets à Michel BARDY, 6 côte Vinseaux, 88000 ÉPINAL (qu'il les reçoive, dans la mesure du possible, avant le 28/06).

Merci d'avance à tous ceux qui participeront à ce travail.

ANALYSE DU SUJET DE BREVET

Comme chaque année, nous invitons tous les adhérents de la Régionale a faire un petit travail d'analyse du sujet de brevet.

Elle se fera dans les locaux de l'I.R.E.M. **le samedi 28 juin 1997 à 14 heures** : vous êtes tous fortement conviés à y participer.
S'il vous est impossible de vous déplacer ce jour-là, envoyez au préalable votre analyse du sujet à François DROUIN, 2 allée du Cerisier, 55300 CHAUVONCOURT (qu'il les reçoive, dans la mesure du possible, avant le 28/06).

Merci d'avance à tous ceux qui participeront à ce travail.

Science en Fête : Appel à projets

La 6ème édition de la Science en Fête aura lieu les 10, 11 et 12 octobre prochains. Attention, les dépôts de projets auprès de la coordination régionale (assurée par Au fil des Sciences en Lorraine) doivent se faire du 15 avril au 30 juin dernier délai. Pour des raisons impératives d'efficacité de la communication, les retardataires ne seront pas pris en compte : à vos marques !

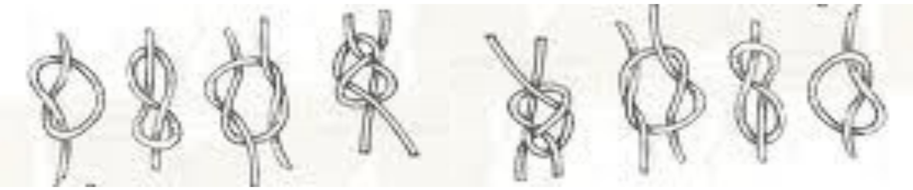
☎ infos: 03 82 51 13 26

Science en Fête en Lorraine en octobre

Dans un courrier de « Au fil des Sciences », association à laquelle adhère notre Régionale, nous avons relevé l'entrefilet ci-contre. Il est donc urgent que les collègues qui désirent participer envoient leurs projets.
En particulier, une équipe de collègues pourrait prendre en main la présentation des 10 stands de l'exposition interactive « OBJETS MATHÉMA-TIQUES » (voir Petit Vert n°48 de décembre 1996, page 7, pour la présentation et les modalités d'emprunt).
Cela ferait un bon coup de pub pour l'A.P.M.E.P. et permettrait peut-être aussi de vendre quelques unes des brochures d'accompagnement de cette exposition.
Appel aux bonnes volontés...

Les nœuds (suite...)

La revue POUR LA SCIENCE a publié en avril un numéro hors-série entièrement consacré à la science des nœuds.
Ce numéro intéressera tout particulièrement ceux qui ont assisté à la conférence lors de notre Journée régionale du 19 mars dernier, et qui n'ont pas eu le temps de prendre des notes : ils y retrouveront beaucoup de ce qui s'y est dit, et en particulier un certain nombre des figures étudiées.



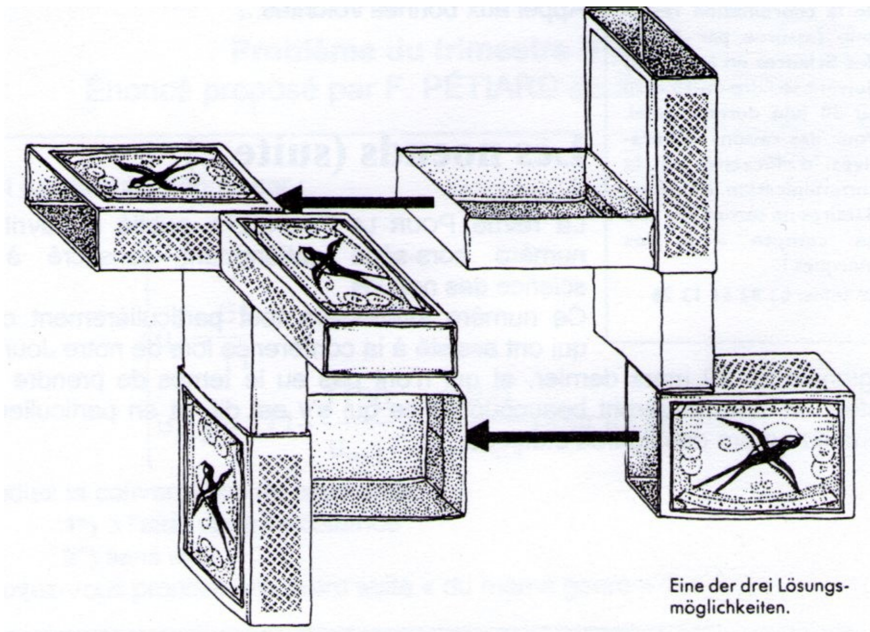
Casse-tête (solution)

Dans notre numéro précédent, nous vous présentions un puzzle constitué de cinq boites d'allumettes, en vous faisant savoir que nous ne possédions pas le numéro de mars 1989 de la revue russe « QUANT » où figurait la solution.

Heureusement, notre président régional possédait la traduction allemande de l'ouvrage de J. BOTERMANN et J. SLOCUM, « GEDULDSPIELE DER WELT ». Les auteurs y donnent une des trois solutions de ce puzzle qu'ils attribuent à VAN DEVANTER.

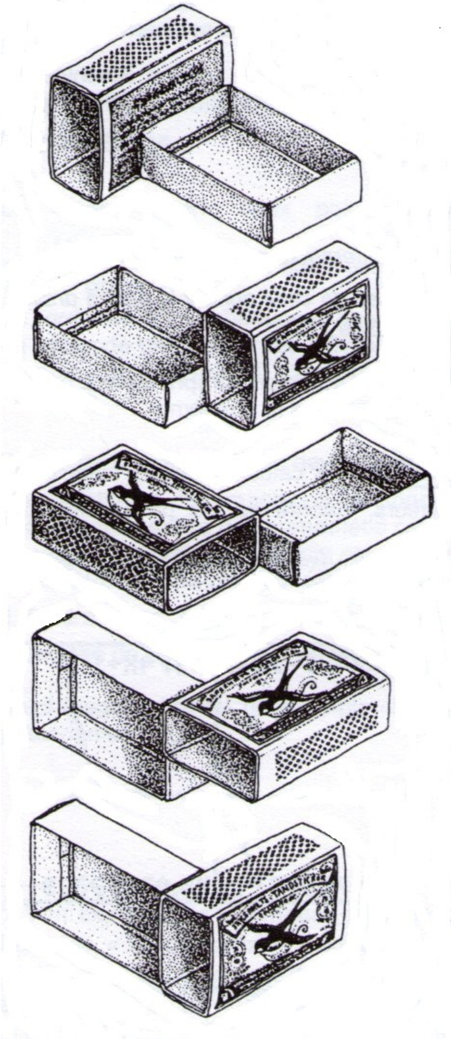
Nous reproduisons ci-dessous (pour ceux qui auraient égaré le numéro de Mars du PETIT VERT) la façon de coller les boites, ainsi que la solution, très ingénieuse. Une fois exécuté le mouvement indiqué par les flèches noires, il faut bien sûr refermer les couvercles verticaux en appuyant verticalement.

SOLUTION :



ATTENTION ! les boites et les collages sont très fragiles et se cassent facilement. Toute solution qui utiliserait cette possibilité serait considérée comme nulle !!!

Voici comment coller ces boîtes pour réaliser le puzzle :



Le puzzle terminé :

Résolution approchée d'une équation avec la calculatrice graphique.

Jacques VERDIER
Lycée Arthur Varoquaux
TOMBLAINE

A l'occasion d'un devoir surveillé en classe de première S.T.L. (option Biochimie), j'avais posé un certain nombre de questions concernant la fonction f définie par f(x) = $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{4}x + 1$.

Le contrôle se terminait par cette question :

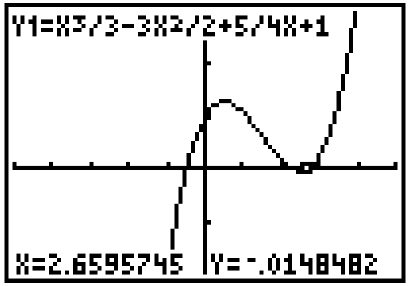
6°) Déduire de ce qui précède le nombre de points d'intersection de C avec l'axe Ox.

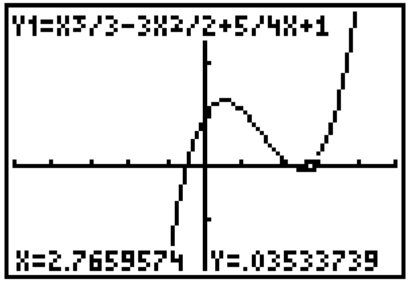
Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de l'abscisse de celui qui est le plus à droite. Pour cela, on décrira très clairement la démarche utilisée.

Il était facile de justifier l'existence d'une solution s de l'équation comprise entre 5/2 et 3 puisque f(5/2) valait -1/24 et f(3) valait ¼. Mais là n'est pas le problème.

Beaucoup d'élèves ont utilisé la fonction TRACE de leur calculatrice pour aller « au plus près » du point recherché (qui était d'ailleurs, volonté de ma part, difficile à visualiser).

Comme beaucoup d'entre eux utilisent Xmin=-5 et Xmax=+5, ils ont obtenu, sur la plupart de leurs machines, un des deux écrans suivants :





X=2,6595745 et X=2,7659574 sont les deux valeurs successives obtenues par TRACE, l'une donnant une ordonnée négative, et l'autre une ordonnée positive.

Les élèves ont donc donné une de ces deux valeurs, en « arrondissant » (comme le suggérait l'énoncé) à 10^{-4} près. Ce qui donne s ≈ 2,6596 ou s ≈ 2,7660 (je ne parlerai pas de ceux qui « tronquent », donnant s ≈ 2,6595 ou s ≈ 2,7659).

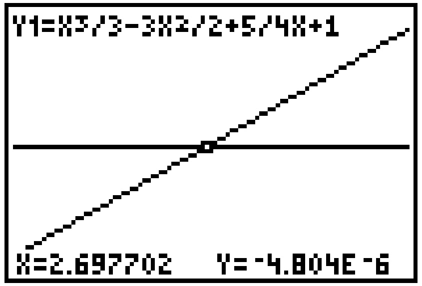
Lors de la correction, il s'est agi pour moi de leur faire comprendre **pourquoi** ils n'avaient pas donné une valeur approchée à 10^{-4} près ; leur argumentation était du type : « *La machine donne un résultat avec 7 décimales, j'arrondis en n'en prenant que 4* ».

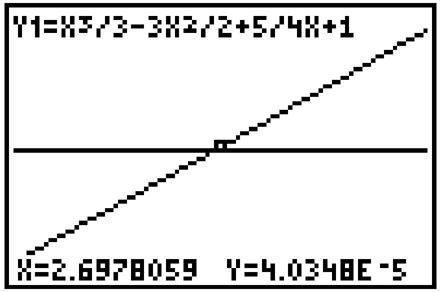
Explications :

Le « pas » entre deux points consécutifs de la fonction TRACE vaut $p = \dfrac{X\max - X\min}{nbpix - 1}$, où *nbpix* est le nombre de pixels en largeur dans l'écran ([1]), est de l'ordre de 0,1 sur beaucoup de machines.
La méthode utilisée par les élèves ne donne donc qu'une approximation de l'ordre du dixième (grosso modo), contrairement à l'illusion des 7 chiffres affichés après la décimale.

Pour aller plus loin, l'élève devra donc faire des **ZOOM** ([2]).
Sur la plupart des machines, la fonction **ZoomIn** (ou **ZoomFact**, ou commande équivalente) réalise une homothétie centrée sur la position du curseur ([3])
Le rapport de cette homothétie est prévu par le constructeur (par exemple k = 4), mais il peut être modifié par l'utilisateur. : on peut choisir par exemple k = 10.
Il faudra donc faire un certain nombre de ces **ZOOM** avant que l'écart entre l'abscisse de deux pixels consécutifs soit inférieure à 10^{-4} .

Voici un exemple obtenu après 5 zooms



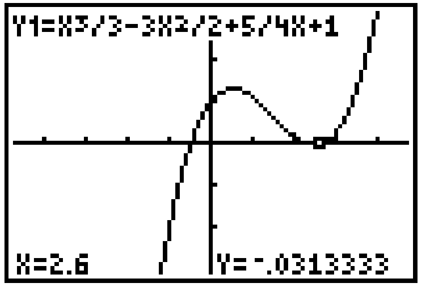


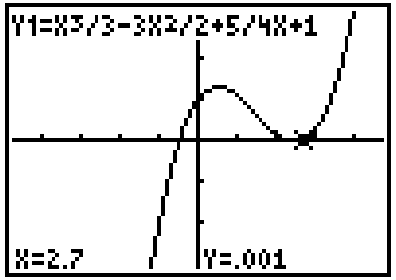
On a bien là un écart de l'ordre de 10^{-4} entre les deux valeurs consécutives, et on peut maintenant affirmer que s ≈ 2,6977 à 10^{-4} près.

Pour une utilisation plus « rationnelle » des Zooms :

Commençons par utiliser un **RANGE** ou **WINDOW** tel que la fonction **TRACE** donne un pas de 0,1 ([4])
Cela est fait automatiquement par **ZDécimal** sur les Texas modèles TI80 à TI83, et par **INIT** sur les CASIO récentes.

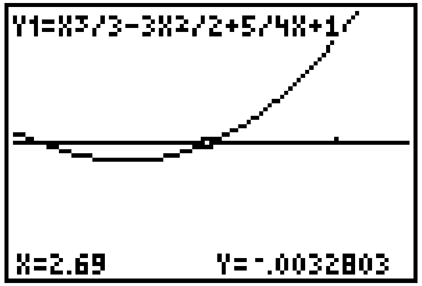
Reprenons l'exercice au début. On obtient les deux écrans suivants avec **TRACE** :

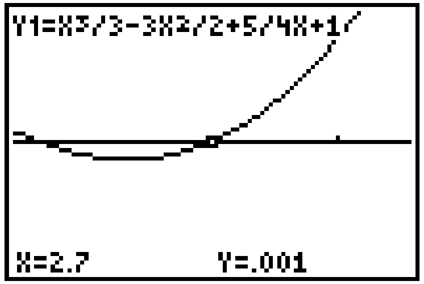




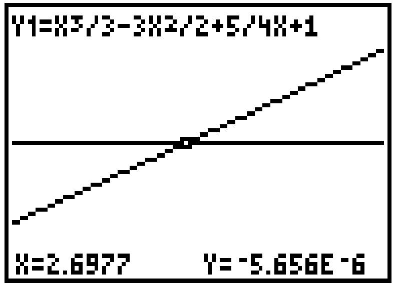
ce qui permet d'affirmer que 2,6 < s < 2,7.

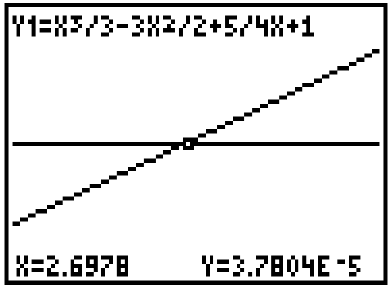
Choisissons le facteur d'homothétie k = 10. Après un premier Zoom, on obtient alors, en utilisant **TRACE** :





Après le troisième Zoom, on obtient les deux valeurs consécutives suivantes (voir page 13) :





Ce qui permet d'affirmer que 2,6977 < s < 2,6978.
Et on a alors parfaitement répondu à la question posée dans l'énoncé.

Notes :

[1] Voir explications techniques dans la toute récente publication de l'IREM de Lorraine, « la calculatrice graphique au lycée », pages 39 à 43.

[2] Pour ceux qui disposent de tables de valeurs automatiques sur leur calculatrice, il y aurait moyen de travailler autrement ; mais ce n'est pas le cas de tous les élèves, aussi je n'aborderai pas cette méthode ici.

[3] Il y a aussi la fonction **ZoomBox**, mais je ne l'aborderai pas ici, car elle ne permet pas de maîtriser le facteur d'agrandissement de la figure.

[4] Voir explications techniques dans la brochure citée ci-dessus

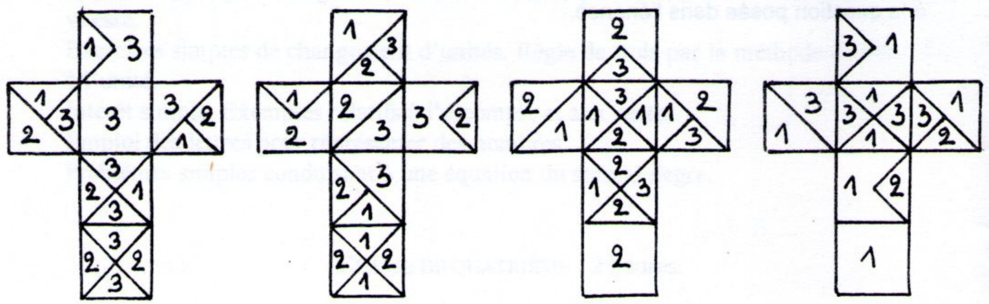
PETIT VERT N°50. JUIN 1997

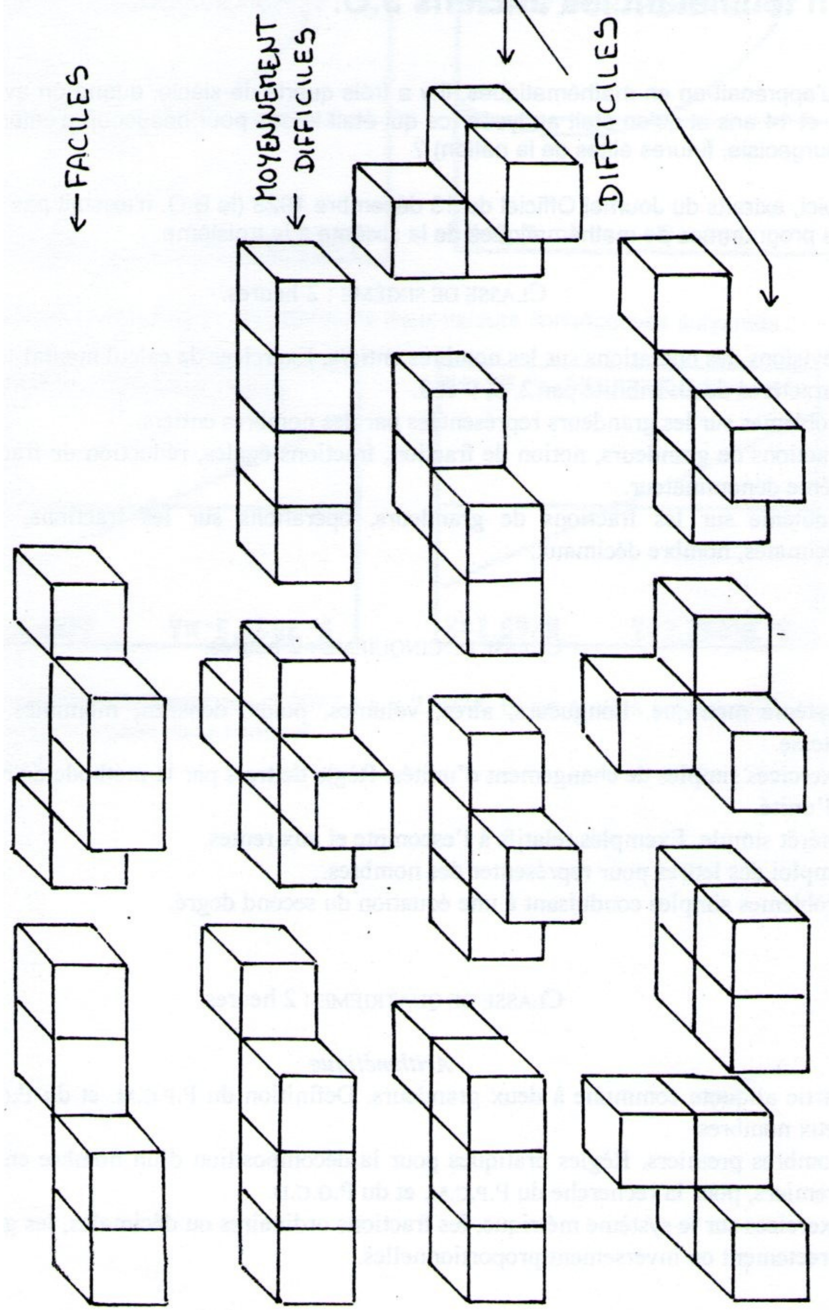
4 cubes et les 24 carrés de MacMAHON

Les brochures JEUX 1 et OBJETS MATHÉMATIQUES nous ont fait prendre connaissance des 24 carrés découverts dans les années 20 par le Major P. A. MacMAHON : ces carrés ont des côtés portant l'une des couleurs choisies parmi trois (numérotées 1, 2, 3 par exemple).

Pendant bien longtemps les amateurs de puzzles tentèrent de recouvrir les 4x6 faces de 4cubes en utilisant ces 24 carrés. En 1971, Scott NELSON (âgé de 9 ans seulement !!!) trouva la solution indiquée ci-dessus, commercialisée en Grande Bretagne par BINARY ARTS CORPORATION sous le nom « THE FOUR CUBES PUZZLE ». Des assemblages de ces cubes sont proposés à la sagacité des joueurs :

Deux arêtes peuvent être accolées lorsqu'elles ont la même couleur.
Quelques questions pour le lecteur du PETIT VERT :
- la solution trouvée par Scott NELSON est-elle la seule possible ?
- sauriez-vous réaliser les assemblages proposés page 15 ?





PETIT VERT N°50. JUIN 1997

En feuilletant les anciens J.O.

Qu'apprenait-on en mathématiques, il y a trois quarts de siècle, quand on avait entre 11 et 14 ans et qu'on était au lycée (ce qui était le cas pour beaucoup d'enfants de la bourgeoisie, futures élites de la nation) ?

Voici, extraits du Journal Officiel du 13 décembre 1923 (le B.O. n'existait pas encore), les programmes de mathématiques de la sixième à la troisième.

CLASSE DE SIXIÈME : 2 heures.

Révisions des opérations sur les nombres entiers. Exercices de calcul mental.
Caractères de divisibilité par 2, 5, 9 et 3.
Problèmes sur les grandeurs représentées par des nombres entiers.
Fractions de grandeurs, notion de fraction, fractions égales, réduction de fractions au même dénominateur.
Problème sur les fractions de grandeurs, opérations sur les fractions, fractions décimales, nombre décimaux.

CLASSE DE CINQUIÈME : 2 heures.

Système métrique. Longueurs, aires, volumes, poids, densités, monnaies. Temps, vitesse.
Exercices simples de changement d'unités. Règle de trois par la méthode de réduction à l'unité.
Intérêt simple. Exemples relatifs à l'escompte et aux rentes.
Emploi des lettres pour représenter des nombres.
Problèmes simples conduisant à une équation du second degré.

CLASSE DE QUATRIÈME : 2 heures.

Arithmétique

Partie aliquote commune à deux grandeurs. Définition du P.P.C.M. et du P.G.C.D. de deux nombres.
Nombres premiers. Règles pratiques pour la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, pour la recherche du P.P.C.M. et du P.G.C.D.
Exercices sur le système métrique, les fractions ordinaires ou décimales, les grandeurs directement ou inversement proportionnelles.

Définition de la racine carrée. Règle pratique pour l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou d'un nombre décimal, à moins d'une unité décimale d'un ordre donné.

Géométrie.

Ligne droite et plan. Segment de droite. Cercle. Angles. Usage de la règle, du compas, du rapporteur.
Triangles, triangles isocèles. Cas d'égalité des triangles.
Perpendiculaires et obliques. Cas d'égalité des triangles rectangles.
Droites parallèles. Usage de l'équerre.
Somme des angles d'in triangle, d'un polygone convexe.
Parallélogramme. Rectangle. Losange. Carré. Trapèze.
Intersection d'un cercle et d'une droite. Tangentes. Cordes et arcs.
Comparaison de l'angle inscrit et de l'angle au centre correspondant à un même arc.
Positions relatives de deux cercles.
Constructions élémentaires sur la droite et sur le cercle.

CLASSE DE TROISIÈME : 3 heures.

Algèbre

Propriété des sommes, différences, produite et puissances des nombres entiers et fractionnaires.
Rapport de deux grandeurs, grandeurs proportionnelles.
Notions concrètes sur les nombres positifs et négatifs ; opérations ; applications.
Monômes, polynômes, termes semblables ; addition, soustraction, multiplication de monômes et de polynômes. Division des monômes.
Équations numériques du premier degré à une ou deux inconnues.

Géométrie

Points qui partagent un segment de droite dans un rapport donné.
Droites parallèles et lignes proportionnelles. Triangles semblables.
Relations métriques dans le triangle rectangle.
Propriétés des sécantes dans le cercle.
Construction de la quatrième proportionnelle et de la moyenne proportionnelle.
Polygones réguliers : hexagone, carré, triangle équilatéral.
Mesure des aires du rectangle, du parallélogramme, du trapèze, des polygones, du cercle.
Rapport des aires de deux triangles semblables.

Rentrée 1997 en 6^e : évaluation ou pas évaluation ?

Désirant savoir s'il y aurait ou non une évaluation à l'entrée en sixième dans notre académie cette année, la Régionale a écrit à Monsieur le Recteur pour le lui demander.
Nous publions ci-dessous notre lettre, ainsi que la réponse de Monsieur le Recteur.

à
Monsieur le Recteur de l'Académie
de Nancy - Metz

Monsieur le Recteur,

L'évaluation à l'entrée en $6^{ème}$ joue un rôle important pour les professeurs et constitue un outil intéressant pour une meilleure connaissance des capacités et des acquis des élèves.

Dans le cadre des dispositions prises pour la rentrée 97, nous voudrions savoir si l'académie de Nancy - Metz fera partie de celle qui feront passer cette évaluation.

Nous souhaitons que les cahiers d'évaluation soient disponibles pour tous les collèges volontaires sans obligation pour les établissements de financer la reproduction des documents sur leurs fonds propres.

Le 21 novembre 1996, Monsieur Jean-Pierre Richeton, Président National de l'A.P.M.E.P. a adressé à Monsieur le Ministre de l'Education Nationale un courrier - dont je vous joins une copie - évoquant cette évaluation et certaines de nos interrogations . Nous aimerions connaître les dispositions envisagées dans notre académie.

En vous remerciant à l'avance pour l'attention que vous voudrez bien accorder à notre demande, je vous prie de croire Monsieur le Recteur en l'expression de ma haute considération et en l'attachement des membres de notre association à la qualité de l'enseignement.

François DROU1N

Réponse de Monsieur le Recteur page suivante

Réponse de Monsieur le Recteur :

Monsieur le Président,

J'ai bien reçu votre courrier du 23 mars 1997 par lequel vous me demandez si l'académie de Nancy-Metz sera de celles qui feront passer l'évaluation à l'entrée en 6ème.

J'ai l'honneur de vous faire connaître qu'effectivement l'académie y procédera et que c'est Madame CARIOU, Inspecteur d'Académie adjoint au Directeur des Services Départementaux de l'Éducation Nationale en Meurthe et Moselle qui pilote l'opération.

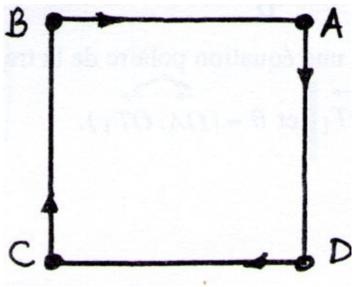
Je vous prie d'agréer, Monsieur le Président, l'expression de mes sentiments distingués.

W. MAROIS.

Solution du problème n°49
Extrait de l'ouvrage « Les poulets de Minsk »

Les tortues mathématiques de Macha

Macha a dressé ses quatre tortues de sorte qu'elle se suivent toujours l'une l'autre. Elle les place aux quatre sommets d'un carré, comme le montre la figure, chaque tortue ayant en point de mire le flanc droit de sa voisine. Les quatre tortues progressent à la même vitesse v. Au bout de combien de temps les tortues se rejoignent-elles ? Quelle est leur trajectoire ?



Recension des solutions par Bernard PARZYSZ

PETIT VERT N°50. JUIN 1997

Solution du problème n° 49 :

Trois réponses sont parvenues dans les délais. Leurs auteurs sont Michel BARTHEL (stagiaire IUFM, 57 Forbach), Christophe BRIGHI (57 Thionville) et Alain MERCIER (57 Metz).
Ces solutions étant voisines (ce qui est, bien sûr, dû au type de problème), nous en avons fait une synthèse que nous vous livrons.

Soit $ABCD$ le carré déterminé par les positions initiales des tortues (à l'instant 0, la tortue T_1 est en A, la tortue T_2 en B, etc.). On oriente le plan de façon que $ABCD$ soit direct, et on le rapporte au repère $(O\,;\,\overrightarrow{OA},\,\overrightarrow{OB})$, O étant le centre du carré.

Les hypothèses de l'énoncé, avec la convention $T_5 = T_1$, se traduisent par :

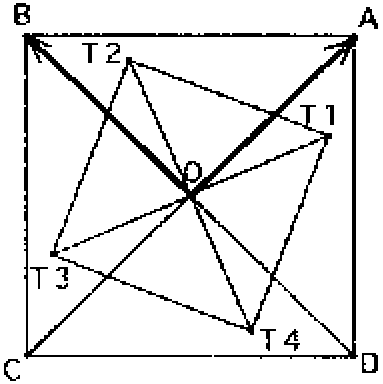
(1) à tout instant $T_1T_2T_3T_4$ est un carré de centre O, de sens direct.

(2) à tout instant (T_kT_{k+1}) est tangente à la trajectoire de T_{k+1}.

(3) à tout instant, $\left\|\dfrac{d\,\overrightarrow{OT_k}}{dt}\right\| = V$ (la norme de la dérivée du vecteur OT_k par rapport au temps t est V, vitesse constante).

Remarquons que, d'après (1), une rencontre éventuelle ne peut avoir lieu qu'au centre du carré. D'autre part, les conditions (1) et (2) impliquent que $(\overrightarrow{OT_{k+1}},\overrightarrow{T_{k+1}T_k}) = -\dfrac{3\pi}{4}$ (*voir figure ci-contre*).

D'où il résulte que la trajectoire de T_{k+1} (donc de chacune des tortues) est une courbe telle qu'en tout point l'angle de la tangente avec le rayon-vecteur est constant : ils s'agit donc d'un arc d'une spirale équiangle, plus connue sous le nom de spirale hyperbolique. Nous allons préciser cette courbe en déterminant la trajectoire de T_1.



Cherchons une équation polaire de la trajectoire de T_1 sour la forme $r = f(\theta)$, avec $r = \|\overrightarrow{OT_1}\|$ et $\theta = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OT_1})$.

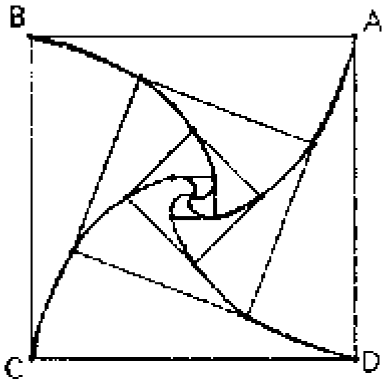
Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire du rayon-vecteur OT_1. On a $\overrightarrow{OT_1} = r.\vec{u}$ et $\theta = (\overrightarrow{OA}, \vec{u})$. En dérivant par rapport à t, il vient $\dfrac{d\,\overrightarrow{OT_1}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}.\vec{u} + r.\dfrac{d\vec{u}}{dt}$.

Mais $\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \dfrac{d\vec{u}}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{d\theta}{dt}\vec{v}$ ($\vec{v}$ étant tel que la base $(\vec{u},\vec{v})$ soit ortho normale directe) ; d'où :

$$\frac{d\overrightarrow{OT_1}}{dt} = r'(t).\vec{u} + r\theta'(t).\vec{v}.$$

Nous avons vu plus haut que $\left(\overrightarrow{OT_1}, \dfrac{d\,\overrightarrow{OT_1}}{dt}\right) = -\dfrac{3\pi}{4}$ donc, d'après (3),

$$\frac{d\,\overrightarrow{OT_1}}{dt} = V\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right).\vec{u} + \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right).\vec{v}\right] = -\frac{V}{\sqrt{2}}(\vec{u}+\vec{v}).$$



En identifiant avec l'expression obtenue au-dessus et en posant $K = -\dfrac{V}{\sqrt{2}}$, on a :

$$\begin{cases} r'(t) = K \\ \theta'(t) = \dfrac{K}{r} \end{cases}$$

Il vient alors $r(t) = Kt + r(0) = Kt + 1$ (puisqu'au départ T_1 est en A). Et, en reportant dans l'autre relation : $\theta(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{K.du}{Ku+1} + \theta(0) = \int_0^t \frac{K.du}{Ku+1} = \ln(Kt+1)$.

Éliminons t entre r et θ ; il vient $\boldsymbol{r = e^{\theta}}$. On trouve donc bien l'équation d'une spirale logarithmique (*voir figure ci-dessus)*.

PETIT VERT N°50. JUIN 1997

Remarques

1°) r s'annule pour $t = -\dfrac{1}{k}$, soit $t = \dfrac{\sqrt{2}}{V}$: les tortues se rencontreront au bout d'un temps fini au centre O du carré $ABCD$.

2°) A. Mercier calcule la longueur de la trajectoire. Ce calcul donne :

$$s = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}.d\theta = \int_{-\infty}^{0} \sqrt{2e^{2\theta}}.d\theta = \sqrt{2}\left[e^{\theta}\right]_{-\infty}^{0} = \sqrt{2}$$

La longueur de la trajectoire de chaque tortue est donc égale à celle du côté du carré initial. Notre collègue remarque finement « *les tortues auraient été inspirées en se donnant rendez-vous au centre du carré en suivant leurs diagonales respectives* ». En effet, en se déplaçant à la même vitesse constante de norme V, elles auraient mis un temps de $\dfrac{1}{V}$ au lieu de $\dfrac{\sqrt{2}}{V}$.

« *Mais*, conclut-il, *les tortues mathématiques aiment les trajets … tortueux, et ne rechignent pas à l'effort* ».

3°) Voici, pour terminer, quelques mots à propos de la spirale logarithmique.
Elle a été découverte par Descartes, mais c'est Jacques Bernoulli (1654-1705) - oui, celui des probabilités et de l'équadiff - qui l'a étudiée, démontrant en particulier qu'elle est égale à sa développée. Il en dit d'ailleurs : "cette spirale merveilleuse me plaît si étonnamment par ses propriétés singulières et admirables que je puis à peine me rassasier de sa contemplation". En extase devant sa trouvaille, il alla jusqu'à demander qu'on grave cette courbe sur sa tombe (que l'on peut voir à l'intérieur de la cathédrale de Bâle), avec l'inscription "*eadem mutata resurgo*" (changée en moi-même je resurgis).

Problème du trimestre n°50
Proposé par F. Pétiard de Besançon

Soit $\{u_n\}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{11}{2} \\ u_1 = \dfrac{61}{11} \\ u_{n+2} = 111 - \dfrac{1130}{u_{n+1}} + \dfrac{3000}{u_n.u_{n+1}} \quad pour\ tout\ n \in N \end{cases}$$

Etudier la convergence de cette suite
1°) à l'aide de la calculatrice
2°) sans elle.
Pouvez-vous proposer une autre suite « du même genre » ?

Une classe de 3ème s'attaque au problème du trimestre du Petit Vert

Comme annoncé dans notre précédent numéro, nous avons reçu de Mme BLUM, professeur au collège Jules-Lagneau de Metz, un courrier en réponse au problème du trimestre n° 48, dans lequel elle disait: « *J'ai proposé ce problème à ma classe de 3ème 2, en donnant des valeurs numériques à α, h et p pour mettre ce problème à leur niveau. J'ai guidé l'analyse de la figure en posant des questions et en m'attachant à laisser transparaître la solution générale derrière leurs calculs* ». Elle ajoute également que « *cette recherche les a passionnés* », ce qui, en tant qu'enseignants de mathématiques, ne saurait que nous réjouir.

Voici donc le problème modifié, la solution "collégiale" proposée par la classe (à laquelle je n'ai pas changé une ligne) et la discussion de Mme Blum.

Analyse de la figure

Construire ABC connaissant le périmètre p = 12 cm, la hauteur issue de A : h = 3 cm et l'angle A = 68°.

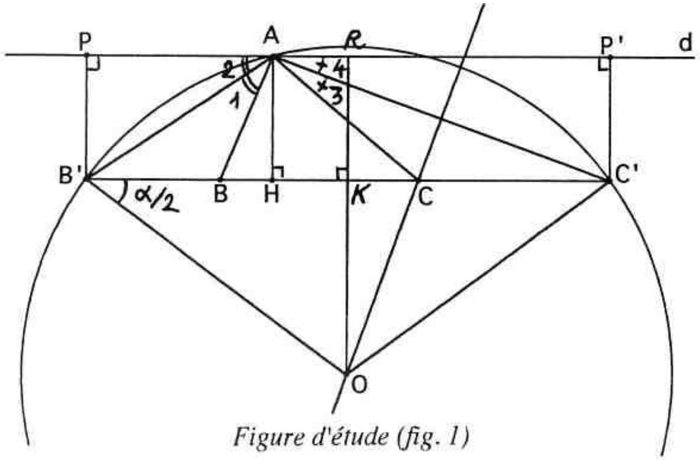


Figure d'étude (fig. 1)

1) Tous les points situés à 3 cm de (BC) sont sur deux parallèles à (BC) ; soit (d) l'une de ces parallèles : **A ∈ (d).**

2) On peut faire apparaître le périmètre p = 12 cm :
On trace BB' = BA B' Î (BC)
CC' = CA C' Î (BC)
B'C' = p = 12 cm.

3) Calcul de $B'AC'$:

$B' = A_1$ (ABB' isocèle) ; $B' = A_2$ (angles alternes-internes formés par les parallèles (BC) et (d) et la sécante (AB')).

Donc $A_1 = A_2$, de même que $A_3 = A_4$, et $B'AC' = A_1 + BAC + A_3$.

Or $A_1 + A_3 = \dfrac{180° - BAC}{2} = 90° - \dfrac{BAC}{2}$, donc $B'AC' = 90° - \dfrac{BAC}{2} + BAC$, d'où

$B'AC' = 90° + \dfrac{BAC}{2}$ et $B'AC' = 90° + 34° = 124°$

4) Si P et P' sont les projetés orthogonaux de B' et C' sur (d), alors (AB) est le symétrique de (AP) par rapport à (AB'), car [AB') est bissectrice de PAB.
De même (AC) est le symétrique de (AP') par rapport à (AC').

5° On construit le cercle inscrit à AB'C'; soit O son centre.

$B'AC' = 90° + \dfrac{A}{2}$, donc $B'AC'$ est obtus. Donc A et O sont de part et d'autre de (B'C').

$B'AC'$ intercepte le grand arc $B'C'$; $B'OC'$, angle au centre, intercepte le grand arc $B'C'$, donc l'angle rentrant $B'OC'$ égale 248°.

Dans le triangle B'OC' isocèle : $OB'C' = OC'B' = \dfrac{180° - B'OC'}{2}$,

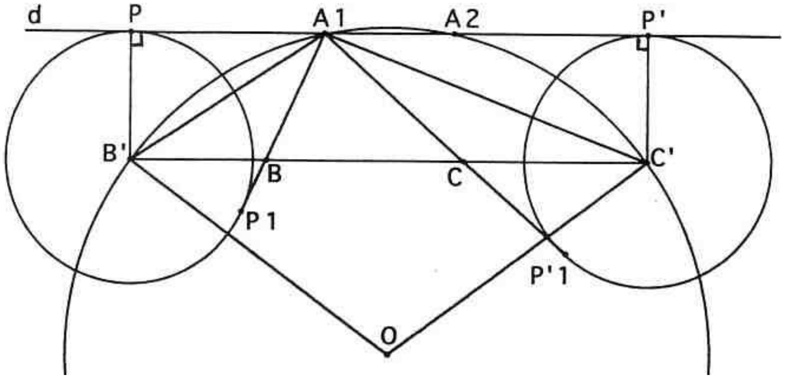
$OB'C' = \dfrac{180° - (360° - B'OC'\ \text{rentrant})}{2}$, $OB'C' = \dfrac{\left[360° - 2\times\left(90° + \dfrac{A}{2}\right)\right]}{2}$,

$OB'C' = \dfrac{A}{2} = 34°$

D'où la construction de l'arc $B'C'$ sur lequel se trouve A

Donc A est sur (d) et sur $B'C'$

Programme de construction



Je trace un segment [B'C'] de 12 cm de longueur.

Je trace le triangle isocèle OB'C' d'angles à la base $34° = \dfrac{\alpha}{2}$

Je trace le cercle de centre O et de rayon OB'

Je trace (d) parallèle à (B'C') à la distance h = 3 cm de (B'C'), de telle sorte que O et (d) soient de part et d'autre de (B'C')

(d) coupe le cercle en A_1 et A_2

Je choisis A_1

Je projette B' et C' en P et P' sur (d)

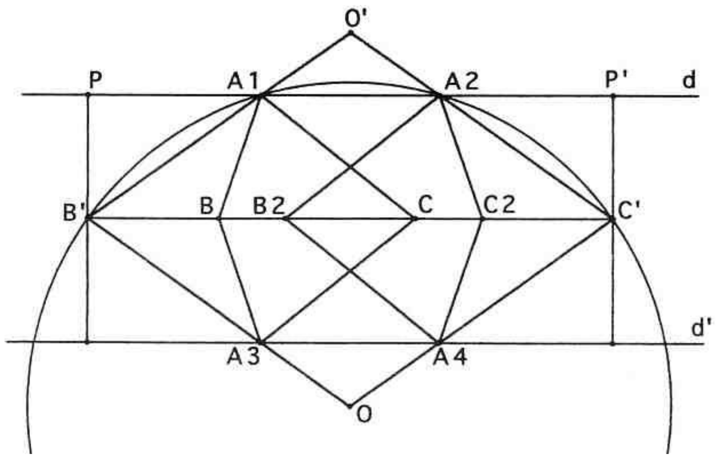
Je trace le symétrique P_1 de P par rapport à (A_1B')

Je trace le symétrique P'_1 de P' par rapport à (A_1C')

(A_1P_1) coupe (B'C') en B

$(A_1P'_1)$ coupe (B'C') en C

J'obtiens le triangle A_1BC (*figure 3*).



Avec le point A_2, j'obtiens le triangle $A_2B_2C_2$ symétrique du triangle A_1BC par rapport à la médiatrice de (B'C'].

En considérant (d'), la deuxième parallèle située à la distance h de (B'C'), j'obtiens les triangles BA_3C et $B_2A_4C_2$ symétriques de BA_1C et $B_2A_2C_2$ par rapport à (B'C').

On a donc 4 solutions.

Conditions d'existence (écrit par le professeur, D. Blum)

(voir la figure d'étude n°1)

$$\mathbf{0 < \alpha < \pi} \quad \textbf{(1)}$$

Dans le triangle ABC de hauteur [AH] :

AC – HC < AH < AH + HC, dans le triangle AHC,

AB – HB < AH < AB + HB, dans le triangle AHB

D'où AC + AB – CB < 2AH < AC + AB + BC.

Or BC < AC +AB. Donc : $\mathbf{0 < h < \dfrac{p}{2}}$ **(2)**

La droite (d) coupe l'arc B'C' si OR < OB' (OR = distance de O à (d)).

Dans le triangle OKB' rectangle en K :

$OB' = \dfrac{\frac{p}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ et $OK = \dfrac{p}{2}\times\tan\dfrac{\alpha}{2}$. D'autre part OR = OK + KR.

OR < OB' devient $\dfrac{p}{2}\times\tan\dfrac{\alpha}{2} + h < \dfrac{\frac{p}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Or $\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ donc $0 < \cos\dfrac{\alpha}{2}$ d'où $h.\cos\dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{p}{2}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Après « manipulations » trigonométriques :

$h < \dfrac{p}{2}\times\tan\dfrac{\pi-\alpha}{4}$. Or $\tan\dfrac{\pi-\alpha}{4} < 1$, donc $\dfrac{p}{2}\times\tan\dfrac{\pi-\alpha}{4} < \dfrac{p}{2}$

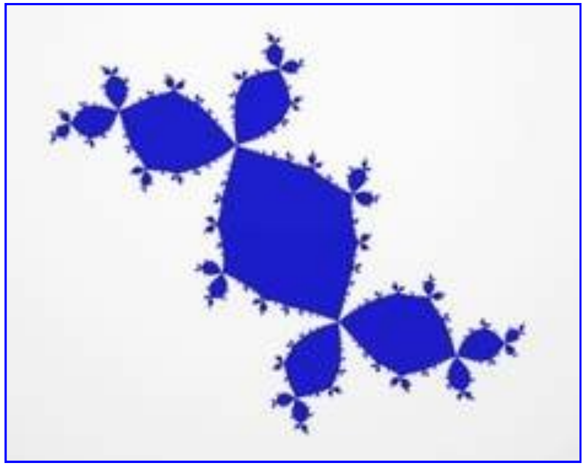
La condition (2) devient :

$$\mathbf{0 < h < \frac{p}{2}\times\tan\frac{\pi-\alpha}{4}} \quad \textbf{(3)}$$

Pour que le triangle existe, il faut que α, p et h vérifient les deux conditions **(1)** et **(3).**

La Dynamique du Lapin

Au cours du séminaire organisé par l'A.P.M.E.P. à Paris les 24 et 25 mai dernier, nous avons eu l'occasion de visionner un petit film vidéo (24 min.) **à contenu mathématique** : le sujet concerne les itérations de polynômes complexes, et en particulier la suite définie par récurrence par $z_{n+1} = f(z_n)$, où $f(z) = z^2 + c$, la constante c étant « judicieusement » choisie.



Il s'agit d'un film d'animation (qui a nécessité 4 ans de travail), avec de très belles images, qui permet de répondre assez facilement aux questions suivantes : y a-t-il des points qui « cyclent », c'est à dire pour lesquels $f(z_{n+k}) = f(z_n)$? y a-t-il des points qui « s'échappent vers l'infini » ? Y a-t-il des points qui n'ont aucun des comportements précédents ?. Questions qui intéressent actuellement les mathématiciens à la pointe de la recherche. L'ensemble des points qui satisfont à la première question constituent justement le « lapin fractal» représenté ci-dessus.

Le film peut facilement être exploité en classe (à partir du moment où les élèves commence à avoir un idée de ce que sont un nombre complexe et une suite récurrente) ; et comme c'est un film vidéo, on peut reculer, repasser au ralenti, arrêter sur une image, etc. selon les réactions et les questions des élèves.

On peut commander cette cassette à ÉCOUTEZ VOIR, 4 square Vermenouze, 75005 PARIS ou à SCIENCES RESSOURCES, Bâtiment 490, Centre Universitaire d'Orsay, 91405 ORSAY. Préciser si VHS-PAL ou VHS-SECAM. Coût : 200 F pour les particuliers, 300 F pour les établissements et institutions.

Information de dernière minute

Les quatre candidats au Comité National A.P.M.E.P. proposés par la Régionale de Lorraine ont tous été élus (voir leurs noms page 4 de ce numéro). Philippe LOMBARD, de l'I.R.E.M., a lui aussi été élu au Comité National. Nous leurs souhaitons à tous quatre années de labeur fructueux au service de l'Association.

PETIT VERT N°50. JUIN 1997

SOMMAIRE

LE PETIT VERT N° 50
(BULLETIN DE LA RÉGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

Directeur de la publication : Jacques VERDIER
N° CPPAP : 2 814 D 73 S. ISSN : 0760-9825. Dépôt légal : 1997.
Imprimé au siège de l'Association :
IREM (Faculté des Sciences), Boulevard des Aiguillettes, VANDOEUVRE
Ce numéro a été tiré à 425 exemplaires.

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 20 FRANCS (*)

NOM :
ADRESSE :

Désire m'abonner pour un an (année civile) au "PETIT VERT"
Signature :

Joindre règlement à l'ordre de : APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)
(*) L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents l'A.P.M.E.P.