N° 144 Décembre 2020

# LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine


APMEP Régionale de Lorraine

www.apmeplorraine.fr

# SOMMAIRE



Retour au sommaire

***ÉDITO***

# SANS COMMENTAIRE

Gilles Waehren

Les événements du début de ces vacances d'automne 2020 ont donné un écho particulier à l'article Maths et Philo du Petit Vert 143, consacré à la peur. Nous nous interrogions déjà, dans l'édito, sur le rôle de l'insécurité dans le processus d'apprentissage. Mais c'était du point de vue de l'élève. On découvre maintenant que la peur des contenus s'installe chez les enseignants. Bien entendu, en mathématiques, nous pouvons nous sentir à l'abri des problématiques du monde extérieur et certaines peurs nous semblent irrationnelles (même si les irrationnels sont aussi des réels).
Il nous semblera sûrement difficile d'expliquer à nos élèves les tenants et les aboutissants de l'acte effroyable commis sur l'un de nos pairs. Nos collègues de lettres ou de philosophie ont plus de billes que nous, pour élaborer un discours impromptu sur l'actualité et pouvoir y donner une perspective. Ils seront mieux à même d'accompagner les élèves dans un début d'analyse et organiser un débat d'idées.
Cependant, le prof de maths construit aussi des outils forgés pour l'échange argumenté. Parmi les six compétences, ne retrouve-t-on pas « raisonner » ou « communiquer » ? Cet aspect du travail mathématique est un élément moteur dans le rejet des discours tout faits. C'est pour cette raison que Daniel Justens nous incitait à prendre notre place, lors des Journées Nationales de Toulouse 2014, dans l'univers politique (on peut aussi suivre sa réflexion dans le PLOT 54 sur la place de l'axiomatique dans la religion). La tâche ardue du professeur est souvent de mener ses élèves dans un discours complexe et nuancé, alors que leur environnement médiatique se répand en phrases chocs et en slogans lapidaires. Le professeur de mathématiques se gardera, lui, d'avancer ses convictions personnelles comme des théorèmes.
Une autre compétence des programmes de mathématiques est « représenter ». Nous la travaillons pour aider l'élève à passer de ce qu'on voit à ce qu'on sait et réciproquement. Le cas particulier des illusions d'optique ou de certains sophismes nous incite à nous méfier de ce qu'on voit, à comprendre qu'un dessin reste souvent un support de raisonnement ou d'émerveillement, mais qu'il ne donne qu'une idée imparfaite de la vérité mathématique. À plus forte raison, une caricature n'exprime jamais une vérité, mais tente souvent de nous faire comprendre certaines réalités. Elle n'est pas là pour dire mais pour nous interroger et nous faire prendre une position.
Les professeurs de mathématiques sont probablement les moins bien armés pour décortiquer l'actualité avec leurs élèves. Ils peuvent néanmoins consolider, avec la géométrie notamment, les facultés d'un raisonnement et d'une expression exigeants.

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale APMEP Lorraine. Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin « Au fil des maths » et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges "mathématiques" entre les adhérents. Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à redactionpetivert@apmeplorraine.fr. Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, Fathi Drissi, François Drouin, Rachel François, Françoise Jean, Léa Magnier, Walter Nurdin, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

Retour au sommaire

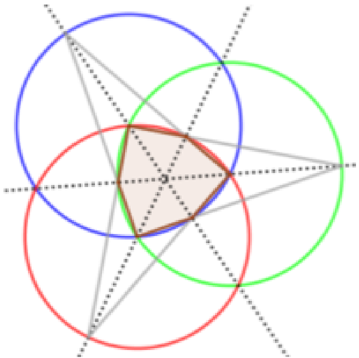
***VIE DE LA RÉGIONALE***

# EN ATTENDANT BOURGES
# SUR LE STAND DE LA RÉGIONALE

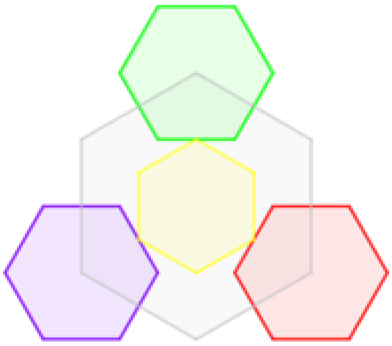
Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine


Pendant ces trois journées, notre régionale avait donné rendez-vous sur son stand pour échanger et présenter des ressources mises à disposition sur notre site.

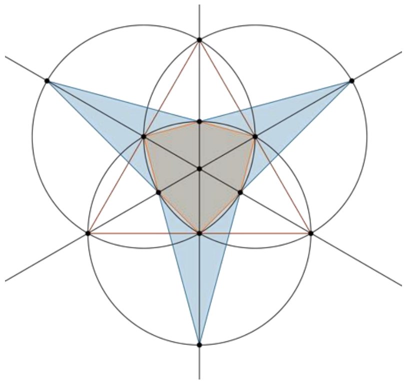
Les dossiers proposés spécialement sur le site ont été largement téléchargés : 166 pour le premier, 111 pour le second et 153 personnes sont allées explorer la carte interactive de notre belle région (77 d'entre elles ont repéré la brochure « Le nombre d'or et la cathédrale de Metz » récemment remise en téléchargement sur notre site).
Les participants sur le stand ont été essentiellement des joueurs et joueuses de notre régionale. Les échanges ont été riches et l'envie est rapidement venue de réaliser ensemble des choses en utilisant ce bel outil informatique mis à notre disposition.



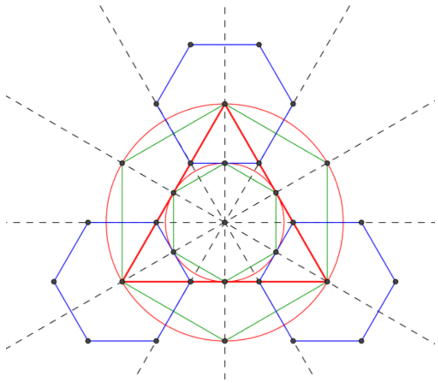
Le logo de la partie « stands »



Le logo de la partie « ateliers »



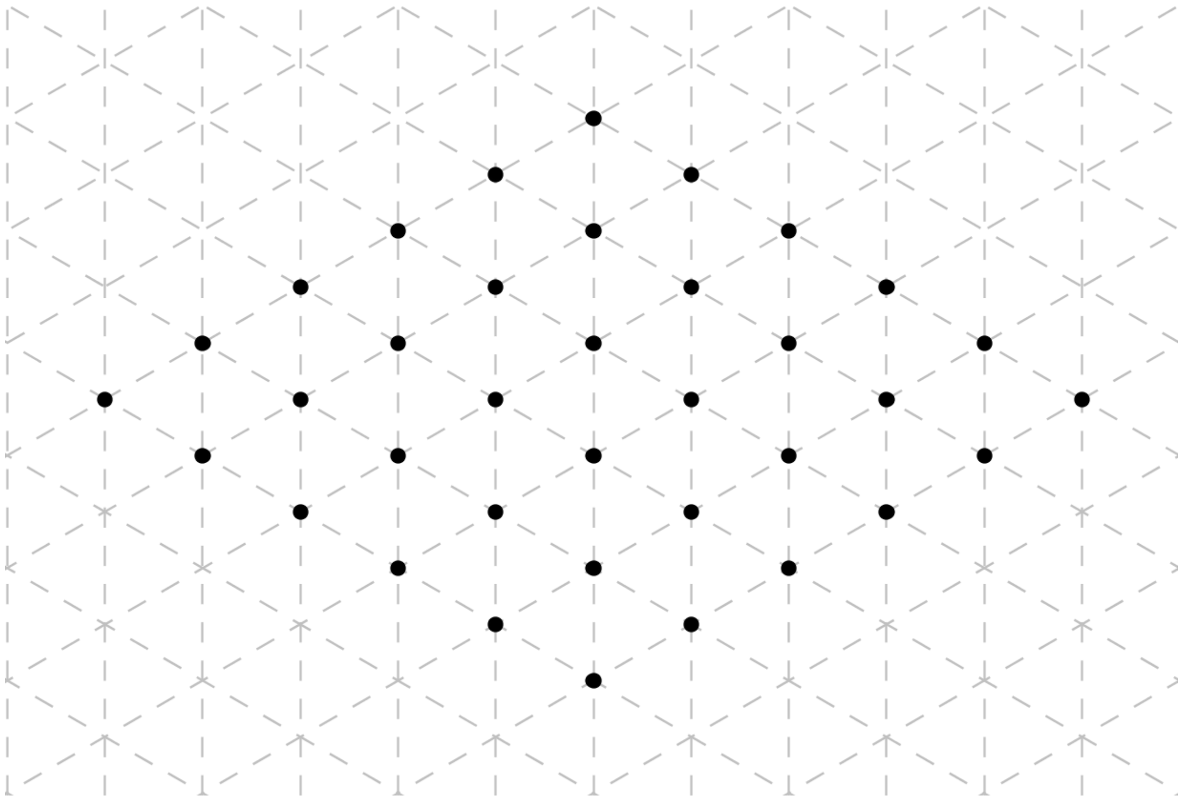
Notre réalisation avec GeoGebra



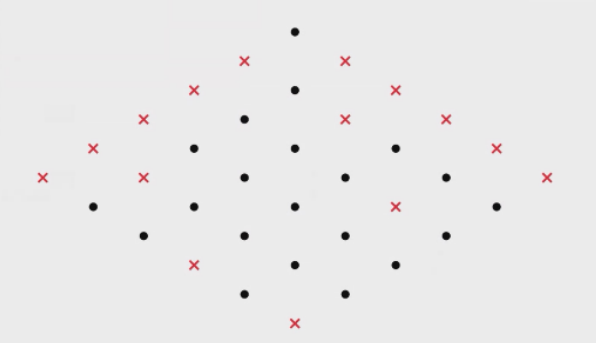
Notre réalisation avec GeoGebra

Nous avons profité de nos rencontres virtuelles pour explorer le jeu de HIP sur réseau triangulé.

Retour au sommaire



Il s’agit de placer le plus de croix possible sur les points du réseau de telle sorte que quatre croix ne soient jamais les sommets d’un parallélogramme.



Une version en ligne a été créée pendant nos réunions sur le stand puis améliorée dans les jours qui ont suivi : des points sont placés aléatoirement, à l’utilisateur de repérer ceux qui sont les sommets d’un parallélogramme. Nous avons exploré la proposition ci-contre en réfléchissant collectivement aux croix à retirer car des sommets de parallélogrammes avaient été repérés.

Nous avons échangé à propos de nos démarches : les propriétés des diagonales ont été utilisées, mais l’utilisation de vecteurs égaux a facilité les recherches. En cycle 4, l’évocation de translations remplacera cette utilisation de la géométrie vectorielle.
Dès la 5ème, la propriété du parallélisme et de l’égalité de longueur de deux côtés opposés peut être utile. C’est l’occasion de mettre en avant une propriété peu utilisée pour caractériser un parallélogramme et qui préparera aux translations et aux vecteurs.

Nous avons réussi à placer onze croix. Et vous ?
Vous pourrez poursuivre vos recherches en essayant que trois points du réseau ne soient jamais les sommets d’un triangle rectangle (ou d’un triangle isocèle). Combien de croix réussirez-vous à placer ?

Ces recherches sur réseau triangulé vous donneront sans doute envie d’aller explorer ce qui peut être proposé à des élèves à propos du jeu de HIP sur réseau quadrillé. Vous pourrez utiliser la version mise en ligne et sa variante présentant des points placés aléatoirement.

Retour au sommaire

***VIE DE LA RÉGIONALE***

# QUESTIONNAIRE POST-CONFINEMENT N°1

Le Comité de rédaction remercie vivement tous les enseignants qui ont bien voulu consacrer un peu de temps à répondre à ce questionnaire. En espérant que chacun se retrouve dans la synthèse.

Nombre total de réponses : 22
(*Certains enseignants exercent sur plusieurs niveaux)*

| | |
|---|---|
| Collège | 12 réponses |
| Lycée | 10 réponses |
| Enseignement supérieur | 5 réponses |

À la lecture des réponses à ce questionnaire, on ne peut que sourire en pensant à une épreuve, au siècle dernier, de titularisation des stagiaires CAPES pendant laquelle le candidat devait exposer le corrigé d'un devoir à la maison pendant une heure aux élèves qui se devaient d'être très attentifs. Fi des corrections au tableau ! Les enseignants de mathématiques doivent être performants et ne doivent pas « perdre » une seule minute. Pour pallier la non-présence éventuelle des élèves, les corrigés des exercices sont déposés sur Pronote. Monbureaunumérique ou Moodle qui semble plébiscité mais qui nécessiterait une formation disciplinaire, sont des outils que les professeurs s'approprient par prévoyance pour préparer les élèves à l'enseignement à distance. Les cahiers de texte, si méprisés au siècle dernier, font l'objet de multiples attentions. Les dossiers partagés n'ont plus de secret pour les élèves. Certains établissements ont même anticipé la formation des familles.
La prise en compte de l'hétérogénéité semble accrue. L'accent est mis sur la méthodologie et le développement de l'autonomie. Le temps en classe devient précieux et certains enseignants cherchent à développer le travail entre pairs.

**Réponses au questionnaire réalisé par l'APMEP Lorraine en mai 2020**

*Avez-vous proposé des séances de « remise à niveau », spécifiques à cette année scolaire ?*

| | | | |
|---|---|---|---|
| OUI | 15 réponses | NON | 7 réponses |

*Si vous comparez votre enseignement avant le confinement avec celui depuis septembre 2020, vous avez intensifié les usages de l'outil numérique*

| | |
|---|---|
| Liés à l'organisation (ranger ses fichiers, envoyer un message, consulter des données…) | 12 réponses |
| Liés aux mathématiques | 9 réponses |
| Sans réponse | 6 réponses |

*Si vous comparez votre enseignement avant le confinement avec celui depuis septembre 2020, avez-vous développé le travail en équipe ?*

| | | | |
|---|---|---|---|
| OUI | 10 réponses | NON | 12 réponses |

Retour au sommaire

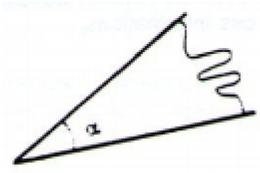
***VIE DE LA RÉGIONALE***

# IL Y A 25 ANS

Voici un extrait d'un article du Petit Vert 44 de décembre 1995.

*Extrait du Concours de Recrutement de Professeurs des Écoles (CRPE) 1995*

**EXERCICE 2 :**




*On dispose d'un instrument qui ressemble à une équerre (cf. dessin), mais le secteur angulaire d'angle α n'est pas droit.*

*1) Soient deux points A et B. À l'aide de cet instrument (on supposera les côtés du secteur suffisamment longs) construire :*

*a) un losange ACBD.*

*b) le milieu et la médiatrice de [A.B]*

*2) Soient trois points A, B et C non alignés. À l'aide de cet instrument construire les trois hauteurs du triangle ABC (justification et description précises demandées pour une hauteur).*

*L'exercice 2 de ce concours a dérouté les candidats. Il semble que la connaissance des définitions de losange, médiatrice... ne suffit pas au candidat pour investir dans une construction avec un instrument inattendu. Pourtant la manipulation d'instruments géométriques variés doit permettre de donner du sens. Et si la construction permet de fabriquer, au sens pratique du terme, elle permet aussi de raisonner, au sens mathématique du terme, de justifier la démarche suivie et à travers cette activité de bâtir le concept.*

*Ce concours ne s'adresse donc pas à des spécialistes en mathématiques, mais pourtant ces personnes devront initier et accompagner les élèves de l'école élémentaire dans leur première rencontre avec les mathématiques. Il me semble que, derrière les difficultés de concevoir un exercice de géométrie pour un examen ou un concours, se cache le problème du statut de la géométrie dans l'enseignement obligatoire et dans la vie quotidienne. Quelles connaissances faut-il apprendre ? Faut-il des définitions ? Quand et comment passer de l'objet physique à l'objet conceptualisé ? Que doit-il rester à « l'homme de la rue » des apprentissages géométriques rencontrés au cours de sa scolarité ? Le débat reste ouvert.*

*Épinal, le 19 octobre 1995 J. EURIAT*

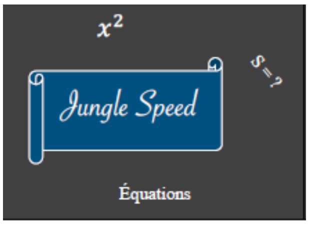
À titre de comparaison, vous trouverez à cette adresse les épreuves du CRPE de la zone 1 de l'année 2020. Les exercices proposés en 2020 sont très calculatoires. Les exercices proposés sont bâtis sur des situations « concrètes ». On mesure également l'évolution des programmes avec l'introduction des probabilités et de l'algorithmique. L'exercice 2 du concours CRPE 1995 n'est plus du tout dans l'air du temps. Jacqueline Euriat se demandait ce qui devait rester à « l'homme de la rue » après ses apprentissages mathématiques. A-t-on développé sa créativité ? son esprit d'analyse ? Lui a-t-on appris à se « débrouiller » avec un outil tout simple, à construire un raisonnement à partir de données élémentaires ? Les « formules toutes faites » n'ont-elles pas pris le pas sur la réflexion ?

Retour au sommaire

***DANS NOS CLASSES***

# JUNGLE SPEED ET (IN)ÉQUATIONS

Maxime Thomas




*Comment s'entrainer à résoudre des équations du premier degré sans s'ennuyer en classe de seconde ? Maxime Thomas adapte le jeu « Jungle speed » pour cette activité.*

**Objectif**

L'objectif principal de la séance est d'acquérir des automatismes pour résoudre des équations du premier degré à coefficients rationnels.

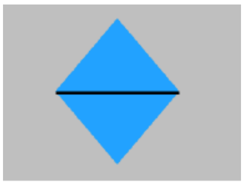
**Matériel utilisé**

- Un jeu de 90 cartes (disponible sur notre site)

$$3x + \frac{9}{2} = 0$$

Les 80 cartes équations sont constituées de 20 groupes de quatre équations équivalentes.

Lorsqu'un joueur retourne cette carte, tous les joueurs doivent tenter d'attraper le Totem.
Celui qui y parvient place sa défausse dans le pot et recommence à jouer.



Lorsqu'un joueur retourne cette carte, tous les joueurs retournent en même temps une carte.

- Un totem (une bouteille d'eau par exemple)
- L'application Photomath (gratuite sous Android ou iOS)

**Déroulement du jeu**

Toutes les cartes sont réparties, face cachée, entre les joueurs ce qui constitue la réserve.
Chacun à son tour retourne une carte devant lui, face visible de tous, et forme ainsi une pile de cartes, la défausse. Si un des joueurs a devant lui une équation équivalente à celle retournée par un autre joueur, le plus rapide des deux doit saisir le totem situé au centre de la table. Celui qui réussit à saisir le totem donne sa défausse au joueur le plus lent. Le joueur qui n'a plus de cartes a gagné.
Si le totem tombe lorsqu'un joueur tente de s'en emparer ou si un joueur s'empare à tort du totem, il ramasse le pot ainsi que toutes les défausses de tous les joueurs.

Retour au sommaire

Le Pot est l'ensemble des cartes faces visibles au milieu sous le Totem.

**Analyse a priori**

Les élèves sont par îlots de 4 à 5. J'avais plusieurs choix possibles quant à la composition des groupes :

- soit les élèves sont en activité par groupe homogène, ce qui leur permet de jouer avec des élèves de leur niveau et ainsi que tous jouent à chances égales. Ce type de configuration permet même de différencier selon les groupes et de donner des jeux avec des ensembles de solutions différents, plus ou moins complexes ;
- soit les élèves sont en groupe par affinités. Cette configuration peut les mettre en confiance et ainsi leur permettre de plus oser jouer, quitte à se tromper à un signe près.

Je souhaitais que les solutions des équations soient simples, un des objectifs étant que la résolution devienne un automatisme. J'ai donc opté pour des solutions rationnelles ; se limiter à des solutions entières pouvait amener à se dispenser de résoudre l'équation.

Les ensembles de solutions possibles dans le jeu sont les suivants :

{1/2} ; {2/3} ; {1} ; {3/2} ; {2} et {-1/2} ; {-2/3} ; {-1} ; {-3/2} ; {-2}

Ainsi, pour une solution d'une équation donnée, il existe dans ce jeu des équations ayant pour solution l'opposé de ce nombre, son inverse ou encore l'opposé de son inverse ! Ce jeu est un jeu de rapidité et cette difficulté permet, comme dans le jeu original, que les élèves soient très attentifs aux signes et à l'opération utilisés.

Le « Jungle speed » étant un jeu de rapidité, les symboles dans le jeu traditionnel sont facilement reconnaissables par les joueurs pour s'emparer du totem. Dans cette version mathématique le travail cognitif que les élèves doivent réaliser est très important, et inaccessible mentalement pour la plupart de mes élèves. Même si j'ai créé des équations assez faciles à résoudre, cela reste pour au moins 70% de mes élèves une tâche complexe.

Dans le cadre du jeu les élèves doivent être amenés à discuter de la validité de la solution. Une première possibilité est de laisser le groupe réfléchir pour vérifier les solutions, mais cela risque de trop ralentir le jeu.

J'ai donc préféré leur laisser à disposition une application disponible gratuitement sur smartphone : photomaths. Cette application donne l'ensemble de solutions d'une équation à partir d'un scan de cette dernière à l'aide de l'appareil photo du téléphone, en détaillant la démarche de la résolution. Ainsi, les élèves peuvent se mettre d'accord rapidement sur le nom du gagnant.

**Description de l'activité**

La séance s'est déroulée un vendredi de 12h à 13h en classe entière de seconde avec 29 élèves. La règle du jeu « Jungle Speed » a été distribuée lors du cours précédent avec pour consignes de la lire attentivement. Les élèves jouent par îlots de 4 à 5 joueurs.

L'installation en groupes par affinités s'est faite de manière naturelle, en effet cela fait plusieurs mois que mes élèves de seconde ont l'habitude de travailler en îlots bonifiés. La séance a ensuite débuté sur une relecture à voix haute des règles du jeu par deux élèves.

J'ai ressenti chez mes élèves de l'impatience pour commencer le jeu !

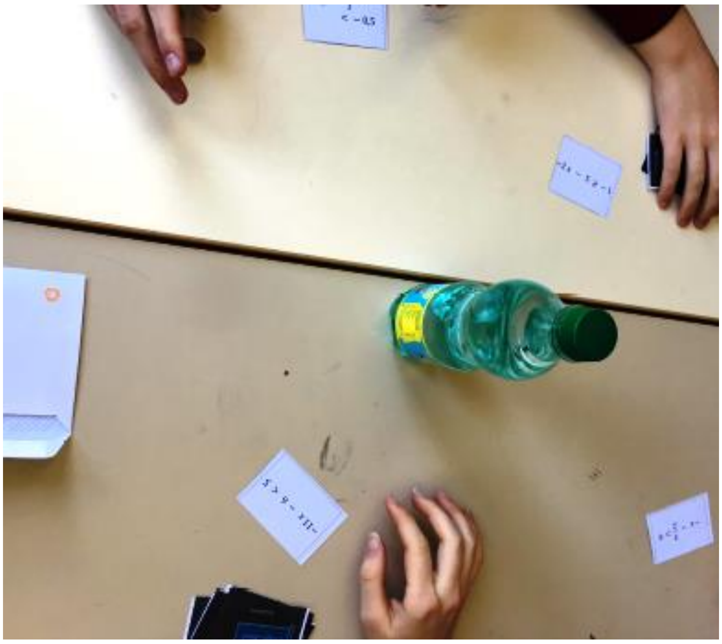
Ils ont très vite commencé l'activité, avec une très grande autonomie. Les élèves ont régulièrement utilisé l'application sur leur smartphone pour vérifier l'ensemble de solution(s).

Je m'étais demandé alors comment allaient réagir les élèves qui ne maitrisent par la résolution d'équations ? Devais-je mettre en place une aide supplémentaire ou non ?

Retour au sommaire

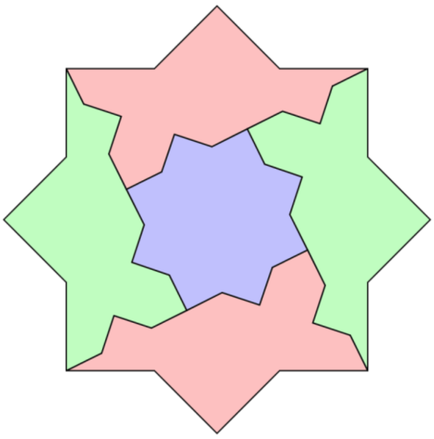
Mon élève A, en très grande difficulté depuis des années en mathématiques a gagné la quasi-totalité des parties de son groupe. En effet, doté d'une très bonne discrimination visuelle elle a pu reconnaitre et identifier les équations similaires ou les symboles spéciaux de façon efficace.
Mon élève B, quant à lui s'est laissé porter par le jeu sans trop d'entrain, d'engouement ou même de compréhension.

La durée de jeu était un peu trop longue pour la moitié des élèves.



**Un prolongement possible**
On peut imaginer de reproduire le jeu « jungle speed » portant sur un autre chapitre ou par exemple au collège sur les formes géométriques, (deux triangles isocèles, …).

***ANNONCE***



**La rédaction du Petit Vert et le Comité de la Régionale vous souhaitent à tous**

**UNE HEUREUSE ANNÉE 2021**

**année plus amicale, associative, fraternelle et pacifique.**

**Nous formulons également le vœu de pouvoir nous retrouver rapidement et échanger à nouveau en direct.**

Retour au sommaire

***DANS NOS CLASSES***

# GÉNÉRATEURS D'EXERCICES ALÉATOIRES

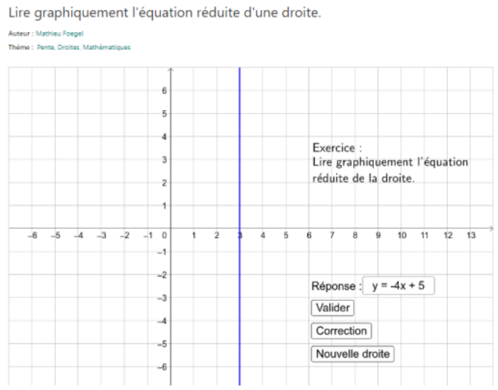
Mathieu Foegel

Lycée Mangin de Sarrebourg

*Mathieu Foegel crée des exercices aléatoires pour ses élèves. Nous lui avons posé quelques questions afin qu'il nous présente son travail.*

***Décris-nous ton projet. Quels sont les types d'exercices déjà créés ? Peux-tu rappeler la liste de tes créations ? S'adressent-ils à tous les niveaux ?***

Je crée ce que j'appelle des générateurs aléatoires d'exercices. Il s'agit d'exercices dont les valeurs ou les objets de l'énoncé sont générés aléatoirement.




Par exemple, pour l'exercice « Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite », la droite tracée a un coefficient directeur et une ordonnée à l'origine choisis aléatoirement.

Pour l'instant, les exercices disponibles sont :
- Placer un point sur le cercle trigonométrique
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite
- Lire graphiquement l'expression d'une fonction affine
- Dériver
- Lire les coordonnées d'un point
- Placer un point connaissant ses coordonnées
- Lire graphiquement la valeur d'une image ou d'un nombre dérivé

Ces exercices s'adressent aux lycéens.

***Comment t'en est venue l'idée ? As-tu trouvé des travaux de collègues similaires, voire identiques ? Connais-tu les exercices GeoGebra proposés par le Lycée Valin de La Rochelle ? Si oui, dans quelle mesure t'es-tu inspiré de leurs productions ?***

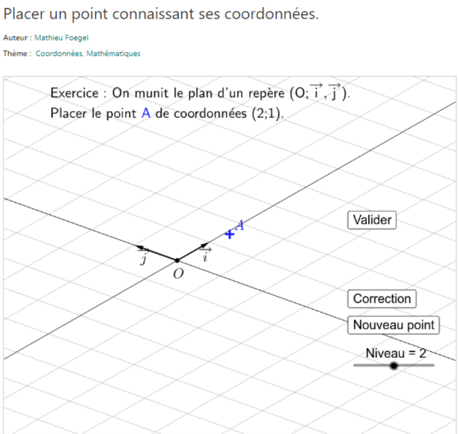
Il n'est pas rare qu'un élève ait besoin de faire plusieurs fois le même type d'exercice afin d'assimiler une méthode. Souvent, il suffit de changer quelques valeurs dans l'énoncé pour que l'élève ait un exercice supplémentaire pour s'entraîner. Mais plutôt que de créer une série d'exercices sur papier (et leur correction), on peut automatiser cette création. À force de constater la difficulté qu'ont les élèves pour lire graphiquement l'équation réduite d'une droite

Retour au sommaire

(de la seconde à la terminale, malgré les rappels), j'ai fini par automatiser ça grâce à GeoGebra. Depuis, j'ai créé d'autres exercices, tout en ajoutant des améliorations.
J'avais vu quelques ressources similaires (je ne sais plus si celles du Lycée Valin de La Rochelle en faisaient partie), mais elles ne me convenaient pas. Les nombres n'étaient pas choisis au hasard, ou c'était tout de suite trop difficile, ou il n'y avait pas de correction.

***Comment créer des exercices de ce genre dans GeoGebra ? Est-ce facile ? Cela prend-il du temps ?***

Ça peut vite devenir compliqué et prendre pas mal de temps.




On peut s'intéresser par exemple à la création de l'exercice consistant à placer un point à partir de ses coordonnées. Une commande permet d'obtenir un nombre entier aléatoire. On l'utilise deux fois pour avoir les coordonnées où il faudra placer le point. On crée un texte pour la consigne, avec une partie donnant les coordonnées aléatoires. On crée un point libre, qu'il faudra placer au bon endroit. Pour indiquer si le point est bien placé ou non, on peut créer un texte « Bonne réponse ! » avec dans la condition d'affichage le fait que le point libre ait les bonnes coordonnées. Pour recommencer l'exercice, on peut appuyer sur F5. Techniquement, on a créé ce qu'on voulait. Mais on pourrait faire beaucoup mieux. Pour l'instant, on est restreint à un repère orthonormé, on est restreint à des coordonnées entières, l'élève peut se contenter de déplacer le point jusqu'à tomber juste, il n'y a pas de correction détaillée, etc. Chaque amélioration va prendre du temps et rendre la création plus compliquée.

***Comment les utilises-tu avec les élèves ? En classe ? À la maison ? Sont-ils évalués ?***

En général, on voit ensemble la méthode, ils s'entraînent sur papier avec quelques exercices du manuel, puis je leur donne le lien pour qu'ils s'entraînent sur leur ordinateur portable. Ils peuvent alors s'entraîner chez eux selon leurs besoins, même quand on sera passé à autre chose. Je ne note pas ce qu'ils font sur l'ordinateur portable mais ça les entraîne pour les évaluations.

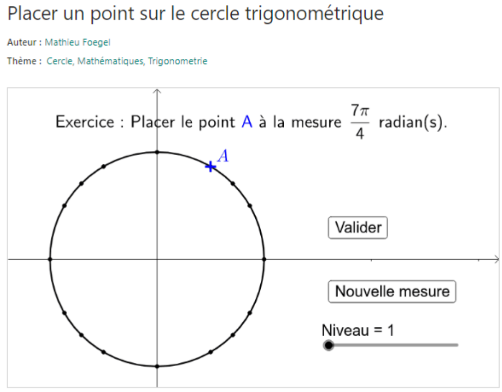
***Pour quels besoins as-tu créé ces exercices ? Pour remédier à des difficultés d'élèves ? Pour différencier leur travail ? Pour avoir des exercices systématiques ?***

J'ai créé ces exercices pour plusieurs raisons. Les élèves peuvent s'entraîner autant qu'ils le souhaitent, sans que j'aie à préparer plein d'exercices. La correction est immédiate, donc ils n'ont pas besoin d'attendre la correction ou de m'appeler juste pour valider leur réponse. Pour certains exercices, ils ont la possibilité de modifier le niveau de difficulté, donc ils peuvent progresser à leur rythme.

Retour au sommaire

***Qu'apporte GeoGebra à ce type d'exercices ? Les élèves peuvent-ils manipuler les éléments du document ? Comment obtiennent-ils les réponses ?***

GeoGebra est très complet. On peut créer et manipuler des figures géométriques, calculer des images, des dérivées, des intégrales, des termes d'une suite, des probabilités, résoudre des équations, des systèmes d'équations, écrire du texte, créer des boutons, créer des scripts, etc. Toutes ces fonctionnalités me permettent de créer des exercices générés aléatoirement, de soigner leur apparence, et d'avoir une utilisation intuitive.
Selon l'exercice, la façon dont l'élève répond change.




Par exemple, pour placer un point sur le cercle trigonométrique, il déplace un point. Pour lire graphiquement l'équation réduite d'une droite, il entre son équation dans un champ de texte. Une fois qu'il a répondu, il valide sa réponse et un texte apparaît pour lui dire si c'est la bonne réponse ou non. Il peut afficher la correction, changer le niveau de difficulté (pour certains exercices), commencer un nouvel exercice. À partir de 3 bonnes réponses d'affilées, un texte d'encouragement apparaît et comptabilise le nombre de bonnes réponses d'affilées.

***As-tu eu des retours d'élèves sur ces exercices ? Qu'en pensent-ils ? Apprécient-ils ces exercices ? Les as-tu utilisés pendant le confinement ?***

J'ai testé quelques exercices avec quelques classes et les réactions sont encourageantes. Les élèves semblent apprécier. Certains tentent d'obtenir le plus de bonnes réponses d'affilées possible. Aucun élève (à ma connaissance) ne reste inactif devant son exercice, puisque dans le pire des cas il peut tenter une réponse, voir ce que ça donne et étudier la correction. Le temps que j'économise en n'ayant pas besoin de corriger les exercices ou de vérifier les réponses je peux le consacrer aux élèves en difficulté. Pendant le confinement j'ai utilisé les deux exercices que j'avais, mais il était difficile d'en mesurer les effets.

***D'autres collègues ont-ils utilisé ceux qui sont déjà disponibles ?***

Pour l'instant je crois que quelques collègues ont eu l'occasion de tester un exercice. Il faudra que je pense à leur demander ce qu'ils en ont pensé.

***As-tu d'autres projets d'exercices ou des idées d'amélioration ? Peut-on envisager de demander à des élèves de produire eux-mêmes des exercices de ce genre ?***

Beaucoup d'exercices peuvent être intéressants. Le problème c'est le temps que ça prend à créer. Le prochain que j'aimerais créer poserait une question au hasard sur le thème « Proportions et évolutions ». Ce que j'aimerais bien améliorer est la visibilité de mes ressources. La seule qui peut être trouvée sans lien direct est celle de trigonométrie. Les autres ne peuvent

Retour au sommaire

pas être trouvées via une recherche, même avec le titre exact. Les autres idées d'amélioration viendront peut-être des collègues.
Ce serait trop difficile pour un élève de créer un exercice de ce genre.

***Un souhait et une offre du comité de rédaction***

Nous vous proposons également d'organiser des "goûters virtuels" sur notre Moodle, le thème pourrait porter sur la création d'exerciseurs sous GeoGebra et intégrables dans Moodle. En échange, les collègues qui participeraient à ces goûters pourraient partager leurs ressources sur le GeoGebraTube de la régionale.

---

***ANNONCE***

# RÉSOLUTION COLLABORATIVE DE PROBLÈMES

IREM de Montpellier

Chaque année, le groupe ResCo de l'IREM de Montpellier propose un problème ouvert original aux classes de collèges et de lycée sous forme d'une fiction réaliste, ce cadre favorisant la dévolution du problème posé. Le problème nécessite tout d'abord une mathématisation de la part des élèves, leurs choix pouvant faire émerger des problèmes connexes ou des variantes du problème mathématique dont la résolution est visée par le groupe.

Voici un exemple tiré de la banque des problèmes ouverts :
*Histoire d'œufs*
*Monsieur Paul Hayet fabrique des œufs en céramique qui sont tous identiques. Il voudrait tester la solidité des œufs. Pour cela, il dispose d'une échelle de 100 barreaux. Pour tester la résistance d'un œuf, il le laisse tomber de la hauteur d'un barreau et il regarde s'il s'est cassé ou non. Il voudrait déterminer le barreau le plus haut où les œufs ne se cassent pas. Quelle est la meilleure stratégie pour faire le moins de tests possibles ?*

Les élèves travaillent par groupes de 3 classes d'établissements différents. Ils découvrent le problème et préparent les questions qu'ils adresseront aux deux autres classes. Ces questions déclenchent le processus de mathématisation et répondent aux questions des autres classes, ce qui leur permet d'identifier les grandeurs pertinentes. Une relance du groupe ResCo fixe ensuite les choix pour guider les classes vers un problème mathématique commun, en se basant sur les échanges des élèves.
Le dispositif permet de faire vivre en classe une authentique activité de recherche, en appui sur des problèmes posés en dehors de mathématiques.

Cette année scolaire, le dispositif ResCo débutera **la semaine du lundi 11 janvier 2021**.

Vous pouvez dès à présent vous y inscrire en nous indiquant à l'adresse électronique **irem-resco@umontpellier.fr**
- votre **nom et** votre **prénom.**
- l'intitulé de la (ou des) classe(s) que vous voulez engager.
- le nom de votre **établissement**.
- **la façon dont vous avez connu le dispositif**.

Retour au sommaire

***ÉTUDE MATHÉMATIQUE***

# ÉLÉMENTS DE CALCUL POUR L'ASTRONOMIE LE CALENDRIER (2e PARTIE)

Alain Satabin

Le calendrier Grégorien, tel que nous l'utilisons, a été introduit vers la fin de l'année 1582 pour palier un décalage de la date de l'équinoxe devenant trop important. Les formules établies dans ce chapitre ne sont donc valables que pour un millésime au moins égal à 1583, même si, pour les besoins des calculs, on prolonge dans le passé jusqu'à une hypothétique année 0 le principe du calendrier Grégorien. Ce principe est le suivant : les années "normales" comptent 365 jours et on ajoute au mois de février un jour supplémentaire pour certaines années dites "bissextiles", qui compteront donc 366 jours. Le but de la manoeuvre étant que les phénomènes astronomiques (équinoxes, saisons ...) tombent aux alentours d'une date régulière dans le calendrier, dans une fourchette pas trop importante. Ce calendrier est découpé en 12 mois inégaux et les jours portent un nom obéissant à un cycle d'ordre 7… ces choix arbitraires posant des problèmes arithmétiques intéressants.

Dans ce qui suit, $(J\ ;\ M\ ;\ A)$ représente une date dans ce calendrier, avec $A \geq 1583$.

### 1. Les années bissextiles

Dans le calendrier Grégorien, une année est bissextile lorsqu'elle est multiple de 4 sans l'être de 100, à moins qu'elle ne le soit de 400. Par exemple, 1984, 2004, 1600 et 2000 sont des années bissextiles, alors que 1981, 2007, 1700 et 1900 n'en sont pas. Il s'avère souvent pratique de disposer d'une fonction qui, appliquée à un millésime, associe 1 lorsqu'il correspond à une année bissextile, et 0 sinon. Cette fonction est définie de la façon suivante :

$$\boxed{\mathrm{Biss}(A) = \begin{cases} 1 & \mathrm{si}((A \bmod 4 = 0)\mathrm{ET}(A \bmod 100 \neq 0))\mathrm{OU}(A \bmod 400 = 0) \\ 0 & \mathrm{sinon} \end{cases}} \qquad (1)$$

### 2. Nombre de jours d'un mois

Le problème posé par le mois de février est traité à part.

Dans le calcul qui suit, on raisonne pour $M \in \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

$$\begin{aligned} M \text{ possède 30 jours} &\Leftrightarrow M \in \{4; 6; 9; 11\} &&\Leftrightarrow 2M \in \{8; 12; 18; 22\} \\ &\Leftrightarrow 2M - 15 \in \{-7; -3; 3; 7\} &&\Leftrightarrow \mathrm{Abs}(2M - 15) \in \{3; 7\} \\ &\Leftrightarrow 5 - \mathrm{Abs}(2M - 15) \in \{-2; 2\} &&\Leftrightarrow \mathrm{Abs}(5 - \mathrm{Abs}(2M - 15)) = 2 \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de définir la fonction donnant le nombre de jours du mois d'ordre $M$ dans l'année $A$ :

$$\boxed{\mathrm{NbreJoursMois}(M; A) = \begin{cases} 28 + \mathrm{Biss}(A) & \mathrm{si}\ M = 2 \\ 30 + \mathrm{NonNul}(\mathrm{Abs}(5 - \mathrm{Abs}(2M - 15)) - 2) & \mathrm{sinon} \end{cases}} \qquad (2)$$

Et dans le même élan, une fonction booléenne qui teste la validité d'une date :

$$\boxed{\mathrm{DateValide}(J; M; A) = (A \geq 1583)\mathrm{ET}(1 \leq M \leq 12)\mathrm{ET}(1 \leq J \leq \mathrm{NbreJoursMois}(M, A))} \qquad (3)$$

Retour au sommaire

### 3. Années et mois modifiés

Le fait que le jour supplémentaire des années bissextiles soit ajouté en plein milieu de l'année complique sensiblement les calculs sur les dates. Nous allons donc opérer un léger décalage pour pallier cet inconvénient et nous arranger pour que nos années ainsi modifiées commencent le 1 mars. Ces années et mois modifiés sont notés $A'$ et $M'$ et sont définis de la façon suivante :

$$\begin{cases} M \geq 3 & \Rightarrow \quad M' = M - 2 \quad \text{et} \quad A' = A \\ M \leq 2 & \Rightarrow \quad M' = M + 10 \quad \text{et} \quad A' = A - 1 \end{cases}$$

Ainsi, le mois de mars devient le premier et le mois de février le douzième... de l'année précédente. L'intérêt est flagrant pour la manipulation des années bissextiles. Prenons par exemple $A = 2020$. Suivant qu'on se situe dans les deux premiers mois ou dans les suivants, il faut ou pas tenir compte du jour supplémentaire. Alors que lorsqu'on se situe dans l'année modifiée $A' = 2020$, le jour supplémentaire dû au fait que 2020 est bissextile est passé puisque c'est le dernier jour de l'année modifiée $A' = 2019$. Il faut juste garder présent à l'esprit que si $A'$ répond au critère des années bissextiles, c'est $A' - 1$ qui compte 366 jours. Nous noterons les dates modifiées entre double parenthèses: par exemple $(15; 02; 2019) = ((15; 12; 2018))$. Leur calcul sera fait de la façon suivante :

$$\boxed{M' = 1 + ((M + 9)\mathrm{mod}12) \qquad A' = A - 1 + \mathrm{NonNul}(M\mathrm{div}3)} \tag{4}$$

### 4. Comptage de jours

Bien que les calculs n'aient de sens que depuis 1583, imaginons dans un premier temps, pour simplifier le comptage, que ce calendrier soit en vigueur depuis le 1 mars de l'hypothétique année 0. Nous sommes à la date $(J\ ;\ M\ ;\ A)$ à 0h. La date modifiée est $((J\ ;\ M'\ ;\ A'))$ et le 1 mars de l'hypothétique année 0 est donc le $((01; 01; 0000))$. Nous nous placerons toujours à 0h de la date considérée.

#### 4.1 Les années entières depuis le $((\mathbf{01}; \mathbf{01}; \mathbf{0000}))$

Calculons ici le nombre de jours écoulés du $((01; 01; 0000))$ au $((01; 01; A'))$. Sur cette période, il y a $A'$ années entières écoulées, dont les millésimes vont de 0 à $A' - 1$. En comptant 365 jours par année, cela nous fait donc déjà $365 \times A'$ jours écoulés. A cette quantité, il faut bien sûr ajouter autant de fois 1 qu'il y a d'années comportant 366 jours. Or, dans ce système, une année modifiée $K \in \{0; 1; 2; \dots; A' - 1\}$ comporte 366 jours lorsque Biss$(K + 1)$ vaut 1. Il nous faut donc ajouter le nombre de millésimes bissextiles parmi les nombres $\{1; 2; 3; \dots; A' - 1; A'\}$ . Il nous suffit d'ajouter le nombre de multiples de 4, en enlevant le nombre de multiples de 100 qui ont été comptés en trop parmi les multiples de 4, puis en ajoutant les multiples de 400 qui n'ont finalement pas été comptabilisés puisque ajoutés avec les multiples de 4 et enlevés avec les multiples de 100. Le nombre de multiples de $p$ dans $\{1; 2; 3; \dots; A' - 1; A'\}$ est $(A'\mathrm{div}p)$. Nous en déduisons que le nombre de jours écoulés du $((01; 01; 0000))$ au $((01; 01; A'))$ est :

$$365 \times A' + (A'\mathrm{div}4) - (A'\mathrm{div}100) + (A'\mathrm{div}400)$$

Retour au sommaire

4.2 Les mois entiers

Ici, nous allons calculer le nombre de jours écoulés du $((01;01;A'))$ au $((01;M';A'))$. N'oublions pas que le mois de mars a le numéro $M'=1$ et février $M'=12$. Si les mois possédaient tous 30 jours, le nombre cherché vaudrait $30\times(M'-1)$. Comparons dans un tableau le nombre cherché à cette quantité :

| **mois** | $\boldsymbol{M'}$ | $\mathbf{30\times(M'-1)}$ | **nombre de jours écoulés au 1 du mois** | **différentiel** |
|---|---|---|---|---|
| mars | 1 | 0 | 0 | 0 |
| avril | 2 | 30 | 31 | +1 |
| mai | 3 | 60 | 61 | +1 |
| juin | 4 | 90 | 92 | +2 |
| juillet | 5 | 120 | 122 | +2 |
| août | 6 | 150 | 153 | +3 |
| septembre | 7 | 180 | 184 | +4 |
| octobre | 8 | 210 | 214 | +4 |
| novembre | 9 | 240 | 245 | +5 |
| décembre | 10 | 270 | 275 | +5 |
| janvier | 11 | 300 | 306 | +6 |
| février | 12 | 330 | 337 | +7 |

Nous allons chercher une fonction sous la forme

$$f_\alpha :\ x \to \mathrm{E}(\alpha x) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

telle que

$$\forall M' \in \{1;2;3;\dots;12\},\ f_\alpha(M') = \text{différentiel associé à } M'$$

L'analyse de tous les cas donne le tableau suivant :

$$\begin{array}{llll}
f_\alpha(1)=0 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(\alpha)=0 \Leftrightarrow & 0\le\alpha<1 \Leftrightarrow & \alpha\in[0;1[\\
f_\alpha(2)=1 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(2\alpha)=1 \Leftrightarrow & 1\le 2\alpha<2 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;1[\\
f_\alpha(3)=1 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(3\alpha)=1 \Leftrightarrow & 1\le 3\alpha<2 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/3;2/3[\\
f_\alpha(4)=2 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(4\alpha)=2 \Leftrightarrow & 2\le 4\alpha<3 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;3/4[\\
f_\alpha(5)=2 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(5\alpha)=2 \Leftrightarrow & 2\le 5\alpha<3 \Leftrightarrow & \alpha\in[2/5;3/5[\\
f_\alpha(6)=3 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(6\alpha)=3 \Leftrightarrow & 3\le 6\alpha<4 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;2/3[\\
f_\alpha(7)=4 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(7\alpha)=4 \Leftrightarrow & 4\le 7\alpha<5 \Leftrightarrow & \alpha\in[4/7;5/7[\\
f_\alpha(8)=4 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(8\alpha)=4 \Leftrightarrow & 4\le 8\alpha<5 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;5/8[\\
f_\alpha(9)=5 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(9\alpha)=5 \Leftrightarrow & 5\le 9\alpha<6 \Leftrightarrow & \alpha\in[5/9;2/3[\\
f_\alpha(10)=5 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(10\alpha)=5 \Leftrightarrow & 5\le 10\alpha<6 \Leftrightarrow & \alpha\in[1/2;3/5[\\
f_\alpha(11)=6 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(11\alpha)=6 \Leftrightarrow & 6\le 11\alpha<7 \Leftrightarrow & \alpha\in[6/11;7/11[\\
f_\alpha(12)=7 \Leftrightarrow & \mathrm{E}(12\alpha)=7 \Leftrightarrow & 7\le 12\alpha<8 \Leftrightarrow & \alpha\in[7/12;2/3[
\end{array}$$

Toutes ces conditions sont simultanément réalisées lorsque $\alpha\in[7/12;3/5[$.
Prenons par exemple $\alpha=0{,}59$. Le nombre de jours écoulés du $((01;01;A'))$ au $((01;M';A'))$ vaut donc :

$$30(M'-1)+\mathrm{E}(0{,}59\times M')$$

Retour au sommaire

### 4.3 Dans le mois en cours

Là, c'est simple! Le nombre de jours écoulés du $((01; M'; A'))$ au $((J; M'; A'))$ est $J - 1$.

### 4.4 Depuis le 1 mars 0000

En ajoutant les résultats précédents, le nombre de jours écoulés du 1 mars 0000 à la date $((J; M'; A'))$ vaut :

$$365 \times A' + (A' \mathrm{div} 4) - (A' \mathrm{div} 100) + (A' \mathrm{div} 400) + 30(M' - 1) + \mathrm{E}(0{,}59 \times M') + J - 1$$

### 4.5 Depuis le 0 janvier 1901

En astronomie, les données de référence pour le positionnement d'un astre sont souvent données au 0 janvier 1901, autrement dit le 31 décembre 1900, à 0 heure.
Le résultat du paragraphe précédent, lorsqu'il est appliqué à la date $(31; 12; 1900)$ égale à $((31; 10; 1900))$ donne $365 \times 1900 + 765$. En soustrayant cette valeur du résultat général du paragraphe précédent, on obtient le nombre de jours écoulés du 0 janvier 1901 (0h) à la date $(J; M; A)$ (0h) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{N}bre Jours 1901(J; M; A) = & 365(A' - 1900) + (A' \mathrm{div} 4) - (A' \mathrm{div} 100) + (A' \mathrm{div} 400) \\ & +30(M' - 1) + \mathrm{E}(0{,}59 M') + J - 766 \\ & \\ \text{avec} & A' \text{et } M' \text{définis en (4)} \end{array}} \qquad (5)$$

Notons que ce calcul n'est valable que si $(J; M; A)$ est une date valide au sens de (3) et que si $A \leq 1900$, le résultat est négatif ce qui traduit le fait qu'on remonte dans le temps.

### 4.6 Le Jour Julien

Le calendrier Julien, mis en place en 46 avant J.C., comptait des années de 365,25 jours (une année bissextile tous les 4 ans) et perdurera jusqu'à l'avènement du calendrier Grégorien. Avant lui, les années comptaient tout simplement 365 jours. Un système de comptage des jours, nommé par extension *Jour Julien*, est initialisé au 1 janvier 4713 avant J.C. à midi. Ce système est adapté au calcul de distance entre deux dates au travers des changements de calendrier. Sachant que le numéro de Jour Julien du 0 janvier 1901 à 12 heures vaut 2 415 385 on en déduit, avec (5) le numéro de Jour Julien de la date $(J; M; A)$ à 12 heures :

$$\boxed{\mathrm{JJ}(J; M; A) = \mathrm{NbreJours1901}(J; M; A) + 2\,415\,385} \qquad (6)$$

Notons que ce calcul n'est valable que si $(J; M; A)$ est une date valide au sens de (3).

### 4.7 Nom du jour

Qui plus est, des noms sont donnés aux jours selon un cycle d'ordre 7. Le 0 janvier 1901 (alias 31 décembre 1900) était un lundi. Indexons les jours : lundi(0) ; mardi(1) ; mercredi(2) ; jeudi(3) ; vendredi(4) ; samedi(5) et dimanche(6). Le nom du jour $(J, M, A)$ est directement donné par le reste de la division par 7 du nombre de jours écoulés depuis le 0 janvier 1901 (même si celui-ci est négatif).

Retour au sommaire

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{NomJour}(J;M;A) = \text{NbreJours1901}(J;M;A)\text{mod}7 \\ \text{la valeur 0 correspondant au lundi}\end{array}} \qquad (7)$$

Déterminons par exemple le nom du jour du 14 juillet 1789. Le calcul donne :

$$\text{NbreJours1901}(14;07;1789) = -40711 = -5816 \times 7 + 1 \quad \Rightarrow \quad \text{NomJour}(14;07;1789) = 1$$

ce qui correspond à un mardi.

## 5. Date d'un Jour Julien

On se donne ici un numéro entier $N_J$ de Jour Julien correspondant à une date $(J;M;A)$ à 12 heures. Le but est bien sûr de déterminer cette date. Comme elle doit appartenir au calendrier Grégorien, on supposera que $N_J \geq 2\ 299\ 239$ qui est le numéro de Jour Julien du 1 janvier 1583 à 12 heures. En étendant une fois de plus le calendrier Grégorien dans le passé jusqu'à l'hypothétique date du 1 mars 0000, le jour Julien de cette date à 12 heures aurait été (voir 6) :

$$\text{JJ}(01;03;0000) = -64\ \ 265 + 2\ \ 415\ \ 385 = 1\ \ 721\ \ 120$$

Et donc le nombre de jours écoulés du 1 mars 0000 à la date cherchée est

$$N = N_J - 1\ \ 721\ \ 120$$

(qu'on se place à 0 heure aux deux dates, ou à 12 heures aux deux dates, cela ne modifie rien au calcul).

### 5.1 L'année modifiée de la date cherchée

En remarquant que, sur une longue période, le temps moyen d'une année du calendrier Grégorien est

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365{,}2425$$

posons $\quad A' = \text{E}\left(\frac{N}{365{,}2425}\right) \quad$ et rappelons que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x - 1 < \text{E(x)} \leq x$

Soit $N_1$ le nombre de jours écoulés du $((01;01;0000)$ au $((01;01;A'))$.

Nous avons la chaîne d'inégalités et égalités suivante :

$$N_1 \quad = \quad 365 \times A' + \text{E}\left(\frac{A'}{4}\right) - \text{E}\left(\frac{A'}{100}\right) + \text{E}\left(\frac{A'}{400}\right)$$

$$N_1 \quad < \quad 365 \times A' + \frac{A'}{4} - \left(\frac{A'}{100} - 1\right) + \frac{A'}{400}$$

$$N_1 \quad < \quad 365{,}2425 \times A' + 1$$

$$N_1 \leq 365{,}2425 \times \frac{N}{365{,}2425} + 1$$

$$N_1 \leq N + 1$$

$N_1$ et $N$ étant des entiers tels que $N_1 < N + 1$, on en déduit que $N_1 \leq N$.

Retour au sommaire

Soit $N_2$ le nombre de jours écoulés du $((01;01;0000)$ au $((01;01;A'+1))$.
Nous avons la chaîne d'inégalités et égalités suivante :

$$\begin{array}{lll} N_2 & = & 365\times(A'+1)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{4}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{100}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{400}\right) \\ N_2 & > & 365\times(A'+1)+\left(\frac{A'+1}{4}-1\right)-\frac{A'+1}{100}+\left(\frac{A'+1}{400}-1\right)=365{,}2425\times(A'+1)-2 \\ N_2 & > & 365{,}2425\times\left(\frac{N}{365{,}2425}-1+1\right)-2=N-2 \end{array}$$

$N_2$ et $N$ étant des entiers tels que $N_2 > N-2$, on en déduit que $N_2 \geq N-1$ Finalement, $N_1 \leq N \leq N_2+1$. En clair, cela signifie que le jour cherché est dans l'une des années modifiées $A'$ ou $A'+1$. Pour le savoir, il suffira de comparer $N$ à $N_2$ :

$$\text{Si } N \geq 365(A'+1)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{4}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{100}\right)+\mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{400}\right) \text{ Alors Cas}(^*) A' \leftarrow A'+1$$

5.2 Mois modifié de la date cherchée

Si nous sommes dans le cas (*) du paragraphe précédent, les choses sont simples : le mois modifié cherché est $M'=1$ (car $N=N_2$ ou $N=N_2+1$). Plaçons-nous donc dans le cas où $N_1 \leq N < N_2$, et depuis le premier jour de l'année dans laquelle on se trouve, il s'est écoulé $N'=(N-N_1)$ jours. Si $N' \geq 337$, on sait (voir 4.2) que $M'=12$.

Raisonnons donc pour $N' < 337$, ce qui signifie que $1 \leq M' \leq 11$. Au premier jour de $M'$, il s'est écoulé depuis le début de l'année $A'$ : $R_1 = 30(M'-1)+\mathrm{E}(0{,}59M')$.
Au dernier jour de $M'$, il s'est écoulé depuis le début de l'année $A'$: $R_2 = 30M'+\mathrm{E}\big(0{,}59(M'+1)\big)-1$. Nous devons donc avoir les inégalités suivantes :

$$30(M'-1)+0{,}59M'-1 < R_1 \leq N' \leq R_2 < 30M'+0{,}59(M'+1)-1$$

L'inégalité de droite est stricte car $0{,}59(M'+1)$ n'est jamais un entier. Cela nous donne $30{,}59M'-31 < N' < 30{,}59M'-0{,}41$ ce qui conduit à $\frac{N'+0{,}41}{30{,}59} < M' < \frac{N'+31}{30{,}59}$.
En remarquant que l'amplitude de cet encadrement vaut exactement 1, on en déduit que $M' = \mathrm{E}\left(\frac{N'+31}{30{,}59}\right)$. Si on analyse le cas où $N' \geq 337$, et donc $337 \leq N' \leq 366$, on constate que $\frac{337+31}{30{,}59} \approx 12{,}03$ et que $\frac{366+31}{30{,}59} \approx 12{,}98$, et donc la formule précédente fonctionne encore dans ce cas en donnant bien $M'=12$.
Le quantième du jour dans le mois est ensuite déterminé aisément : $J = N'-R_1+1$.

5.3 Le retour à la date réelle

On vérifiera aisément que les formules établies en (4) se retournent pour donner :

$$M = 1+((M'+1)\mathrm{mod}12) \qquad \text{et} \qquad A = A'+(M'\mathrm{div}11)$$

Retour au sommaire

5.4 Bilan

A défaut de pouvoir fournir une fonction donnant la date (à 12 heures) du calendrier Grégorien du jour Julien $N_J$, avec $N_J$ entier et $N_J \geq 2\ 299\ 239$, voici un morceau de programme donnant le résultat :

$N \leftarrow N_J - 1\ 721\ 120$
$A' \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{N}{365{,}2425}\right)$
$N_1 = 365A' + \mathrm{E}\left(\frac{A'}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{A'}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{A'}{400}\right)$
$N_2 = 365(A'+1) + \mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{A'+1}{400}\right)$
Si$N$ $N_2$Alors
  $A' \leftarrow A' + 1$
  $M' \leftarrow 1$
  $J \leftarrow N - N_2 + 1$
Sinon
  $M' \leftarrow \mathrm{E}\left(\frac{N-N_1+31}{30{,}59}\right)$
  $J \leftarrow N - N_1 - 30(M'-1) - \mathrm{E}(0{,}59M') + 1$
FinSi
$M \leftarrow 1 + ((M'+1)\mathrm{mod}12)$
$A \leftarrow A' + (M'\mathrm{div}11)$
Retourner$(J; M; A)$ (8)

---

***MATHS ET VIE COURANTE***

# AH, LA BELLE ÉTOILE !


On vient de loin pour montrer de la géométrie dans la vallée de la Meuse. Le camion est reparti, son chauffeur n'a pas eu le temps de prendre connaissance du sophisme présenté dans le Petit Vert n°126 et sa solution mise dans le Petit Vert n°127.

Retour au sommaire

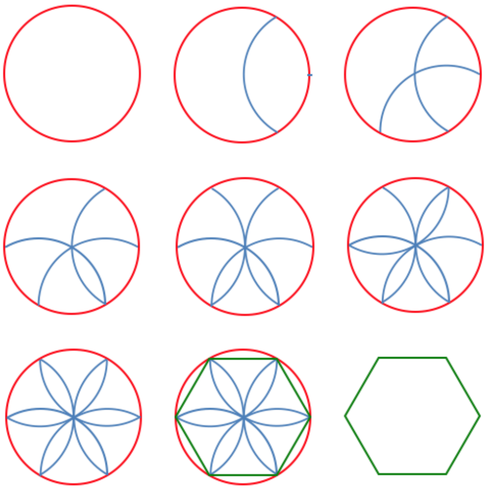
***MATHS ET ARTS***

# LA FAISEUSE DE NEIGE

Groupe Maths et Arts de l'APMEP Lorraine

« En attendant Bourges », nos collègues de Lyon ont organisé leur journée régionale le samedi 17 octobre dans un bâtiment de l'université Claude Bernard. Marie Lhuissier y était annoncée pour présenter un de ses contes mathématiques et animer un atelier à propos de son utilisation en classe. Nous ne sommes pas allés à Lyon mais nous sommes allés visiter le site de l'auteure. Parmi les trois textes offerts à la lecture, « la faiseuse de neige » semble bien de saison.

Le texte est illustré par Elis Tamila qui utilise des hexagones réguliers juxtaposés.



À partir du cycle 2, les élèves aiment manipuler le compas pour tracer des rosaces qu'ils colorient avec plaisir. Ils sauront tracer des hexagones.

Plus tard, lorsqu'ils seront au collège, ils pourront se convaincre que les polygones tracés sont réguliers



Le Petit Vert est preneur des illustrations imaginées par vos élèves.

Retour au sommaire

***MATHS ET ARTS***

# PHOTOGRAPHIE ET ORIGAMI

Fin novembre 2019, le numéro 1516 de « Courrier International » s'est fait l'écho de la présentation faite dans *Smithsonian Magazine* d'œuvres de la photographe Dacha Pears. Dans la série nommée « Resistance », cette artiste russe installée à Helsinki se met en scène avec des oiseaux réalisés en Origami.

Ce type d'environnement se retrouve dans la série « Life of Folds ».

L'Origami met en situation de nombreuses propriétés géométriques. Ne pourrait-on pas imaginer des photos prises par des élèves utilisant des animaux simples à réaliser tels la cocotte en papier bien connue de nos lecteurs ?


***VIE DE LA RÉGIONALE***

# JOURNÉE RÉGIONALE : 24 MARS 2021

**La prochaine Journée régionale aura lieu le mercredi 24 mars prochain, au lycée Stanislas de Villers lès Nancy, si les conditions sanitaires le permettent.**

**Elle débutera par une conférence de Marie Duflot-Krémer à propos de « Informatique en classe, des compétences à la pratique ». Elle se poursuivra par l'assemblée générale, les réunions des commissions par niveau, et se terminera par deux plages d'ateliers.**

**Le repas pourra être pris au lycée Stanislas.**

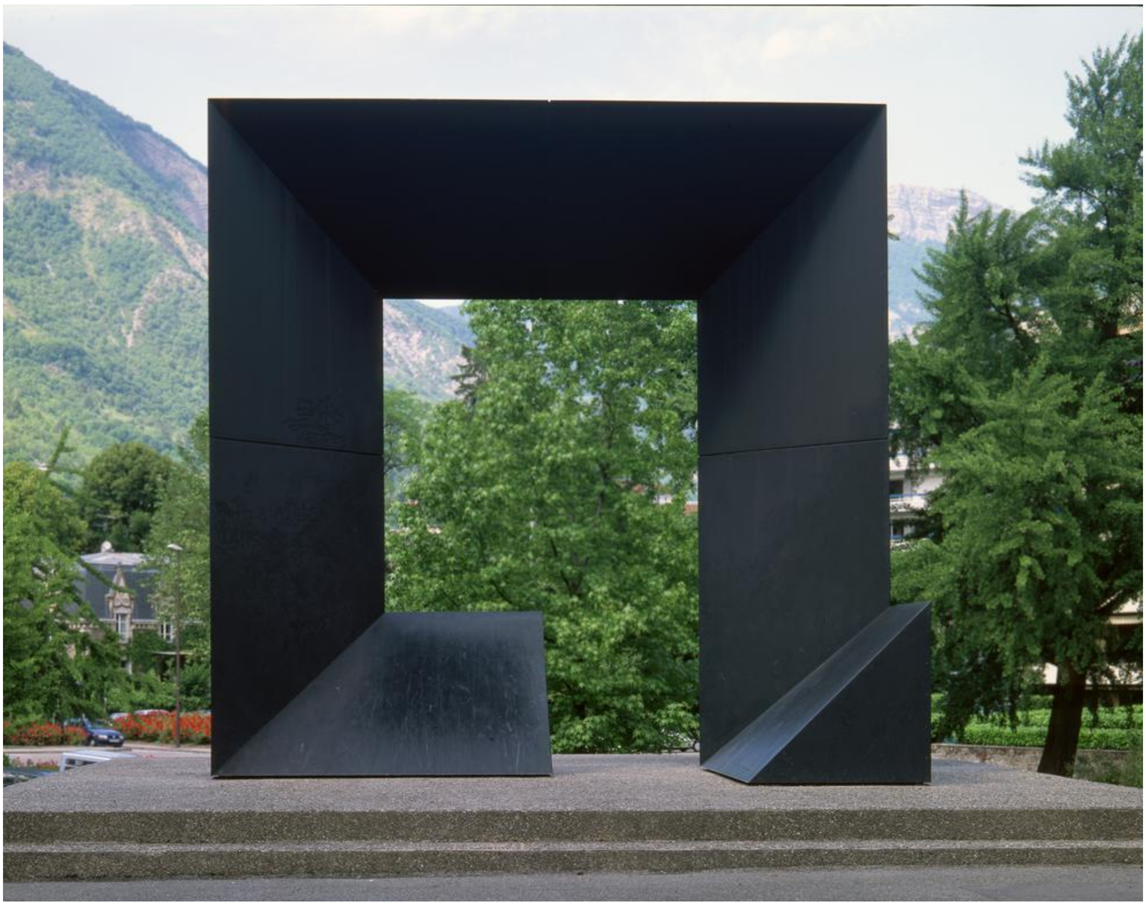
Le programme de cette journée sera envoyé à tous les adhérents, ainsi qu'aux participants des années précédentes. Dès que vous l'aurez reçu, communiquez-le à vos collègues qui ne sont pas encore adhérents … et faites-en sorte qu'ils le deviennent !

Retour au sommaire

***MATHS ET ARTS***

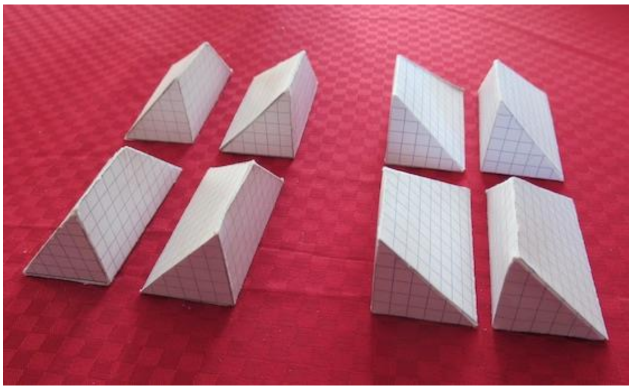
# MONOFORME 26

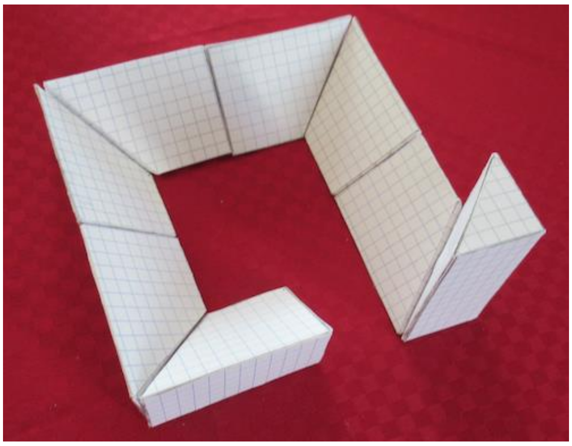
Groupe Maths et Arts de l'APMEP Lorraine



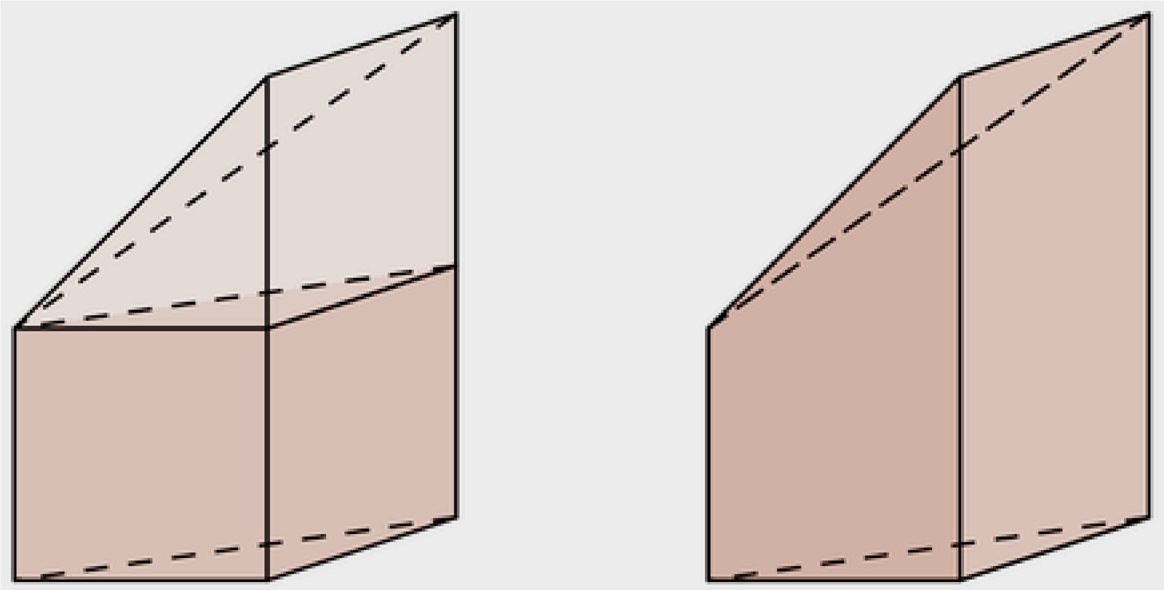
Cette œuvre de Gottfried Honneger a été installée à Grenoble en 1988 pour commémorer la Journée des Tuiles, émeute qui a précédé les premiers moments de la Révolution Française.

L'œuvre est un assemblage de deux fois quatre modules métalliques : pour chaque module, l'amateur de belles choses mathématiques reconnaitra un demi-cube accolé à un tiers de cube, donnant envie d'en réaliser ou d'en faire réaliser une maquette.



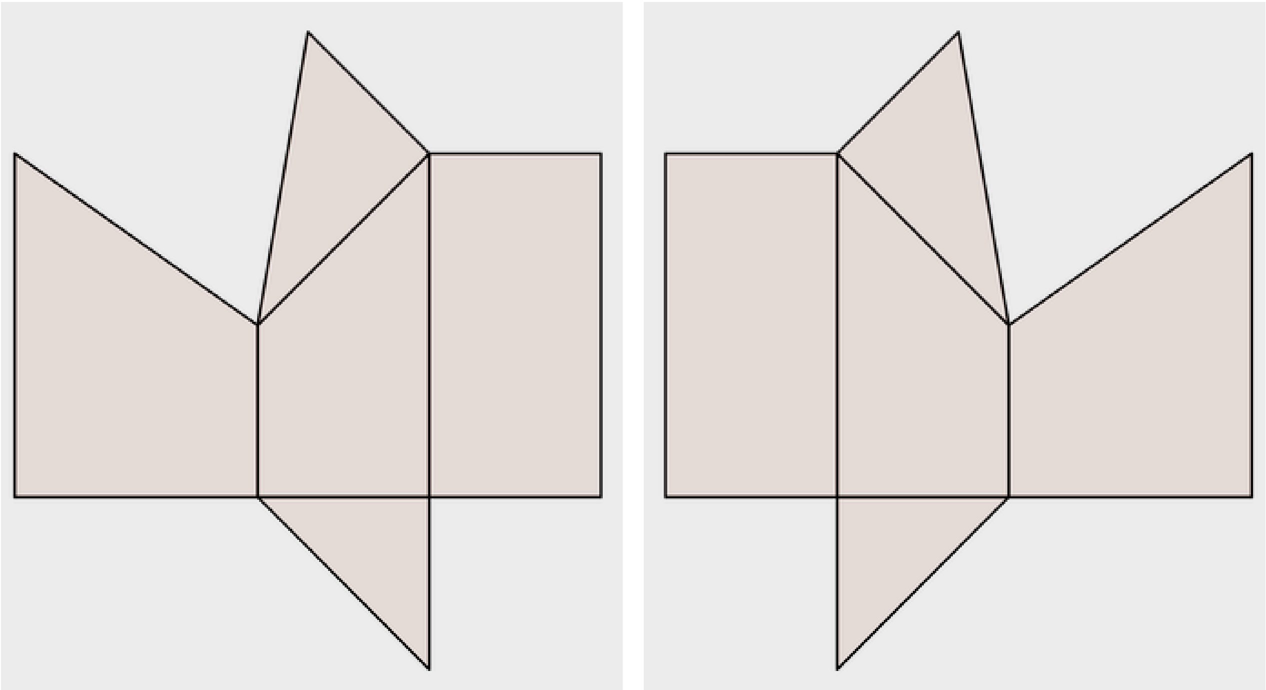


Retour au sommaire



Deux solides sont accolés pour former un module de l'œuvre. Leur construction en plusieurs exemplaires permet de se convaincre que le prisme est un demi cube et que la pyramide est un tiers de cube.

Pour construire les huit modules quatre exemplaires de chacun des patrons ci-dessous pourront être utilisés.



Il est également possible d'utiliser huit exemplaires d'un même patron : quatre d'entre eux seront pliés en utilisant des « plis vallées » et les quatre autres le seront en utilisant des « plis montagnes », dénominations bien connues de nos lecteurs amateurs d'Origami (c'est ce qui a été fait pour la création des modules photographiés page précédente) !

Retour au sommaire

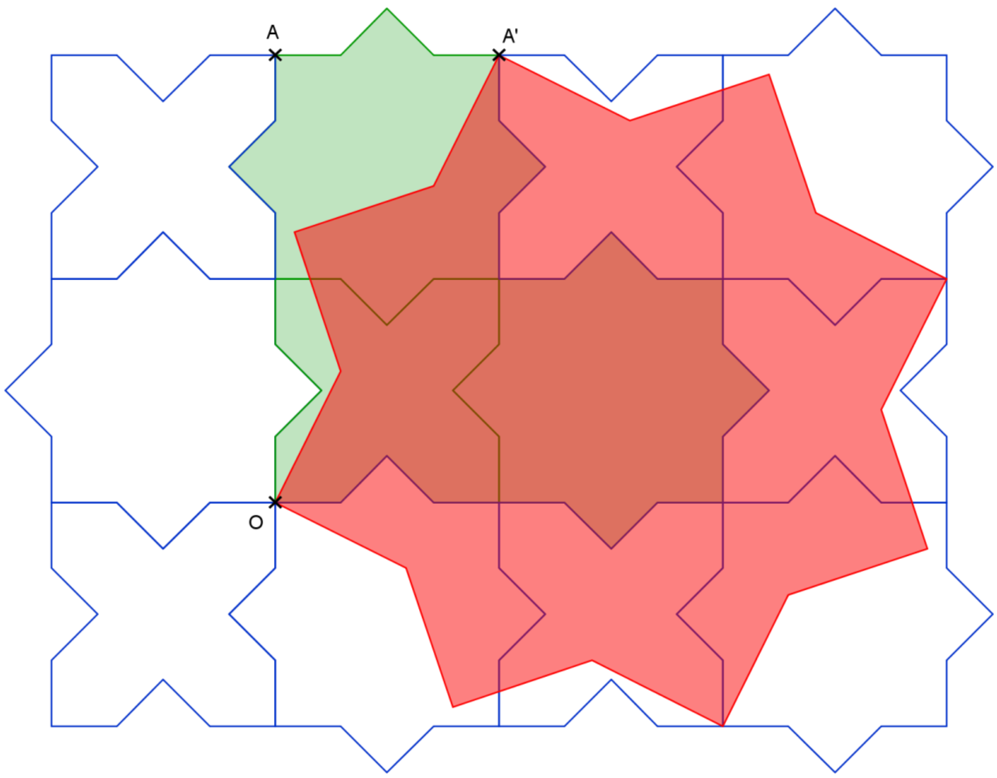
***Maths et découpages***

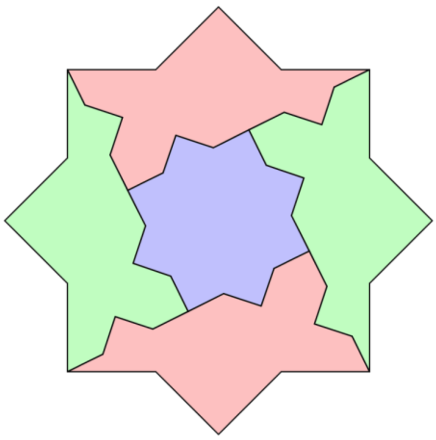
# PENTASECTION DE L'OCTOGONE ÉTOILÉ

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

*Le Petit Vert n°141 abordait la trisection de ce polygone. Lors de ses recherches, Fathi en a imaginé une pentasection.*

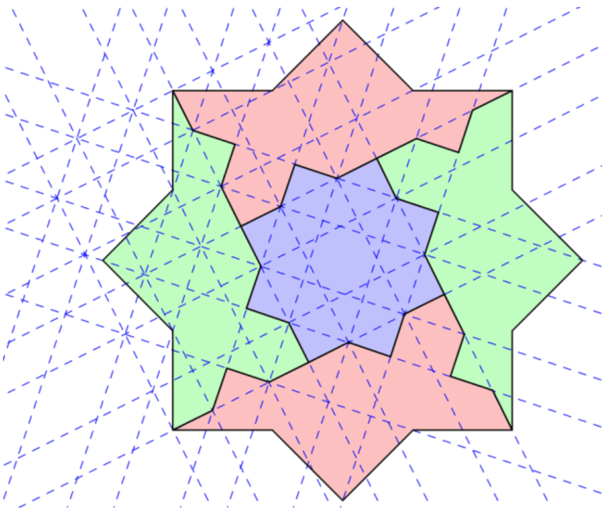
La transformation du pavage croix-étoile par la similitude de centre O transformant A en A' montre un découpage de la grande étoile en cinq surfaces de même aire.

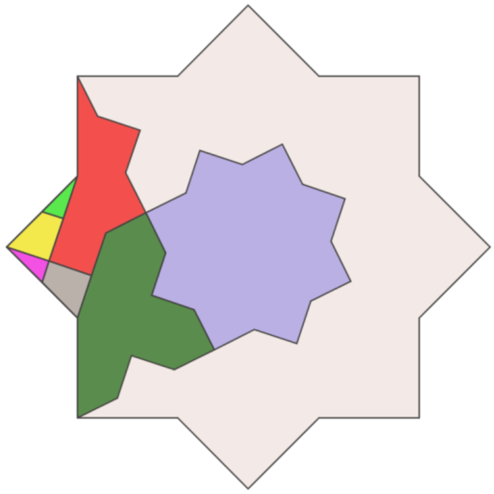


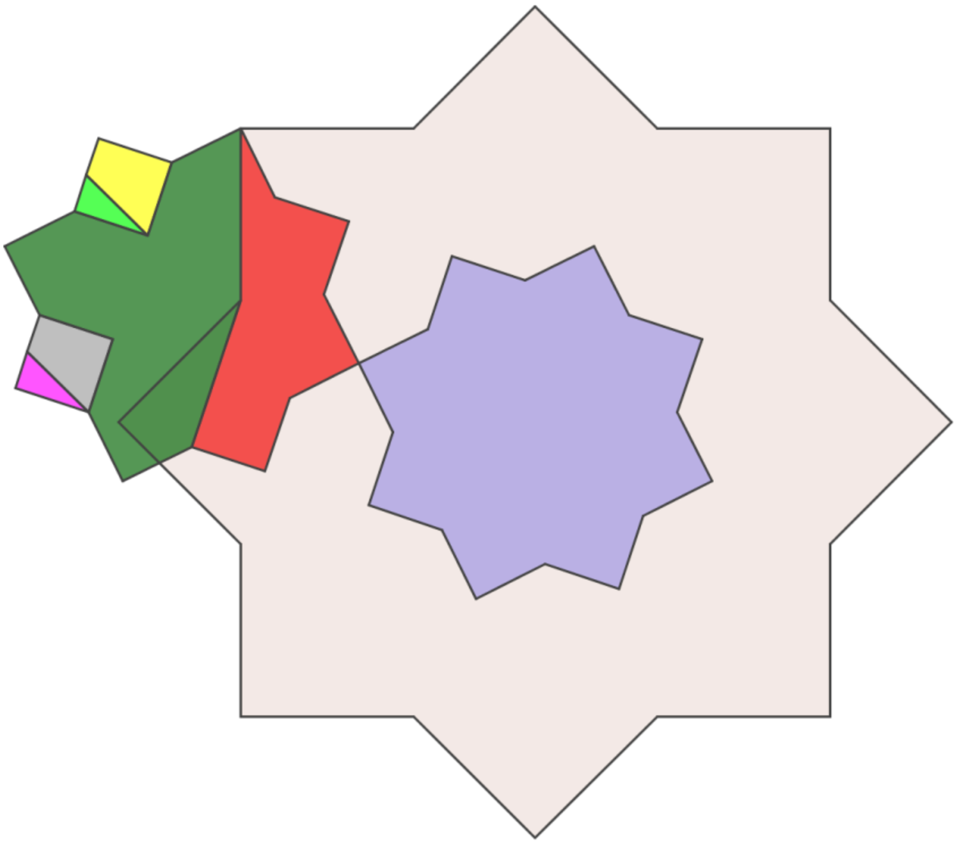
Chacune des surfaces entourant l'étoile bleue peut être transformée en une étoile à huit branches.

Retour au sommaire





Le réseau de droites permettant d'obtenir le pavage croix-étoile donne un découpage réalisant la transformation souhaitée



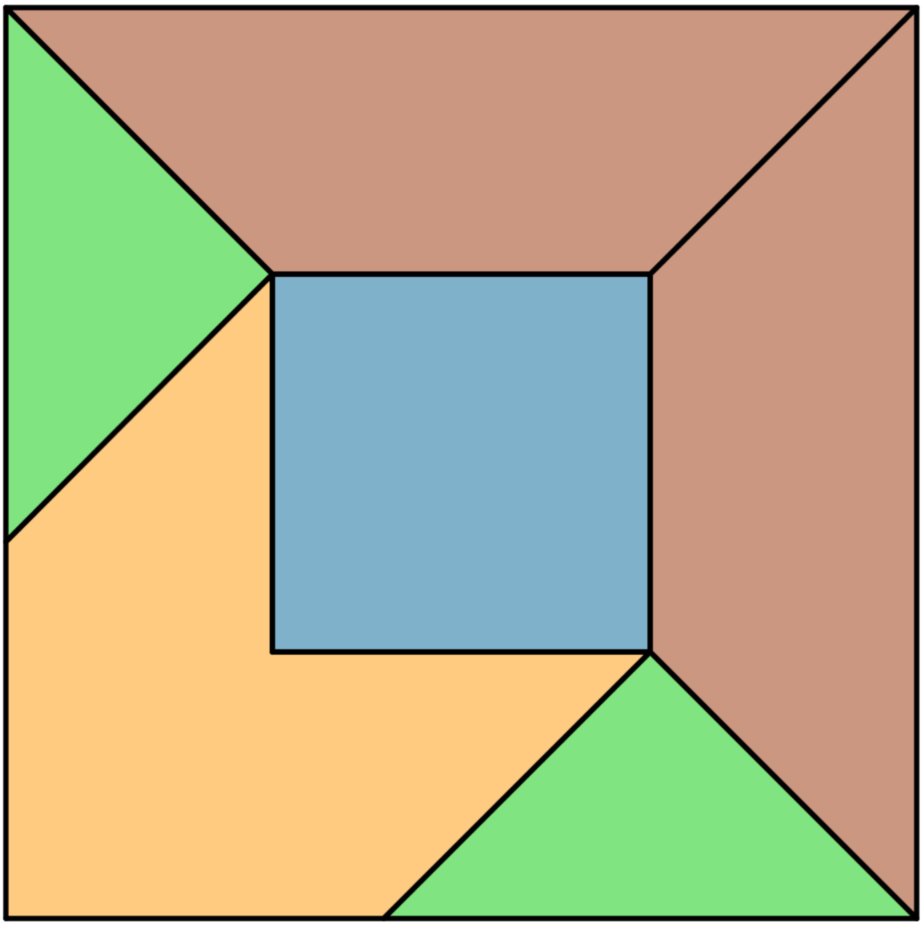
Retour au sommaire

***Maths et Jeux***

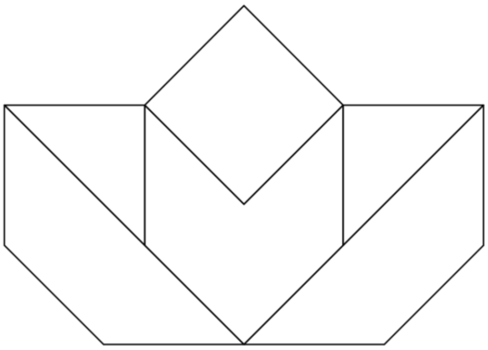
# LE PUZZLE « KDO 2020 »

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

Fin 2019, Fathi Drissi a imaginé ce puzzle pour le Calendrier de l'Avent mathématique déposé comme les années précédentes dans le CDI de son établissement.

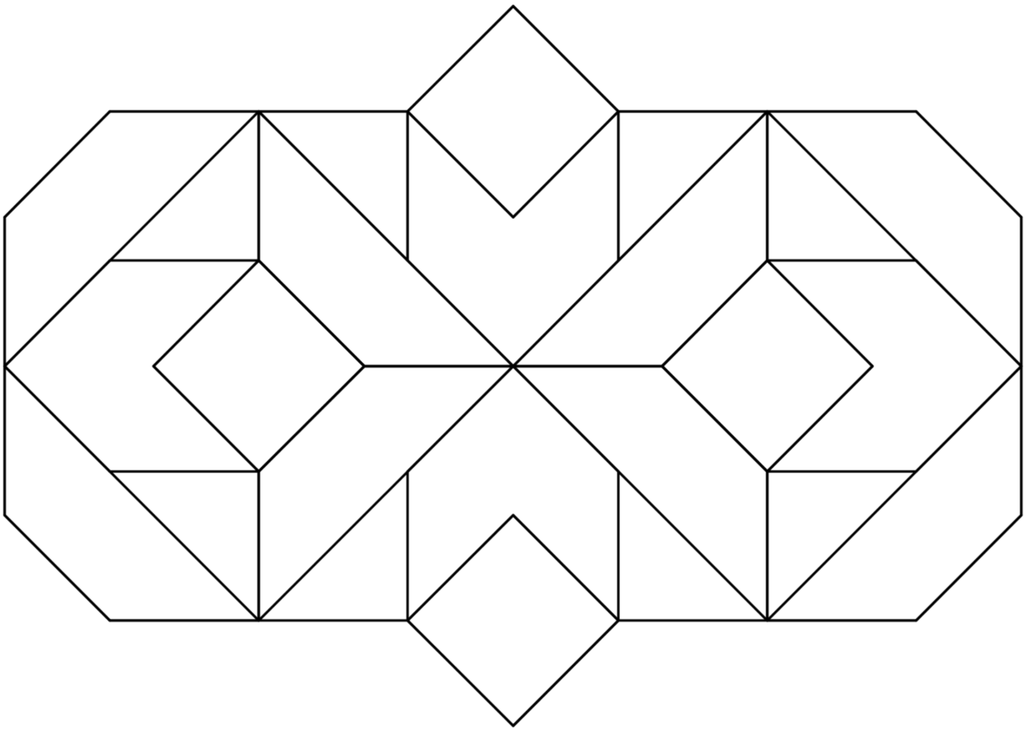


Travaillant sur des découpages du sceau de Salomon, l'assemblage ci-contre a retenu son attention car ses pièces peuvent être réassemblées pour former un carré.



Retour au sommaire

L’assemblage précédent permet d’obtenir un motif de base qui pave le plan.

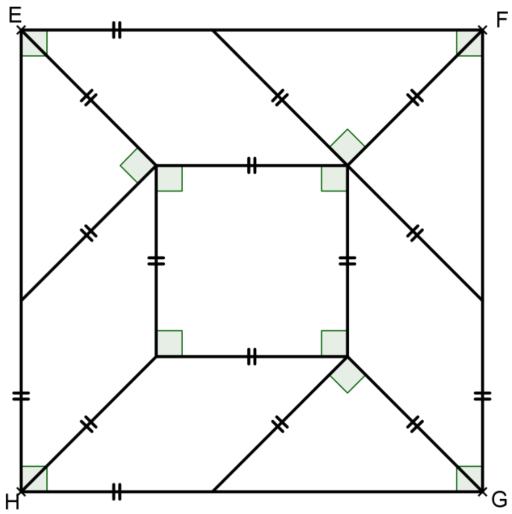


Ce motif de base fait apparaitre un autre pavage dont la cellule génératrice est le puzzle assemblé en carré auquel on applique successivement une translation et un quart de tour.

Voici une figure géométrique permettant de construire le puzzle.

Celui-ci peut être construit à partir du grand carré en utilisant uniquement la règle non graduée et le compas.

La construction à partir du petit carré est plus facile !



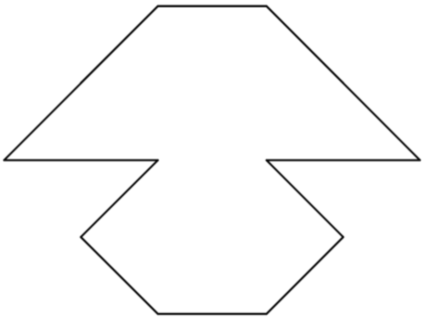

De très nombreuses réalisations sont possibles avec ces six pièces.
Celles-ci peuvent être précisées à partir de leur nom :

- un carré ;
- un triangle rectangle et isocèle ;
- un parallélogramme ;
- deux hexagones ;
- un octogone ;
- un trapèze rectangle
- une flèche ;
- deux cœurs ;
- et d’autres figures …

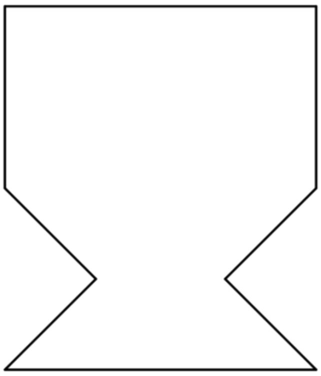
Retour au sommaire

Un dessin, colorié ou non, peut préciser l'allure de la forme à réaliser.

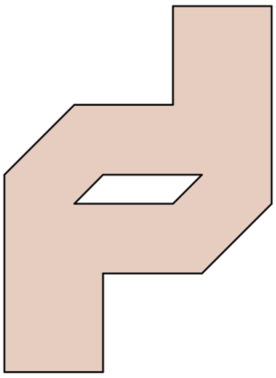
**Une lampe**



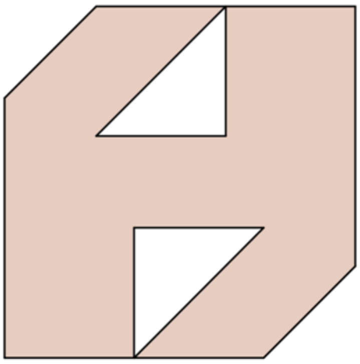
**Une coupe**



**Un trou et un centre de symétrie**

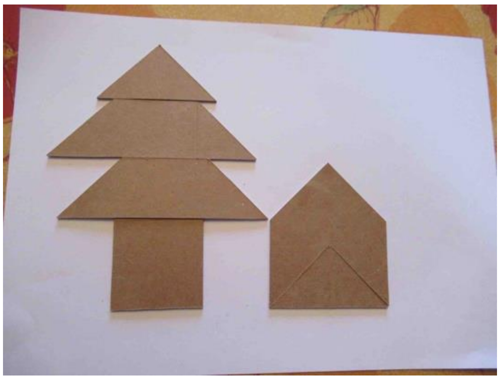


**Deux trous et un centre de symétrie**

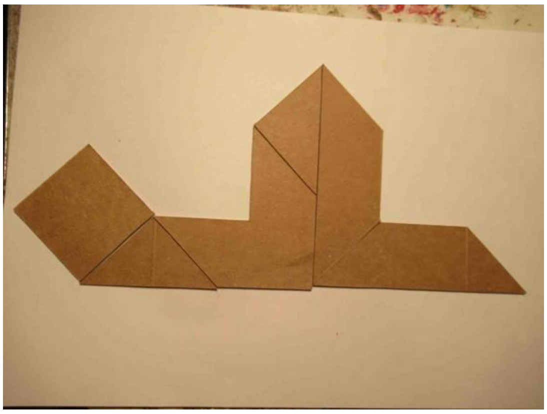


Avec de très jeunes élèves, des photos de réalisations peuvent être projetées, la couleur des pièces importe peu, seront sollicités leur reconnaissance, leur orientation et leur placement. Les assemblages figuratifs ont du succès.

**Un sapin près de la maison**



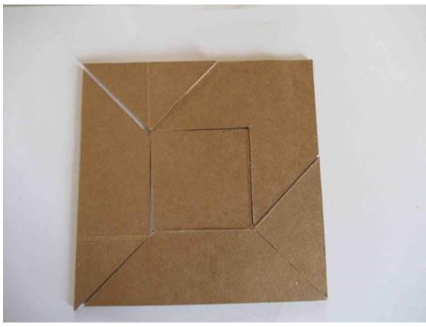
**Un escargot**

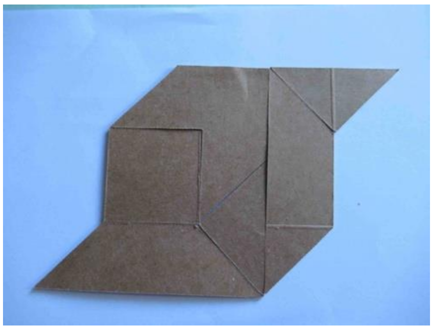


Retour au sommaire

**Des pièces déplacées**

**Du carré…** **… à l'octogone !**

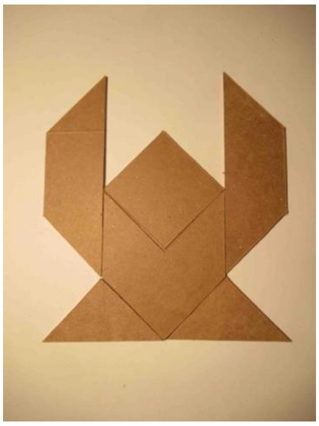




La translation des pièces est vécue par un geste.

**Placements symétriques de pièces**

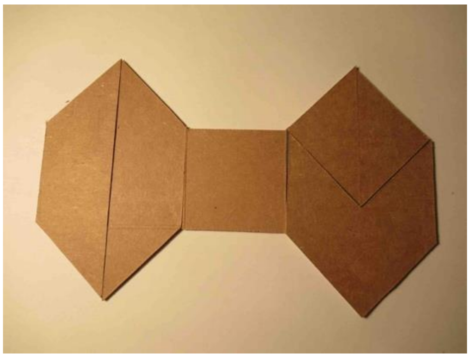
**Un « U »** **Un crabe**

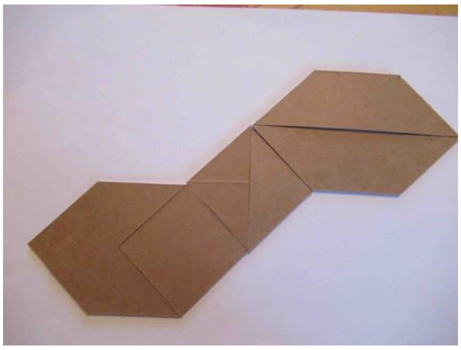


Le « carré » et le « chevron » sont assemblés pour former un hexagone admettant deux axes de symétrie. Les quatre pièces restantes sont placées pour former une configuration admettant un axe de symétrie. L'hexagone admet un centre de symétrie. Des réalisations admettant un centre de symétrie sont imaginables.

**Placements symétriques de groupes de pièces**

**Un os** **Sans nom (1)**

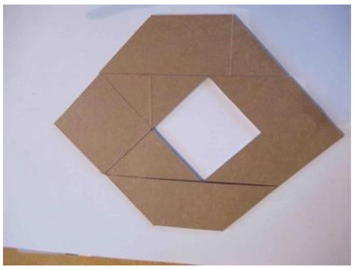




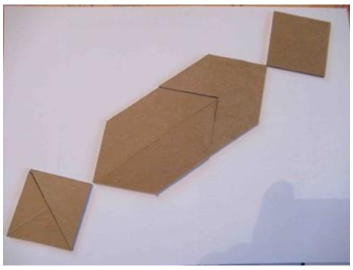
Retour au sommaire

**Des assemblages symétriques**

**Un « O »**

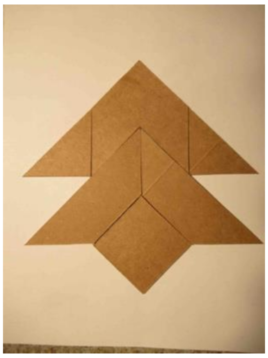


**Un bonbon**



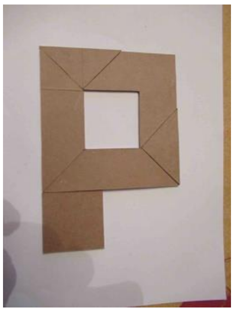
**Un *Mannele***

**Un sapin**

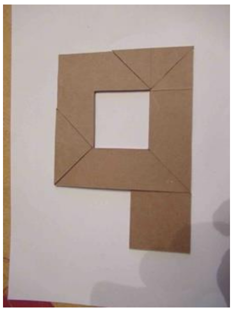


**Retournement des six pièces**

**Un « p »**

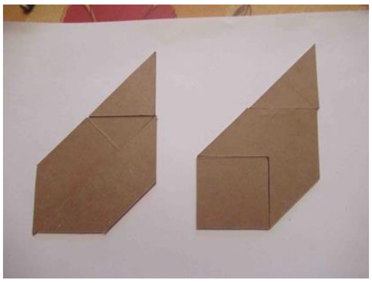


**Un « q »**

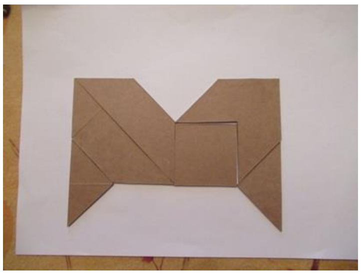


**Des assemblages superposables pour des assemblages symétriques**

**Deux pentagones**



**Un « M » à partager**



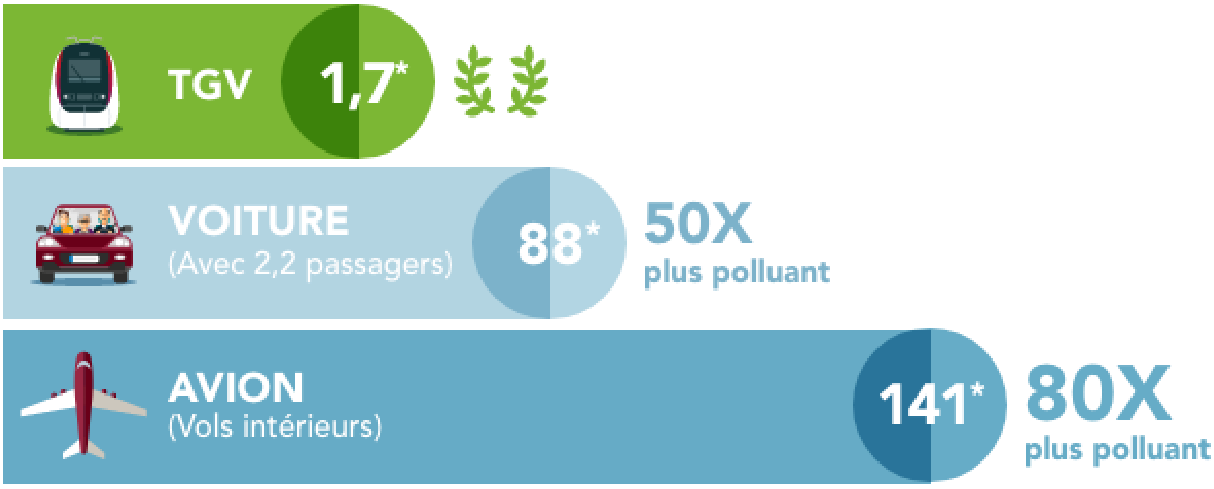
Retour au sommaire

***MATHS ET MÉDIAS***

# LA PLANÈTE ET LE TGV

## Choisir TGV INOUI c'est agir pour notre planète !

Pour les déplacements longues distances, choisir TGV INOUI c'est choisir le mode de transport motorisé qui émet le moins de $CO_2$… la preuve [(1)]:




*Grammes de $CO_2$ émis par Km et par voyageur

(1) Source ADEME - mai 2020. Comparaison des émissions de gaz à effet de serre (GES) exprimées en CO2 équivalent (CO2e) rapportées au voyageur/km pour le train TGV (consommation d'énergie de traction), avion court courrier et valeur moyenne voiture longue distance. Valeurs issues de la Base Carbone ADEME, dans le volet Données de l'article L1431.3 du code des transports - Information GES des prestations de transport.

Voici quelques remarques à propos de cette publicité reçue courant septembre 2020.

→ Vérifions les opérateurs multiplicatifs.
« 88 : 1,7 = 51,76… », « 141 : 1,7 = 82,94 ». Des arrondis à la dizaine la plus proche ont été indiqués.
→ Si la bande représentant la voiture représente 88, le lecteur aura sans doute envie de vérifier que la longueur de la bande représentant l'avion est satisfaisante, il n'aura aucune difficulté à se convaincre que la longueur de la bande représentant le TGV ne l'est pas.
→ Le choix d'indiquer la présence de 2,2 passagers dans la voiture peut surprendre. Il serait intéressant de connaitre les taux de remplissage ou le nombre de passagers des TGV et des avions qui ont été pris en compte dans ces calculs ; ils ont une incidence sur le calcul des émissions de gaz à effet de serre par voyageur.
→ De plus, il n'est pas tenu compte du fait que d'autres moyens de transport sont nécessaires pour se rendre à « Lorraine Airport », « Lorraine TGV » ou « Meuse TGV ».

La preuve annoncée manque donc quelque peu de rigueur, mais ce n'est que de la publicité !

Retour au sommaire

***MATHS ET MÉDIAS***

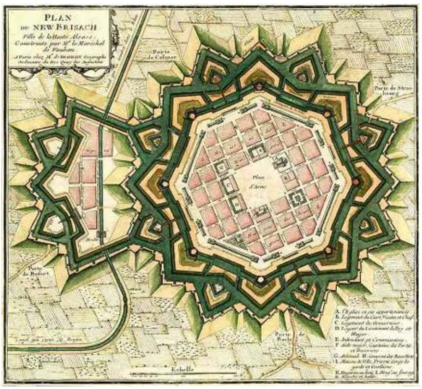
# 500 POUR 100



Nos amis les chats vont être gâtés : ce document publicitaire annonce une absorption à 500% pour cette « litière végétale agglomérante ».
100% aurait satisfait le futur acheteur. Va-t-il être cinq fois plus satisfait et vanter le « pays des merveilles de Juliet » ?
À moins que cela signifie que 100g de litière absorbent 500g de déchets. Peu agréable à vérifier pour l'acheteur…

***ANNONCE***

# À NEUF-BRISACH




La place forte de Neuf-Brisach est bien connue des amateurs de belles choses en architecture. Depuis 2018, elle abrite le MAUSA-Vauban (**M**usée d'**A**rt **U**rbain et de **S**treet **A**rt)

Le site de ce musée nous confie de nombreuses ressources, en particulier un lien vers une vidéo utilisable en classe (théorème de Thalès), un abécédaire à réaliser en Origami, des jeux à utiliser avec de jeunes enfants (en décembre, les journées ne sont pas toutes ensoleillées).

Retour au sommaire

***MATHS ET PHILO***

# ÉGALITÉ ET ÉQUITÉ, JUSTESSE ET JUSTICE

Didier Lambois

L’étymologie n’est pas, à strictement parler, une science. C’est une discipline qui se propose de réfléchir à l’origine et au sens premier des mots. Le mot « étymologie » est formé sur le grec *etumos*, qui signifiait « vrai », et *logos*, parole. Voilà ! Nous avons fait de l’étymologie, nous avons cherché l’origine et le « vrai » sens des mots. Bien sûr il faut mettre des guillemets à « vrai » car le sens des mots ne cesse d’évoluer, c’est toute une histoire, tout un problème. Il pourrait être intéressant d’examiner sous cet angle le vocabulaire mathématique mais nous nous contenterons ici d’examiner quelques concepts du vocabulaire mathématique utilisés aussi en philosophie morale.

*« La justice a toujours évoqué des idées d’égalité, de proportion, de compensation. Pensare, d’où dérivent « compensation » et « récompense », a le sens de peser ; la justice était représentée avec une balance. Équité signifie égalité. Règle et règlement, rectitude et régularité, sont des mots qui désignent la ligne. Ces références à l’arithmétique et à la géométrie sont caractéristiques de la justice à travers le cours de son histoire. »*

Bergson, Les deux sources de la morale…

S’il est une idée essentielle aux mathématiques et à la morale, c’est bien celle **d’égalité**. L’étymologie et la signification de ce concept d’égalité ne posent guère problème, du moins en mathématiques. Formé sur le latin *aequus*, égal, l’égalité mathématique renvoie à l’idée que deux quantités ou deux grandeurs peuvent être substituées l’une à l’autre, qu’elles sont équivalentes… Aie ! aie ! aie ! Attention. En parlant d’équivalence et non plus d’égalité nous allons heurter la rigueur des mathématiciens. Si les mots sont différents c’est qu’ils renvoient à des réalités différentes et la relation d’égalité n’est qu’une forme particulière de la relation d’équivalence. Efforçons-nous de ne parler ici que d’égalité. Toutes les équations expriment cette idée d’égalité qu’il ne faut pas confondre non plus avec l’identité, nous heurterions alors et les mathématiciens et les philosophes. Des figures géométriques peuvent être d’égale grandeur et différentes. De même nous devons reconnaître chez les hommes le droit à la différence et l’égalité.

Dans les relations humaines, la justice est aisée à établir lorsqu’il s’agit d’échange. Un échange sera juste s’il y a égalité, c'est-à-dire si les objets échangés sont d’égale valeur (équivalents ?), et cette forme de justice, que nous nommerons après Aristote, « **justice commutative** », ne pose pas problème. Chacun est capable de l’apprécier, de la mesurer. Même les brigands, dit Aristote[1], savent ce qui est juste lorsqu’ils se répartissent leur butin.

Mais le problème de la justice ne se limite pas à l’échange des biens, et ces mêmes brigands penseront qu’il est injuste de donner la même chose à chacun si certains méritent plus que d’autres.

Pour qu’il y ait justice il semble parfois nécessaire de savoir reconnaître des différences, et donc des inégalités. Il faut parvenir à établir « l'égalité » entre les rapports de quatre termes qui sont inégaux (deux choses différentes et deux personnes inégales) : le bon élève aura une bonne note et le mauvais une mauvaise. Il s'agit d'assurer une répartition proportionnelle des récompenses ou des sanctions. C’est ce qu’Aristote nomme la « **justice distributive** ».

---

[1] Aristote (384-322 av. J.-C.) traite particulièrement de ces questions dans le Livre V de *L’Éthique à Nicomaque*.

Retour au sommaire

Puisqu'il n'y a plus égalité, au sens strict du terme, les philosophes conviendront, avec Aristote, de parler **d'équité**[2] plutôt que d'égalité, mais nous allons voir très vite que ce concept n'a plus rien de la précision mathématique, il est problématique. Quand bien même nous voudrions donner à l'équité un aspect mathématique, en suggérant l'idée de proportionnalité, nous versons dans la subjectivité la plus totale, nous versons dans ce qui est de l'ordre du **sentiment** ; nous abandonnons la justesse mathématique, objective, pour une justice subjective.

Pour que la proportionnalité mathématique puisse être établie, et donc pour que la justice distributive soit juste, il faudrait que nous soyons capables d'estimer objectivement (de mesurer) le mérite ou la responsabilité de chacun. Qui serait assez présomptueux pour dire qu'il peut le faire ? En mettant une meilleure note à celui qui rend une bonne copie nous savons bien que nous n'apprécions pas le mérite mais la copie ; en payant davantage l'ouvrier qui fabrique deux paires de chaussures alors que l'autre n'en produit qu'une, nous ne rétribuons pas le travail, le mérite, mais l'efficacité, la productivité. Nous oublions les inégalités naturelles, initiales, nous oublions que certains sont plus doués que d'autres, plus forts, que certains ont moins de possibilités ou plus de handicaps, et en récompensant selon ce prétendu mérite nous accroissons les inégalités : nous donnons plus à celui qui a déjà plus, et moins à celui qui a déjà moins. Est-ce équitable ? Admettre que nous voulons une justice qui donne « à chacun selon son mérite » c'est admettre que nous voulons une justice qui creuse les inégalités.

Mais si celui qui réclame l'équité remet en cause l'égalité, il cherche aussi à remettre en cause la **légalité**.

*Madame Justice tient une balance à la main pour peser, pour compenser ; elle a un glaive pour trancher et châtier ; mais doit-elle garder son bandeau pour être impartiale et juger indifféremment le riche et le pauvre ?*

La légalité[3] est définie par le **Droit**. En géométrie le droit est défini par la règle ; dans le domaine juridique c'est le Droit qui définit la règle, et le législateur, depuis la Révolution française, veut que les règles soient les mêmes pour tous. Le Droit cherche l'égalité, une égalité de droit, là où il n'y a que des inégalités, des inégalités de fait, des inégalités naturelles ou sociales[4], des forts et des faibles.

Arrêtons-nous un moment sur les métaphores géométriques qui sont en jeu ici. En traçant la droite, le Droit définit ce qui doit être, il trace la ligne à suivre, et celui qui s'en écartera se mettra dans son tort[5]. La loi, qu'il s'agisse des lois de la nature ou des lois établies par le législateur, est toujours une anticipation de l'avenir. Si dans la nature il y a telle cause, il doit y avoir nécessairement tel effet, c'est une loi. De même, si nous sommes dans telle situation, nous devons avoir tel comportement[6]. Notre chemin est tracé, il nous donne la norme à suivre, et si nous parlons de norme c'est pour faire encore un peu de géométrie. La *norma*, en latin, c'est l'équerre, celle qui nous permet de tracer la perpendiculaire[7], la verticale qui ne penche ni d'un côté ni de l'autre. Si nous voulons rester

[2] Le terme est formé aussi sur le latin *aequus* ; est équitable ce qui fait part égale, comme lorsque nous partageons une tarte ; mais nous ne partageons pas que des tartes.
[3] Est légal ce qui est conforme aux lois, à la législation ; est légitime ce qui semble conforme aux exigences de justice que nous indique notre conscience.
[4] Pour prendre conscience des inégalités sociales consultez le site de l'Observatoire des Inégalités.
[5] Ce qui n'est pas droit est tordu, et le terme latin *tortum*, injustice, est formé sur le participe passé *tortus* qui signifiait « tordu ».
[6] « *Une loi, d'une manière générale, énonce que quelque chose doit être ou arriver* » dit Jules Lachelier. La différence entre les lois naturelles et les lois juridiques c'est que les premières sont universelles et réelles, nous ne pouvons nous y soustraire, alors que les secondes ne sont que formelles, ce ne sont que des idées. Si on nous interdit formellement de marcher sur la pelouse, rien ne nous empêche de le faire, au risque de nous faire prendre.
[7] Du latin *perpendere*, « laisser pendre jusqu'en bas », *perpendiculum*, « fil à plomb ».

Retour au sommaire

dans la normale nous devons nous conformer au droit, nous sommes « orthonormés » … Mais laissons les règles et les équerres et cessons de jouer avec les mots.
Revenons à ceux qui réclament plus d'équité, en dépit de la légalité. Ce qui pose problème dans les lois disait encore Aristote, c'est leur caractère général. Elles ne tiennent pas compte des situations particulières. Il est évident qu'un adolescent qui grandit dans une famille pauvre qui vit en banlieue aura moins de chances de pouvoir faire des études supérieures. Il peut donc sembler juste, « équitable », de lui donner des chances supplémentaires, et c'est ce que nous nommons la « discrimination positive ». Et dans ce cas, la loi n'est plus la même pour tous[8]. Par des inégalités de droit, l'homme « équitable » veut établir des égalités de fait. N'y a-t-il pas là un paradoxe ?
Demander l'équité c'est donc, dans un même temps rejeter l'égalité de fait et demander l'égalité de fait. Nous rejetons l'égalité de fait car nous voulons que chacun soit récompensé selon son mérite (ce qui accroit les inégalités existantes), et nous demandons l'égalité de fait car les inégalités de fait (qui sont souvent celles que nous créons) nous sont insupportables.
Demander l'équité c'est demander la justice, certes, mais savons-nous bien ce qu'elle est ? S'il est aisé de définir la justesse mathématique (par l'égalité) il n'en va pas de même pour la justice humaine. Les équations morales que nous voulons résoudre ont trop de variables et d'inconnues.

---

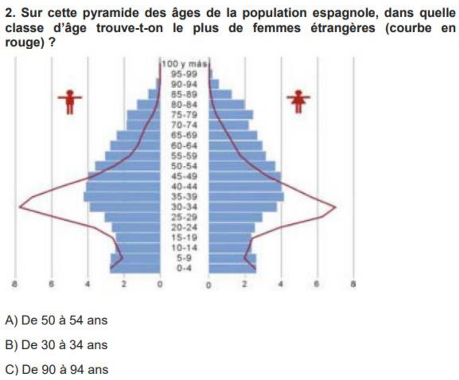
***Annonce***

# COMPÉTITION EUROPÉENNE DE STATISTIQUES

Professeurs et élèves de seconde, première ou terminale, PARTICIPEZ !
Inscriptions jusqu'au 11 décembre - Début des épreuves le 14 décembre 2020

Cette compétition est organisée par Eurostat, l'office statistique de l'Union européenne et seize Instituts nationaux de statistique dont l'**Insee** pour la France. Elle s'adresse à un public jeune de 14 à 18 ans.

D'abord nationale puis européenne, cette compétition invite chaque équipe participante à travailler en groupe pour tester ses connaissances théoriques, s'intéresser aux données produites par les acteurs de la statistique publique et découvrir ou redécouvrir leur enjeu sociétal !




[8] Ce qui remet en cause l'un des principes fondateurs de la République, c'est même l'article premier de la Constitution : « *La France est une République indivisible, laïque, démocratique et sociale. Elle assure l'égalité devant la loi de tous les citoyens sans distinction d'origine, de race ou de religion.* »

Retour au sommaire

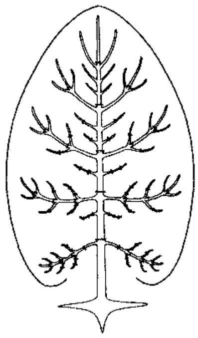
***VU SUR LA TOILE***

# LES FORMES MATHÉMATIQUES DANS LA NATURE

Gilles Waehren

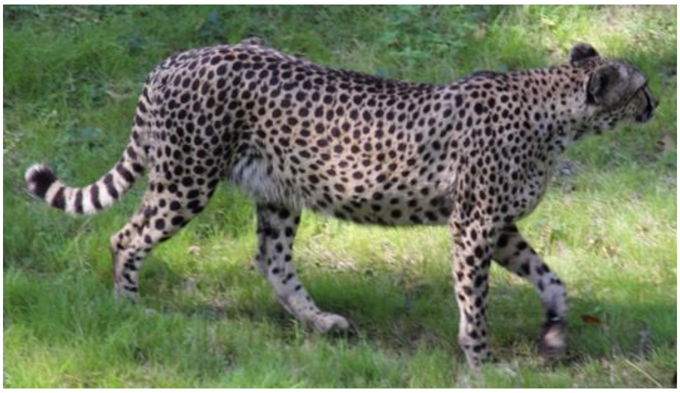
La collection « Le monde est mathématique » proposée par le quotidien Le Monde (puis par l'Obs) et cautionnée par Cédric Villani (puis par Etienne Ghys) comporte 40 volumes souvent passionnants (le lien vers le site marchand n'est pas proposé ici). Le numéro 38 jette un pont entre les mathématiques et les sciences de la vie. De la phyllotaxie à l'hypothèse Gaïa (lien Wikipédia), on découvre tous les modèles mathématiques que biologistes, zoologistes, géologues ont expérimenté pour formaliser le monde qui nous entoure. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement aux ressources que comporte la toile concernant la phyllotaxie, la morphogenèse, les automates cellulaires et les biomorphes. Il faut noter que, devant l'émerveillement suscité par certaines constructions abstraites, en particulier les fractales ou les biomorphes, quelques auteurs n'hésitent pas à verser dans certaines élucubrations ésotériques assez discutables. Il n'en subsiste pas moins que les contenus méritent d'être présentés à nos élèves.

La phyllotaxie (partie de la botanique consacrée à l'arrangement des feuilles d'un végétal) est un sujet que l'on retrouvait régulièrement dans les TPE de Première (voire de Terminale) Scientifique. C'est justement un site d'élèves qui nous présente le mieux la dimension mathématique de ce sujet. L'AMAP (botAnique et Modélisation de l'Architecture des Plantes et des végétations) est une Unité Mixte de Recherche qui regroupe cinq tutelles scientifiques qui se préoccupent de fusionner botanique et mathématiques (pour résumer). Les pages de son site contiennent une section dédiée à l'architecture végétale avec une classification rigoureuse et illustrée (comme pour le frêne commun).



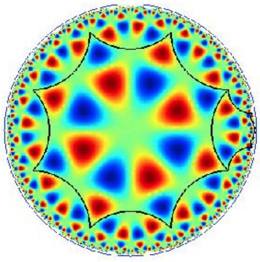
Un groupe d'étudiants du Smith College de Northhampton (plus grande université pour femmes des USA selon Wikipédia) nous propose, en anglais, le bilan de leurs recherches sur la phyllotaxie avec des applets (malheureusement inactives) et une galerie interactive mettant en évidence les termes de la suite de Fibonacci dans certaines structures végétales.

Au-delà de l'étude de ces formes générées par le développement naturel des êtres vivants, Turing avait orienté une partie de ses recherches, à la fin de sa vie, sur les mécanismes qui les avaient fait émerger : la morphogenèse. Interstices consacre un article à la présence des symétries dans la construction de motifs végétaux ou animaliers.



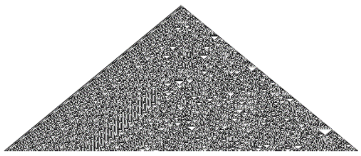
Retour au sommaire

Un blog de l'académie de Poitiers est consacré au « Projet Turing », recensant, dans une approche multidisciplinaire, un grand nombre des champs d'études de ce scientifique ; on peut y écouter des enregistrements de conférence dont une dédiée à la morphogenèse (« Des marguerites à l'ordinateur »). Enfin, Images des maths nous permet, en deux parties, de comprendre l'essentiel de ce domaine d'études, à travers des explications mathématiques assez précises, mêlant équations différentielles pour la première partie et géométrie dans un plan hyperbolique pour la deuxième. Le propos est scientifique, mais se veut abordable.

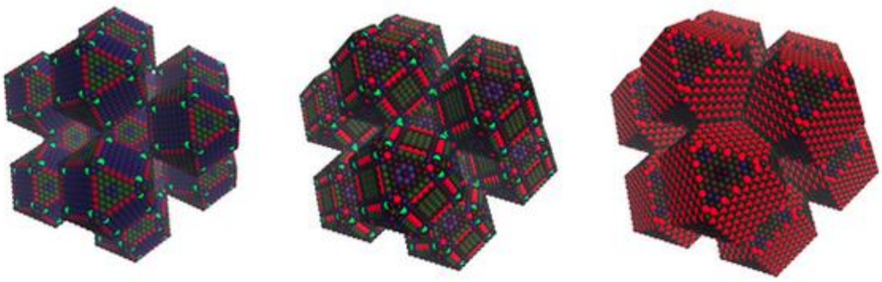


Dans le même ordre d'idées, on pourra s'intéresser aux travaux d'un autre grand nom de l'informatique, contemporain de Turing, John Von Neumann, qui a beaucoup contribué à la théorie des automates cellulaires, à la croisée des mathématiques et de l'informatique.

L'une des approches les plus accessibles de cette théorie repose dans l'étude du Jeu de la Vie de John Conway, évoquée dans le lien ci-avant. Science étonnante, chaîne Youtube assez connue, est aussi un blog qui nous propose de fabriquer, à la main pour les plus patients, son automate cellulaire. Quelques modifications dans les règles de construction et le résultat final change d'aspect. L'ENSIP, école d'ingénieurs de Poitiers, met à disposition du code Python pour programmer des automates cellulaires.



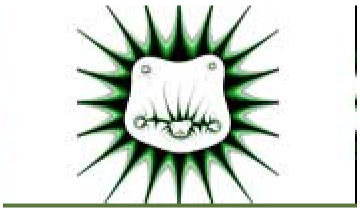
TangenteX, consacré à la « physique numérique », évoque quelques applications des automates cellulaires à la physique et livre un programme Python complet pour jouer au jeu de la vie. Pour compléter ses connaissances par des résultats plus encyclopédiques, on consultera cet article, qui nous propose des automates dans l'espace et donne des ouvertures sur la modélisation des motifs de certains coquillages ou du trafic routier.

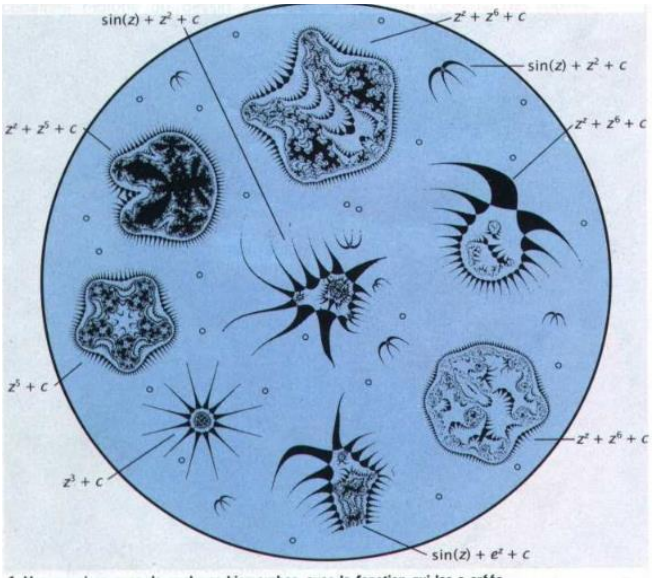


Plus confidentiels et moins utiles, les biomorphes sont construits comme des fractales, sur la base de suites de complexes, mais donnent des figures non nécessairement récursives et qui ne sont pas sans rappeler les représentations d'organismes monocellulaires. Sur ce sujet, les moteurs de recherches peuvent renvoyer sur des sites spécialisés dans les univers fantastiques voir ésotériques.

Retour au sommaire

Découverts par Clifford Pickover (voir le wiki), ces figures particulières sont ce qu'on appelle des tiges de ramassage de certaines fractales, des détails inattendus. Jean-Louis Seichepine, de l'Université Technologique de Belfort Montbéliard a construit tout un site sur le thème, riche de nombreuses réalisations, fruit de travaux d'étudiants. On y trouve aussi une application pour créer en ligne son biomorphe ou le logiciel Qbiom. Enfin, le biomorphisme fut aussi un thème d'étude pour certains artistes surréalistes comme Hans Arp ou Salvador Dali, à la recherche de formes « biologiques » dans la réalisation de leurs œuvres.






(« Partie de pêche » dans « Pour la science » 143)

***ANNONCE***

# QUI TIENT LE PETIT VERT ?

Le Café Pédagogique, quotidien en ligne consulté régulièrement par de nombreux enseignants, a publié un article élogieux sur notre revue « Le Petit Vert » le 6 octobre 2020.
Voici quelques-unes de ses questions.

- Ce qui rend très agréable la revue c'est son ouverture. Ça vient d'où ?
- La rubrique maths et jeu est particulièrement riche. D'où vient cet intérêt ?
- La revue donne-t-elle une idée de la façon dont on devrait enseigner les maths ?

Ajoutons que Le Petit Vert n'aurait pas vu le jour et n'aurait pas eu une vie aussi longue sans le travail remarquable de Jacques Verdier.

Retour au sommaire

***DÉFI***

# DÉFI N°144 – 1


Dans ce calendrier de l'Avent utilisé en 2019 sur notre site, la case « 15 » est voisine de la case « 16 », la case « 7 » est voisine des cases « 8 » et « 6 ».

Comment créer un tel calendrier de « l'Avent » tel que les cases de deux jours consécutifs ne soient voisines ni horizontalement, ni verticalement, ni en diagonale ?

**Remarques**

Dans l'exemple précédent la permutation des cases « 7 » et « 15 » montre que de tels calendriers existent.

**Pour des essais**

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Retour au sommaire

# DÉFI N°144 – 2
# « UN CARRÉ MAGIQUE POUR 2021 »

Complète ce carré pour que les sommes des quatre nombres de chaque ligne, de chaque colonne et chaque diagonale soient égales.
Quels sont les carrés magiques où on peut placer le nombre **2021** ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **3** | **14** | | |
| **16** | | **11** | |
| | **4** | **18** | **7** |
| **10** | **15** | | **12** |

# DÉFI ALGORITHMIQUE N° 144

Certaines énigmes du rallye mathématique de Lorraine auraient certainement été plus simples à résoudre à l'aide d'un petit programme informatique.
Nous vous proposons ici, comme défi, de résoudre l'exercice ci-dessous à l'aide d'un programme. L'énoncé avait été donné en 2013.

> L'année 2013 est la première année qui peut s'écrire avec 4 chiffres différents depuis 1987. La dernière date que l'on pouvait écrire avec 8 chiffres différents était le 25/06/1987.
> Quelle sera la prochaine date que l'on pourra écrire avec 8 chiffres différents ?

Proposez une fonction qui, pour une année n donnée en entrée, renvoie la prochaine date qui s'écrit avec 8 chiffres différents, à partir du premier janvier de l'année n.

Retour au sommaire

**DÉFI**

# SOLUTION DÉFI N°143 – 1 « DEUX ADDITIONS »

| | | | |
|---|---|---|---|
| | . | . | . |
| + | . | . | . |
| | . | . | . |

*En utilisant tous les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 une seule fois, complète l'addition ci-contre.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 |
| + | 6 | 5 | 7 |
| | 8 | 9 | 1 |

**Papier et crayon** nous permettent d'explorer le sujet.
On remarquera que la différence des deux nombres ajoutés vaut **423**.

On trouve d'autres solutions avec un premier nombre formé par les chiffres 2, 3, 4 et un second formé par 5, 6, 7 (la commutativité de l'addition permet de changer la position de chacun des nombres).

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 3 4 | 2 4 3 | 2 4 3 |
| | + 6 5 7 | + 5 7 6 | + 6 7 5 |
| | 8 9 1 | 8 1 9 | 9 1 8 |
| Différence des 2 termes | **423** | **333** | **432** |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 2 4 | 3 2 4 | 3 4 2 |
| | + 5 6 7 | + 6 5 7 | + 5 7 6 |
| | 8 9 1 | 9 8 1 | 9 1 8 |
| Différence des 2 termes | **243** | **333** | **234** |

On remarquera que la différence des deux nombres ajoutés est **333** ou bien un nombre dont les chiffres sont ceux du premier terme soit 2, 3 et 4.

- En prenant deux termes formés de cette même manière, pas d'aboutissement.
- En prenant deux termes aléatoirement formés des chiffres sus cités, pas d'aboutissement. Ce qui ne signifie nullement que ce ne soit pas possible.

Un **programme informatique** nous indique que 336 solutions répondent au premier problème. 96 solutions répondent au second problème. Par exemple 269+784=1053.
Un programme qui généralise le problème est en fichier joint sur notre site.
Un programme plus modeste se trouve à la page suivante.

Retour au sommaire

**Programme Python**

```
N=list(range(0,10)) #Liste des 10 nombres à répartir
compteur=0 #nombre de solutions
N1=[x for x in N if x!=0 ]#Liste pour le premier nombre à choisir
for i in N1:
    N2=[x for x in N if x!=i ]#Liste pour le deuxième nombre à choisir
    for j in N2:
        N3=[x for x in N2 if x!=j]
        for k in N3:
            N4=[x for x in N3 if x!=k]
            for l in N4:
                N5=[x for x in N4 if x!=l]
                for m in N5:
                    N6=[x for x in N5 if x!=m]
                    for n in N6:
                        N7=[x for x in N6 if x!=n]
                        for o in N7:
                            N8=[x for x in N7 if x!=o]
                            for p in N8:
                                N9=[x for x in N8 if x!=p]
                                for q in N9:
                                    N10=[x for x in N9 if x!=q]
                                    for r in N10:
                                        nombre1=100*i+10*j+k
                                        nombre2=100*l+10*m+n
                                        nombre3=1000*o+100*p+10*q+r
                                        if o!=0 and nombre1+nombre2==nombre3 and nombre1<nombre2:
                                            compteur=compteur+1
                                            print(nombre1,nombre2,nombre3)
print(compteur)
```

# SOLUTION DÉFI N°143 – 2
# « DES FILMS ACCÉLÉRÉS POUR LA TÉLÉVISION »

*Un film n'a pas la même durée au cinéma et à la télévision car les films sont à l'origine tournés en 24 images par seconde, et projetés au même rythme dans les salles de cinéma. Sur nos téléviseurs, en raison de contraintes technologiques, les films sont en revanche diffusés en 25 images par seconde. Et donc très légèrement accélérés.*
*À l'œil, le changement est imperceptible. Mais à l'oreille on peut entendre une légère différence, notamment des voix plus aiguës, surtout lorsqu'il s'agit de films que l'on connaît bien, voire par cœur dans le cas des fans de Harry Potter.*

Question pour nos élèves : quelle est la différence de durée entre la diffusion du film « Titanic » au cinéma et une diffusion à la télévision française ?

Wikipédia fournit la durée du film : 188 minutes soit 188x60 secondes (11 280 secondes).
Pour 24 images par seconde, cela fait 270 720 images (11 280x24 = 270 720).
270 720 images à 25 images par seconde, cela fait 10 828,8 secondes soit 180min 28,8s (270 720:25 = 10 828,8).
Il reste à calculer « 188min-180min 28,8s ».

Retour au sommaire

# SOLUTION ALGO-RALLYE 143

Le défi algorithmique du PV 143 avait déjà été donné dans le PV 136. Toutefois, le défi posé était légèrement différent puisqu'il s'agissait de généraliser l'algorithme à des heures quelconques. Ainsi, on demandait de trouver la probabilité que le commissaire Girard, lors d'un réveil en sursaut entre 22h30 et 7h30, lise sur l'horloge une heure qui soit un carré parfait. La fonction proba_carre_parfait permet renvoie le nombre de jours cherchés.

Effectuer proba_carre_parfait(22,30,7,30) permet d'obtenir la réponse cherchée.

**Pseudo-code :**

```
Fonction proba_carre_parfait(hc,mc,hl,ml : entiers ; num, den : entiers)
    nbCarres ← 0 ;         nombre de carrés obtenus
    h ← hc ;  heure courante
    n ← mc ; minute courante
    total ← total_minutes(hc,mc,hl,ml) ;     la fonction total_minutes(hc,mc,hl,ml) le
                                             nombre total de minutes entre hc:mc et hl:ml
    tant que h ≠ hl , faire :
        si carre_parfait(100h+m)  alors :        la fonction carre_parfait(n) renvoie
                                                 vrai si n est un carré parfait
            nbCarres ← nbCarres + 1 ;
        finSi ;
        m ← m + 1 ;
        si m=60, alors :          on change d'heure
            h ← h+1 ;
            m ← 0 ;
            si h=24 alors :       on change de jour
                h ← 0 ;
            finSi
        finSi
    finTantque ;
    tant que m ≠ ml, faire :      on ajoute les minutes restantes
        si carre_parfait(100h+m)  alors :
            nbCarres ← nbCarres + 1 ;
        finSi ;
        m ← m + 1 ;
    finTantque ;
    d ← pgcd(nbCarres,total) ;    réduction de la fraction
    num ← nbCarres/d ;
    den ← total/d ;
    renvoyer num, den.
```

Python

```python
from math import gcd

def total_minutes(hc,mc,hl,ml):
    """ Fonction total_minutes(hc,mc,hl,ml : entiers ; totalMinutes : entier)
    renvoie le nombre total  de minutes, augmenté de 1, entre hc:mc et hl:ml
    """
    if hl<hc:       # si hl<hc, on n'est passé par 23:59
        totalMinutes=((24-hc)+hl)*60
    else:
        totalMinutes=(hl-hc)*60
    totalMinutes=totalMinutes+ml-mc+1
    return totalMinutes
```

Retour au sommaire

```
def carre_parfait(n):
    """ Fonction carre_parfait(n : entier; booléen)
    renvoie Vrai si n est un carré parfait, Faux sinon
    """
    i=0
    while i**2<n+1:
        if i**2==n:
            return True
        i=i+1
    return False

def proba_carre_parfait(hc,mc,hl,ml):
    """ Fonction proba_carre_parfait(hc,mc,hl,ml : entiers ; den, num : entiers)
    renvoie le numérateur et le dénominateur de la probabilité de tomber sur un
      carré parfait entre les heures hc:mc et hl:ml
    """
    nbCarres=0
    h=hc
    m=mc
    total=total_minutes(hc,mc,hl,ml)
    while h!=hl:
        if carre_parfait(h*100+m):
            nbCarres+=1
            print(h,":",m)
        m+=1
        if m==60:
            h+=1
            m=0
            if h==24:
                h=0
    while m!=ml:
        if carre_parfait(h*100+m):
            nbCarres+=1
            print(h,":",m)
        m+=1
    d=gcd(nbCarres,total)
    num=nbCarres//d
    den=total//d
    return num,den
```

***PROBLÈME***

# LE PROBLÈME DU TRIMESTRE - N°144

*Proposé par Philippe Févotte*

Soit une suite $(u_n)$ définie pour les entiers $n \geq 0$ et à termes positifs.
On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier par :

$$v_n = \sqrt{u_0 + \sqrt{u_1 + \sqrt{\dots + \sqrt{u_n}}}}$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(v_n)$ converge

Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte. Vous pouvez lui envoyer vos solutions à ce problème. **Des réponses, même partielles, seraient les bienvenues**, ainsi que toute proposition de nouveau problème.

Retour au sommaire

***PROBLÈME***

# SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT - N°143

Une solution a été proposée par Jacques Choné.
Pour que $N_k$ soit rationnel il suffit que son développement décimal illimité soit périodique à partir d'un certain rang.
Si $k = 0$, le résultat est immédiat, car $N_0 = 0{,}1111 \ldots 1 \ldots = \frac{1}{9}$

Pour $1 \leq k \leq n$ , on note $D_{n,k,T} = \binom{n+T}{k} - \binom{n}{k}$
Il suffit donc de trouver un nombre *T*, indépendant de $n$, tel que $D_{n,k,T}$ soit un multiple de 10.
Montrons que $T = 10k!$ est un choix possible

$$\binom{n+T}{k} = \frac{1}{k!}(n+T)(n+T-1)(n+T-2)\ldots.(n+T-(k-1))$$

Soit $\binom{n+T}{k} = \frac{1}{k!}(n+T)(n-1+T)(n-2+T)\ldots.(n-(k-1)+T)$

D'où $\binom{n+T}{k} = \frac{1}{k!}((n)(n-1)(n-2)\ldots.\big(n-(k-1)\big)+TM)$ avec *M* entier.

Par conséquent $D_{n,k,T} = \frac{1}{k!}MT$ avec *M* entier

En choisissant $T = 10k!$, on obtient $D_{n,k,T} = 10M$ et ainsi le nombre $N_k = 0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \ldots$ est un nombre rationnel.

Deux remarques :
La période $T = 10k!$ n'est pas toujours la plus petite. Un calcul montre que :

| **Valeur de *k*** | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| **Valeur de *T* minimale** | 20 | 20 | 40 | 200 |

Une étude générale demanderait d'évaluer les puissances de 10 dans la décomposition de *M*

Jacques Choné indique que la suite considérée est présente dans OEIS sous la référence A174183.

# LA PHRASE DU TRIMESTRE

La plus utile règle de toute l'éducation ?
Ce n'est pas de gagner du temps, c'est d'en perdre.

ROUSSEAU

Retour au sommaire

***VIE DE LA RÉGIONALE***

# (RÉ)ADHÉSION APMEP 2021

Si ce n'est déjà fait, n'attendez pas pour (ré) adhérer. Le plus simple est de le faire en ligne.
Les adhérents de l'APMEP bénéficient :

- **de l'envoi de la revue papier : « *Au fil des maths – APMEP* » et de** l'accès **à ses compléments numériques après avoir activé le bouton** Connexion ; d'une réduction fiscale de 66 % sur le montant de l'adhésion au titre du don aux œuvres d'intérêt général ;

- du tarif « adhérent/abonné » pour l'achat de brochures (réduction de 30 % sur le prix public des brochures éditées par l'APMEP et de 5 % sur le prix public des brochures non APMEP), ceci après avoir activé le bouton Connexion ;
- des droits réduits d'inscription aux Journées Nationales
- et pour les premières adhésions deux brochures cadeau en ajoutant 6 € pour les frais de port.

Faites également adhérer vos collègues et amis (la première adhésion "Tout APMEP" pour les enseignants est au tarif de 30 €, qui n'en coutent finalement que 15 compte tenu de la réduction fiscale).
Tous les renseignements sont sur la plaquette « Visages 2020-2021 ».

**Plus nous serons nombreux, plus nous aurons de poids dans les décisions qui concernent notre discipline et notre métier.**

Retour au sommaire