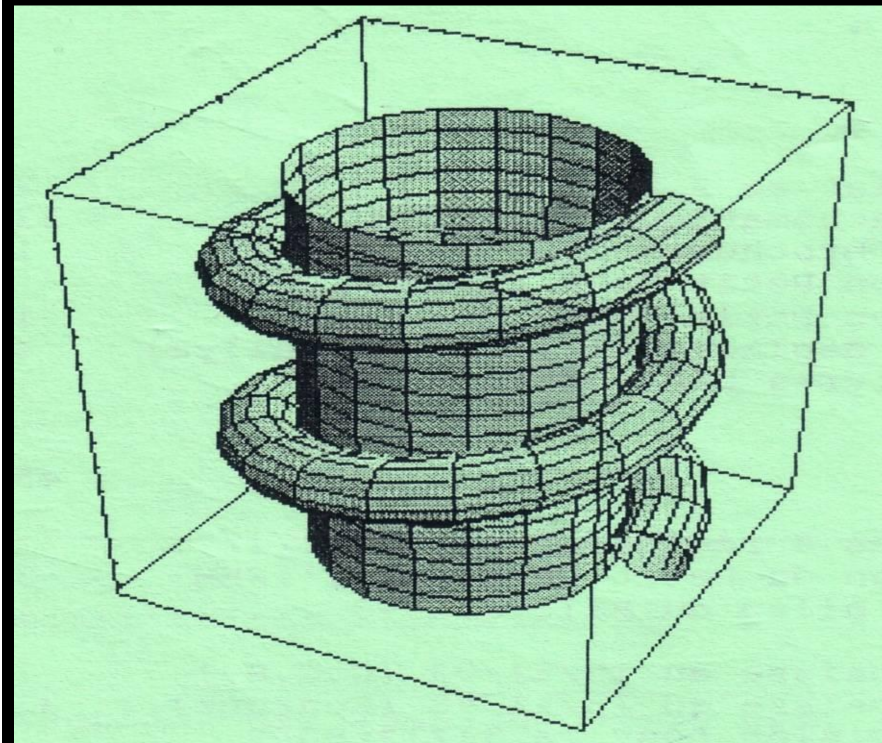
LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA REGIONALE LORRAINE DE L'APMEP

N° 36	DÉC. 1993	Abonnement 4 nos par an : 30 F



BILAN FINANCIER DE LA REGIONALE LORRAINE
ANNEE 1993
(provisoire au 24/11/93)

Recettes :

Cotisations (ristourne nationale)	7 414,00
Rallye mathématiques (C.C.S.T.I. et inscriptions)	39 200,00
Vente de brochures	9 503,50
Intérêts compte épargne	731,51
Abonnements au Petit Vert	480,00
TOTAL	**57 329,01**

+ Subvention rectorale pour le Rallye (en attente) : 3 000,00

Dépenses :

Secrétariat et P.T.T.	2 849,76
Rallye mathématique (lots)	33 751,27
Achat de brochures	1 474,10
Impression Petit Vert 1993	
Expédition Petit Vert	1 689,10
Frais de d,placement (Comité, Rallye)	4 750,00
Achats livres bibliothèque	660,00
TOTAL	**45 174,23**

+ Factures à régler avant le 31/12 :
Impression du Petit Vert par l'IREM
Brochure bilan du Rallye 1993 .... 3 750,00

En caisse au 15/11/93 (C.C.P.)	**7 247,19**
En caisse au 15/11/93 (Epargne)	**33 279,28**

Le compte financier a été approuvé lors de l'Assemblée Générale du 14/11/93.

Tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes

Successivement, les journées nationales et la journée régionale nous permirent de nous retrouver, d'échanger des idées... Nous en sommes revenus enthousiastes. Cela fait du bien au moral de rencontrer des collègues qui veulent faire vivre les mathématiques de manière attrayante pour nos élèves. Mais... l'on n'y a pas appris grand chose au sujet de l'avenir du lycée. C'est le flou.

Nous avons cru comprendre qu'actuellement, on se préoccupait des problèmes du collège, "maillon faible" du système éducatif. Et l'avenir de nos élèves de seconde et de première ???

Afin de mener une réflexion beaucoup plus sérieuse que les précédentes, Monsieur le Ministre a consulté les collègues et les parents d'élèves concernés. Une commission "Bouchez" analysera vos propositions et écrira un livre blanc. Nous pouvons toujours envoyer nos suggestions jusqu'au 15/12/93 par minitel (36 14 Edutel code NCPT). De plus, une mission "nouveau collège pour tous" sillonne actuellement notre pays... Elle organisera dans notre académie, le 17/01/94, une ou plusieurs réunions. Qui rencontrera-t-elle? Nous avons sûrement quelque chose à dire dans notre régionale. Mobilisons-nous !

En janvier ou en février, toutes vos propositions auront été analysées. Des mesures vont être prises. A la même période, vous verrez sûrement sur vos écrans de télé notre cher Ministre expliquer, face à des enseignants très représentatifs, son programme (comme lors d'une émission de FR3 interactive pendant laquelle le public a pu poser des questions à chaud à l'invité du jour : "Français, si vous parliez", enregistrée le 25 novembre 1993 !).

Le lycée... on l'oublie ! Qu’allons-nous dire aux milliers d'élèves de seconde que nous devons conseiller dans leurs choix de série ? Lisez le B.O.E.N. du 23/09/93 : les coefficients du bac 95 sont parus. Les finalités de chaque série dépendent- elles de ces fameux coefficients ? Les modalités des épreuves ? Les contenus des programmes que nous devrons enseigner en septembre 94 en première et en terminale ? C'est le grand mystère...

Personne ne se presse ! Il existe déjà des avant-projets des programmes de terminale. Un groupe de réflexion doit se mettre au travail... Au dernier moment, nous découvrirons des programmes provisoires qui auront un air de famille avec ceux que nous connaissons et qui seront prorogés d'année en année en attendant que l'on se mette sérieusement au travail.

Et nous, en bons fonctionnaires, nous devrons appliquer ces directives qui viendront d'être prises… avec toutes les précautions nécessaires.

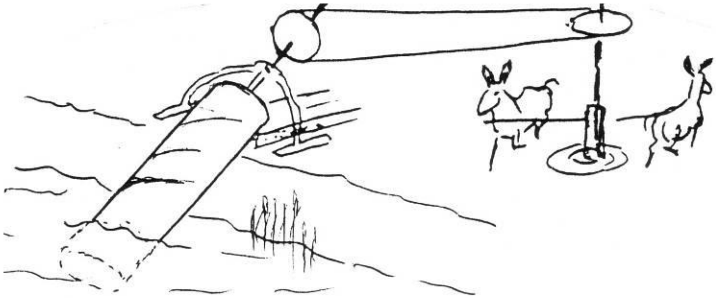
Michèle Fabrégas

Hélice et vis d'Archimède

par André Viricel
(Villers les Nancy)

Merci à Michel Véry,
du lycée Arthur Varoquaux,
qui a réalisé les dessins
techniques avec le logiciel
"Mathematica".

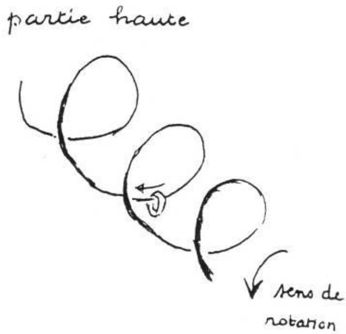
Faire passer de l'eau à un niveau plus élevé a toujours été un problème pour les gens des latitudes inférieures à 40°.
Archimède (287-212 avant J.-C.) a donné la solution suivante, appelée maintenant VIS D'ARCHIMEDE.



Un cylindre, dont l'axe est oblique, contient une cloison hélicoïdale. Il trempe dans l'eau à sa partie inférieure. On le fait tourner, et l'eau monte à sa partie supérieure. Une petite expérience nous permet de comprendre le pourquoi de cette ascension.

L'expérience

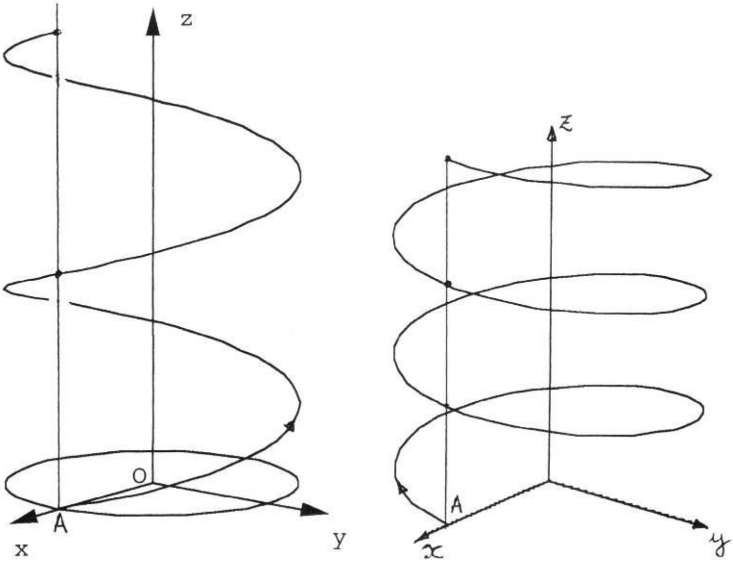
Sur un manche à balai cylindrique, on enroule un fil de cuivre (dans le sens indiqué par la figure). On retire l'hélice obtenue de son support, et on fait tourner le cylindre dans le sens indiqué :



L'anneau, qui n'écoute que la pesanteur, descend l'arc sur lequel il est posé, donc va vers notre gauche.
Mais (miracle !) il s'éloigne de nous et va donc vers le haut. Il grimpe spire après spire jusqu'à sa libération quand il atteint le bord supérieur du cylindre (qui n'est pas, remarquez-le, le point le plus haut de l'ensemble).

Le dessin en perspective

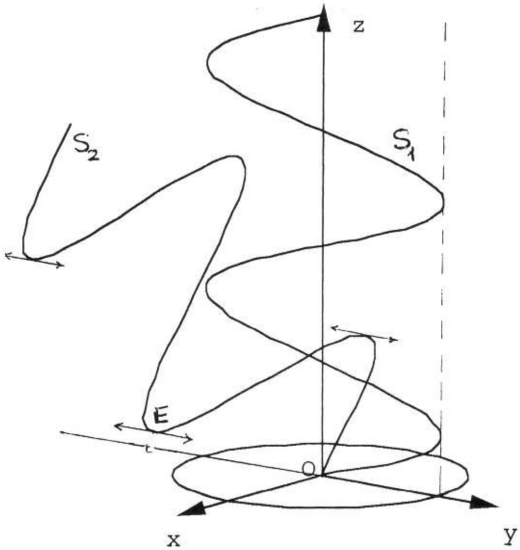
Voici, dessinées, deux hélices. Ici, le point A se déplace dans le sens des aiguilles d'une montre :



On fait basculer la figure (cylindre porteur et hélice) autour de AA' d'un certain angle α (ici 45°).
Dans le plan YOZ on peut voir :

- la projection de l'hélice, qui est une sinusoïde (S_1),
- la projection de l'hélice obtenue après basculement de la précédente, qui est aussi une sinusoïde (S_2)

Ce dessin suffit à faire comprendre où sont les points de l'hélice à tangente horizontale (en E par exemple) :



Un point matériel M (soumis à la pesanteur) astreint à rester sur l'hélice s'arrête donc à ce point E.
Quand le cylindre porteur tourne, la sinusoïde (S_1) "monte" suivant la direction OZ, et la sinusoïde (S_2) glisse entre deux parallèles. Le point E suit la sinusoïde (S_2) dans son mouvement de translation : le point E monte le long d'une génératrice.
Jusqu'où ?
Jusqu'au point où cette génératrice rencontre le bord supérieur du cylindre.

Écrivons quelques équations

Un point M(x,y,z) du cylindre vertical de rayon r se projette en m sur le plan horizontal XOY ; soit t l'angle (OX,Om) ; soit p le pas de l'hélice.

L'équation de l'hélice est donc : $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = \dfrac{pt}{2\pi} \end{cases}$

On cherche maintenant la nouvelle équation de la courbe, après rotation d'angle α autour de OX :

$$\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\cos\alpha\sin t - pt\sin\dfrac{\alpha}{2\pi} \\ z = r\sin\alpha\sin t + pt\sin\dfrac{\alpha}{2\pi} \end{cases}$$

Il importe de savoir les points où la tangente est horizontale :

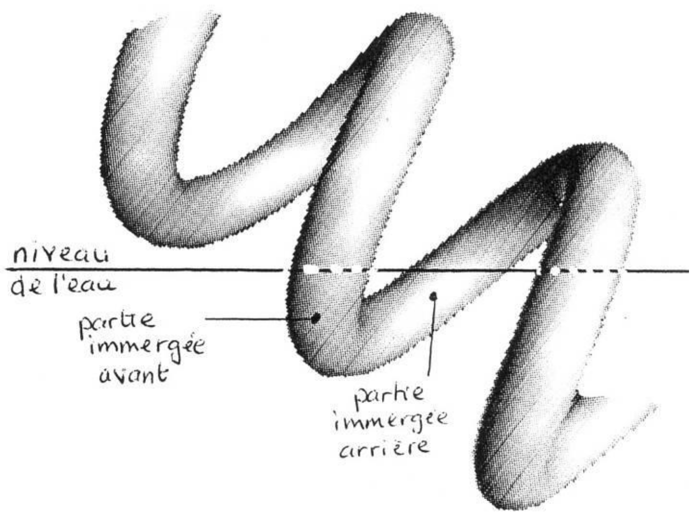
$\dfrac{dz}{dt} = r\sin\alpha\cos t + p\cos\dfrac{\alpha}{2\pi}$, qui s'annule pour $\cos t = -\dfrac{p\cos\alpha}{2\pi r\sin\alpha}$;

on remarque qu'on n'a de solutions que si $p < 2\pi r\tan\alpha$ (c'est à dire si le pas de l'hélice n'est pas trop grand par rapport au rayon).

Dans le cas d'une inclinaison à 45*, les points à tangente horizontale correspondent à $\cos t = -\dfrac{p}{2\pi r}$.

Avec un tuyau

Voici à quoi cela correspond lorsque l'hélice est un véritable tuyau, et non plus filiforme ; et rien n'empêche de mettre plusieurs tuyaux accolés, pour y gagner en efficacité :



Ci-dessus, l'hélice d'Archimède (à l'intérieur du cylindre porteur).
En page de couverture, le tuyau enroulé autour se son cylindre porteur

■

Un problème posé par FERMAT à TORRICELLI

Par Jean-Marie DIDRY

Soit A, B, C des points deux à deux distincts d'un plan euclidien.
La fonction f définie dans-ce plan par f (M) = MA + MB + MC admet-elle un minimum et en quel(s) point(s) ?

La réponse à cette question est bien connue :

> **Cas (1)** : si l'un des trois angles de la figure vaut au moins 120°, par exemple BAC, f(M) > f(A) pour tout point M du plan distinct de A.
>
> **Cas (2)** : sinon, f(M) > f (T) pour tout point M distinct de T, point de TORRICELLI du triangle ABC (définition de T et propriétés en annexe).

Une solution de ce problème consiste à mettre en évidence une ligne brisée d'extrémités fixes et de longueur f(M) (pour une rédaction détaillée, voir par exemple : Yvonne et René SORTAIS, *La géométrie du triangle*, Éd. Hermann).

Dans un article paru dans l'Ouvert n° 53, Jacques DAUTREVAUX utilise le théorème de PTOLÉMÉE pour traiter le cas (2) ; le cas (1) y est également examiné en détail.

D'autres points de départ (dans le cas (2)) sont recensés dans : Ross HONSBERGER, *Joyaux mathématiques*, vol. 1, Cédic. On y trouve en particulier la solution donnée par TORRICELLI qui s'appuie sur le théorème de VIVIANI (la somme des distances d'un point M intérieur à un triangle équilatéral à ses côtés. est constante).

La solution exposée ici utilise l'inégalité suivante :

Soient O et N deux points distincts. Alors, pour tout point M du plan,

$$\mathrm{MO} - \mathrm{NO} \geq \overrightarrow{\mathrm{MN}}.\frac{\overrightarrow{\mathrm{NO}}}{\mathrm{NO}},$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si M appartient à la demi-droite [ON).

En effet, pour N ≠ O :

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}.\frac{\overrightarrow{\mathrm{NO}}}{\mathrm{NO}} = (\overrightarrow{\mathrm{MO}} + \overrightarrow{\mathrm{ON}}).\frac{\overrightarrow{\mathrm{NO}}}{\mathrm{NO}} = \overrightarrow{\mathrm{MO}}.\frac{\overrightarrow{\mathrm{NO}}}{\mathrm{NO}} - \mathrm{NO} = \begin{cases} \mathrm{MO} - \mathrm{NO} \text{ si } \mathrm{M} = \mathrm{O} \\ \mathrm{MO}\cos \mathrm{MON} - \mathrm{NO} \text{ si } \mathrm{M} \neq \mathrm{O} \end{cases}$$

Preuve du cas (1) :

Partons des inégalités $\mathrm{MB} - \mathrm{AB} \geq \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$ et $\mathrm{MC} - \mathrm{AC} \geq \overrightarrow{\mathrm{MA}}.\frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathrm{AC}}$.

Si A ∈ [BC]\{B,C}, $\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\mathrm{AC}} = \vec{0}$ et donc f(M) ≥ MA + f(A).

Si A ∉ [B,C], l'hypothèse sur BAC montre que A ∉ (BC) et ainsi [BA) ∩ [CA) = {A}. Pour M ≠ A, l'une des deux inégalités de départ est stricte, de sorte que :

$$f(M)-f(A) > MA - \overrightarrow{MA}.\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right)$$

Mais $\cos \widehat{BAC} \leq -\frac{1}{2}$, d'où $\left\|\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right\| \leq 1$ et $\overrightarrow{MA}.\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}+\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}\right) \leq MA$.

Preuve du cas (2) :

Le point de TORRICELLI du triangle (voir définition et propriétés en annexe) est alors strictement intérieur au triangle et vérifie $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120°$.

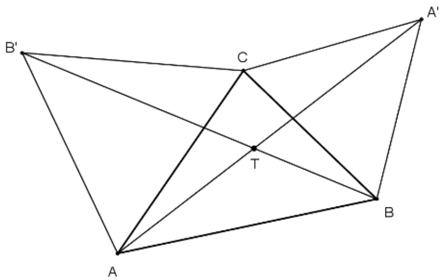
D'où : $\left\|\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}\right\|^2 = 3+2\left(\cos \widehat{ATB}+\cos \widehat{BTC}+\cos \widehat{CTA}\right)=0$.

Puisque $[AT) \cap [BT) \cap [CT) = \{T\}$, pour M distinct de T, l'une des inégalités $MA - TA \geq \overrightarrow{MT}.\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}$, $MB - TB \geq \overrightarrow{MT}.\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}$, $MC - TC \geq \overrightarrow{MT}.\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}$ est stricte, et ainsi $f(M)-f(T) > \overrightarrow{MT}.\left(\frac{\overrightarrow{TA}}{TA}+\frac{\overrightarrow{TB}}{TB}+\frac{\overrightarrow{TC}}{TC}\right)$.

Le second membre de cette dernière inégalité étant nul, (2) est établi.

ANNEXE : Point de TORRICELLI d'un triangle ABC

Soit ABC un triangle, A' le point séparé de A par (BC) et tel que le triangle BA'C soit équilatéral, B' le point séparé de B par (AC) et tel que le triangle CB'A soit équilatéral :



Par rotation de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA'})$, B a pour image A', et B' a pour image A.

Donc $(\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA'})$. Ainsi les droites (AA') et (BB') sont sécantes.

Nous appellerons point de TORRICELLI du triangle ABC ce point d'intersection, et nous le noterons T.

Supposons désormais que les trois angles du triangle ABC soient strictement inférieurs à 120°. Dans ces conditions :

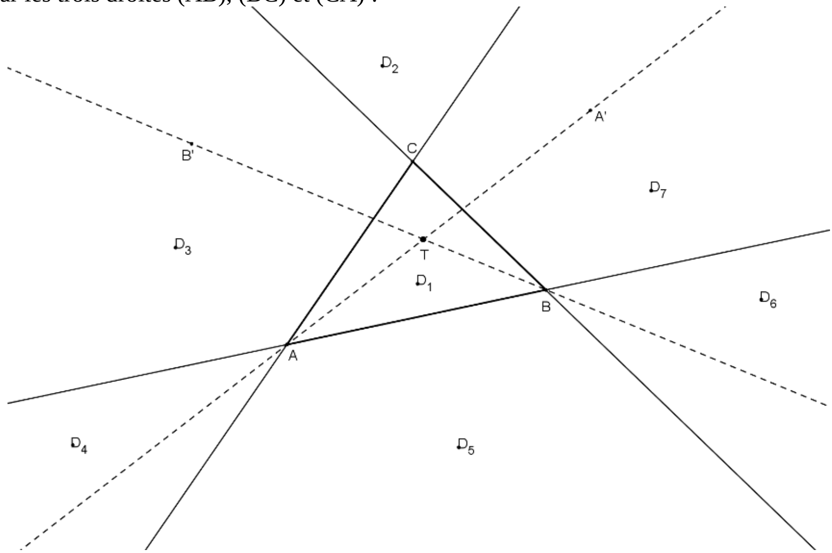
(1) T est strictement intérieur au triangle ABC ;

(2) $\widehat{BTC} = \widehat{CTA} = \widehat{ATB} = 120°$

(3) TA + TB + TC = AA'

Preuve de (1) :

Notons D_1, D_2, … D_7 les sept domaines convexes du plan (frontières comprises) définis par les trois droites (AB), (BC) et (CA) :



Les hypothèses de séparation faites sur A et A', B et B' et les hypothèses sur les angles tu triangle ABC assurent que T n'est pas sur les côtés du triangle ABC et que $(AA') \subset D_1 \cup D_4 \cup D_7$ et que $(BB') \subset D_1 \cup D_3 \cup D_6$.
Donc T est élément de D_1, et situé à l'intérieur du triangle.

Preuve de (2) :

Il résulte en particulier de (1) que $T \in [A,A']\backslash\{A,A'\}$ et que $T \in [B,B']\backslash\{B,B'\}$.
Donc $(\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TA'}) = (\overrightarrow{B'B},\overrightarrow{AA'}) = (\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA'})$.
Ainsi T est sur le cercle circonscrit au triangle équilatéral CBA' et, puisqu'il est séparé de A' par (BC), $CTB = 120°$.
De même $CTA = 120°$ et donc aussi $ATB = 120°$.

Preuve de (3) :

La médiatrice de [CA'] sépare C et A' et passe par B : elle sépare donc aussi T et A', de sorte que TA' > TC.
Il existe donc alors, entre T et A', un unique point T' tel que le triangle TT'C soit équilatéral.
La rotation de centre C qui envoie B sur A' envoie T sur T'. Donc TB = T'A'.
D'où : TA + TB + TC = AT + TA' + TT = AA'.

■

COMITE DE LA REGIONALE

Marie-José BALIVIERA, Tél. 29.41.16.07, resp. "Lycées Professionnels",Lycée Louis Geisler à Raon

Michel BARDY, Tél. 29.34.02.10, responsable "Second Cycle", Lycée Louis Lapicque à Epinal

Michel BONN, Tél. 83.53.26.34, resp. "Post-Bac" et Formation des Maîtres, U.F.R. Math. et Informatique à Metz

Jérôme CARDOT, Tél. 29.89.19.27, Collège Les Avrils à Saint-Mihiel

Roger CARDOT, Tél. 83.75.84.53, Trésorier adjoint, chargé de la vente des brochures, Lycée Stanislas à Villers-les -Nancy

Jean-Marie DIDRY, Tél. 83.56.92.38, Faculté des Sciences à Vandœuvre

Pierre DORIDANT, T,l. 29.82.41.04, Responsable du groupe "Jeux", Lycée J.-Ch. Pellerin à Epinal

Monique DORIDANT, Lycée Pierre Mendès-France à Epinal

François DROUIN, Tél. 29.89.06.81, responsable "Premier cycle", Collège Les Avrils à Saint-Mihiel

Jacqueline EURIAT, Tél. 29.35.71.77, vice-présidente, responsable du Rallye mathématique, I.U.F.M. site d'Epinal

Michèle FABREGAS, Tél. 87.36.25.30., présidente, Lycée Robert Schuman à Metz

André FRIRY, Tél. 29.65.11.87, trésorier, retraité

Marie-Claire KONTZLER, Tél. 87.92.83.07, Collège Fr. Rabelais à l'Hôpital

Pol LE GALL, Tél. 87.64.14.76, Lycée Julie Daubié à Rombas

Geneviève LEMERCIER, Tél. 83.98.74.50, secrétaire, retraitée

Bernard PARZYSZ, Tél. 87.75.19.26, I.U.F.M. Université de Metz

Daniel VAGOST, Tél. 87.73.09.31, secrétaire

I.U.T. département S.T.I.D. à Metz

Jacques VERDIER, Tél. 83.21.48.96, rédacteur en chef du "Petit Vert", Lycée Arthur Varoquaux à Tomblaine

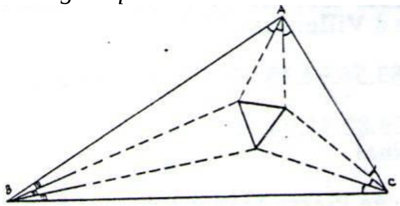
information

Le département S.T.I.D. de l'I.U.T. de METZ vous informe de sa semaine Portes Ouvertes (conférences, table-ronde sur les statistiques) du 24 au 29 janvier 1993. N'hésitez pas à venir

LU POUR VOUS

LE THEOREME DE MORLEY, par André VIRICEL, 113.
Edit, par l'A.D.C.S., BP22, 80002 AMIENS CEDEX
Pour la commande, envoyer un chèque de 110 F (port compris) à l'A.D.C.S.

Au début du vingtième siècle, Franck MORLEY énonçait le théorème suivant : *Les intersections des trisectrices intérieures (d'un triangle) "les plus proches des côtés" forment un triangle équilatéral* :



Comment se faisait-il qu'un résultat aussi simple n'ait pas été découvert plus tôt ? Et pourquoi se limiter aux trisectrices intérieures des angles ?

L'ouvrage écrit par André VIRICEL, adhérent et militant de notre Régionale Lorraine APMEP - il nous fournit souvent de beaux énoncés pour la rubrique problèmes - recueille toutes les démonstrations à ce jour connues de ce théorème : par la géométrie, par la trigonométrie, par l'analytique, dans le cas du théorème "simple", puis les démonstrations du théorème "généralisé" (si l'on ne se limite pas aux trisectrices intérieures, on définit 27 triangles de Morley associés à un triangle initial quelconque), le tout assorti d'une étude approfondie sur les trisectrices d'un triangle.

Bien sûr, comme c'est souvent le cas en mathématiques, la recherche de démonstrations d'une propriété a permis de découvrir d'autres propriétés (auxquelles on ne s'attendait pas, telle celle-ci : *La somme des carrés des distances du sommet A au 27 points de Morley du triangle vaut 162 R².*

Et pour aller plus loin encore : ces propriétés s'étendent-elles à la géométrie sphérique ? aux quadrisectrices ? aux plans trisecteurs d'un tétraèdre ? ...

Tout professeur de mathématique encore passionné par la géométrie "traditionnelle" se plongera avec délices dans les 178 pages - parfois denses - écrites par notre collègue sur ce thème.

J.V.

LE HASARD AU QUOTIDIEN, par José ROSE, 1993.
Editions du Seuil, collection Points-Sciences, 224 pages 10x18, prix Fnac : 34,20 F.

Distribué comme un jeu de cartes, ce livre pose 32 questions (au hasard ?), et les distribue en quatre "paquets" :

- Tout d'abord, les idées reçues, les intuitions erronées, les ambiguïtés de la loi des grands nombres, la finesse des notions d'indépendance et d'équiprobabilité.

- Ensuite, une réflexion sur la pratique des sondages (où on apprend que tirer au hasard ne signifie pas n'importe comment), et sur la notion de risque dans une estimation.

- Un troisième "paquet de questions" est consacré aux applications des probabilités : en gestion, en médecine, dans les sciences de la nature ... et même dans notre vie quotidienne.

- Enfin (voilà bien là une exclamation de matheux !) une présentation plus théorique de tous les concepts utilisés au fil des chapitres précédents, depuis la notion d'événement aléatoire jusqu'aux tests d'estimations, intervalles de confiance, différences significatives... pour terminer par une présentation de diverses conceptions du hasard.

Au fil de ce livre, qui se lit presque comme un roman, l'occasion d'aborder mille et une petites choses qui font ou défont notre quotidien (la formule est de José Rose).

A mettre entre toutes les mains (c'est à dire les nôtres, mais aussi celles de nos élèves de lycée, pour peu qu'ils soient un peu curieux, et avides de bon sens et/ou de paradoxes...).

J.V.

CAHIERS PEDAGOGIQUES, n° 316 de septembre 1993, 40 F.
Dépôt-vente au C.R.D.P. de Nancy, ou commande directe aux Cahiers Pédagogiques, 5 impasse Bon-Secours, 75543 PARIS CEDEX 11.

Ce "cahier" de 64 pages A4 est presque entièrement consacré au thème "**mathématiques et français**" (le langage mathématique, la lecture d'énoncés, l'écriture en mathématiques, etc.).

Comme toujours dans les Cahiers Pédagogiques, le dossier est composé d'une vingtaine d'articles (de 1 à 5 pages) sur le thème choisi. Quelques uns m'ont tout particulièrement intéressé : un inventaire des difficultés de lecture en mathématiques (par Danièle Fougère, professeur de français) ; les dérives d'un apprentissage systématique de la lecture d'énoncés (par Jean Julo, Université et IREM de Rennes) ; la narration de recherche comme outil d'apprentissage (par M.-Claire Lacombe, IREM de Montpellier) ; la démonstration comme texte argumentatif (par Jean Houdebine, IREM de Rennes).

Le fil directeur de tout ce dossier est la considération que les mathématiques sont un "langage fondamental", et les auteurs pensent qu'il est (socialement) primordial, à l'heure actuelle, de le maîtriser, aussi bien pour communiquer des savoirs que pour les créer.

J.V.

T.I.82 : MATHEMATIQUES AU LYCEE, par Daniel VAGOST et Jacques VERDIER. Editions Dunod-Technique, 1993, 158 pages.

Contrairement à beaucoup d'ouvrages sur les calculatrices, celui-ci ne propose pas aux élèves (ou aux professeurs) des programmes "clés en main" qu'il suffirait de recopier dans la mémoire de la calculatrice pour savoir tout faire (le jour de l'examen ?) ; il y a même fort peu de "programmes" dans cet ouvrage.

Les auteurs ont voulu montrer comment on pouvait utiliser les remarquables capacités de la T.I.82 (graphiques, tables de valeurs, statistiques...) pour résoudre les problèmes habituellement posés en classe au lycée, et pour créer de nouvelles pistes de recherche.

Alimenter le travail de recherche des élèves est un des points forts de ce livre : pourquoi ces deux fonctions, apparemment égales (graphiquement) ne semblent-elles pas donner la même limite à l'infini ? pourquoi la fonction sinus, sur certains intervalles, donne-t-elle des représentations graphiques aberrantes ? pourquoi, lorsque l'on ajoute une fonction du type "ax^2+bx+c" et une fonction du type "$mx+p$", la parabole résultante a-t-elle la même forme que celle de départ, alors que lorsqu'on ajoute une fonction du type "ax^3+bx^2+cx+d" et une fonction du type "$mx+p$", ça n'est plus du tout le cas ? pourquoi, lorsqu'on fait des opérations élémentaires sur certains nombres, la calculatrice donne-t-elle un résultat manifestement faux ?

Mais il n'y a pas que des situations "problématiques" dans cet ouvrage, loin de là : la plupart des activités "classiques" qui sont proposées aux élèves de lycée (analyse de fonctions, résolutions d'équations et de systèmes, calculs approchés, statistiques, suites numériques, probabilités et simulations) y sont abordées.

F.P.

■

Analyse du sujet de brevet (juin 1993)

Le sujet est conforme au programme et aux capacités exigibles en fin de troisième. Globalement, les énoncés sont clairement rédigés.

Cependant, l'exercice 2 des activités numériques a été très déroutant pour les raisons suivantes :
- énoncé présenté sur deux pages recto-verso (pourtant il y avait déjà 6 pages d'énoncés, et « on » aurait pu s'arranger autrement) ;
- situation artificielle, sans intérêt pour une lecture graphique ;
- axes ne portant aucune légende (x, ou nombre de fleurs...) ;
- repère non normé, d'où difficultés pour les équations des deux droites.

Les questions bien réussies dans l'ensemble sont les suivantes:
1° (trigonométrie), 2°a (théorème de Pythagore) et 4° (statistiques) du problème.

Les questions les plus mal réussies dans l'ensemble sont les suivantes :
Activités numériques, exercice 2 : aucun élève (sur 50 copies corrigées) n'a les deux équations de droites justes (II-1), et aucun ne traduit l'énoncé par une inéquation (II-2) ;
Activités géométriques, exercice 1, question 2 (image de ABC par la translation) : la difficulté semble venir de la façon dont est donné le vecteur de la translation ;
Activités géométriques, exercice 3 (géométrie dans l'espace) : beaucoup font des calculs inutiles ;
Problème : question 2-b (durée en minutes et secondes), question 3-a (réduction de 40% à traduire par 0,6*x*), question 3-c (très peu de mises en équation).

Autres remarques :
- le sujet est beaucoup trop long (il m'a fallu 25 minutes pour faire un brouillon non rédigé) ;
- la moyenne est comprise entre 7 et 8 sur 20 dans mon centre de correction.

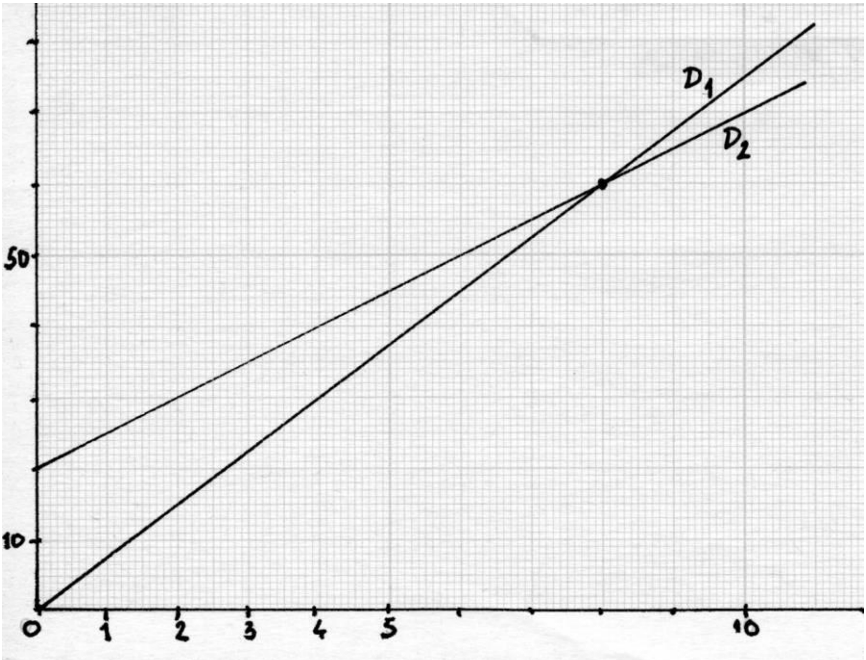
Marie-Claire KONTZLER,
avec l'aide d'un collègue correcteur

Extraits du sujet :

EXERCICE 2 : (8 points)

Marie veut acheter des fleurs et hésite entre deux possibilités :

1ère possibilité : elle achète un bouquet de lys
2ème possibilité : elle achète un vase garni de glaïeuls.
On désigne par x le nombre de fleurs achetées.
Les droites D_1 et D_2 dessinées ci-après permettent de connaître le prix que Marie devra payer selon qu'elle choisit respectivement la 1ère ou la 2ème possibilité.



I - Utiliser cette représentation graphique :
1) pour trouver le prix du vase.
2) pour déterminer le nombre de fleurs à partir duquel la 1ère possibilité est plus chère que la seconde.
II -
1) Ecrire les équations de D_1 et D_2.
2) Retrouver par le calcul le résultat de la question I - 2).

ACTIVITES GEOMETRIQUES

EXERCICE 1 (4,5 points)

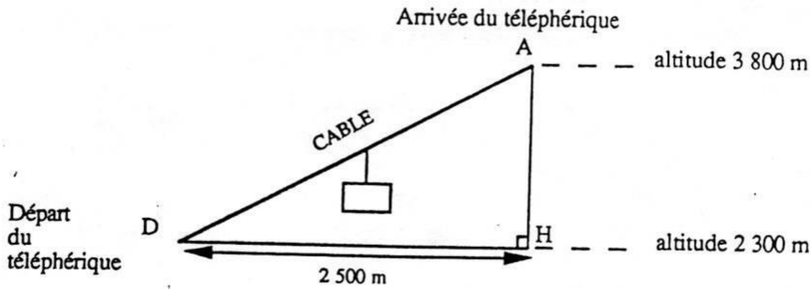
Soient A, B, C, trois points d'un plan muni d'un repère orthonormal :
A(- 1 ;2) B(-2;- 1) C (5 ; 0) -
1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
2) On déplace ce triangle par la translation de vecteur AM de coordonnées (-1 ; 4)
Les images respectives de A, B et C sont M, N et P.
Faire la figure. Lire sur la figure les coordonnées des points M, N et P.
Quelle est la nature du quadrilatère ABNM ? Justifier.

(…)

PROBLEME

***Les quatre questions sont** indépendantes*

Dans le massif du Mont-Blanc, le deuxième tronçon du téléphérique de l'Aiguille du Midi part d'une altitude de 2 300 m et arrive à une altitude de 3 800 m.
La distance à l'horizontale entre les deux gares est de 2 500 m. Le câble du téléphérique est supposé rectiligne et la situation est représentée par le schéma ci-dessous :



1) Calculer la pente du câble, c'est à dire la tangente de l'angle HDA , puis en déduire l'angle HDA .

2) a) Calculer la longueur AD du câble.
b) La vitesse de la cabine est de 5,5 m/s.
Quelle est la durée d'une montée en minutes et secondes ?

3) Soit *x* le prix du billet aller et retour pour un adulte.
a) Sachant qu'un enfant de moins de 12 ans bénéficie d'une réduction de 40 %, calculer en fonction de *x* le prix payé par un enfant.
b) Une famille est composée de 2 adultes et de 3 enfants de moins de 12 ans.
Exprimer en fonction de *x* le prix de revient du trajet aller et retour pour cette famille.
c) Cette famille s'est fixé un budget de 500 F. Quelle est la valeur maximum du prix *x* pour qu'elle puisse s'offrir l'excursion ?

(…)

BIBLIOTHEQUE DE LA REGIONALE

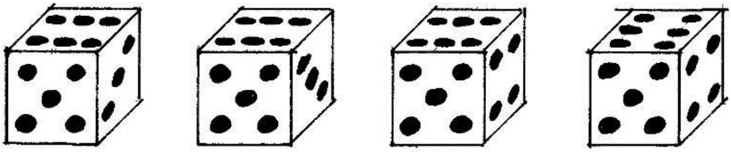
Pour tous renseignements, voir PETIT VERT n°33 de Mars 1993.

Nouvelle acquisition (septembre 1993) :

N°29. **La mathématique des jeux**, Bibliothèque "Pour la Science".
Les différentes facettes des mathématiques ludiques (statistiques, probabilités, théories de l'information, théorie des graphes...) appliquées … la plupart des jeux connus : bridge, tennis, morpion, solitaire, roulette, etc.
Et si après lecture vous ne gagnez toujours pas, peut-être saurez-vous mieux pourquoi vous avez perdu !

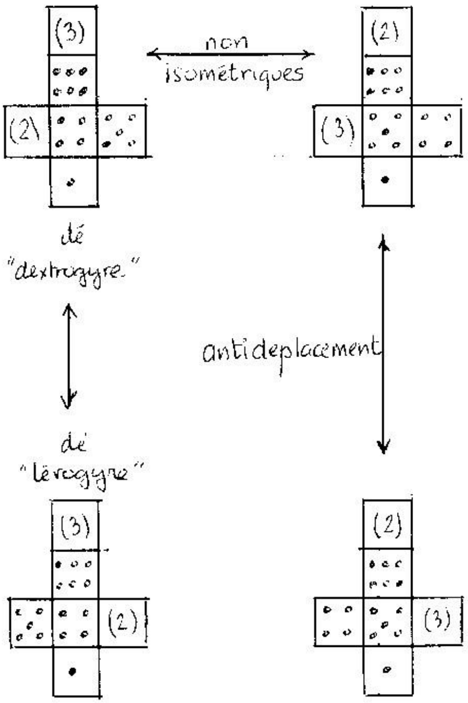
Solution du problème n°35 (PETIT VERT de septembre 1993)
proposé par le **Comité Régional**

Voici quatre dés « réglementaires » (au sens que la somme de deux faces opposées vaut toujours 7) et pourtant tous différents (c'est-à-dire non-isométriques quant à la disposition des points sur les faces).



COMBIEN de dés « réglementaires » différents existe-t-il ?

Beaucoup de solutions reçues pour ce problème : Richard **BECZKOWSKI** (CHALON-SUR-SAÔNE), Jérôme **CARDOT** (SAINT-MIHIEL), François **DROUIN** (SAINT-MIHIEL), Jean **LAMBERT** (SAINT-MAX), Claude **PAGANO** (LA SEYNE SUR MER), Dorin **POPOVICI** (PONT À MOUSSON), Jacques **VERDIER** (NANCY).



Il y a deux sortes de dés, qui se correspondent par antidéplacement (à une symétrie dans un miroir) ; à l'instar des cristaux en chimie, nommons-les dés ***dextrogyres*** et dés ***lévogyres***.

Sur le schéma ci-dessus, les deux patrons supérieurs correspondent à des dés qui ne se correspondent pas par une isométrie (à cause de la face 6).

Si on observe les faces, certaines ont les symétries du carré : (1), (4) et (5). Chacune d'elle est opposée à une face n'ayant que deux axes de symétrie : faces (6), (3) et (2).

Il y a deux façons d'orienter le trièdre (1)-(4)-(5) [correspondant aux dés dextrogyres et lévogyres] et, pour chacune des trois autres faces, deux façons de l'orienter : soit en tout **16 combinaisons différentes.**

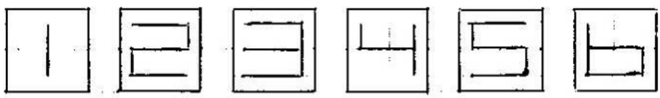
J. Lambert a remarqué que dans des jeux achetés dans le commerce et contenant plusieurs dés, tous ces dés n'étaient pas nécessairement de même type.
J. Verdier, en fouillant tous les tiroirs de sa maison, a trouvé 13 sortes de dés différents ... il lui en manque 3 pour que sa collection soit complète !

Jérôme Cardot propose les deux **prolongements** suivants :

1°) Prolongement à d'autres dés (non cubiques) :
En remarquant que pour *p* points marqués sur un face à *n* côtés, il n'y a qu'une seule orientation possible si *p* est divisible par *n*, ou si le reste de la division est 1.
Si *n* est premier (en particulier *n* = 3 ou *n* = 5), il y a *n* orientations possibles.

2°) On colle sur les faces d'un "Rubik's Cube" soit des petits carrés blancs, soit des petits carrés blancs marqués d'un point noir, pour former l'un des 16 dés solution du problème.
Peut-on alors, par les mouvements du Rubik's Cube, obtenir un autre des 16 dés ? peut-on obtenir les 15 autres ?
Y a-t-il des "classes" de dés accessibles les uns à partir des autres par les transformations du Rubik's Cube ?

J. Verdier propose le prolongement suivant : au lieu de marquer les faces par des points, marquons-les par les chiffres arabes 1, 2, 3, 4, 5, 6 (où seul 3 admet un axe de symétrie) tels qu'on les obtient en affichage digital :



Combien y a-t-il alors de dés différents ?
Et avec les chiffres romains I, II, III, IV, V et VI ?

Autres solutions au problème n°34 (PETIT VERT de juin 1993)

proposé par Jean-Marie **DIDRY** (VANDOEUVRE LES NANCY)

L'énoncé suivant est un « classique » de terminale : par tout point M du « petit » arc AB du cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC, MA + MB = MC.
Plus généralement, démontrer que pour tout point M du « petit » arc A_1A_2 du cercle circonscrit à un polygone réguler $A_1A_2A_3... A_{2n+1}$ on a : $MA_1 + MA_2 = \sum_{k=3}^{2n+1} (-1)^{k+1} MA_k$

Nous avons reçu deux autres solutions à ce problème, qui nous sont parvenues au moment où les épreuves du PETIT VERT étaient déjà parties à l'impression.
L'une d'elles, de Vincent LECUYER (Lycée Varoquaux de Tomblaine) que nous publions intégralement plus bas, l'autre de Pol LE GALL (lycée J. Daubié de Rombas) que nous résumons ici :

Pol **Le Gall** utilise un repère du plan complexe dans lequel les affixes des sommets du polygone sont les racines nièmes de l'unité, et où l'affixe de M est $e^{i\theta}$.
Ce qu'il faut démonter équivaut à la nullité de $S = MA_1 - MA_2 + ... - MA_{2k} + MA_{2k+1}$.

Or $MA_j = \left|e^{\frac{2ij\pi}{2n+1}} - e^{i\theta}\right|$ d'où l'on tire $MA_j = 2\sin\left(\frac{\pi j}{2k+1} - \frac{\theta}{2}\right)$.

D'où $S = 2\cos\frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\sin\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right) - 2\sin\frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\cos\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right)$.

En considérant $S_1 = \sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\cos\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right)$ et $S_2 = \sum_{j=1}^{2k+1}(-1)^{j+1}\sin\left(\frac{\pi j}{2k+1}\right)$, et en calculant $S_1 + iS_2$, on trouve 0, d'où $S_1 = S_2 = 0$, d'où $S = 0$, c.q.f.d.

Voici la solution de Vincent **Lécuyer** :

L'idée est d'utiliser un second polygone régulier $M_1M_2...M_{2n+1}$ dont l'un des sommets est M, et de même cercle circonscrit que le polygone $A_1A_2...A_{2n+1}$.
On prouve ensuite que les distances MA_k sont les normes de vecteurs de la forme M_pA_q colinéaires entre eux et de somme nulle ; la colinéarité et une définition angulaire de l'orientation relative de ces vecteurs colinéaires permettent d'en déduire la relation métrique cherchée.

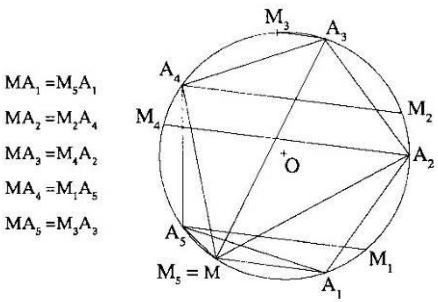


Schéma de la démonstration sur l'exemple du pentagone :

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 ont le même isobarycentre O, donc

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3} + \overrightarrow{OM_4} + \overrightarrow{OM_5}$$

,

puis $\overrightarrow{M_5A_1} + \overrightarrow{M_2A_4} + \overrightarrow{M_4A_2} + \overrightarrow{M_1A_5} + \overrightarrow{M_3A_3} = \vec{0}$,

d'où $M_5A_1 - M_2A_4 + M_4A_2 - M_1A_5 + M_3A_3 = 0$,

soit $MA_1 - MA_2 + MA_3 - MA_4 + MA_5 = 0$

et enfin : $MA_1 + MA_5 = MA_2 - MA_3 + MA_4$.

En premier lieu, les points A_k de l'énoncé initial ont été renumérotés pour simplifier les notations : le point M sera un point de $[A_1A_{2n+1}]$ et non pas de $[A_1A_2]$ (*comme sur l'exemple du pentagone ci-dessus, n.d.l.r.*). En outre, quitte à échanger A_k et A_{2n+2-k} pour tout k compris entre 1 et n (c'est à dire $A_1 \leftrightarrow A_{2n+1}$, $A_2 \leftrightarrow A_{2n}$, ... $A_n \leftrightarrow An+_2$), on supposera que $M \neq A$, soit en fait $M \in]A_1A_{2n+1}[$ sans perte de généralité.

Une convention (***C***) s'imposera plus loin pour alléger les écritures : les indices seront toujours implicitement ramenés par congruence dans $\{1, ..., 2n+1\}$, c'est à dire $A_k = A_{k'} \Leftrightarrow k = k'$ [modulo 2n+1].

Soit O l'isobarycentre du polygone $A_1A_2...A_{2n+1}$ et $\boldsymbol{r}$ la rotation de centre O qui envoie A_1 sur A_2. D'une part on a $\boldsymbol{r}^k(A_1) = A_{k+1}$, et plus généralement $\boldsymbol{r}^p(A_q) = A_{p+q}$, et d'autre part, si l'on pose $M_k = \boldsymbol{r}^k(M)$, le polygone $M_1M_2...M_{2n+1}$ est globalement l'image de $A_1A_2...A_{2n+1}$ par la rotation $\boldsymbol{\rho}$ de centre O qui transforme A en M : en effet, $M_k = \boldsymbol{r}^k(M) = \boldsymbol{r}^k o\boldsymbol{\rho}(A_1) = \rho(A_{k+1})$, compte tenu de la convention (***C***).

① Orientons le plan de sorte que $\left(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}\right)=\dfrac{2\pi}{2n+1}$.

Alors $\left(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{MA_k}\right)=\dfrac{(k-1)\pi}{2n+1}[\bmod 2\pi]$ puisque c'est l'angle de $\boldsymbol{r}^{k+1}$.

On pose $\vec{u}=\dfrac{\overrightarrow{MA_1}}{MA_1}$ (on a supposé $M \neq A_1$).

② Si k est pair, notons k = 2k' ; k' $\in$ {1, ... n}.
On a $\boldsymbol{r}^{n+1-k'}(M) = M_{n+1-k'}$ et $\boldsymbol{r}^{n+1-k'}(A_{2k'}) = A_{n+1-k'}$
donc

$(\overrightarrow{MA_{2k'}},\overrightarrow{M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}})=\dfrac{(n+1-k')2\pi}{2n+1}[\bmod 2\pi]$, et $MA_{2k'} = M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}$,

soit, d'après ①, $(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}})=\dfrac{(2n+2-2k'+2k'-1)\pi}{2n+1}=\pi\,[\bmod 2\pi]$,

d'où $(\vec{u},\overrightarrow{M_{n+1-k'}A_{n+1-k'}})=\pi\,[\bmod 2\pi]$,

ou encore $\overrightarrow{M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}}=-M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}.\vec{u}=-MA_{2k'}.\vec{u}$

③ Si k est impair, notons k = 2k'+1 ; k' $\in$ {0, ... n}.
On a $\boldsymbol{r}^{2n+1-k'}(M) = M_{2n+1-k'}$ et $\boldsymbol{r}^{2n+1-k'}(A_{2k'+1}) = A_{2n+2-k'}$
donc

$(\overrightarrow{MA_{2k'+1}},\overrightarrow{M_{2n+1-k'}A_{2n+2-k'}})=\dfrac{(2n+1-k')2\pi}{2n+1}[\bmod 2\pi]$, et $MA_{2k'+1} = M_{2n+1-k'}A_{2n+2+k'}$,

soit, d'après ①, $(\overrightarrow{MA_1},\overrightarrow{M_{2n+2-k'}A_{2n+2+k'}})=\dfrac{(4n+2-2k'+2k')\pi}{2n+1}=0\,[\bmod 2\pi]$,

d'où $(\vec{u},\overrightarrow{M_{2n+1-k'}A_{2n+2+k'}})=0\,[\bmod 2\pi]$,

ou encore $\overrightarrow{M_{2n+1-k'}A_{2n+2+k'}}=+M_{2n+1-k'}A_{2n+2+k'}.\vec{u}=+MA_{2k'+1}.\vec{u}$

④ Sachant que O est isobarycentre des deux polygones, on peut écrire :

$$\sum_{k'=1}^{n}\overrightarrow{M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}}+\sum_{k'=0}^{n}\overrightarrow{M_{2n+1-k'}A_{2n+2+k'}}=\sum_{k'=1}^{n}\overrightarrow{M_{n+1-k'}A_{n+1+k'}}+\sum_{k'=0}^{n}\overrightarrow{M_{2n+1-k'}A_{k'+1}}$$

$$=\left[\sum_{k'=1}^{n}\overrightarrow{OA_{n+1+k'}}+\sum_{k'=0}^{n}\overrightarrow{OA_{k+1}}\right]-\left[\sum_{k'=1}^{n}\overrightarrow{OM_{n+1-k'}}+\sum_{k'=0}^{n}\overrightarrow{OM_{2n+1-k'}}\right]$$

$$=\left[\sum_{p=n+2}^{2n+1}\overrightarrow{OA_p}+\sum_{p=1}^{n+1}\overrightarrow{OA_p}\right]-\left[\sum_{p=1}^{n}\overrightarrow{OM_p}+\sum_{p=n+1}^{2n+1}\overrightarrow{OM_p}\right]=\sum_{p=1}^{2n+1}\overrightarrow{OA_p}-\sum_{p=1}^{2n+1}\overrightarrow{OM_p}=\vec{0}\ .$$

Soit, en substituant les relations obtenues en ② et ③ :

$$\sum_{k'=1}^{n}\overrightarrow{MA_{2k'+1}}.\vec{u}-\sum_{k'=0}^{n}\overrightarrow{MA_{2k'}}.\vec{u}=\vec{0}$$ et, puisque $\vec{u}\neq\vec{0}$,

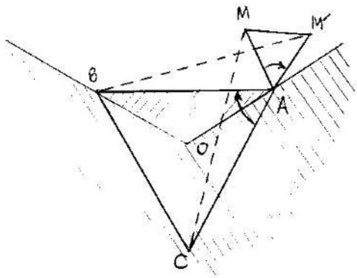
$$\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ pair}}}^{2n+1}(-1)^{k+1}MA_k+\sum_{\substack{k=1\\ k\text{ impair}}}^{2n+1}(-1)^{k+1}MA_k=0$$, d'où finalement $$\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^{k+1}MA_k=0$$

ou, de manière équivalente : $$\boxed{MA_1+MA_{2n+1}=\sum_{k=2}^{2n}(-1)^{k+1}MA_k}$$

Par ailleurs, nous avons reçu de Dorin **POPOVICI,** du lycée Mazelet de PONT À MOUSSON, la démonstration de la propriété réciproque dans le cas du triangle équilatéral (n = 3) :

Tout point M d'un triangle équilatéral ABC qui satisfait la relation
MA + MB = MC (*R*)
se trouve sur le « petit » arc AB du cercle circonscrit au triangle ABC.

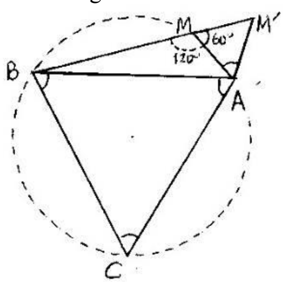
La relation (***R***) implique que $MA \leq MC$ et $MB \leq MC$, ce qui signifie que la médiatrice (OB) sépare les points M et C, et que la médiatrice (OA) sépare les points M et C. Donc M se trouve dans l'intérieur ou sur les côtés de l'angle $\widehat{AOB}$.



En effet, si M se trouvait dans l'intérieur du triangle OBA, on aurait :
MA + MB > AB = BC = AC > MC, donc (***R***) ne serait pas vérifiée.
Et si M était sur (OA) ou sur (OB), M serait respectivement A ou B.

On suppose dorénavant que M se trouve dans l'intérieur de l'angle $\widehat{AOB}$, séparé de C par la droite (AB). On considère la rotation de centre A qui transforme C en B et M en M'. Alors BM' = MC et MM' = MA. La relation (***R***) devient BM + MM' = BM', condition qui est réalisée si et seulement si les points B, M et M' se trouvent alignés dans cet ordre.

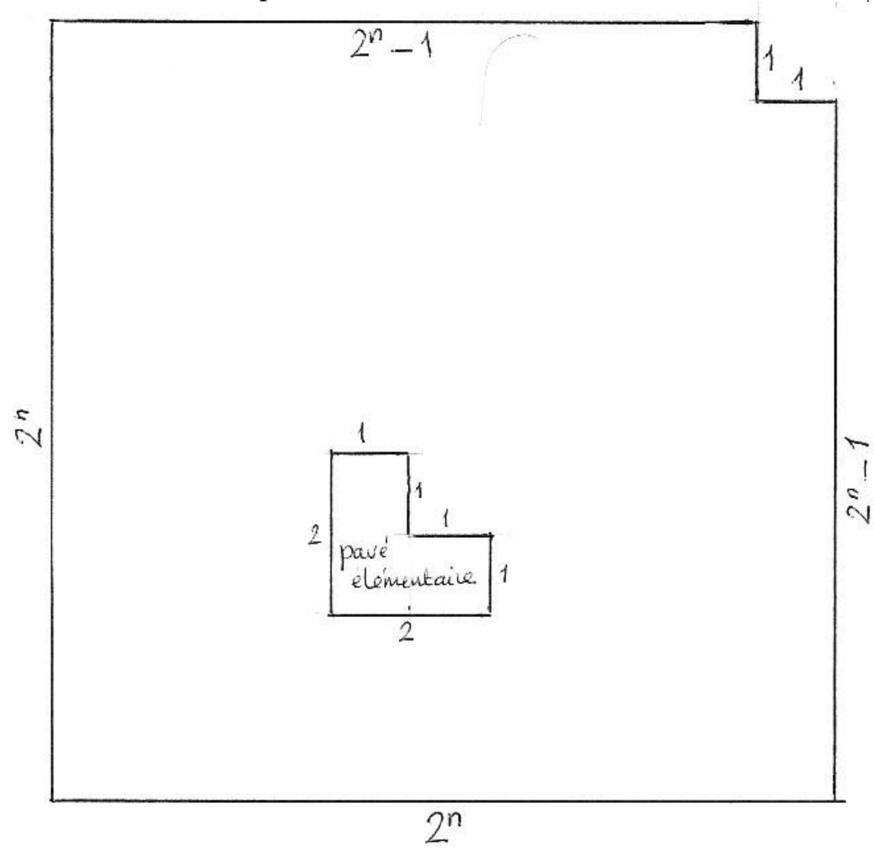
Comme $\widehat{AMM'} = 60°$, on obtient $\widehat{AMB} = 120°$, et le quadrilatère AMBC est donc inscriptible. Cette assertion est équivalent au fait que M se trouve sur le « petit » arc AB du cercle circonscrit au triangle ABC (points B et C exclus).



Corollaire : le cercle circonscrit à un triangle équilatéral est l'ensemble des points de son plan dont la somme des distances à deux sommets est égale à la distance au troisième.

Problème n°36 (PETIT VERT de décembre 1993)
proposé par Serge **PETIT** (SÉLESTAT)

Les pavés élémentaires sont des « carrés écornés » (ou « triminos ») représentés ci-dessous. La surface à paver est le « carré écorné » représenté ci-dessous.
Est-il possible de paver exactement cette surface avec les pavés élémentaires, et ceci pour tout entier *n* non nul ?



Vos réponses aux problèmes du PETIT VERT, ainsi que vos propositions de problèmes, sont à faire parvenir à Bernard PARZYSZ, 3 rue Marie Sautet, 57000 METZ.

SOMMAIRE

LE PETIT VERT n° 36
(BULLETIN DE LA REGIONALE A.P.M.E.P. LORRAINE)

N° CPPAP 2 814 D 73 S. N° ISSN 0760-9825. Dépôt legal : 1993
Imprimé au siège de l'Association :
IREM (Faculté des Sciences), B.P. 239. 54506-VANDŒUVRE

Ce numéro a été tiré à 500 exemplaires

ABONNEMENT (4 numéros par an) : 30 F
L'abonnement est gratuit et automatique pour les adhérents Lorrains de l'A.P.M.E.P. à jour de leur cotisation.

NOM :
ADRESSE :

Désire m'abonner pour 1 an (année civile) au PETIT VERT

Joindre règlement à l'ordre de APMEP-LORRAINE (CCP 1394-64 U Nancy)