LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 40	DÉC. 1994	Abonnement 4 n^os^ par an : 30 F

NOMBRE [nɔ̃bʀ(ə)]. *n. m.* (déb. XII^e ; lat. *numerus*).
I. ♦ 1° *Sc.* Concept de base des mathématiques, une des notions fondamentales de l'entendement que l'on peut rapporter à d'autres idées (de pluralité, d'ensemble, de correspondance), mais non définir. *À l'origine, et dans le cas le plus simple des nombres naturels* (1, 2, 3, 4...) : symbole caractérisant une unité ou une collection d'unités considérée comme une somme. *Caractère servant à représenter les nombres.* V. **Chiffre.** *Le nombre 1, le nombre 3. Le nombre, base de la mesure* (V. **Quantité**). *Système de nombres.* V. **Numération.** *Nombres entiers. Nombres arithmétiques,* non affectés d'un signe (+ ou —), définissant une grandeur non orientée, par oppos. à *algébriques. Nombres entiers qualifiés ou relatifs : nombres positifs et négatifs. Nombres fractionnaires décimaux, rationnels, irrationnels. Nombre algébrique,* racine réelle d'une équation algébrique à coefficients entiers ; *nombre transcendant,* non algébrique (*le nombre* $\pi = 3,14159$; *le nombre* $e = 2,71828$). *Nombres incommensurables**. *Nombres réels, imaginaires**, *complexes. — Nombre cardinal**, *ordinal**. *Nombres pairs, impairs. Nombres binaires, ternaires. Nombres premiers**. *Puissance, racine d'un nombre. Élever un nombre au carré. Extraire la racine d'un nombre. Fonction*

Un fidèle lecteur de l'EST REPUBLICAIN et du PETIT VERT nous envoie ce titre sibyllin, découpé dans l'E.R. du 16 octobre 1994.

L'auteur avait peut-être eu, au collège, un professeur qui insistait un peu trop sur la nécessité de réduire les fractions au minimum.

Semaine de la drogue : moins d'un toxicomane tente de s'en sortir

■ **En Société, l'article de Lionel RAUX**

COMITE DE LA REGIONALE LORRAINE

APPEL A CANDIDATURE

Lors de l'Assemblée Générale de la Régionale A.P.M.E.P. de Lorraine, le 18 janvier 1995 au C.R.D.P. de Nancy, le Comité Régional sera renouvelé.

Nous **lançons un appel à candidatures pour le renouvellement de ce Comité :**

Que tous ceux qui sont un tant soit peu militants de l'Association n'hésitent pas...la charge de travail n'est pas extrêmement lourde : environ 5 réunions par an, **pour décider des directions à prendre et des actions à entreprendre ;** plus si vous désirez vous investir davantage.

Faites-vous connaître par avance auprès de Michèle Fabregas ; mais vous pourrez encore vous décider au dernier moment, c'est à dire le 18 janvier dans l'après-midi.

Archéologie, géométrie et algèbre

A propos d'une mosaïque découverte à Metz

Bernard Parzysz,
(nov. 1994)

Dans son édition du mercredi 9 novembre 1994, le « Républicain Lorrain » annonçait la découverte à Metz, à l'occasion d'une construction immobilière, d'une mosaïque gallo-romaine remontant probablement au deuxième siècle de notre ère. Le jeudi 17 novembre, le RL, dans un article signé Catherine Guidi, précisait qu'« *environ 17 m^2 de mosaïque ont été dégagés, révélant des motifs géométriques et végétaux noir et rouge sur fond blanc* », et publiait une photographie montrant un morceau de cette mosaïque *in situ*.

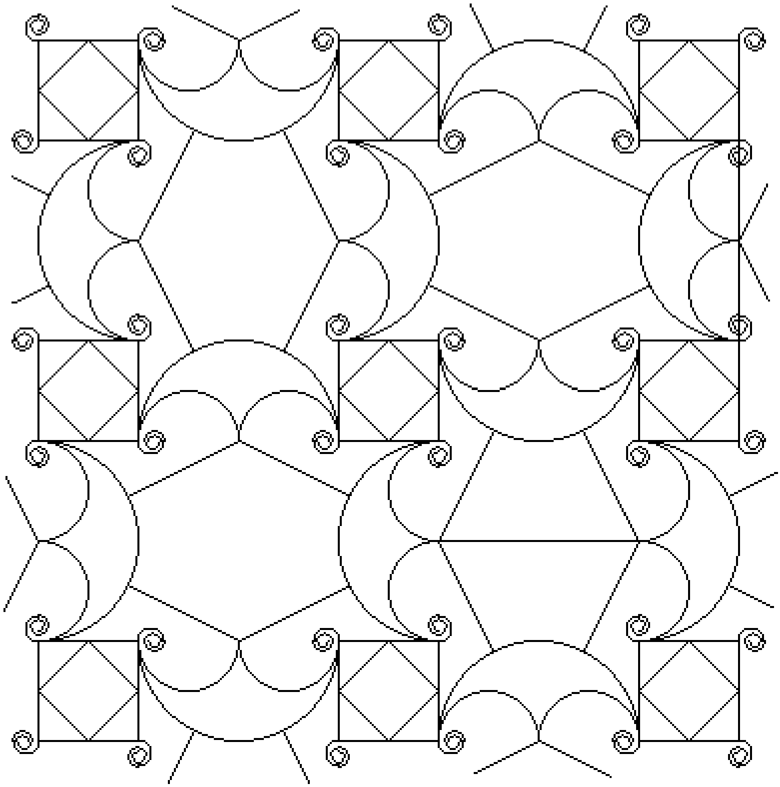


fig. 1

Ce pavement antique se présente comme sur la *fig. 1* ; on peut constater que le motif principal est bien géométrique. Les motifs « végétaux » se trouvent en fait à l'intérieur des grands losanges tronqués (*scuta*) ; ils sont apparemment – d'après la photographie – des deux types représentés sur la *fig. 2*.

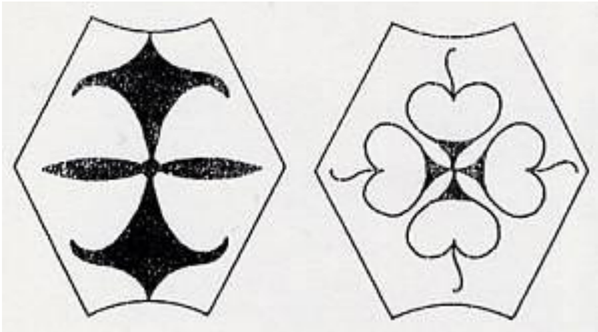


fig. 2

Mais ce qui, du point de vue mathématique, est le plus intéressant, c'est précisément l'aspect géométrique de cette mosaïque : il s'agit en effet d'un pavage régulier du plan, et nous savons qu'il existe en tout et pour tout 17 types de pavages fondés sur un motif infiniment répété, motif sur lequel opère un groupe d'isométries du plan.

L'observation du présent pavage fait apparaître des translations, des réflexions, des symétries centrales (demi-tours), des rotations d'angle droit (quarts de tour)… D'où l'idée de se demander quel est le groupe d'isométries qui se trouve à la base de cette mosaïque. Un théorème (dû à Barlow) dit qu'il n'y a que 5 types de pavage ne contenant pas de réflexions (et donc composés uniquement de rotations et de translations) ; comme ce n'est pas le cas de notre mosaïque, nous nous trouvons en présence de l'un des 12 autres types.

La présence de rotations d'un quart de tour et la consultation de la liste des 12 types de pavage (par exemple dans [Budden 1976] pp. 536-543) ne nous offre plus qu'une seule possibilité : *il s'agit du groupe engendré par une réflexion et un quart de tour*.

Remarque. On peut être intrigué par le fait qu'il n'y ait ni demi-tour, ni translation parmi les générateurs. Pour ce qui est des demi-tours, on voit immédiatement qu'on les obtient en composant deux quarts de tour, mais pour les translations ?

Considérons donc une réflexion s d'axe D et un quart de tour r (direct, pour fixer les idées), de centre O non situé sur D (*fig. 3*). Nous avons, bien entendu, $s \circ s = i$ (identité du plan), et, comme nous venons de le remarquer, $r \circ r = S_O$ (demi-tour de centre O). En nous référant aux notations de la *fig. 3* et en notant s_k la réflexion par rapport à la droite notée k ($k = 1, 2, \ldots, 5$), nous avons également : $r\circ s = s_2\circ s_1\circ s = s_2\circ t_{2\overrightarrow{IO}}$, d'où : $s\circ r\circ s = s\circ s_2\circ t_{2\overrightarrow{IO}} = s_2\circ s_5\circ t_{2\overrightarrow{IO}}$, et finalement $r\circ s\circ r\circ s = s_3\circ s_2\circ s_2\circ s_5\circ t_{2\overrightarrow{IO}} = s_3\circ s_5\circ t_{2\overrightarrow{IO}} = t_{2\overrightarrow{KI}}\circ t_{2\overrightarrow{IO}} = t_{2\overrightarrow{KO}}$.

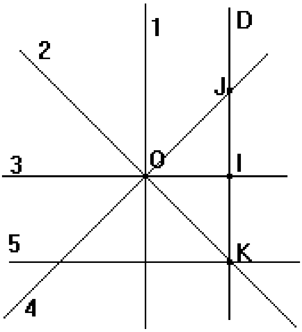


fig. 3

On a donc $(r\circ s)^2 = t_{2\overrightarrow{KO}}$.

De même, on démontre que $(s\circ r)^2 = t_{2\overrightarrow{OJ}}$.

Et, par composition de ces deux résultats :

$(r\circ s\circ r)^2 = t_{2\overrightarrow{KO}}\circ t_{2\overrightarrow{OJ}} = t_{2\overrightarrow{KJ}} = t_{4\overrightarrow{IJ}}$.

On obtient de même $t_{4\overrightarrow{OI}}$, par exemple à partir de $t_{2\overrightarrow{OJ}}\circ t_{2\overrightarrow{OK}}$.

Nous trouvons donc bien des translations comme éléments du groupe, translations dont les vecteurs sont colinéaires aux côtés et aux diagonales des carrés de base

Bien entendu, il n'y a pas unicité de la paire d'isométries engendrant ce groupe : ainsi, nous pouvons prendre comme centre de la rotation le centre de n'importe quel carré du motif ; et, en ce qui concerne la réflexion, tout axe de symétrie d'un losange tronqué conviendra également.

Il reste alors à déterminer une *région fondamentale*, c'est-à-dire une portion de plan contenant une partie du motif qui, lorsqu'on fera opérer sur elle le groupe d'isométries défini ci-dessus, engendrera le pavage du plan et la mosaïque.

Il n'y a pas non plus unicité d'une telle région, même à une isométrie près. On peut par exemple prendre celle qui est représentée sur la *fig. 4a,* où O est le centre du quart de tour générateur et (BC) l'axe de la réflexion génératrice.

Elle est constituée d'un « double carré » BCDF auquel est accolé un petit carré OAFE (AF = ½FB). La partie du motif intérieure à cette région comprend (en appelant I et L les milieux respectifs de [BC] et [DF] :

- la diagonale [AE] du petit carré
- le segment [IJ], où J est le milieu de [BF]
- le segment [IK], où K est le milieu de [DL]
- le demi-cercle (c) de diamètre [BC] intérieur à la région
- le cercle (C) de diamètre [IL].

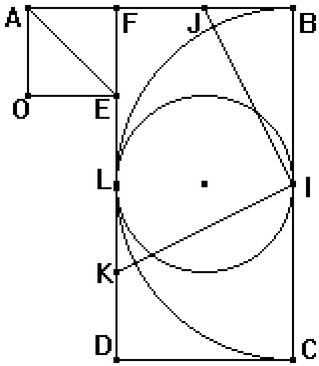


fig. 4a

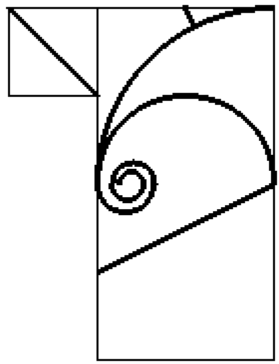


fig. 4b

(On constate ainsi que le motif se construit facilement à la règle et au compas.)

Certaines parties de ce motif sont ensuite effacées ; ce sont :

- la partie de [IJ] intérieure au cercle (C)
- les parties de cercles (C) et (c) intérieures au carré CDLI.

Enfin, une spirale est ajoutée en L, et on obtient alors la *fig. 4b*.

Sur la *fig. 5* est représentée l'orbite de cette région fondamentale par action du sous-groupe des puissances de r (constitué de i, r, r^2 et r^3), orbite soumise ensuite à l'action du sous-groupe des puissances de s (qui se réduit à i et s).

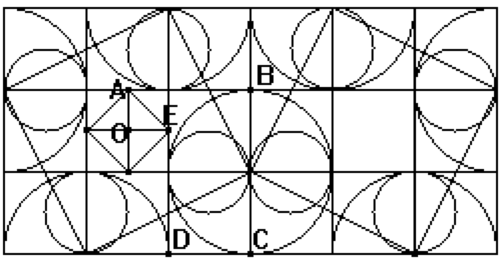


fig. 5

Si maintenant on fait de nouveau agir les puissances de r sur l'ensemble précédent, on obtient la *fig. 6*, et on voit qu'on remplit ainsi progressivement tout le plan (mais ce n'est là qu'une possibilité de progression parmi d'autres).

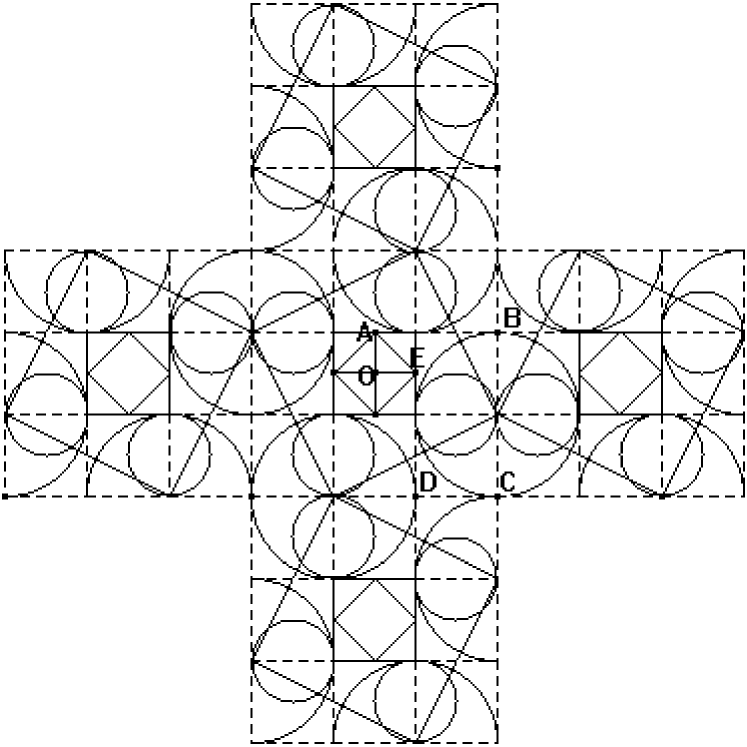


fig. 6

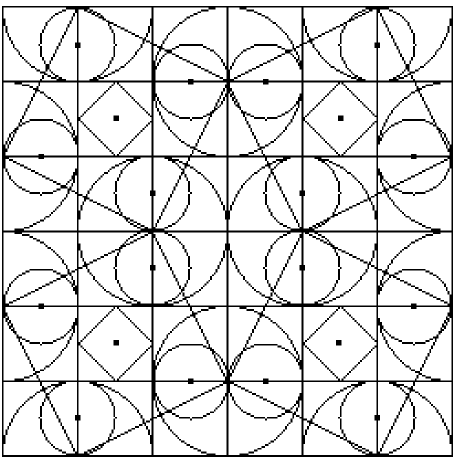


fig. 7

Cependant, les auteurs de cette mosaïque n’ont certainement pas eu la même approche. On peut penser que la réalisation du schéma directeur ne s’est pas appuyée sur la recherche d’un motif minimal, mais plutôt sur un réseau à mailles carrées, et un motif de base –réalisé à la règle et au compas– obtenu par exemple à partir d’un carré constitué de 6×6 carrés élémentaires, comme sur la *fig. 7*.

On avait alors le dessin définitif après :

1° *itération* de la même opération, après translations de vecteur $4\overrightarrow{OI}$ et de vecteur $4\overrightarrow{OJ}$ (mises en évidence plus haut), c'est-à-dire de 6 carreaux selon les deux directions du maillage ; 2° *effacement* de certains traits ;

3° adjonction des petits *motifs spiralés* (volutes) aux extrémités des peltes ;

4° dessin d'un *motif* à l'intérieur des losanges tronqués.

N.B. Il était également possible de partir d'un rectangle de 3×6 carrés élémentaires, complété par symétrie.

Quoi qu'il en soit, la réalisation du canevas d'une telle œuvre, à laquelle le qualificatif de « géométrique » pourrait donner une connotation péjorative, n'allait pas de soi et nécessitait un savoir-faire certain. Peut-on alors imaginer que les mosaïstes de l'époque disposaient d'un répertoire de modèles (sous forme de carnets, comme ceux de Villard de Honnecourt ?) reproduisant un certain nombre de types de pavages géométriques, et dans lequel ils pouvaient puiser, introduisant éventuellement des variantes dans le motif original ? C'est une question à laquelle seuls les archéologues pourraient répondre…

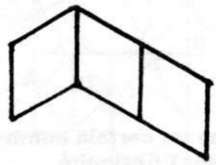
Bibliographie

Budden, F.J. (1976) : *La fascination des groupes*. Ed. OCDL, Paris.

LES NEUF TRILOSANGES
(suite)

L'article paru dans notre dernier numéro comptait deux erreurs.

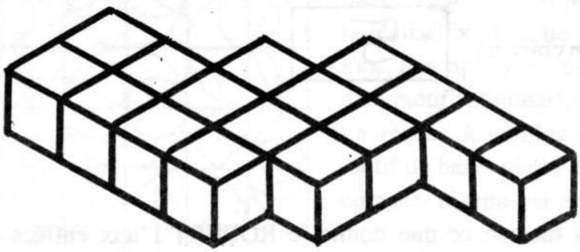
Tout d'abord, sur les 9 trilosanges dessinés, deux étaient identiques (ceux de gauche).
Voici le neuvième, qui manquait :



Ensuite, parmi les problèmes proposés dans cet article, 1e deuxième a dû paraître bien mystérieux !
Deux mots ont, en effet, disparu lors de la frappe de l'article...

Il fallait lire :
Quel est le plus grand <u>assemblage plat</u> (voir exemples 1, 2 et 3 de la page centrale) représentable avec les neuf trilosanges ?

A titre de *dédommagement,* voici le plus grand actuellement trouvé au collège de Saint-Mihiel ; il représente 16 cubes :



Mais en existe-t-il un plus grand ?

François DROUIN

ÉVALUATION SIXIEME

Voici un extrait de la page 3 du document d'évaluation (classe de sixième) utilisé à la rentrée 1994.

Puisque notre ministre fait porter ses efforts sur la bonne utilisation de notre langue française, nous le soumettons à votre sagacité :

Exercice 2

Ne rien écrire dans la colonne

Voici un tableau qui te donne un certain nombre d'informations sur le travail du paysan égyptien dans l'Antiquité.

SAISONS	JUILLET à OCTOBRE	NOVEMBRE à MARS	AVRIL à JUIN
ÉTAT DU FLEUVE	le Nil déborde	le Nil retrouve son lit	
TRAVAUX EFFECTUÉS PAR LE PAYSAN	- pêche - chasse	- labours - semailles (blé, orge, lin)	- récoltes (blé, orge, lin)
OUTILS UTILISÉS PAR LE PAYSAN	- harpon - filet - lance - bâton	- pioche en bois - charrue en bois	- faucille - grand panier

(…)

2. Quel est le nombre de travaux effectués par le paysan égyptien durant l'année ?

Réponds par un chiffre : 5

1 2 9 0
7

Mais regardons un peu ce que donne le ROBERT 1 aux entrées « CHIFFRE » et « NOMBRE » :

NOMBRE [nɔ̃bʀ(ə)]. *n. m.* (déb. XIIe ; lat. *numerus*).
I. ♦ 1° *Sc.* Concept de base des mathématiques, une des notions fondamentales de l'entendement que l'on peut rapporter à d'autres idées (de pluralité, d'ensemble, de correspondance), mais non définir. *À l'origine, et dans le cas le plus simple des nombres naturels* (1, 2, 3, 4...) : symbole caractérisant une unité ou une collection d'unités considérée comme une somme. *Caractère servant à représenter les nombres.* V. **Chiffre.** *Le nombre 1, le nombre 3. Le nombre, base de la mesure* (V. **Quantité**). *Système de nombres.* V. **Numération.** *Nombres entiers. Nombres arithmétiques*, non affectés d'un signe (+ ou —), définissant une grandeur non orientée, par oppos. à *algébriques. Nombres entiers qualifiés ou relatifs : nombres positifs et négatifs. Nombres fractionnaires décimaux, rationnels, irrationnels. Nombre algébrique*, racine réelle d'une équation algébrique à coefficients entiers ; *nombre transcendant*, non algébrique (*le nombre* π = 3,14159 ; *le nombre e* = 2,71828). *Nombres incommensurables*. Nombres réels, imaginaires*, complexes. — Nombre cardinal*, ordinal*. Nombres pairs, impairs. Nombres binaires, ternaires. Nombres premiers*. Puissance, racine d'un nombre. Élever un nombre au carré. Extraire la racine d'un nombre. Fonction*

CHIFFRE [ʃifʀ(ə)]. *n. m.* (XVe, « écriture secrète » ; *cifre*, 1220 ; lat. médiév. *cifra* « zéro », de l'arabe *sifr* « vide », *ch-* d'apr. it. *cifra*).
I. ♦ 1° Chacun des caractères qui représentent les nombres. *Les chiffres arabes* (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0). *Les chiffres romains* (I, V, X, L, C, D, M). *Un nombre de deux, de trois, de plusieurs chiffres. Écrire un nombre en chiffres ou en lettres. Aligner des chiffres.* V. **Calculer.** — Par ext. *Les chiffres, la science des chiffres.* V. **Mathématique(s) ; arithmétique, calcul.** ♦ 2° *Cour.* Nombre représenté par les chiffres. V. **Nombre.** *Le chiffre des dépenses.* V. **Montant, somme, total.** *En chiffres ronds. Le chiffre des naissances, des décès, de la population. Chiffre exprimant un rapport.* V. **Indice, taux.** — Comm. *Chiffre d'affaires*, total des ventes effectuées pendant la durée d'un exercice commercial. *Taxe sur le chiffre d'affaires. Faire du chiffre*, avoir une politique d'augmentation du chiffre d'affaires. ♦ 3° Entrelacement de lettres

On y retrouve bien sûr pour « CHIFFRE » le sens courant de « *Nombre représenté par des chiffres* »…

… mais HACHETTE, dans son **Dictionnaire des difficultés de la langue française**, nous met bien en garde contre de telles utilisations :

— **Chiffre - nombre.** Un *chiffre* est chacun des signes qui expriment un nombre : *Le nombre 526 s'écrit avec les chiffres 5, 2 et 6.* C'est aussi, par extension, le montant, la valeur d'une chose : *Evaluer le chiffre de dépense. Chiffre d'affaires.*
On évitera donc des expressions comme : *Le chiffre des naissances s'élève graduellement* (pour *le nombre*).

A.P.M.E.P. LORRAINE

JOURNÉE RÉGIONALE
DES MATHÉMATIQUES

C.R.D.P. DE NANCY,
MERCREDI 18 JANVIER 1995

INFORMATIONS COMPLÉMENTAIRES
SUR LES ATELIERS

Chaque participant à cette journée devra choisir un atelier pour la première plage horaire (9 h 10 à 10 h 40) et un autre atelier pour la seconde plage horaire (10 h 50 à 12 h 20). La liste des ateliers se trouve à la page suivante.

Une fois ce choix fait, et uniquement si vous vous êtes déjà inscrit à la Journée, indiquez ce choix à Michèle FABREGAS

- de préférence par courrier, 4 rue de Foës, 57070 METZ ;
- sinon par téléphone (87 36 25 30 ; répondeur).

LISTE DES ATELIERS :

A1. (9 h 10) L'UTILISATION DE L'ORDINATEUR DANS LA DÉMONSTRATION MATHÉMATIQUE (animé par l'équipe du Centre de Ressources Informatiques).

A2. (9 h 10) EXPLOITATION EN CLASSE DE JEUX ET DE CASSE-TÊTES (animé par François DROUIN et Marie-José BALIVIERA).

A3. (9 h 10) LES MATHÉMATIQUES EN I.U.T. Quelques exemples, et quelques idées sur le "genre" de mathématiques que l'on pratique au département Statistiques (animé par Daniel VAGOST).

A4. (9 h 10) L'ÉVALUATION DES PROGRAMMES DE PREMIÈRE : résultats de EVAPM1/92 (animé par Michel BARDY).

B1. (10 h 50) APPORT DE L'OUTIL INFORMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES : quelques exemples au niveau Lycée (par Christel PRAVDA de STAROV, équipe IREM).

B2 (10 h 50) LES MATHÉMATIQUESS A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE : quelques exemples d'activités intéressant aussi bien les collègues du collège que ceux de l'école élémentaire (animé par Jacqueline EURIAT).

B3 (10 h 50) HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES : l'évolution du dessin dans les ouvrages de géométrie de l'espace du XVIIe siècle à nos jours (animé par Bernard PARZYSZ).

B4. (10 h 50) L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN RUSSIE (animé par Jacques VERDIER et Michèle FABREGAS).

Problème n°40 de décembre 1994

proposé par Michel **Bonn** (Vandœuvre-les-Nancy)

Un physicien (nul n'est parfait) dispose d'une réserve contenant une infinité de résistances égales, d'une valeur de 1 Ω chacune.

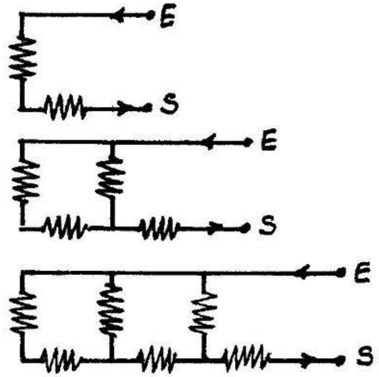
Etant infiniment désœuvré, il s'amuse à construire des circuits électriques selon le calendrier suivant :

premier jour :

deuxième jour :

troisième jour :

et ainsi de suite...



Comme c'est un physicien extrêmement scrupuleux, il note chaque jour (dans un cahier infiniment épais) la résistance du circuit obtenu.

Au bout d'une infinité de jours, il s'aperçoit qu'il est toujours aussi désœuvré, puisque la valeur affichée par son ohmmètre est toujours la même.

Questions :

1° Pouvez-vous expliquer comment ont varié les relevés jour après jour, et identifier la valeur « finale » ?

2° Si le cœur vous en dit, pouvez-vous envisager une généralisation permettant par exemple d'obtenir pour cette valeur n'importe quel nombre fixé à l'avance ?

Envoyez vos solutions à Bernard PAZRZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

Rappel : problème du trimestre n°39 de septembre 1994

La « tourniquette »

Sur une conique (***C***) on choisit quatre points **quelconques** A_0, A_1, A_2 et A_3. On construit les points A_4, A_5 et A_6 (***C***) de façon à avoir $(A_3A_4)//(A_0A_1)$, $(A_4A_5)//(A_1A_2)$ et $(A_5A_6)//(A_2A_3)$. Montrer que A_6 est alors confondu avec A_0.

Notre objectif était de trouver le plus grand nombre de solutions pour ce problème « classique », y compris des solutions « partielles » valables pour tel ou tel cas, et « faisables » en sections scientifiques de lycée. Comme nous n'en avons reçu que très peu, nous renouvelons notre demande… En espérant cette fois un abondant courrier.
Envoyez vos solutions à Bernard PAZRZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

COMITE DE LA REGIONALE LORRAINE

APPEL A CANDIDATURE

Lors de l'Assemblée Générale de la Régionale A.P.M.E.P. de Lorraine, le 18 janvier 1995 au C.R.D.P. de Nancy, le Comité Régional sera renouvelé.

Nous **lançons un appel à candidatures pour le renouvellement de ce Comité :**

Que tous ceux qui sont un tant soit peu militants de l'Association n'hésitent pas...la charge de travail n'est pas extrêmement lourde : environ 5 réunions par an, **pour décider des directions à prendre et des actions à entreprendre ;** plus si vous désirez vous investir davantage.

Faites-vous connaître par avance auprès de Michèle Fabregas ; mais vous pourrez encore vous décider au dernier moment, c'est à dire le 18 janvier dans l'après-midi.

SOMMAIRE

LE PETIT VERT n° 40
(BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt legal : 1994
Imprimé au siège de l'Association :
IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à 500 exemplaires

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F
L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :
ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)