N° 140 Décembre 2019

LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

C'est l'année des maths

Idées, jeux, art, …

Découvrez vite nos nouveaux articles !

APMEP

www.apmeplorraine.fr

SOMMAIRE

ÉDITO

ÉVALUATIONS

Gilles Waehren

Les résultats des évaluations de CE1, sixième et seconde commencent à tomber en cette fin du mois d'octobre et de nombreuses interrogations se font entendre à leur sujet. Déjà à la rentrée 2018, certains s'étaient posé des questions sur le bien-fondé du procédé ; le recul d'une année nous a permis de comprendre son inutilité.

Un simulacre de démocratie s'est mis en place ces dernières années dans le domaine de la consommation, permettant aux citoyens de donner leur avis chaque fois qu'ils ont fait une dépense. On leur demande systématiquement de noter les services du magasin dans lequel ils se sont rendus, de l'hôtel où ils ont passé une nuit, du garage auquel ils ont confié leur véhicule… Je pense que beaucoup de consommateurs répondent volontiers à cette requête, mais aussi qu'un nombre croissant d'entre eux – dont moi – vit une saturation d'évaluations. Ces notes ont beaucoup d'intérêt pour les enseignes qui les sollicitent. Elles augmentent la visibilité de la marque, permettent de faire le tri entre les produits valables et les autres, rendent possible la mise en place d'opérations d'ajustement quand le produit est un service (conseils prodigués, qualité de l'accueil…). Est-ce l'objectif visé par les évaluations de cet automne ? En rendant opaques le contenu même du questionnaire, la manière de tirer les flèches de compétences et savoir-faire dans les bilans individuels, la façon dont on cherche à quantifier la formation des élèves, l'institution n'est-elle pas en train de réaliser une enquête de consommation ?

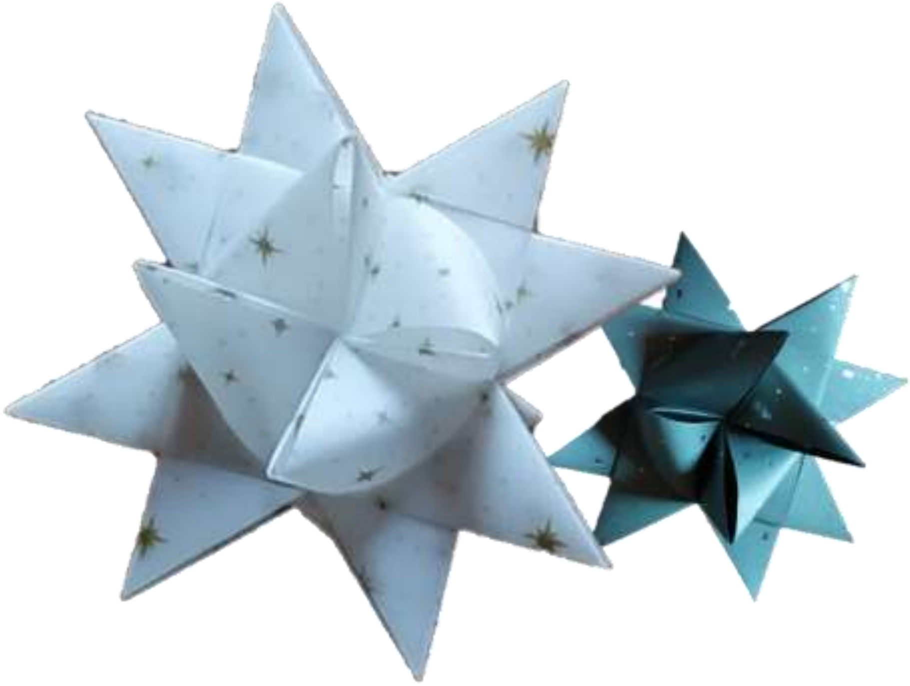
En seconde, l'an dernier, les tableaux récapitulatifs des tests étaient arrivés deux mois après le début des cours, alors qu'on connaissait déjà le niveau et les difficultés des élèves. Mélangeant compétences et connaissances dans un infâme gloubi-boulga, ils n'ont permis à aucun professeur d'en faire usage dans un travail de remédiation individualisé. Pire, la grande majorité des élèves s'étaient retrouvée dans la case « maîtrise satisfaisante » alors que la pluralité des profils démentait cette appréciation. Le ministère pouvait-il alors émettre un satisfecit du système éducatif français, sachant qu'il validait surtout la réussite d'une réforme du Collège engagée par le ministre précédent ?

Il semblerait pourtant qu'il y ait eu une volonté d'amélioration du dispositif cette année et qu'elle ait permis, cette fois-ci, de pointer des dysfonctionnements : les professeurs des écoles de Roubaix en ont fait les frais (Café Pédagogique du 10 octobre 2019). Les dédoublements en CP auraient dû, dans cette commune assez pauvre des Hauts de France, produire des résultats merveilleux, comme on a pu le constater dans d'autres circonscriptions. L'échec a été imputé aux enseignants. Voilà une gestion des ressources humaines digne des meilleures multinationales ! On aime souvent à répéter qu'il ne faut pas casser le thermomètre quand il indique une température qui nous déplaît ; l'instrument de mesure ici utilisé était-il effectivement fiable ? Les premiers bilans individuels de sixième que j'ai pu voir, contredisent la pertinence du protocole expérimental. La conception même de l'outil numérique a conduit certains élèves dans l'impasse (clics répétitifs inopinés). L'enchaînement des questions a empêché beaucoup d'entre eux d'aborder un domaine mathématique en surdosant les questions d'un autre. Au final, les réussites des élèves produisent un tableau incohérent. Quand on pense au temps et aux moyens qui ont été investis pour mener à bien un tel projet, cela nous fait réfléchir au temps de préparation que nous consacrons à nos propres sujets de devoirs : est-il suffisant… ou les concepteurs des évaluations s'y sont-ils mal pris ?

Ces évaluations ont également donné l'impression que, contrairement à l'intention affichée, les compétences en étaient la portion congrue. Comment des questions à choix multiples peuvent-elles cerner la capacité d'un élève à chercher, à communiquer ou à représenter à l'aide d'un instrument de construction ? Si le but de notre système éducatif est de s'assurer que chaque

Retour au sommaire

élève le quitte avec un niveau suffisant pour gagner à « Questions pour un champion », je crois qu'il est impropre à former les citoyens de demain. Nous nous devons de suivre chacun de celles et ceux qui nous sont confié(e)s, pour lui permettre de se construire, de développer ses capacités, de devenir meilleur, mais pas de devenir la ou le meilleur(e). Confrontés à cette situation, les enseignants, les élèves, s'interrogent sur la nécessité de mettre une note sur tout, tout le temps, partout, pour classer ou discriminer. Quelle place est laissée au temps d'apprentissage de chacun dans un système qui veut que l'on puisse tracer le profil d'un élève en cinquante minutes chrono ?



" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale APMEP Lorraine.

Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin « Au fil des maths » et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges "mathématiques" entre les adhérents.
Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer au comité de rédaction du Petit Vert.

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, François Drouin, Rachel François, Françoise Jean, Léa Magnier, Walter Nurdin, Aude Picaut, Michel Ruiba, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

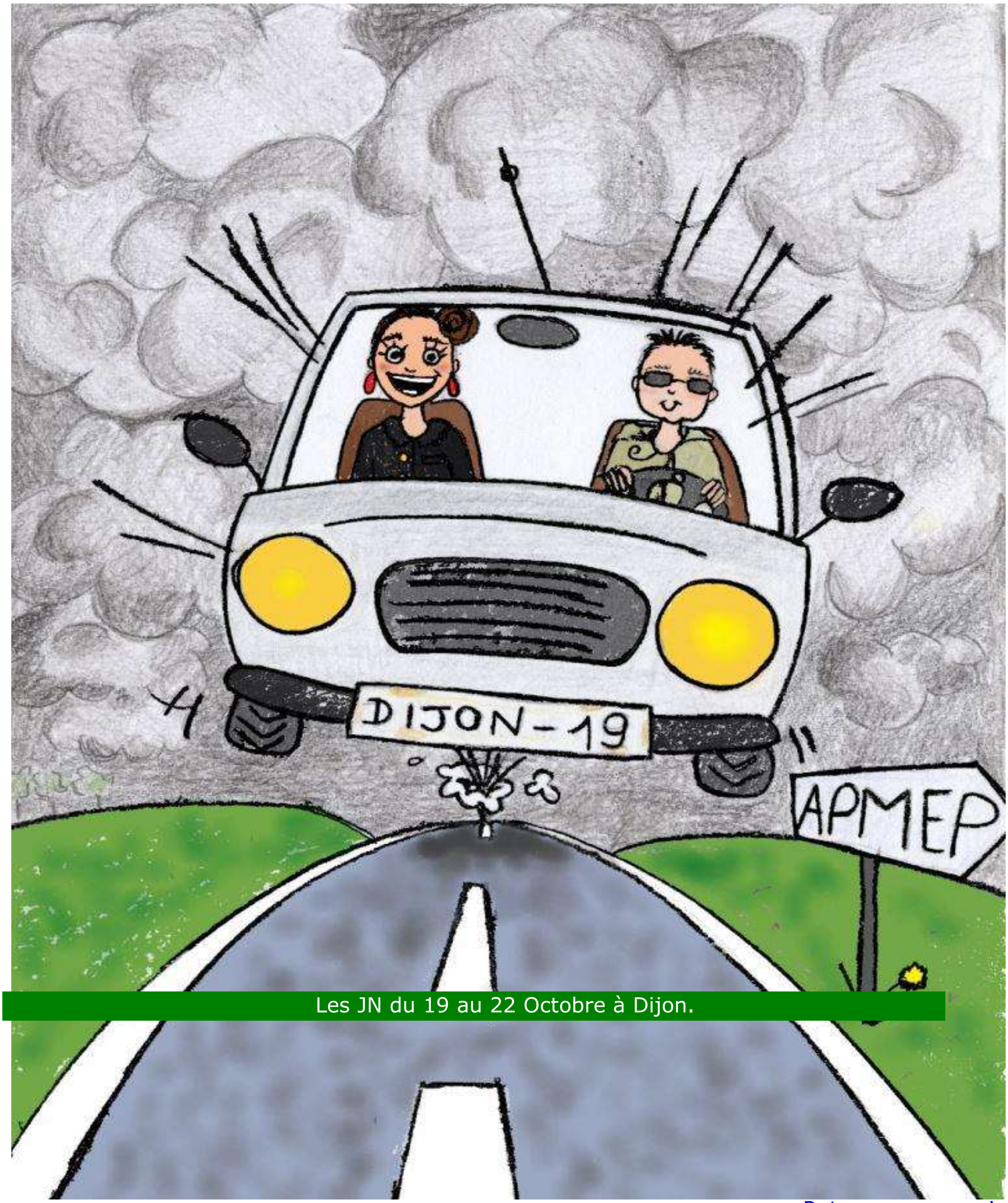
Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

MES PREMIÈRES « JOURNÉES NATIONALES » APMEP À DIJON

Léa Magnier

À bord du bolide de Christine, nous fendons les nuages et traversons la pluie, tout droit direction Dijon.



Les JN du 19 au 22 Octobre à Dijon.

Retour au sommaire

Jour 1 – Samedi

Arrivée sans encombre. La team des tabliers jaunes nous accueille et nous remet notre précieux collier vert. Indispensable pour pouvoir pénétrer dans l'enceinte de la faculté.
Cet élément caractéristique, difficilement accordable avec sa garde-robe, permettra par la suite de repérer les confrères dans différentes situations de la vie quotidienne.

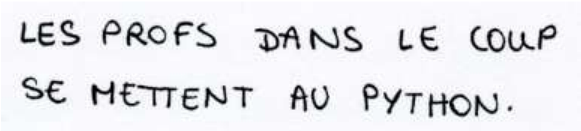
C'est munis de ce laissez-passer que les premiers arrivés assistent à la conférence d'ouverture des journées.
L'amphithéâtre se remplit considérablement pour la conférence inaugurale « Voyage aux pays de nombres de la maternelle à l'université » de Viviane Durand-Guerrier.
C'est la tête bien remplie que nous achevons cette première journée.

Retour au sommaire

Jour 2 – Dimanche

Il fait encore nuit lorsque je prends le tram à la station « Gare de Dijon ». Nous récupérons deux trois colliers-verts à la station suivante ; puis cinq autres ; puis une dizaine. Une fois le tram devenu vert de monde, en ce dimanche matin, les congressistes en descendent à la station Université avec cinq minutes de retard. C'est rangés deux par deux que nous gagnons nos premiers ateliers.

L'atelier de 8h30



Mon atelier s'intitule « C'est l'heure de programmer !!! ». J'y trouve un vosgien et d'autres lorrains, nous échangeons rapidement sur les établissements que nous avons déjà fréquentés.

On passe aux choses sérieuses. Après un bref exposé sur l'amour de la base dix de nos ancêtres, nous cherchons à convertir des heures ordinaires en heures révolutionnaires (le jour se divisait selon le système décimal, de minuit à minuit, en 10 heures de 100 minutes). Nous devons concevoir un algorithme permettant de passer des heures ordinaires aux heures révolutionnaires, sachant qu'une seconde révolutionnaire vaut $0{,}864$ seconde normale (à montrer). L'activité est complète et prête à être utilisée en classe. On cherche quelques variantes permettant de concevoir des algorithmes de difficulté croissante.

Conférence de 10h30

Après avoir ingurgité mon 1er café de la journée et acheté « Le Puzzle à 7 Triangles » de la fière équipe de l'APMEP de Lorraine, me voici installée pour assister à la conférence « Mathématiques et Arts de la tables » de Frédéric Métin.

Il était question de vieilles recettes de cuisine avec des quantités énigmatiques, exprimées dans des unités toutes aussi énigmatiques. Tout en rêvant au repas de midi constitué surement « de $p\frac{s}{r}$ sangliers et quelques patates, le tout salé à notre convenance » (extrait approximatif du discours), j'essayais en vain de former un triangle isocèle avec mes sept triangles en plexiglass.

Retour au sommaire

La commission lycée

J'entre dans l'arène. Les profs sont prêts à débattre, à révolutionner, à râler un peu, et surtout à s'inquiéter pour l'avenir de nos élèves. C'est avec force que les collègues pointent du doigt les incohérences et absurdités de la réforme.

Certains s'indignent ; le gouvernement affirme que les nouveaux programmes sont indiscutables, le problème ce sont les profs qui ne savent pas les lire. Honteux ! Et que dire de la place des maths dans l'enseignement ! Les maths seraient présentes dans le tronc commun sous la matière « sciences ». Matière en réalité prisée par les collègues de sciences expérimentales.

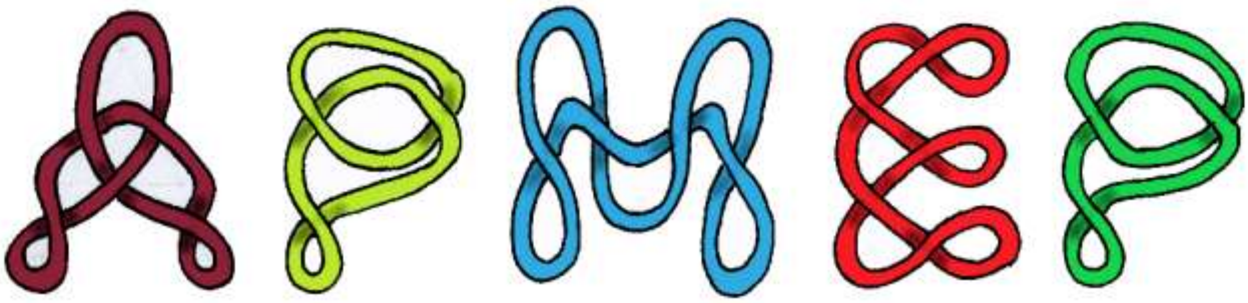
Nos petits scientifiques sont lésés par la réforme qui les prive d'un enseignement complet. Une question sera cruciale pour préparer l'entrée en post bac, quelle discipline abandonner en terminale ?

Un autre sujet émerge, quelle place a, et aura, la calculatrice dans l'enseignement à venir/au bac ? Après avoir été déclinée avec différentes options, tailles et couleurs notre chère calculette semble être sur la sellette.

Retour au sommaire

L'atelier de 16h30

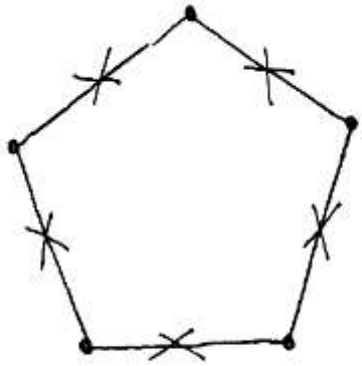
Dessinons de beaux entrelacs.



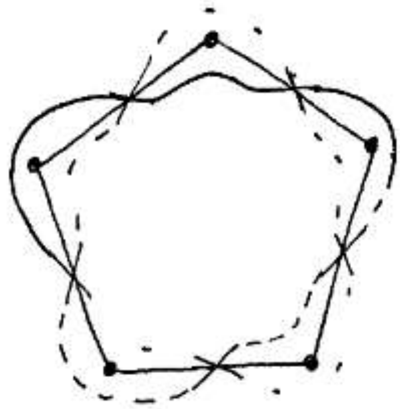
Tuto entrelac facile :

1 On trace un graphe.

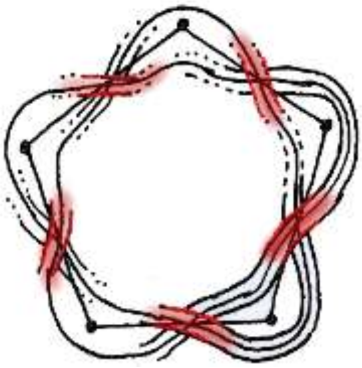
2 On place des croix au crayon de papier au milieu de chaque arête.



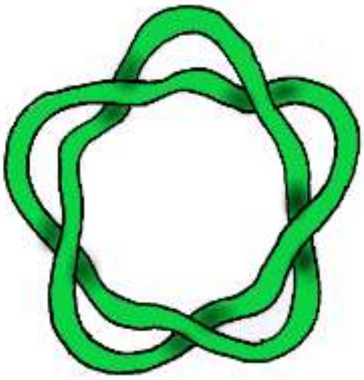
3 On trace les entrelacs au crayon en traversant les arêtes au niveau des croix.



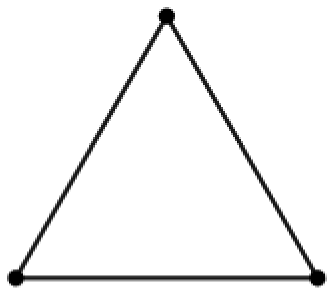
4 On crée de l'épaisseur en alternant les chevauchements.



5 On repasse au stylo et on ajoute des ombres.



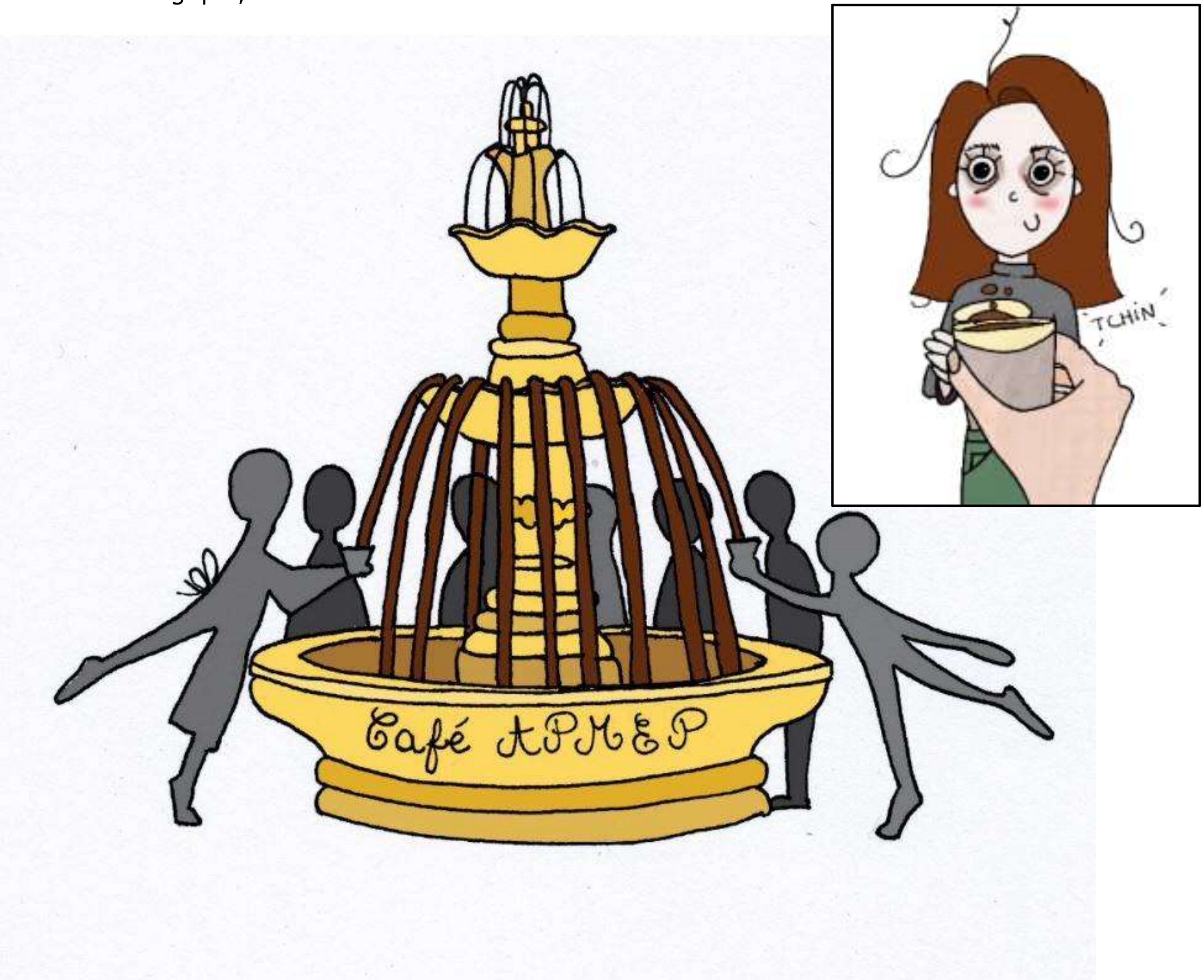
Défi Dessiner un entrelac à partir de ce graphe :



Retour au sommaire

Jour 3 – Lundi

La fontaine magique, l'eau caféinée miraculeuse.



Impossible de parler des journées sans évoquer les pauses café ! Elles sont nombreuses, conviviales et revigorantes.
Les journées s'achèvent pour moi ce lundi soir, sur une dernière conférence dont je n'ai aucun souvenir. Il est temps de rentrer. **FIN**

Retour au sommaire

Touchez la chouette,

elle exaucera vos vœux

Pas besoin d'y croire, ça marche

BONUS

Pour vous, chers lecteurs, je partage ma découverte de la Chouette de Dijon. Après avoir suivi le parcours fléché dit « de la chouette » et effectué quelques 5000 pas, j'ai pu admirer la fameuse chouette miraculeuse. Taillée dans un mur de l'église Notre-Dame, il suffit de la toucher pour qu'elle exauce nos souhaits.

Je vous propose de faire un e-vœu, pour cela, cliquez sur la photo de gauche.

ANDRÉ MIRGAUX NOUS A QUITTÉS

Par un message de son fils, nous avons appris en septembre le décès d'André Mirgaux survenu le 25 juillet 2019, à 98 ans, après une vie bien remplie. Il a été secrétaire de notre régionale dès sa création en 1967, et en a pris la présidence en 1970 à 1981.

Il fut l'une des chevilles ouvrières des Journées Nationales de Nancy (30 mai - 2 juin 1973), dont le thème était "L'enseignement des mathématiques à chaque âge de la vie". À cette occasion, il avait présenté un atelier à propos des « fractions à l'école élémentaire » et un second à propos de « réunion et addition à l'école élémentaire ».

En 1987, il est venu fêter avec nous le vingtième anniversaire de notre régionale.

Son souvenir reste bien présent au sein de notre association.

Retour au sommaire

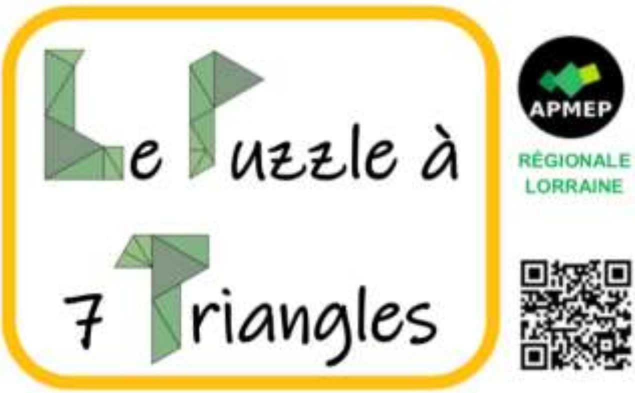
VIE DE LA RÉGIONALE

DES JEUX (NÉS) À DIJON

Que les Lorrains étaient heureux
Quand ils étaient à table !
Les jeux s'étalaient sous nos yeux
Pour nous c'était fort agréable !
Ils jouaient avec nous tous
Comme des fous, comme des fous de jeux
Avec tout' leur passion des jeux
Avec tout' leur passion !

Jean Fromentin

Un collègue a passé presque une journée entière sur les [bimiels](#)



En grands gourmands, les Lorrains ont goûté à tous les plats lors des pique-niques improvisés [sur leur stand](#), entre deux animations des jeux qui essaimaient sur les tables, dont le petit nouveau qui a eu un grand succès : le « [Puzzle à sept triangles](#) » s'est arraché chez les joueurs avertis.

Retour au sommaire

La Régionale de l'APMEP Lorraine était venue en force à ces Journées Nationales de l'APMEP Elle s'est retrouvée pour discuter et construire l'unité chez ses adhérents autour des actions telles que les publications, le Rallye ou la Journée Régionale, lors de la réunion du lundi matin à Dijon.

Le traditionnel repas s'est tenu, lui, dans la paisible atmosphère de l'Hôtel du Nord, agrémenté d'œuf en meurette, glace à la moutarde et autres spécialités bourguignonnes.

Retour au sommaire

La réforme du Lycée était dans beaucoup de conversations et a fait l'objet de débats houleux. Lors des questions d'actualité des professeurs de mathématiques ont fait part du désarroi des élèves et de leurs propres souffrances pour mettre en œuvre une réforme trop hâtive, mal préparée et mal comprise. Nombreux étaient les présents pour échanger, s'enrichir et découvrir (sur leur temps de congés !) tout au long d'ateliers et de conférences, concoctés par la formidable équipe de la Régionale de Bourgogne. De la didactique des nombres, en entrée, à la cuisine moléculaire en dessert (aigre-doux), les convives ont partagé les mets les plus raffinés.

Dans le match Grand-Est contre Bourgogne - Franche Comté, Frédéric Métin s'est vu contraint d'offrir un point au Grand Est pour la découverte de la contenance du tonneau non-standard.

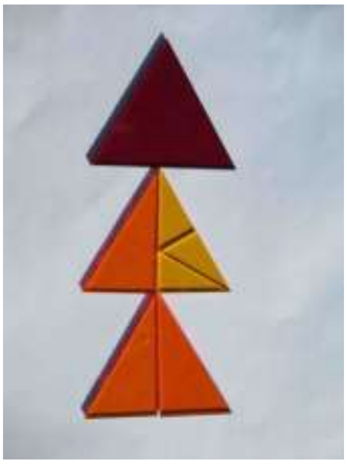
Très denses, ces 72 heures semblent souvent trop courtes et rendez-vous est pris pour Bourges en 2020, où nous serons ravis de tous nous retrouver pour ces riches heures de partage.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

PENSONS AUX CADEAUX DE FIN D'ANNÉE !

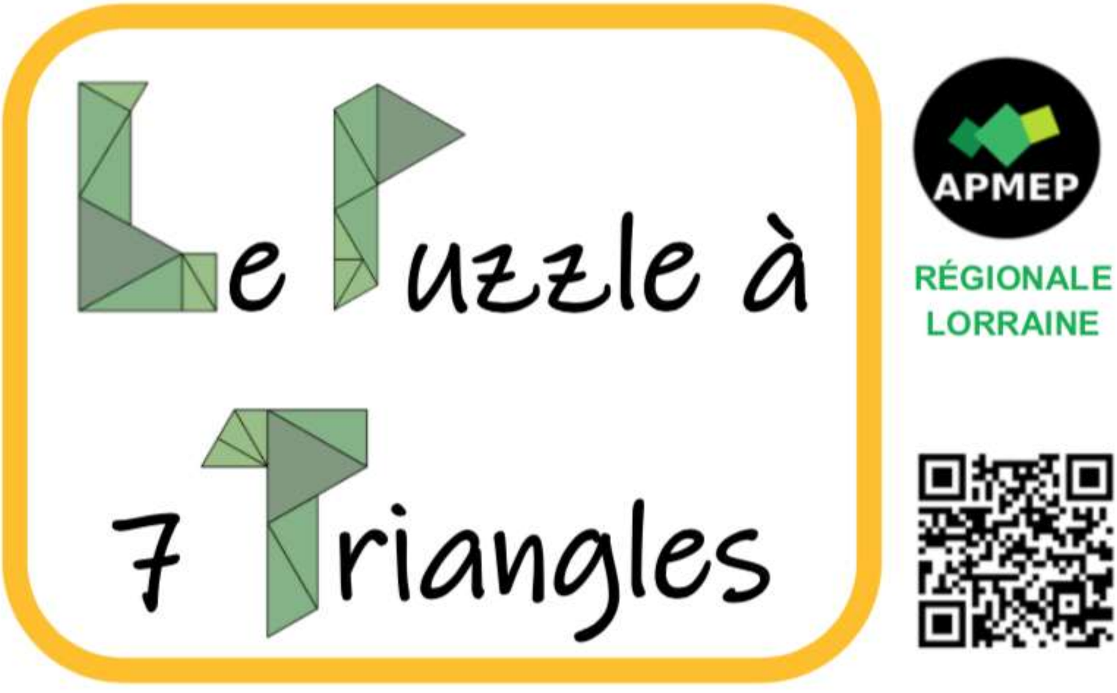
Après une première apparition lors des journées nationales de Dijon le « puzzle à sept triangles » présenté dans le Petit Vert n°131 pourra faire partie de nos cadeaux de fin d'année.



Mon sapin est-il beau ?

L'atelier d'emballage

En complément du puzzle, des documents sont accessibles en utilisant le QRcode de l'étiquette ou le lien indiqué sur la feuille jointe aux pièces. Ce dossier sera modifié et complété au fur et à mesure des envies et des propositions des utilisateurs.



Il est vendu au prix de 5€. Pour un envoi postal, il faut rajouter les frais de port (2x0,88€ en décembre 2019, 2x0,97€ à partir de janvier 2020). Il sera également présent lors de notre journée régionale le 18 mars 2020 !
Les commandes peuvent être envoyées à cette adresse.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

FESTIVAL DÉCLICS « JOUER C'EST SÉRIEUX »

Le 9 octobre, Michel et François ont animé deux ateliers présentant des utilisations possibles des carrés de Mac-Mahon ainsi que du puzzle et de la pyramide aztèques. Les documents présentés et les liens vers les ressources de notre régionale sont téléchargeables sur notre site. Ce Petit Vert présente dans sa rubrique « Maths et Jeux » quelques pistes de recherche à propos de carrés réalisés avec quatre carrés de Mac-Mahon.

Trois tables recouvertes de jeux ont permis à Odile de prendre de nouveaux contacts avec des établissements scolaires.

Jean-Michel est venu avec un élève présenter un jeu créé pendant un EPI dans son lycée professionnel. Ce jeu et sa création seront évoqués dans un futur Petit Vert.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS

UNE MOSAÏQUE DÉCOUVERTE À METZ

Archéologie, géométrie et algèbre

A propos d'une mosaïque découverte à Metz

Bernard Parzysz,
(nov. 1994)

Dans son édition du mercredi 9 novembre 1994, le « Républicain Lorrain » annonçait la découverte à Metz, à l'occasion d'une construction immobilière, d'une mosaïque gallo-romaine remontant probablement au deuxième siècle de notre ère. Le jeudi 17 novembre, le RL, dans un article signé Catherine Guidi, précisait qu'« *environ 17 m² de mosaïque ont été dégagés, révélant des motifs géométriques et végétaux noir et rouge sur fond blanc* », et publiait une photographie montrant un morceau de cette mosaïque *in situ*.

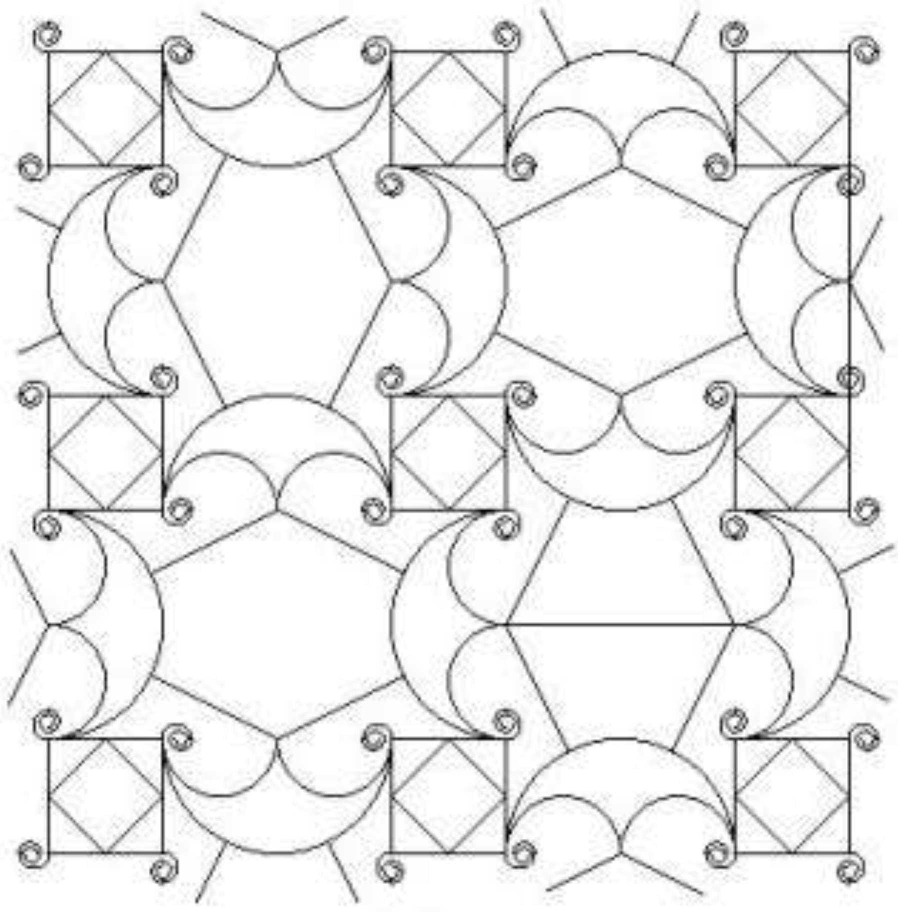


fig. 1

Bernard Parzysz analysait la construction géométrique de cette mosaïque en cherchant lequel des 17 pavages du plan avait été utilisé. L'étude des transformations et de leurs compositions faisait partie intégrante des programmes de mathématiques des filières scientifiques. Nous disposons aujourd'hui d'outils numériques puissants. Peut-on proposer à nos élèves la construction d'un tel pavage avec les logiciels dont ils font l'apprentissage ?

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

MISE EN ŒUVRE D'UN JEU DE DOMINOS MATHÉMATIQUE EN CLASSE DE CE2

François DROUIN
APMEP Lorraine - Groupe Jeux

Ce jeu a été mis en œuvre en juin 2019 à l'école de Sampigny en présence de Françoise Paquot, l'enseignante de la classe. L'objectif était de retravailler les conversions « m – dm – cm » en utilisant les relations « 1m = 10dm », « 1dm = 10cm » et « 1m = 100 cm ».

Premières conversions

Au début de la séance des conversions telles que « 3m 4dm = …cm » ont été proposées au tableau. Un brouillon était autorisé, mais les élèves de la classe étaient habitués aux séances de calcul mental, ils ne l'ont pas utilisé. Ils ont utilisé des raisonnements tels que « 1m = 100cm donc 3m = 300cm », et « 4dm = 40cm » donc « 3m 4dm = 340cm ». Les tableaux de conversions ne sont pas utilisés par l'enseignante.

Avec le tableau source du jeu de dominos

340 cm	**430 cm**	**530 m**	**350 m**	**450 cm**	**540 cm**
34 dm	43 dm	53 dm	35 dm	45 dm	54 dm
4 dm + 3 m	3 dm + 4 m	3 dm + 5 m	5 dm + 3 m	5 dm + 4 m	4 dm + 5 m
3 m + 4 dm	4 m + 3 dm	5 m + 3 dm	3 m + 5 dm	4 m + 5 dm	5 m + 4 dm
35 dm – 1 dm	44 dm – 1 dm	54 dm – 1 dm	36 dm – 1 dm	46 dm – 1 dm	55 dm – 1 dm
4 m – 6 dm	5 m – 7 dm	6 m – 7 dm	4 m – 5 dm	5 m – 5 dm	6 m – 6 dm

Les élèves ont découpé la bande horizontale supérieure avec les longueurs écrites en gras, (elle présente les « chefs » des familles qui seront reconstituées), puis les 30 rectangles formant les autres lignes (ceux-ci sont alors mélangés).

Retour au sommaire

Individuellement, (le voisin venant en aide), les élèves ont replacé les rectangles sous leur « chef ». Il leur a été rappelé que chaque famille contenait le même nombre de petits rectangles et qu'il pouvait être intéressant de convertir systématiquement en centimètres. Après quelques échanges avec l'élève voisin, peu d'erreurs ont été constatées (la plus courante était de considérer une longueur telle « 3dm + 4m » comme « 4m + 3dm » et les mettre toutes les deux dans la famille de « 430cm » ou la famille de « 340cm ».

Le tableau a été présenté sur le T.B.I. de la classe pour faciliter les corrections (il est resté comme « juge de paix » pendant l'utilisation du jeu de dominos), les découpages ont été rangés dans une enveloppe pour une utilisation future.

Avec le jeu de dominos

340 cm	34 dm	**430 cm**	4 dm + 3 m	**530 cm**	3 m + 4 dm	**350 cm**	35 dm – 1 dm	**450 cm**	4 m – 6 dm
340 cm	43 dm	**430 cm**	3 dm + 4 m	**530 cm**	4 m + 3 dm	**350 cm**	44 dm – 1 dm	**450 cm**	5 m – 7 dm
340 cm	53 dm	**430 cm**	3 dm + 5 m	**530 cm**	5 m + 3 dm	**350 cm**	54 dm – 1 dm	**450 cm**	6 m – 7 dm
340 cm	35 dm	**430 cm**	5 dm + 3 m	**530 cm**	3 m + 5 dm	**350 cm**	36 dm – 1 dm	**450 cm**	4 m – 5 dm
340 cm	45 dm	**430 cm**	5 dm + 4 m	**530 cm**	4 m + 5 dm	**350 cm**	46 dm – 1 dm	**450 cm**	5 m – 5 dm

Le jeu a été présenté sur le T.B.I. de la classe. Les longueurs du tableau précédent ont été reconnues (seules cinq colonnes sont utilisées), des explications ont été données quant au découpage des 25 dominos (une seule erreur de découpage a été constatée).

<u>Distributions des dominos</u>

Les élèves ont joué par groupes de 2 ou 3. Les groupes de 2 ont partagé les dominos en trois tas, les deux tas égaux étaient pour les joueurs, le troisième servant pour la pioche. Les groupes de 3 ont partagé les dominos en quatre tas, les trois tas égaux étaient pour les joueurs, le quatrième servant pour la pioche.

Règle du jeu

Alterner une case avec une longueur écrite en caractère gras avec une case avec une longueur égale écrite en caractère « non gras ». Les sens d'écriture sont respectés et cela évite d'avoir à gérer la correspondance entre par exemple « 5dm + 3m » et « 4m – 5dm ». Le domino pioché peut être déposé immédiatement : ce point est à préciser, il entre parfois en conflit avec les règles de jeu utilisées en famille. Les contestations dans les groupes peuvent-être réglées par l'examen du tableau laissé présent sur le T.B.I.

Un tableau créé par les élèves

340	**430**	**530**	**350**	**450**	**540**

En tête de colonne, les nombres en gras sont ceux apparaissant dans la première ligne du premier tableau utilisé. Cela a perturbé certains élèves voulant continuer à utiliser des longueurs. Il a été demandé à ce que les calculs puissent être aisément faits mentalement, sans éprouver le besoin de poser des opérations.

Favoriser l'utilisation de dizaines comme 10, 20, etc. pouvait être une piste.

Il a été annoncé aux élèves que les tableaux réalisés seraient ramassés, informatisés, puis transformés en jeux de dominos qui leur seraient transmis pour une utilisation en classe pendant les semaines restantes de leur année scolaire. Cela fut fait dans les jours qui ont suivi cette activité, les versions informatisées des tableaux et des jeux créés pour les élèves sont accessibles sur notre site. Des erreurs ont pu être corrigées pendant la création des tableaux, d'autres n'ont été remarquées et corrigées que lors de l'informatisation.

Quelques compétences numériques remarquées dans les créations des élèves

Les élèves ont pratiqué pendant l'année le jeu TRIO et le jeu Mathador, ils n'ont pas hésité à enchainer plusieurs calculs en y insérant parfois des parenthèses. Les calculs proposés dans les tableaux n'ont pas nécessité l'usage du cahier de brouillon : le calcul mental a été très actif.

Les élèves sont conscients que proposer des divisions ou des multiplications par 1 leur facilitait le remplissage des cases.

Comme attendu, l'ajout ou le retrait de dizaines a été fréquemment utilisé.

Multiplier ou diviser par 2 est souvent utilisé (notions de doubles et de moitiés). En complément, des élèves ont proposé des multiplications par 4 (on multiplie par 2 puis on multiplie de nouveau par 2) ou des divisions par 4 (on divise par 2 puis on divise de nouveau par deux). Un groupe d'élèves a proposé une division par 8.

Pour un groupe d'élèves, il est clair que l'écart entre 1900 et 1560 est le même que l'écart entre 900 et 560 (de même par exemple pour l'écart entre 1043 et 503 et l'écart entre 1040 et 500).

Retour au sommaire

Complément

Le tableau proposé aux élèves a pour source celui proposé à la page 22 de la brochure « Des tableaux et des jeux numériques ». La méthode de construction est indiquée dans ce même document, seules cinq colonnes du tableau sont utilisées pour réaliser le jeu de dominos. Cette même méthode se retrouve dans la brochure « Dominos mathématiques » éditée il y a quelque temps par l'IREM de Lorraine.

Le Petit Vert n°130 relate la mise en œuvre d'un jeu de dominos en classe de CM1. Le Petit Vert n°131 relate la mise en œuvre d'un jeu de dominos en classe de CM2. Les notions de périmètre et d'aire d'un polygone sont rencontrées.

MATHS ET ARTS

LE CALENDRIER D'ELOISA IRTURBE

En septembre 2019, les utilisateurs de WeTransfert découvraient le travail de la photographe argentine Eloisa Irturbe.

Ses réalisations attirent le regard de l'amateur de belles choses mathématiques.

Pour cette année 2019, l'artiste a créé un calendrier utilisant les ombres de solides posés sur une table.

Nous ne savons pas si elle utilisera de nouveau ce procédé pour un calendrier 2020, mais un appareil photo, un bon éclairage, des solides comme il en existe dans l'environnement de l'enseignant de mathématiques, donneront peut-être des idées à nos lecteurs et à leurs élèves. Le Petit Vert sera preneur de photos des réalisations.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

Léa Magnier

ACTIVITE NICOLAS GEOMETRIQUE

Contexte

Dans le collège Louis Armand de Golbey, les élèves de 6ème attendent avec enthousiasme le week-end de la Saint-Nicolas. Une des élèves sera sur un char lors du défilé à Épinal. Afin de préparer l'événement, les élèves vont pouvoir décorer la salle de classe avec des Nicolas Géométriques.

Objectif	Capacités
Suivre une suite d'instructions pour appliquer ses connaissances en géométrie.	Connaitre le vocabulaire de la géométrie : segment, milieu de segment, cercle, centre, rayon.

Matériel

- Une feuille A3 pliée en deux avec, à droite la suite d'instructions, à gauche, des points préalablement placés dans le plan.
- Une règle
- Un compas

Consignes

Suivre la suite d'instructions en effectuant les tracés sur le polycopié. En cas de doute, il est possible de demander de l'aide à son voisin de table.

Infos complémentaires

L'activité peut être menée en 40 minutes, idéal après du calcul mental.
J'ai créé l'activité intégralement, elle n'est pas parfaite mais a été appréciée par les élèves.
Si c'était à refaire je modifierais quelques instructions pour qu'elles soient moins répétitives.
On peut envisager d'intégrer d'autres constructions : droites parallèles, perpendiculaires.

Retour au sommaire

Logo St Nicolas

1. Tracer les segments [EA], [FD], [BC] et [GH].
2. Tracer l'arc de cercle AB de centre O (1/4 de cercle).
   Tracer l'arc de cercle CD de centre O' (1/4 de cercle).

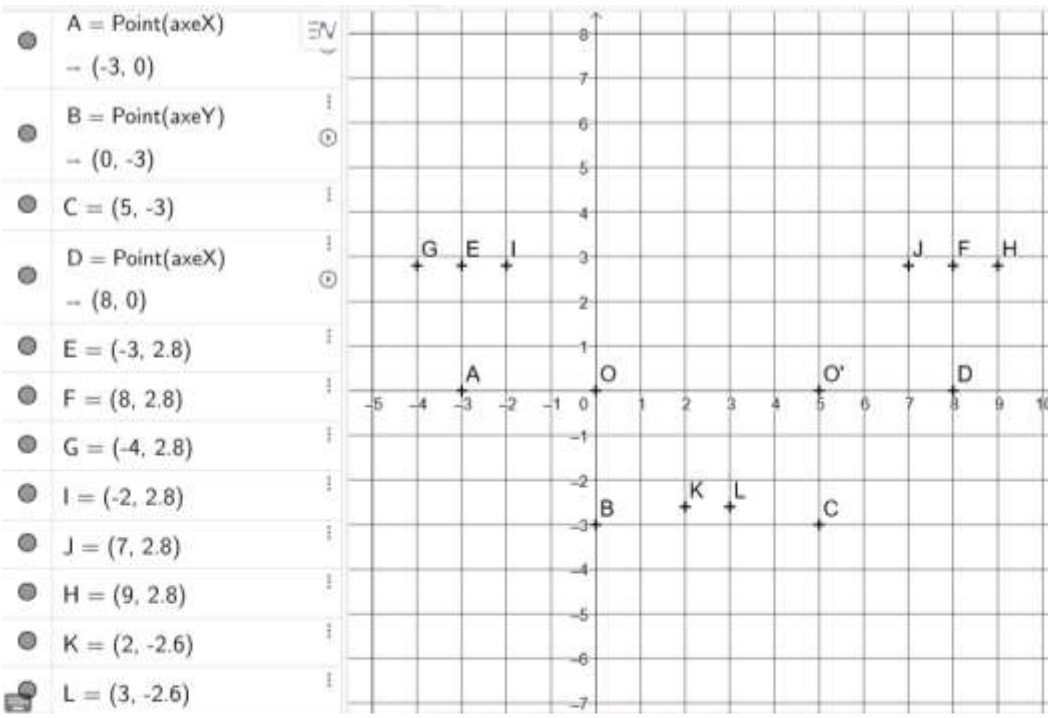
La mitre

3. Tracer un arc de cercle de centre H et de rayon HG.
   Tracer un arc de cercle de centre H et de rayon HI.
4. Tracer un arc de cercle de centre G et de rayon GH.
   Tracer un arc de cercle de centre G et de rayon GJ.

La barbe

5. Tracer un arc de cercle de centre A et de rayon AD.
   Tracer un arc de cercle de centre D et de rayon DA.
6. Placer le point M au milieu du segment [AD].
7. Tracer les segments [ML], [LK] et [KM]
8. Tracer le cercle de centre O de rayon 1,8 cm et le cercle de centre O' de rayon 8 mm.
9. Placer le point R au milieu de [BC].
10. Former la bouche en traçant un arc de cercle de centre R et de rayon 1,8 cm (facultatif*)
11. Former les sourcils à l'aide de deux rectangles.
12. Il n'y a plus qu'à repasser sur les traits utiles et à mettre en couleur. Pour les oreilles, on trace des demi-cercles de rayon 1cm de centre A et de centre D.

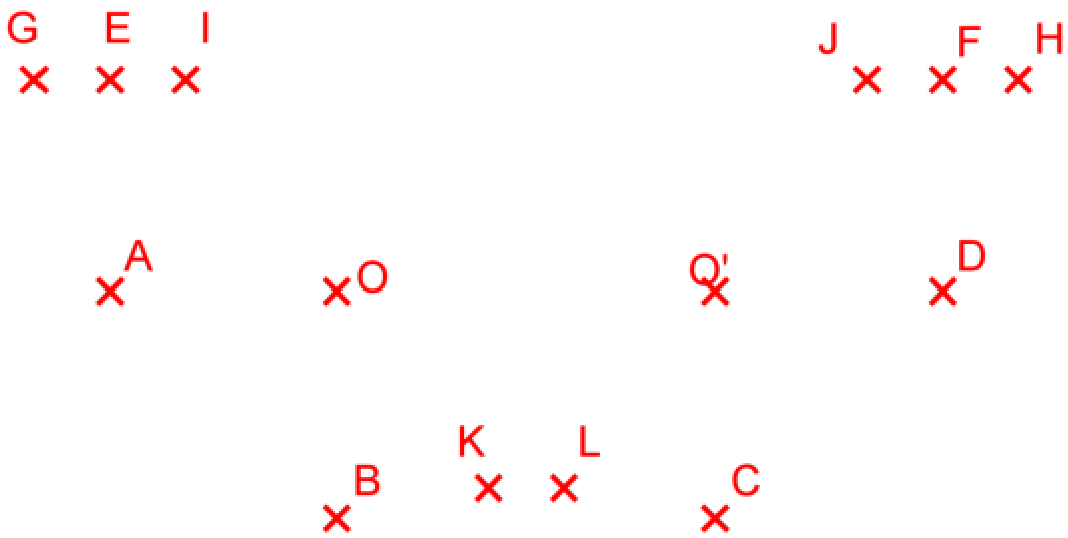
**on peut tracer une bouche à la main.*



Unité 1 cm pour 1 carreau

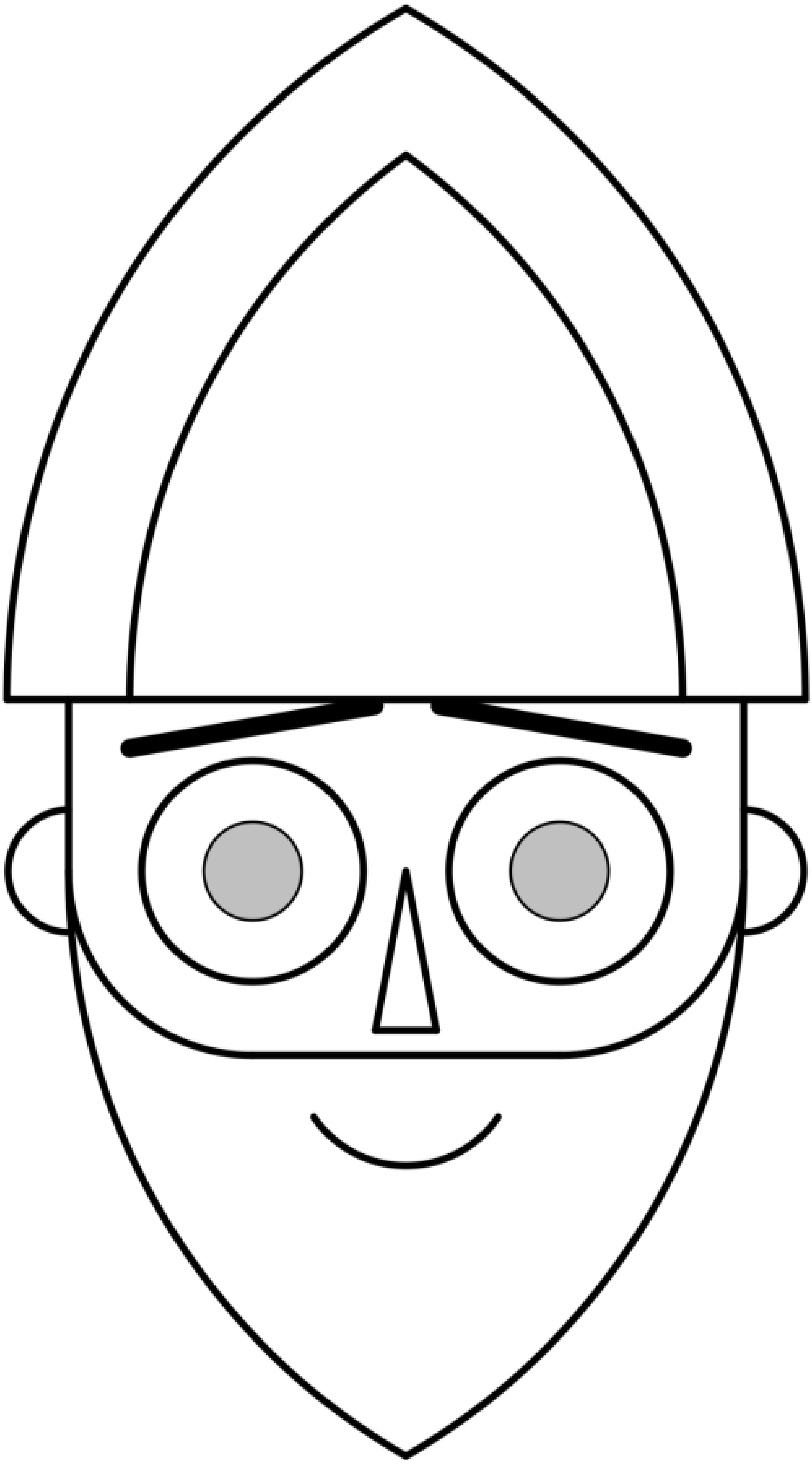
Retour au sommaire

La figure à compléter par les élèves



Retour au sommaire

Un dessin réalisé à l'aide de GeoGebra



Le fichier GeoGebra en téléchargement.

Retour au sommaire

Points positifs

- Les élèves travaillent tous, ils veulent voir apparaitre leur Nicolas.
- C'est l'occasion de réviser le vocabulaire avec les élèves en difficulté.
- Ceux qui ont fini rapidement sont occupés par le coloriage.
- Les élèves travaillent le soin.
- La salle de classe est bien plus jolie.

Points négatifs

- Certains tracés sont répétitifs et n'ont donc pas de plus-value intellectuelle.
- Les tracés sont trop simples pour les élèves les plus à l'aise.

Ouverture

Les élèves les plus à l'aise peuvent eux même écrire un programme de construction pour leurs camarades.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

UN E.P.I. AUTOUR DU NUTELLA

Stéphanie Waehren
Collège Pierre Messmer
Sarrebourg

« Les E.P.I. (Enseignements Pratiques Interdisciplinaires) doivent permettre de construire et d'approfondir des connaissances et des compétences par une démarche de projet conduisant à une réalisation concrète, individuelle ou collective »

L'idée d'utiliser le thème des pâtes à tartiner n'est pas nouvelle, et je tiens à remercier Cécile Prouteau pour son excellent atelier lors des journées nationales de 2015 à qui j'ai emprunté l'idée. Elle nous propose une tâche complexe qui passe par l'étude du volume d'un pot de Nutella : d'autres projets sur le même thème sont disponibles sur la toile.

Je propose ici une version permettant de travailler le tableur et la programmation avec des classes de cinquième ou de quatrième, la réalisation concrète consistant en un sondage programmé sous Scratch et l'étude de ses réponses.

La trame de l'E.P.I.

La célèbre marque de pâte à tartiner étant connue de tous, le thème est facile à lancer.

Certains élèves connaissent les problématiques associées à ce produit, les ayant probablement abordées en famille, et donnent déjà quelques pistes de réflexion dès l'annonce du sujet de cet E.P.I. qui abordera l'étude des conséquences de notre consommation de pâte à tartiner.

En Maths

Je propose tout d'abord le visionnage de vidéos des « émeutes » lors d'une offre promotionnelle en janvier 2018 proposée par l'enseigne Intermarché.

https://www.youtube.com/watch?v=aG_lSPUBocs

https://www.youtube.com/watch?v=4wPpUFujNH4

Nous commençons par vérifier que le pourcentage de promotion de 70 % a bien été appliqué, puis nous parlons de manière plus générale de nos habitudes de consommation et de notre attitude de consommateur.

Les élèves concluent eux-mêmes : Les consommateurs ne sont pas raisonnables… Pour quelques euros d'économie, les gens sont capables d'incivilités et peuvent se montrer très égoïstes.

Nous essayons alors de comprendre pourquoi une telle offre est proposée par l'enseigne qui vend probablement à perte. Les élèves finissent par comprendre que cela attire de nouveaux clients qui achèteront d'autres produits dans le magasin. L'objectif étant donc d'augmenter les profits.

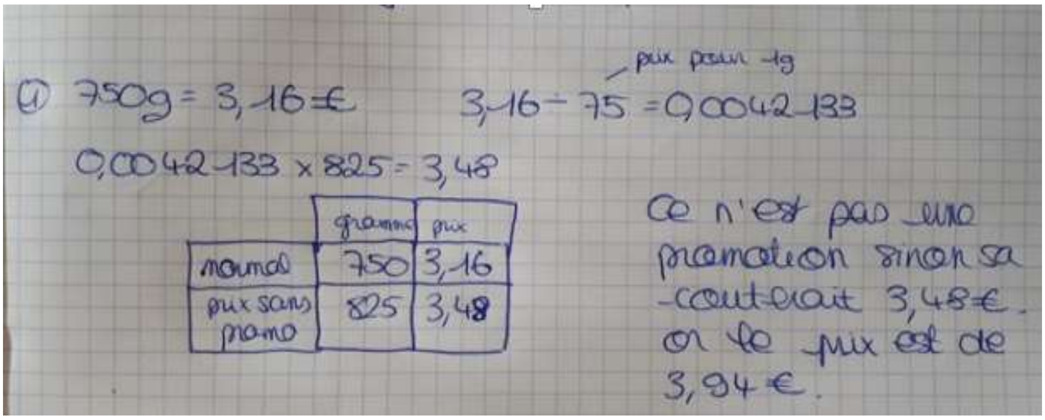
Suit un article plus ancien tiré du « Journaldunet » qui avertit les consommateurs d'une arnaque fréquente.

Alors que le pot de Nutella "classique" de 750 grammes est affiché à **3,16 euros**, le pot en "Maxi promo" de 825 grammes est vendu **3,94 euros**. Les élèves cherchent eux-mêmes la conclusion du journaliste que j'ai volontairement effacée :

Retour au sommaire

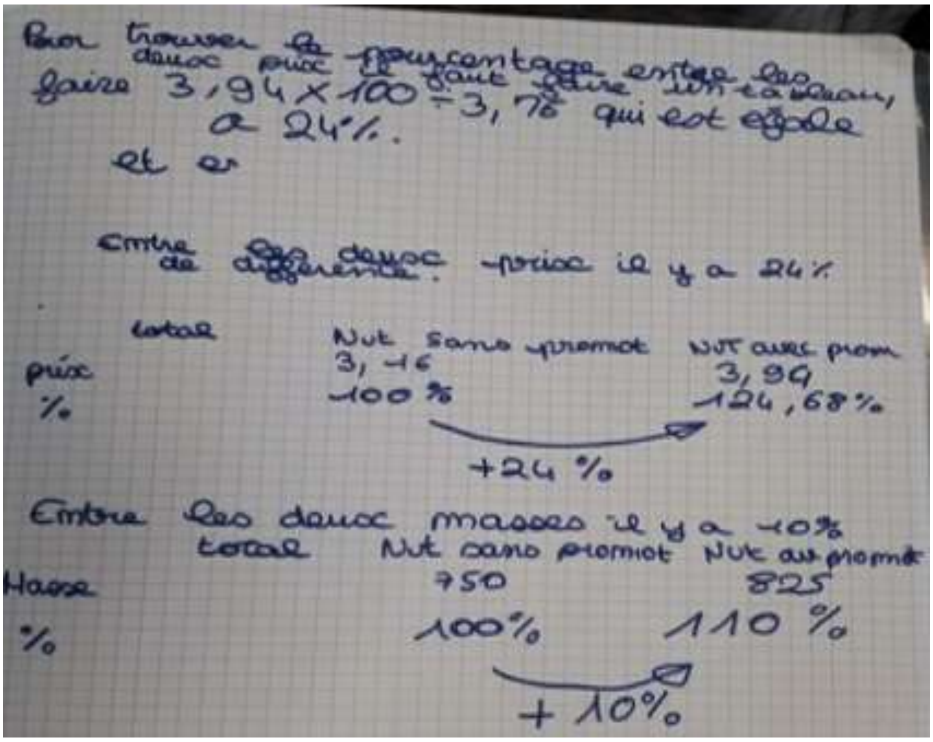
« Pour 10% de produit en plus, le prix est supérieur de……… »

Les élèves utilisent différentes stratégies pour compléter la conclusion et chacune est photographiée par mes soins et commentée en classe.



La plupart des élèves commencent par vérifier que la masse et le prix ne sont pas proportionnels. Il a souvent fallu les guider pour le calcul d'un « coefficient » qui a du sens afin de pouvoir comparer les deux offres.

En haut : le calcul du prix pour 1g dans les deux formats de pots permet aisément de vérifier que c'est une arnaque.



Certains se sont essayés à calculer la masse pour un euro dont l'interprétation était un peu plus délicate. Page précédente, une méthode « experte » qui permet de compléter la phrase du journaliste : « Pour 10% de produit en plus, le prix est supérieur de 24 % »

<u>En S.V.T.</u>

L'axe principal est l'étude nutritionnelle des pâtes à tartiner, par lecture de l'étiquette et en utilisant des vidéos qui mettent en évidence la grande quantité de graisse (31%) et de sucre

(56 %), mais aussi grâce à des sites proposant de comparer différentes marques de pâtes à tartiner.
http://fr.openfoodfacts.org/produit/8001505005592/nocciolata-pate-a-tartiner-au-cacao-et-noisettes-rigoni-di-asiago et
http://fr.openfoodfacts.org/produit/3017624047813/nutella
Les conséquences de la consommation excessive de sucre et de graisse sont alors évoquées et il est aussi question des différents types de graisses, ce qui permet d'introduire le thème « huile de palme ».

En Géographie

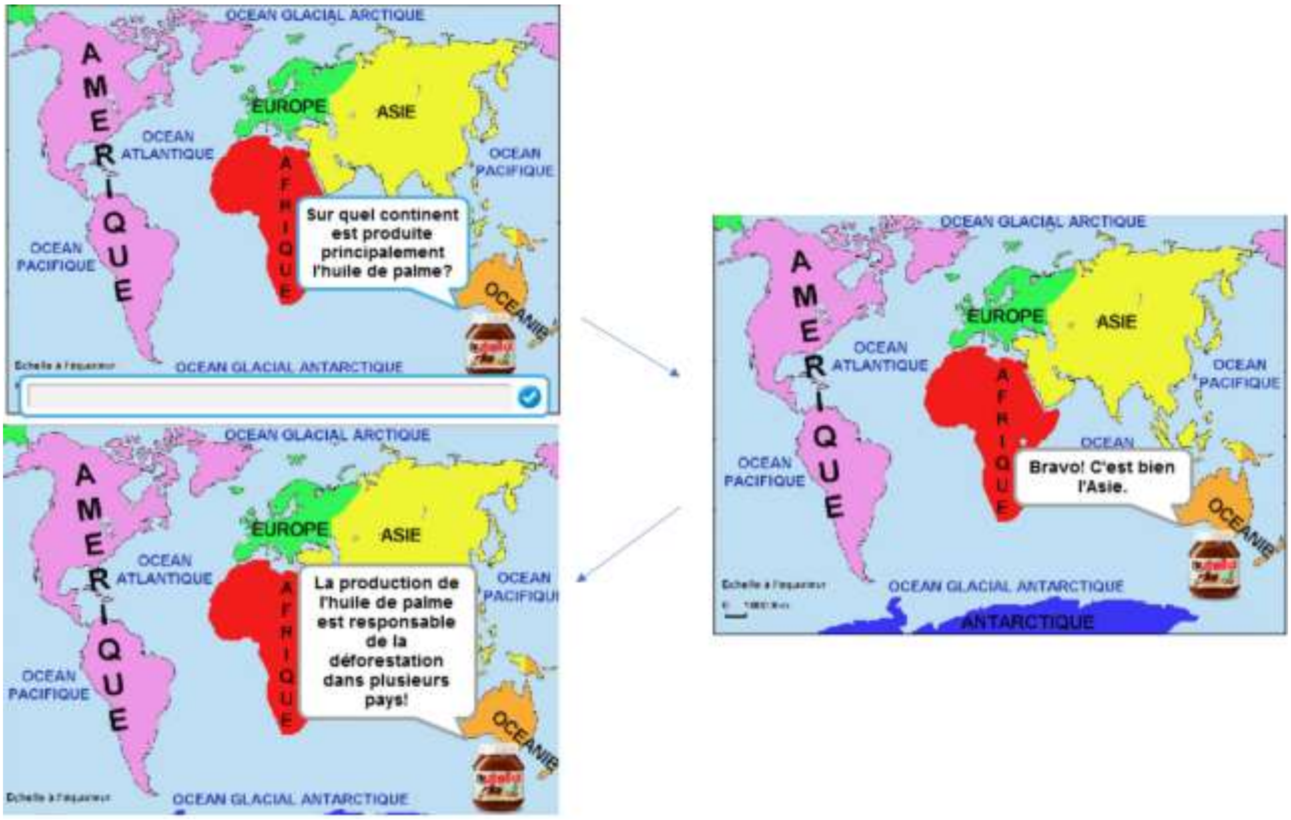
La production d'huile de palme en Indonésie est étudiée à partir de divers documents. Les conséquences de cette agriculture intensive, comme la disparition de la biodiversité et des terres du peuple autochtone sont évoquées.

En Maths (après l'intervention des collègues de S.V.T. et Géographie)

Une première étude de leur consommation de pâtes à tartiner leur est proposée à partir d'un petit sondage en classe. La question posée aux élèves est : « Combien de cuillères de pâte à tartiner mangez-vous par jour ? »
Cela m'a permis de balayer toutes les notions du chapitre Statistiques (vocabulaire, calcul de fréquences, moyenne, médiane et interprétations) à travers cet exemple. On a aussi pu montrer les fonctions Somme, Moyenne et Médiane du tableur, ainsi que la réalisation de graphiques, sur papier puis sur tableur. Certains élèves prennent conscience que leur consommation est très supérieure à la moyenne de la classe.
Je propose ensuite aux élèves de faire un sondage auprès des élèves de sixième, afin de tester leurs connaissances sur les thèmes abordés en S.V.T et en géographie. Nous nous mettons d'accord pour dire qu'un tel sondage a besoin d'un cadre et écrivons un cahier des charges :

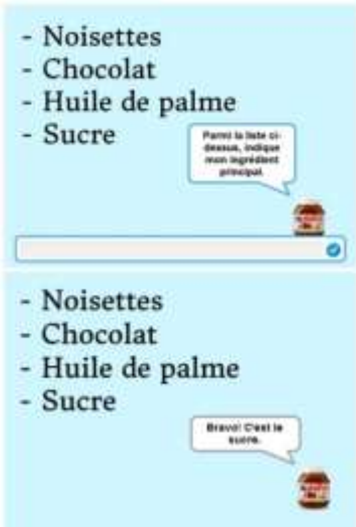
- nous utiliserons le langage de programmation Scratch qui permet de récupérer les réponses sous format numérique ;
- nous attendons des réponses simples : oui/non, des nombres, ou bien des réponses parmi des propositions ;
- nous devons écrire des questions courtes et faciles à comprendre ;
- nous écrivons des questions en rapport avec les nouvelles connaissances et en profiterons pour informer les élèves des conséquences de cette consommation sur leur santé et l'environnement ;
- nous nous efforcerons de faire un visuel agréable.

Retour au sommaire



Réalisation du programme : Le sondage en Scratch comporte les questions suivantes :

- Combien de cuillères de pâte à tartiner manges-tu par jour ?
- Parmi ces propositions, lesquelles sont les deux ingrédients principaux d'une pâte à tartiner ?
- Sais-tu qu'ils sont néfastes pour la santé ?
- Sur quel continent l'huile de palme est-elle fabriquée majoritairement ?
- Parmi les propositions, combien sont les conséquences de la production massive d'huile de palme ?



Les élèves ont déjà travaillé la programmation en Scratch auparavant, mais je leur propose quelques blocs de démarrage, car ils ne connaissent pas les listes et ne sont pas encore à l'aise avec les variables nécessaires à la récupération des réponses. (Voir le programme mis en téléchargement). Ils démarrent aussi avec des arrière-plans qu'ils peuvent modifier à leur guise. Les blocs « si… alors ...sinon... » avaient déjà été utilisés dans d'autres programmes en cours d'année. Deux heures de travail en salle informatique sont en général nécessaires pour obtenir de bons programmes.

Je sélectionne quelques programmes pour les installer sur les ordinateurs du CDI, afin de proposer le sondage aux sixièmes : un exemple est téléchargeable.

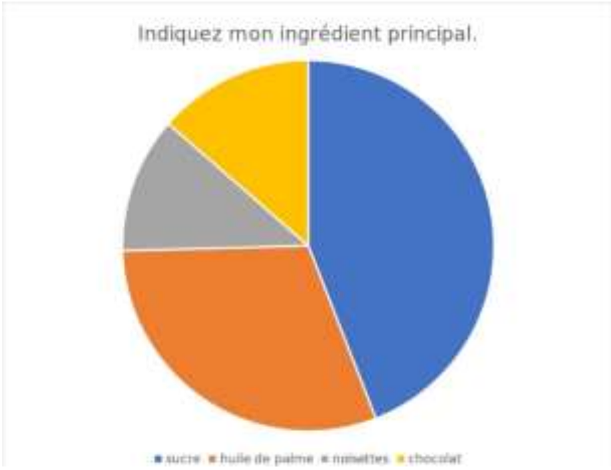
Ayant plusieurs classes de 6ème en charge, il ne m'est pas difficile de récupérer un grand nombre de réponses au sondage.

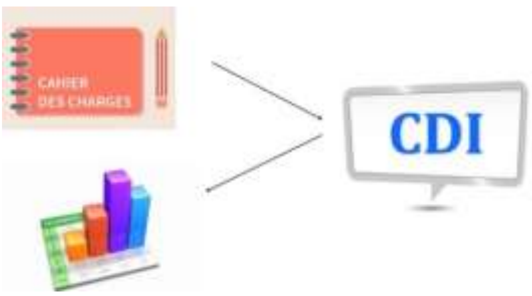
Retour au sommaire

<u>Retour sur les réponses</u>

Après récupération des données au format tableur, je présente les résultats aux élèves qui ont alors pour mission de calculer les moyennes, réaliser des graphiques, commenter, tout cela dans le but de préparer l'oral de troisième.

Ce travail arrivant en général à la toute fin d'année, il n'en est pas fait de vérification ni d'évaluation, ce que je regrette un peu.





<u>Prolongements possibles</u>

- une séance au cinéma a été organisée pour visionner le film « [Demain] » de Cyril Dion : une occasion de voir quelles solutions sont déjà mises en place à petite échelle pour éviter les conséquences d'une consommation irraisonnée.

- une randonnée dans les Vosges toutes proches pour profiter des bénéfices d'une activité physique dans un cadre encore préservé et riche en biodiversité.

<u>Conclusion</u> : Cela fait 3 ans que nous travaillons ce thème, d'abord en quatrième, puis en cinquième (pour être plus en accord avec les programmes de géographie). Nous adaptons nos documents à l'actualité pour enrichir les thèmes abordés avec des informations récentes sur les thèmes de la santé et de l'environnement. Il s'agit néanmoins d'un travail de longue haleine du point de vue de l'enseignant et qui demande un peu de coordination avec les collègues (dont je salue ici la disponibilité et la réactivité).

Il permet de travailler les chapitres statistiques et proportionnalité de manière efficace et dynamique. Deux élèves ont présenté cet E.P.I. à l'oral du brevet et ont très bien réussi l'épreuve : leur diaporama était très documenté et incluait des images des travaux menés en classe. (Certaines images de cet article sont tirées de leur production, dont le programme Scratch plus bas).

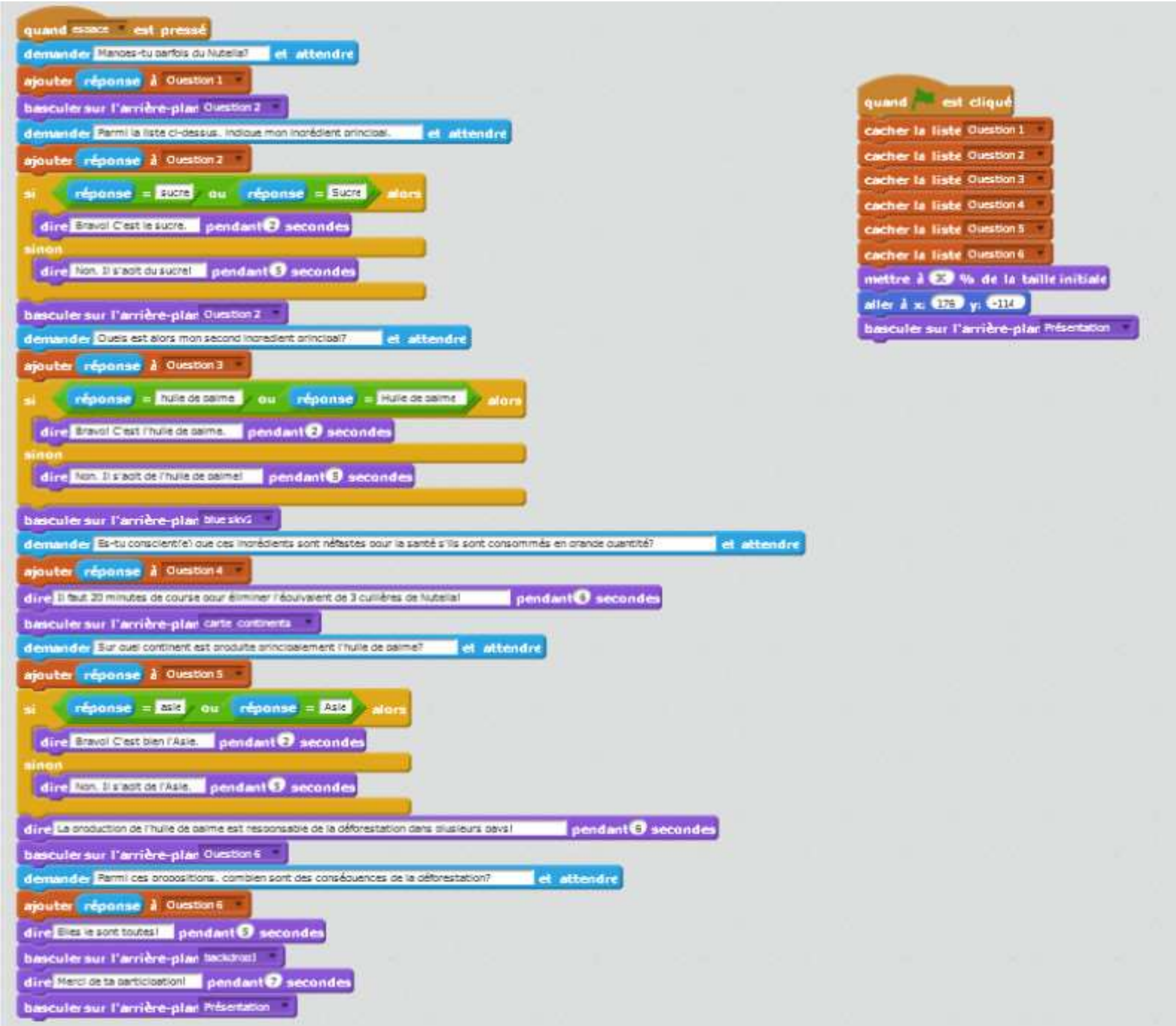
Le thème étant très riche, il permet d'aborder des sujets d'actualité et d'exprimer ses opinions personnelles.

C'est donc une expérience très concluante, de par la diversité des compétences et connaissances mises en pratique, et pour l'intérêt que lui ont porté les élèves qui ont adhéré à la démarche et sont de plus en plus préoccupés par la préservation de l'environnement.

Cet E.P.I. permet aux élèves de se distinguer à l'oral du brevet, et au professeur de mathématiques de montrer comment décoder les informations à leur disposition.

Retour au sommaire

Programme Scratch présenté par un élève à l'oral du brevet



Rappel

Les programmes Scratch utilisés sont disponibles sur notre site.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

SÉANCE SUR LE RAISONNEMENT

Hélène Marx
Lycée Saint-Exupéry Fameck

Objectif principal

Travailler sur le raisonnement, mettre en place les différentes connexions logiques, sans faire de maths.

Objectifs annexes (mais non négligeables au vu du déroulement des séances testées)

Argumenter, se parler sans s'agresser pour se convaincre, remettre son avis en question, savoir changer d'avis.

Durée

Idéalement 3 séances (variable en fonction de comment se passent les débats dans le groupe)

Effectif / Public

J'ai pensé et testé cet atelier plusieurs fois avec un groupe d'environ 25 élèves de seconde, cela ne pose aucun problème. Je crains qu'en classe complète, tous les élèves ne réussissent pas à entrer dans le jeu, que certains réussissent à se « cacher » un peu. Mais à voir …

Matériel

Une salle assez spacieuse, avec au moins 3 endroits séparés (coins de la salle) et équipée d'un vidéoprojecteur.

Principe et règles du jeu à annoncer clairement aux élèves avant le lancement :

- l'atelier se compose de 5 situations pour lesquelles vous allez devoir choisir une seule réponse parmi les 3 proposées ;
- vous devez vous positionner en silence, sans concertation avec votre voisin (ce qui enlèverait une grande partie de la richesse de l'atelier) avant de vous déplacer ;
- quand tout le monde est au clair dans sa tête (on laisse bien le temps à tout le monde de réfléchir, pas question de rapidité), on se déplace tous ensemble vers le l'endroit correspondant à la réponse choisie ;
- vous avez le droit de changer d'avis à tout moment, il faut pour cela juste vous déplacer vers la nouvelle destination et être prêt (ou presque) à expliquer le pourquoi et éventuellement le comment du changement d'avis ;

Il faut vraiment veiller au respect de ces règles pour bien impliquer tous les élèves au débat.

Déroulement

Pour chaque situation, le prof projette l'énoncé et le lit à haute voix (plusieurs fois au besoin). Il présente ensuite les différentes réponses possibles. Chaque élève réfléchit en silence et se positionne.

Une fois que tous les élèves ont manifesté le fait d'être bien au clair sur leur réponse, le prof projette le lieu des réponses, les élèves se déplacent.

Retour au sommaire

Une fois les groupes constitués (le prof analyse mentalement la répartition des élèves dans les différents groupes), le prof leur demande de réfléchir ensemble à ce qu'ils vont dire aux élèves des autres groupes pour les convaincre de les rejoindre.

Une fois que les groupes sont au point, le prof donne la parole au 1er groupe (celui de son choix en fonction des réponses, de la composition du groupe, du nombre de participants du groupe...) Le choix est important pour la suite et n'est pas forcement toujours facile à faire. Dans mon cas, je trouve toujours un argument loufoque pour « expliquer » mon choix afin de ne pas orienter les débats et donner une idée de « qui a raison ». Ensuite, le prof joue le rôle d'animateur (plus ou moins facile en fonction des groupes, de leur façon de se parler, de se respecter...)

La situation s'arrête lorsque tous les élèves sont ensemble dans un coin (je n'ai jamais eu tous les élèves dans un « mauvais coin » !).

Phase de synthèse

Je suis convaincue qu'il est important ensuite de reprendre tout ça avec eux. Il faut verbaliser les raisonnements mis en jeu, les arguments évoqués. Il faut également trouver des exemples pertinents d'application en mathématiques ou dans la vie courante. Il faut vraiment prendre le temps de débriefer avec eux des erreurs commises.

Je ne suis pas complétement satisfaite de mes traces écrites, je ne les partagerai donc pas... Appel aux testeurs qui auraient de bonnes idées pour la suite.

Commentaires

Lors des premières situations, les élèves risquent de développer des arguments du type : on ne dit pas que c'est en même temps que la réunion, peut-être que celui-ci n'avait pas de baskets rouges, qu'elles étaient sales.... Le prof doit dans ce cas intervenir d'autorité pour bien repréciser le cadre et balayer (avec bienveillance) ces arguments.

Il peut être bon de prendre quelques notes pour pouvoir y revenir ensuite dans la phase de synthèse (du genre, souvenez-vous, une telle avait dit ... mais untel l'avait convaincue qu'il s'agissait de...) et pour s'en souvenir pour raconter aux collègues !

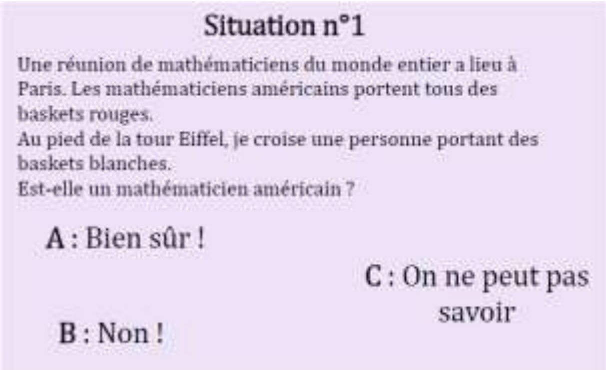
Il peut être intéressant également de prendre des notes des sujets annexes abordés (prise de paroles, comment s'adresser à l'autre pour le convaincre...) pour en rediscuter ensuite avec eux, pour qu'ils aient bien conscience de leur progrès dans ces domaines (qui sont incontestables d'une situation à l'autre).

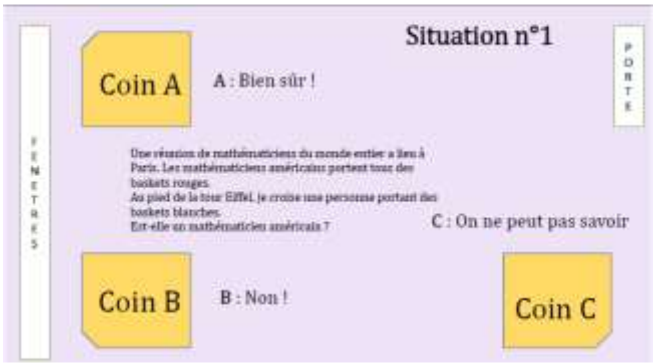
Le prof doit vraiment veiller à rester neutre, à n'être que l'animateur et à ne pas se laisser entrainer par les élèves qui voudront l'utiliser comme arbitre. C'est plus facile à dire qu'à faire. Ils sont forts...

Il m'arrive quelques fois d'avoir dès le début un coin vide, dans ce cas je leur demande dans un premier temps de réfléchir à ce qu'ils diraient à un élève qui se serait placé là. C'est quelquefois plus facile pour eux de commencer à s'adresser à quelqu'un de fictif, en particulier sur les premières situations.

Retour au sommaire

Voici un exemple de situation extrait du diaporama :





Voici les quatre autres situations proposées à la classe.

Situation n°2

La personne qui marche à côté de la précédente porte des baskets rouges. Est-ce un mathématicien américain ?

Situation n°3

Un guide annonce l'arrivée d'un mathématicien français. Porte-il des baskets rouges ?

Situation n°4

Devant le Louvres, je reconnais un mathématicien américain. Il est assis, son sac cache ses chaussures. Porte-il des baskets rouges ?

Situation n°5

Demain, s'il fait beau, j'irai au lycée à pied ! Finalement, le lendemain, il pleut...

Le diaporama complet pour ces cinq situations est disponible sur notre site : **diaporama**

LA PHRASE DU TRIMESTRE

La liberté, comme la mathématique, est fille de l'imagination. (1993)

René Thom

Retour au sommaire

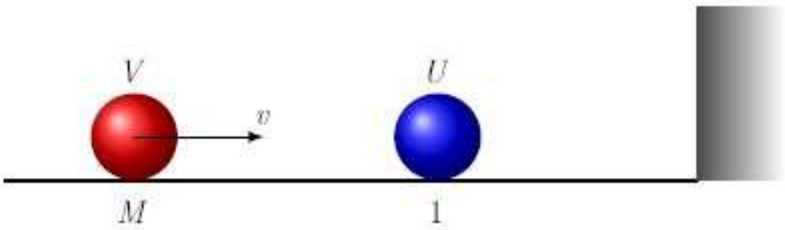
ÉTUDE MATHÉMATIQUE

DES CHOCS À π

Alain Satabin

1. DES BOULES, DES CHOCS ET DES REBONDS

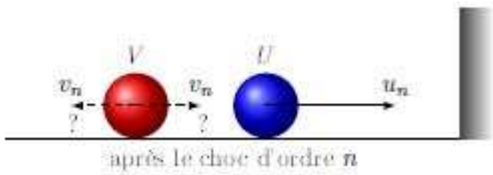
Imaginons l'expérience suivante :
Sur le sol, à gauche d'un mur, est positionnée une boule immobile *U* de masse 1, tandis qu'une boule *V* de même diamètre et de masse *M* arrivant de sa gauche à une vitesse *v* vient la percuter.



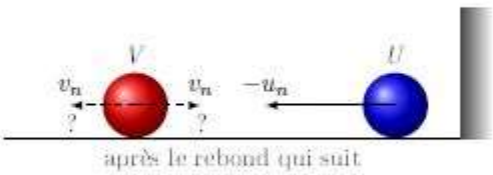
Dans la suite de l'article, ce qu'on appelle un *contact* est : soit un *choc*, percussion entre les deux boules, soit un *rebond* de la boule *U* sur le mur. L'expérience se termine lorsqu'il ne se produit plus de chocs et le jeu consiste à savoir combien de contacts ont eu lieu.
Le système est évidemment considéré comme parfait : pas de frottement, des chocs élastiques et aucune perte d'énergie lors des rebonds. D'un point de vue physique, l'expérience est irréalisable pour cette raison !
La chose amusante est que lorsque $M = 1$ on dénombre 3 contacts, passant à 31 contacts pour $M = 100$, puis 314 pour $M = 10000$ et pour $M = 1000000$, à votre avis ? Oui, c'est bien cela 3141 contacts. Il est difficile de croire au hasard et la question se pose de savoir si l'égrenage des décimales de π va se poursuivre à mesure que M gravit les puissances de 100.

2. MATHÉMATISONS PHYSIQUEMENT LE PROBLÈME

Orientons l'axe de déplacement des boules vers la droite. Au départ, les vitesses des boules sont $u_0 = 0$ et $v_0 = v$. Un premier choc se produit et la boule U va partir vers la droite à la rencontre du mur. Avant de comptabiliser les contacts, intéressons-nous simplement aux chocs. Supposons qu'il s'en soit déjà produit n plaçons-nous après ce $n^{\text{ième}}$ choc (avec $n \geq 1$) dans le cas où il envoie la boule U vers le mur. Notons u_n et v_n les vitesses des deux boules après ce choc. Nous avons ici $u_n > 0$, sans avoir d'indication sur le signe de v_n. La boule U va donc rebondir sur le mur et en revient avec la vitesse $-u_n$ vers la boule V.



après le choc d'ordre n



après le rebond qui suit

Si le choc suivant a bien lieu, en vertu des conservations de l'énergie cinétique et de la quantité de mouvement du système, les vitesses u_{n+1} et v_{n+1} qui en résultent vérifient le système :

Retour au sommaire

$$\begin{cases} u_{n+1}^2 + M\ v_{n+1}^2 = u_n^2 + M\ v_n^2 \\ u_{n+1} + M\ v_{n+1} = -u_n + M\ v_n \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\begin{cases} u_{n+1}^2 - u_n^2 = M\ (v_n^2 - v_{n+1}^2) \\ u_{n+1} + u_n = M\ (v_n - v_{n+1}) \end{cases}$$

en remarquant que $v_{n+1} - v_n \neq 0$ car un choc s'est produit (et donc $u_{n+1} + u_n \neq 0$), une basique identité remarquable permet de simplifier pour donner :

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = v_n + v_{n+1} \\ u_{n+1} + u_n = M\ (v_n - v_{n+1}) \end{cases}$$

autrement dit :

$$\begin{cases} u_{n+1} - v_{n+1} = u_n + v_n \\ u_{n+1} + M\ v_{n+1} = -u_n + M\ v_n \end{cases}$$

ce qui conduit finalement à :

$$(S) : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{M+1}((M-1)\ u_n + 2M\ v_n) \\ \\ v_{n+1} = \frac{1}{M+1}(-2\ u_n + (M-1)\ v_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

3. Jusqu'où s'arrêteront-elles ?[1]

En supposant que le $n^{\text{ième}}$ choc se produit, ce sera le dernier dans l'un des deux cas suivants :

- soit la boule U va rebondir sur le mur ($u_n > 0$) mais elle ne rattrape pas la boule V qui fuit vers la gauche quand elle revient. Cela correspond à l'inégalité $v_n \leq -u_n$;
- soit $u_n \leq 0$, ce qui signifie que U s'immobilise ou s'éloigne du mur aussitôt le choc. Nécessairement dans ce cas la boule V s'éloigne aussi du mur plus vite que U et donc $v_n \leq u_n \leq 0$ et a fortiori $v_n \leq -u_n$.

Pour faire simple, disons que l'expérience se poursuit tant que $v_n > -u_n$, c'est-à-dire $u_n + v_n > 0$.

4. Demandez le programme !

Avant d'aller plus loin, on peut tester le nombre de contacts obtenus grâce à l'algorithme suivant :

```
p ← saisir ("Puissance de 100 voulue pour M :")
m ← 100^p ' masse de la boule V
u ← 0 ' initialisation de la suite u
v ← 1 ' initialisation de la suite v
n ← 0 ' initialisation du nombre de contacts
tant que (u+v>0)
    n ← n+1 ' comptabiliser le choc de rang n
    ' calcul des vitesses après le choc de rang n
    uu ← ((m-1)u+2mv)/(m+1)
    vv ← (-2u+(m-1)v)/(m+1)
    u ← uu
    v ← vv
    ' voir si le choc est suivi d'un rebond
    si u>0 ' U retourne vers le mur
        n ← n+1 ' comptabiliser le rebond
    fin si
fin tant que
' conclusion
afficher ("le nombre de contacts effectués vaut : "; n)
```

[1] « Jusqu'où s'arrêteront-ils ? » extrait de la chanson « Revue de Presse » de Coluche

Retour au sommaire

5. MAIS POURQUOI π S'INVITE ?

Pour exprimer sous forme explicite u_n et v_n à partir des relations (S), la méthode matricielle fonctionne bien, quoiqu'un peu lourde. Proposons autre chose.
Une astuce consiste à passer par les complexes en posant $z_n = u_n + \mathrm{i}\ \sqrt{M}\ v_n$.
Les relations trouvées précédemment donnent alors :

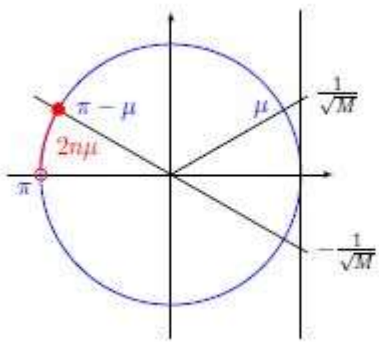
$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= u_{n+1} + \mathrm{i}\sqrt{M}\, v_{n+1} \\
&= \frac{1}{M+1}\left(\left[(M-1) - 2\ \mathrm{i}\ \sqrt{M}\right]\ u_n + \left[2\ M + \mathrm{i}\ \sqrt{M}\ \ (M-1)\right]\ v_n\right) \\
&= \frac{1}{M+1}\left(\left[(M-1) - 2\ \mathrm{i}\ \sqrt{M}\right]\ u_n + \mathrm{i}\ \sqrt{M}\ \left[-2\ \mathrm{i}\ \sqrt{M} + (M-1)\right]\ v_n\right) \\
&= \frac{(M-1) - 2\ \mathrm{i}\ \sqrt{M}}{M+1}\left(u_n + \mathrm{i}\ \sqrt{M}\ v_n\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{M} - \mathrm{i}}{\sqrt{M+1}}\right)^2\ z_n \\
&= e^{-2\ \mathrm{i}\ \mu}\ z_n
\end{aligned}$$

en posant $\mu = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$.
Cela conduit à : $z_n = e^{-2\ \mathrm{i}\ n\ \mu}\ z_0 = \mathrm{i}\ v\ \sqrt{M}\ e^{-2\ \mathrm{i}\ n\ \mu} = u_n + \mathrm{i}\ \sqrt{M}\ v_n$ et donc, pour $n \geq 1$:

$$\begin{cases} u_n = v\ \sqrt{M}\ \sin(2n\mu) \\ v_n = v\cos(2n\mu) \end{cases}$$

L'arrêt de l'expérience étant une affaire de signe et de comparaison des deux vitesses, la valeur de v n'a pas beaucoup d'importance.
Le premier cas finalisant se produit lorsque $v_n \leq -u_n < 0$. Il n'y aura plus de choc ensuite, le $n^{\text{ième}}$ est le dernier et chaque choc a été suivi d'un rebond. Dans ce cas on dénombre donc $2n$ contacts.
Ces inégalités se traduisent par le système :

$$\begin{cases} u_n > 0 \\ v_n < 0 \\ \frac{u_n}{v_n} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2n\mu) > 0 \\ \cos(2n\mu) < 0 \\ \tan(2n\mu) \geq -\frac{1}{\sqrt{M}} \end{cases}$$



ce qui donne

$$\frac{\pi}{\mu} - 1 \leq 2n < \frac{\pi}{\mu}$$

L'égalité de gauche signifierait que $\frac{\pi}{2n+1} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$
Comme nous allons considérer les cas où $M = 10^{2p}$ on aurait alors $\tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) = 10^{-p}$. Cela n'est jamais réalisé et nous démontrerons en annexe à la fin de l'article que, pour $m \geq 3$ (et entier), $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ n'est rationnelle que lorsqu'elle vaut 1 pour $m = 4$.
Dans ce premier cas d'arrêt de l'expérience, le nombre de contacts est donc $2n = E\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$.

Passons au second cas.
Le $n^{\text{ième}}$ choc se produit mais à son issue $u_n \leq 0$ (et fatalement $v_n \leq 0$). Tenons compte aussi du fait que le choc précédent avait conduit à un rebond ($u_{n-1} > 0$) suivi d'un choc, donc qu'il n'était pas dans le cas précédent. Il y a eu n chocs et $n-1$ rebonds, donc $2n-1$ contacts.
Cela signifie que $2(n-1)\mu$ est situé dans le premier ou deuxième quadrant, mais pas dans la zone rouge dessinée dans le cas précédent, et que $2n\mu$ est dans le troisième quadrant.

Retour au sommaire

C'est à dire $\begin{cases}2(n-1)\mu < \pi - \mu \\ 2n\mu \geq \pi\end{cases}$ ou encore $\frac{\pi}{\mu} - 1 \leq 2n - 1 < \frac{\pi}{\mu}$ L'égalité de gauche conduit cette fois à $\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 10^{-p}$ et n'est réalisée que pour $p = 0$, c'est à dire lorsque les deux boules ont la même masse. Nous avons alors $n = 2$ et 3 contacts. La boule U s'immobilise après le deuxième choc.

Pour $p \geq 1$, ce cas conduit aussi à un nombre de contacts valant $2n - 1 = E\left(\frac{\pi}{\mu}\right)$.

D'où la conclusion générale :

> Lorsque la boule V a pour masse $M = 10^{2p}$ avec $p \in \mathbb{N}$, nous avons
> - $E(\pi) = 3$ contacts si $p = 0$
> - $E\left(\frac{\pi}{\arctan(10^{-p})}\right)$ contacts si $p \geq 1$

Pour $p \geq 1$, un petit développement limité donne

$$\arctan(10^{-p}) = 10^{-p} - \frac{1}{3}\ 10^{-3p} + 10^{-4p}\varepsilon(p) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{p\to\infty} \varepsilon(p) = 0$$

et donc (dans ce qui suit ε représente **une** fonction tendant vers 0 à l'infini)

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\arctan(10^{-p})} &= \frac{\pi}{10^{-p}\ (1 - \frac{1}{3}10^{-2p} + 10^{-3p}\varepsilon(p))} \\ &= \pi\ 10^{p}\ (1 + \frac{1}{3}10^{-2p} + 10^{-3p}\varepsilon(p)) \\ &= \pi\ 10^{p} + \frac{\pi}{3}10^{-p} + 10^{-2p}\varepsilon(p)\end{aligned}$$

Cela signifie que $\pi \times 10^{p}$ est une approximation satisfaisante de cette fraction, l'erreur commise étant de l'ordre de 10^{-p} et ayant peu de chance de modifier la valeur de la partie entière dès que p dépasse 5. Pour les premières valeurs de p, l'algorithme permet de constater que cette expression convient également.

L'apparition des décimales de π n'est donc pas un hasard et le nombre de contacts vaut $E(\pi \times 10^{p})$ lorsque la boule incidente a pour masse 10^{2p}. Seule une séquence de p chiffres 9 à partir du rang $p + 1$ dans le développement décimal de π peut invalider cette valeur sur un cas particulier.

6. ANNEXE ANNONCÉE

Montrons ici que pour $m \geq 3$ (et entier), $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ n'est rationnelle que lorsqu'elle vaut 1 pour $m = 4$.

6.1. Cas où m est un nombre premier

Comme $m \geq 3$, il est premier impair. Posons $m = 2q + 1$.

$$t = \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{e^{2i\pi/m} - 1}{i(e^{2i\pi/m} + 1)} \quad \Rightarrow \quad e^{2i\pi/m} = \frac{1 + it}{1 - it} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1 + it}{1 - it}\right)^{m} = 1$$

t est donc une racine du polynôme

$$P(X) = (1 + iX)^m - (1 - iX)^m = (iX + 1)^m + (iX - 1)^m = \sum_{k=0}^{k=m} \binom{m}{k} (iX)^k (1 + (-1)^{m-k})$$

ne subsistent dans cette somme que les termes où $m - k$ est pair, c'est-à-dire k impair ($k = 2j + 1$)

$$P(X) = \sum_{j=0}^{j=q} 2\binom{2q+1}{2j+1}(iX)^{2j+1} = 2iX\sum_{j=0}^{j=q}\binom{2q+1}{2j+1}(-1)^j X^{2j}$$

et comme $t = \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) \neq 0$, t est une racine (positive) du polynôme à coefficients entiers

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{j=q}\binom{2q+1}{2j+1}(-1)^j X^{2j}$$

[Retour au sommaire](#)

Or, si le rationnel positif irréductible $\frac{a}{b}$ est racine de ce polynôme, alors a divise son coefficient constant, c'est à dire m, et b divise le coefficient dominant, c'est à dire $(-1)^q$. Cela signifie que a vaut 1 ou m (car m est premier) et que b vaut 1. Donc : soit $t = 1$, ce qui est incompatible avec m impair (donc différent de 4), soit $t = m$, ce qui est également impossible car $m \geq 3$ et $t = \tan\left(\frac{\pi}{m}\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) < 3$.

Voici démontré que $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ est irrationnelle lorsque m est un nombre premier impair.

6.2. Le cas $\mathrm{m} = 8$

Posons $t = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$$1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = \frac{2t}{1-t^2}$$

donc t est racine du trinôme $X^2 + 2X - 1$ qui n'a pas de racine rationnelle. Le cas $m = 8$ est également démontré.

6.3 Une propriété sympathique

Soit $x \in]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $kx \in]\,0\,;\frac{\pi}{2}\,[$. Il existe une fraction rationnelle F_k à coefficients entiers telle que $\tan(kx) = F_k(\tan(x))$. Cela se démontre aisément par récurrence avec la formule d'addition des tangentes et on a

$$F_1(X) = X \qquad \text{et} \qquad F_{j+1}(X) = \frac{F_j(X)+X}{1-XF_j(X)}$$

6.4 Le cas général

Si m est une puissance de 2 autre que 4, alors $m = 8k$ et

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(k \times \frac{\pi}{8k}\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{8k}\right)\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)$$

donc si $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ était rationnelle, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ le serait aussi, réfutant le résultat (6.2). Si m n'est pas une puissance de 2, alors m possède un diviseur premier impair p et $m = kp$

$$\tan\left(\frac{\pi}{p}\right) = \tan\left(k \times \frac{\pi}{kp}\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{kp}\right)\right) = F_k\left(\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)\right)$$

donc si $\tan\left(\frac{\pi}{m}\right)$ était rationnelle, $\tan\left(\frac{\pi}{p}\right)$ le serait aussi, réfutant le résultat (6.1). Ce qui clôt la démonstration de la propriété annexée.

Retour au sommaire

VU SUR LA TOILE

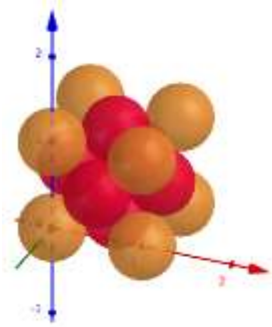
SPHÈRES DE NOËL

Gilles Waehren

Un « Vu sur la toile » de Noël ? Pourquoi pas ? Il y a quelques temps de cela, je vous proposais un thème sur les étoiles ; certains en ont-ils profité pour bricoler ? Cette fois-ci, nous allons compléter le sapin avec des boules. Une idée qui m'est venue aux Journées Nationales de Dijon en suivant un atelier « Mathématiques et Musique » qui mettait en évidence la « religion sphérique » qui a baigné la science, de Pythagore à Kepler, dans l'Harmonie des sphères (voir Wikipédia) et qui continue d'inspirer quelques esprits originaux. Plus sérieusement, le site Futura Sciences permettra de savoir pourquoi une sphère est dessinée sur la tombe d'Archimède.

Cette surface n'a pas fini d'intriguer nos plus éminents chercheurs qui s'intéressent à retourner les sphères comme des chaussettes : la vidéo correspondant à l'image ci-contre est ici. Pour une séquence plus complète et plus « vintage », on prendra le temps de visionner ce film (7 minutes). D'autres mathématiciens ont trouvé des méthodes pour placer des points régulièrement sur une sphère. Mais il y a des questions bien plus incongrues comme : « Pourquoi le Petit Nicolas a un épi sur la tête ? » avec une réponse très argumentée sur le très recommandable site du CNRS, « Images de Maths ».

GeoGebra est un bon moyen de visualiser des sphères et les manipuler, notamment pour relever des coordonnées sphériques et se repérer à la surface de la Terre. Des sphères fort utiles en cristallographie pour ceux qui pratiquent l'enseignement scientifique. Ils peuvent se référer au cours de Vincent Pantaloni qui est très bien fait.



Si vous souhaitez fabriquer des sphères avec vos élèves, un modèle est disponible dans les pages du Collège Jean Monnet de l'académie de Versailles. On trouve aussi une boule de Noël en matériau recyclé sur le site de Tête à modeler, qui fourmille de bricolages divers et variés. Si vous préférez les boules de Noël en verre (qui sont davantage des sphères), le CIAV de Meisenthal propose ses grands classiques et des modèles plus modernes, pour lesquels le solide de révolution n'est pas nécessairement la norme. Enfin, les plus gourmands ne résisteront peut-être pas à la confection de ces hémisphères de Noël, un dessert pour vos repas de fêtes.

Les plus maladroits se rabattront sur des jeux en ligne comme ce Spheroku, un sudoku avec neuf couleurs à placer sur une sphère, ou Hyper-Sphère, variante d'un classique où l'on doit faire rouler une sphère (boule) sur des surfaces planes sans tomber. De quoi s'occuper pendant les longues soirées d'hiver.

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

EXPOSITION GÉOMÉTRIQUE À NANTES

APMEP Lorraine – Groupe Maths et Arts

Un de nos adhérents en séjour à Nantes a eu le regard attiré par cette affiche. Nous avons voulu en savoir un peu plus à propos de ces deux artistes abordant des thèmes qui nous sont chers.

Soonja Han est une artiste coréenne vivant à Paris depuis 1983. Cercles et disques sont pour elle une grande source d'inspiration.

Mitsouko Mori est une artiste japonaise, elle vit en France depuis plus de cinquante ans. S'inspirant du Bauhaus, nombre de ses œuvres attirent notre regard.

L'envie est venue de mettre en parallèle deux œuvres apparaissant dans la présentation de l'exposition avec une décoration de la Mosquée du Vendredi à Isfahan montrant la dissection imaginée par Abu'l-Wafa' pour prouver le théorème de Pythagore. Cette mosaïque est évoquée dans les documents de Christian Blanvillain présentant les trisections du carré évoquées dans le Petit Vert n°139.

Mitsouko Mori

Composition en rouge

Mitsouko Mori

Composition en rouge

À la Mosquée du Vendredi à Isfahan

Les liens « Maths et Arts » à Nantes ne sont pas une nouveauté :

Entre le 8 février et le 7 avril 2019, le musée Dobrée a présenté l'exposition « Polygones » de Georges Rousse.

Entre le 28 juin et le 1er septembre 2013, Felice Varini a présenté « Suites d'éclats » dans la Hab galerie.

Au Musée d'Arts Modernes, on trouve bon nombre d'œuvres de François Morellet.

Retour au sommaire

Cet artiste a aussi réalisé l'œuvre « De temps en temps ». *Cet* « indicateur météorologique » s'étend sur toute la façade du bâtiment « *Harmonie Atlantique* » sur l'île de Nantes. Il annonce le temps qu'il fera quatre heures plus tard grâce à des néons : cercle rouge (soleil), tirets bleus (pluie), arcs blancs (nuage).

Il est aussi l'auteur de l'œuvre « PORTAIL 0° - 90°, PORTAIL 8° - 98° » évoquant la Loire responsable de l'inclinaison de certaines constructions à Nantes.

Entre Nantes et Saint Nazaire, le parcours « Estuaire » présente d'autres œuvres intéressant l'amateur de relations entre « arts et mathématiques » :

« Les Anneaux » de David Buren et Patrick Bouchain attirent encore plus le regard lorsqu'ils prennent des couleurs.

« Le mètre à ruban » de Lilian Bourgeat sera difficile à utiliser en classe.

« La suite de triangles – Saint Nazaire 2007 » de Felice Varini comblera de joie les amateurs d'anamorphoses.

ANNONCE

ANNÉE DES MATHÉMATIQUES 2019-2020

Le ministre de l'Éducation nationale et de la Jeunesse a souhaité faire de l'année scolaire 2019-2020 l' « Année des mathématiques », en partenariat avec le CNRS et l'Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions (INSMI).

Vous trouverez des informations sur le site de l'APMEP, celui du CNRS et sur Eduscol.

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

À DIJON ET ENVIRONS

Cette œuvre mobile de Yaacov Agam accueillait les congressistes à l'entrée de la Fac. Voici ce qui pouvait être vu en adoptant les bons points de vue et en replaçant correctement les triangles semblables.

Retour au sommaire

Des toitures en tuiles vernissées

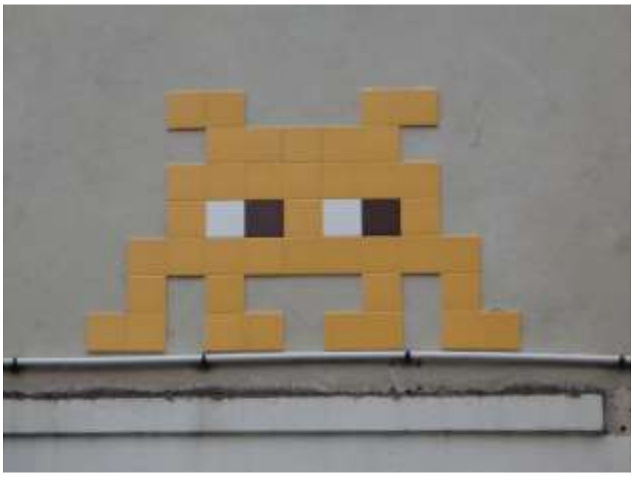
Cathédrale Sainte Bénigne

Hôtel Aubriot

Voir aussi le Petit Vert n°126 pages 57 à 59.

Un peu de Pixel Art

Une chouette



Un Invader

Voir aussi dans le Petit Vert n°138, à partir de la page 27.

Rue de la verrerie, sur une maison à pans de bois

Sécantes et parallèles

Un compas

Retour au sommaire

Les figures géométriques ne sont pas oubliées aux halles centrales de Dijon

Des briques de deux tailles et deux couleurs

Retour au sommaire

La vigne était si belle dans les alentours qu'un petit saut dans la campagne était incontournable. Le château du Clos de Vougeot présente un prisme de Möbius.

La Karriere à Villars-Fontaine, installée dans une carrière de pierre de Comblanchien offre des œuvres monumentales où les figures géométriques sont nombreuses.

Retour au sommaire

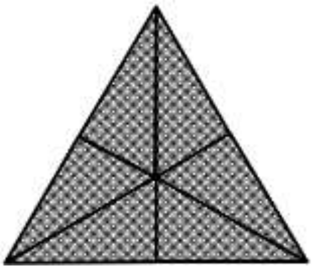
MATHS ET DÉCOUPAGES

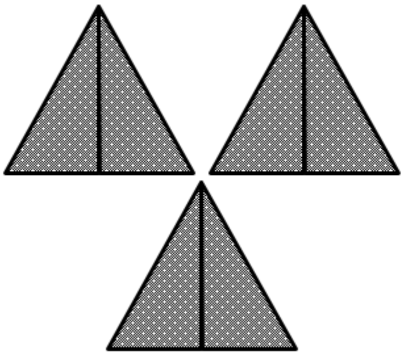
DES TRISECTIONS DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

Le Petit Vert n°139 a présenté les trisections du carré imaginées par Christian Blanvillain et a donné des liens vers celles trouvées auparavant par Abù'l Wafà, Perigal, Frederikson, etc. L'envie est venue de rechercher des trisections du triangle équilatéral.

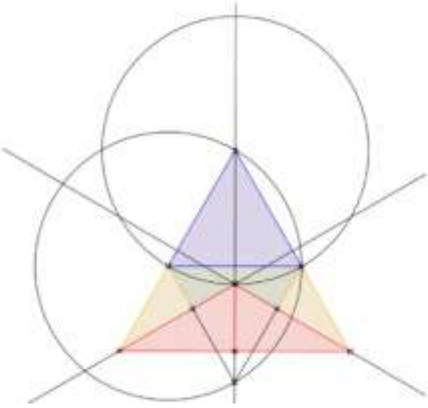
Avec les pièces de l'Hexagramme



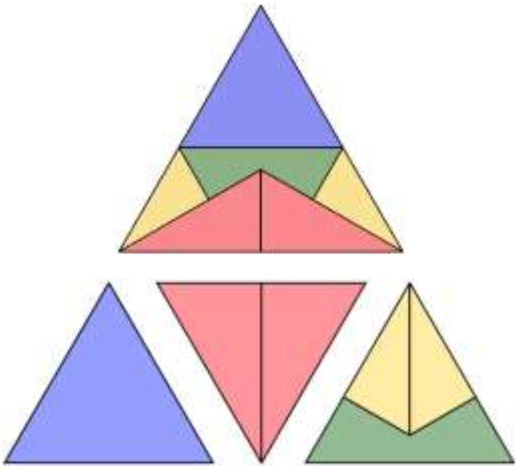


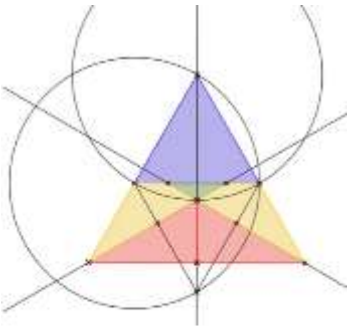
Des trisections imaginées en 2019

Fathi Drissi a cherché des trisections utilisant également six pièces et s'est de plus donné comme contrainte qu'une des pièces soit un des trois petits triangles construits à partir du grand.



Voici un premier découpage et son tracé à la règle et au compas ou avec GeoGebra.





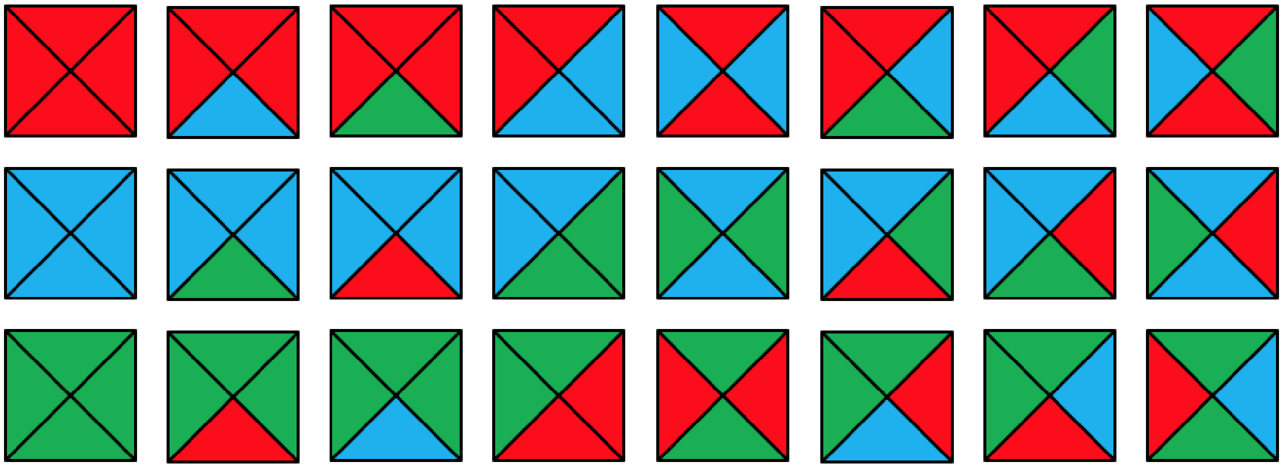
Le découpage précédent a permis de visualiser une autre trisection du triangle équilatéral. Depuis, Fathi continue ses recherches…

Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

DES CARRÉS DE QUATRE CARRÉS DE MAC-MAHON

François Drouin
APMEP Lorraine – Groupe Jeux



Trois couleurs sont utilisées, chaque triangle rectangle isocèle est coloré à l'aide d'une couleur choisie parmi trois. Il y a trois pièces unicolores, douze pièces bicolores et neuf pièces tricolores. Ces vingt-quatre pièces sont utilisées dans le stand n°6 de notre exposition régionale, des pièces prêtes à dupliquer et découper sont accessibles sur notre site. L'utilisation de pièces en noir et blanc est possible en utilisant celles de la brochure d'accompagnement de l'exposition. Les carrés de Mac-Mahon ont été présentés le 9 octobre lors d'un atelier à « Canopé Montigny-les-Metz » lors du Festival Déclics « Jouer c'est sérieux ». L'idée est venue de mettre en avant des assemblages de carrés de quatre pièces.

Avec les vingt-quatre carrés

Il s'agit de réaliser des carrés de quatre pièces tels que deux triangles qui se touchent aient la même couleur.

Réaliser le plus possible de carrés de quatre pièces est accessible à de jeunes élèves. Même si moins de six assemblages sont obtenus, de nombreuses questions peuvent se poser :

- Quel carré comporte le plus (le moins) de triangles rouges ?
- Dans chaque carré de quatre pièces, combien de triangles rouges ? verts ? bleus ? Il y a en vue des décompositions du nombre 16 en sommes de trois entiers. En existe-t-il d'autres que celles trouvées ?
- Au cycle 3, on pourra aborder les fractions et les proportions : y-a-t-il des carrés à moitié rouge au quart rouge, aux trois quarts rouges ?
- Au cycle 4, y-a-t-il des carrés de 4 pièces rouges à plus de 60% ?

Pour nos lecteurs : réaliser six carrés de quatre carrés tels que l'un d'entre eux ne comporte aucun triangle rouge et qu'un second comporte le plus possible de triangles rouges. Une solution est accessible sur notre site.

Retour au sommaire

Avec les neuf carrés tricolores

Les questions précédentes pourront être posées à propos des deux carrés réalisés.

Une pièce reste isolée.

En mettant une des neuf pièces de côté, peut-on toujours réaliser deux carrés de quatre pièces ?
La photo ci-contre permet de comprendre que tout type de pièce peut être mise de côté.

Avec les trois pièces unicolores, les douze pièces bicolores et les neuf pièces tricolores

Les trois premiers utilisent les pièces bicolores. Les trois autres carrés utilisent les trois pièces unicolores et les neuf pièces tricolores.

La réalisation photographiée pourra donner envie d'aborder les permutations des couleurs.

Au cycle 1, avec les neuf carrés tricolores

L'utilisation des pièces tricolores fait que 7 est le nombre maximum de triangles d'une même couleur.
Ce qui a été photographié tient dans une feuille A3. Il pourra donc être proposé une telle [feuille] sur laquelle sont dessinés le carré à recouvrir et les placements des pions de même couleur que les triangles des pièces.

Avec quatre pièces, un carré est réalisé.

> Je vais chercher autant de bouchons rouges bleus et verts que de triangles rouges, bleus ou verts et je les aligne à côté du carré. Je vois qu'il y a autant de bouchons verts que de bouchons rouges, qu'il y a plus de bouchons bleus que de bouchons verts (ou rouges). Enfin, je les dénombre : Il y a 5 bouchons rouges, 6 bouchons bleus (1 de plus de que bouchons rouges), 5 bouchons verts (1 de moins que de bouchons bleus).

Nos lecteurs auront peut-être d'autres idées d'utilisation de ces carrés formés de quatre pièces ! En cette période de [cadeaux,] ils pourront bricoler des exemplaires de ces vingt-quatre pièces et les offrir aux membres de leur entourage.

Retour au sommaire

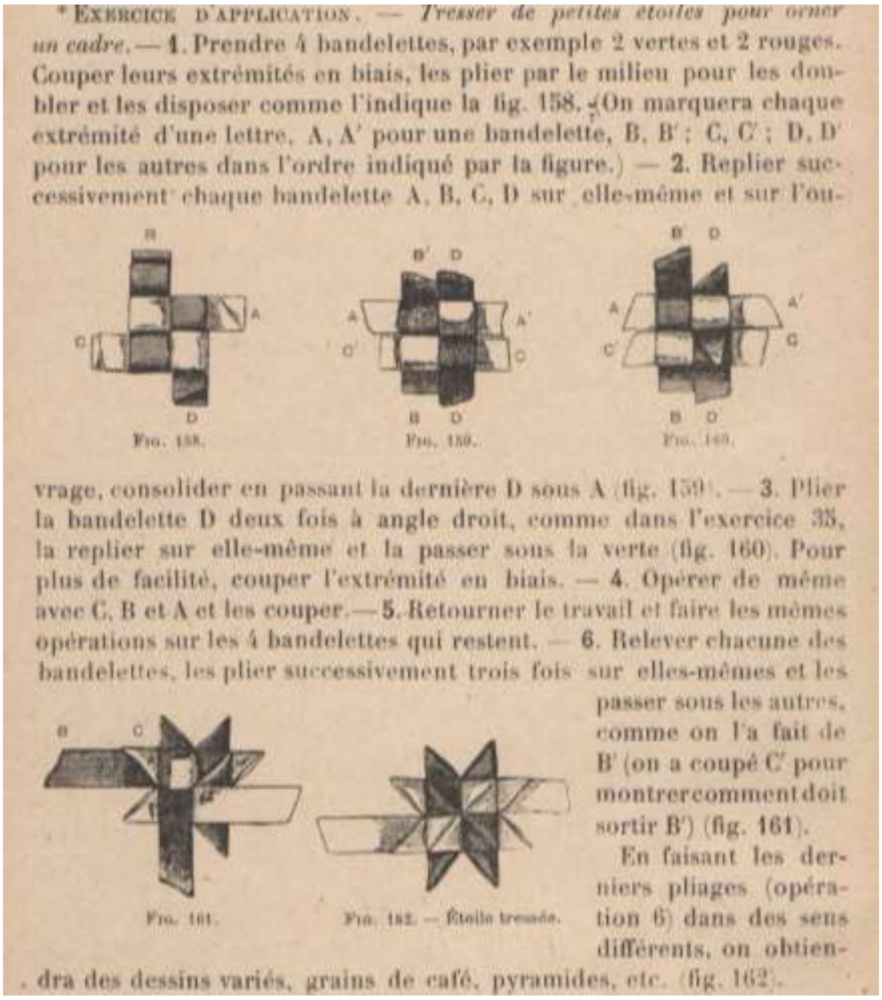
MATHS ET PLIAGES

LES ÉTOILES DE FRÖBEL

Groupe Jeux de l'APMEP Lorraine

En cette période de fin d'année, des revues et des sites de bricolage nous proposent la réalisation de telles étoiles faites avec quatre bandes de papier pliées et tressées.
L'image ci-contre est extraite d'un document réalisé pour le club mathématique du collège René Cassin de Paray le Monial (71). Les étapes de construction y sont indiquées et un lien vers une vidéo est fourni.

Une de nos adhérentes se souvient avoir découvert ces étoiles lorsqu'elle avait environ sept ou huit ans à l'occasion des fêtes de fin d'année. Son papa ayant compris le premier comment les réaliser, il s'est retrouvé de pliage pour les fêtes. Des étoiles de toutes tailles ont été mises partout dans la maison, dans les cadeaux et à l'école.



*Exercice d'application. — *Tresser de petites étoiles pour orner un cadre.* — 1. Prendre 4 bandelettes, par exemple 2 vertes et 2 rouges. Couper leurs extrémités en biais, les plier par le milieu pour les doubler et les disposer comme l'indique la fig. 158. (On marquera chaque extrémité d'une lettre, A, A' pour une bandelette, B, B'; C, C'; D, D' pour les autres dans l'ordre indiqué par la figure.) — 2. Replier successivement chaque bandelette A, B, C, D sur elle-même et sur l'ouvrage, consolider en passant la dernière D sous A (fig. 159). — 3. Plier la bandelette D deux fois à angle droit, comme dans l'exercice 35, la replier sur elle-même et la passer sous la verte (fig. 160). Pour plus de facilité, couper l'extrémité en biais. — 4. Opérer de même avec C, B et A et les couper. — 5. Retourner le travail et faire les mêmes opérations sur les 4 bandelettes qui restent. — 6. Relever chacune des bandelettes, les plier successivement trois fois sur elles-mêmes et les passer sous les autres, comme on l'a fait de B' (on a coupé C' pour montrer comment doit sortir B') (fig. 161).

En faisant les derniers pliages (opération 6) dans des sens différents, on obtiendra des dessins variés, grains de café, pyramides, etc. (fig. 162).

Fig. 158. Fig. 159. Fig. 160.

Fig. 161. Fig. 162. — Étoile tressée.

Le mode de construction a été retrouvé dans le manuel « L'année Préparatoire de travail manuel – classe enfantine et cours élémentaire « (P.Martin – Librairie Armand Colin – 1924). Le créateur n'y est pas cité, la référence à un pédagogue allemand passait peut-être mal huit années seulement après la fin de la première guerre mondiale. En 2019, Wikipédia nous donne envie d'en savoir plus sur ce créateur des « jardins d'enfants » (Kindergarten) imaginant divers matériels favorisant l'éveil par le jeu.

Retour au sommaire

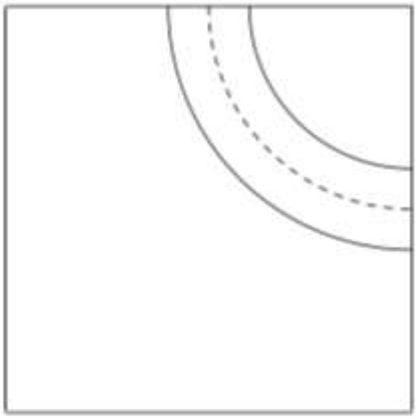
MATHS ET JEUX

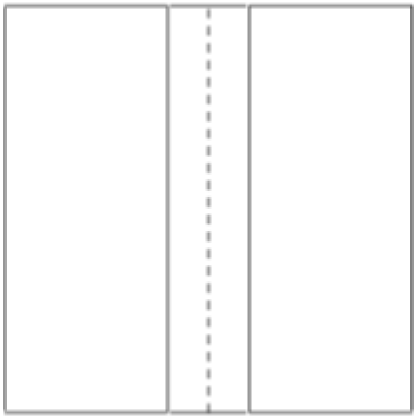
LE JEU DES TAPIS DE COURSE

Julien Bernat
Université de Lorraine
Institut Elie Cartan de Lorraine, site de Nancy / ÉSPÉ de Lorraine

Nous publions à nouveau cet article en raison d'un incident survenu dans la mise en page du Petit Vert n°139, privant le lecteur d'une partie du texte. Nous renouvelons nos excuses à Julien Bernat.

Cette activité utilise du matériel qu'il faut prévoir en assez grande quantité : deux types de pièces carrées de mêmes dimensions, qu'on appelle pièce V (pour Virage) et pièce D (pour ligne Droite). On pourra par exemple fabriquer le matériel de sorte que toutes les pièces aient pour longueur de côté 5 centimètres pour une manipulation sur une table, ou de plusieurs dizaines de centimètres pour une manipulation au sol.





Les éléments présentés ici ont déjà été employés par François Boule, voir par exemple l'article de François Drouin dans le « Petit Vert n°129, pages 52-59 » ; on pourra les retrouver dans un document déposé sur un site de l'académie d'Amiens.

Début de l'activité : le professeur laisse un groupe d'élèves découvrir le matériel (par exemple un tas a été constitué avec 7 pièces D et 9 pièces V ; les valeurs ne sont pas importantes, il faut juste que le nombre de pièces de chaque type ne soit pas trop petit). On peut imaginer qu'il n'y a initialement aucune question, et qu'après quelques instants de première manipulation, le professeur amène les élèves à s'exprimer par un jeu de questionnements : « que voyez-vous ? », « comment décririez-vous ces pièces ? », « à votre avis, que peut-on essayer de faire avec ? », etc. un premier objectif raisonnable étant de faire formuler une question de nature mathématique.

Fabrication de circuits

Les élèves peuvent comprendre assez vite que l'on peut fabriquer des circuits (fermés) en disposant convenablement les tapis côte à côte. Le plus petit que l'on peut réaliser est constitué de 4 tapis V qui forment un cercle. En « coupant » ce circuit en deux moitiés, on pourrait ajouter 2 tapis D (puis en ajouter deux autres, puis encore deux autres, et on peut itérer autant de fois que l'on veut !).

Cela doit faire apparaitre naturellement les questions suivantes : pour quels nombres de tapis D et de tapis V est-il possible de réaliser un circuit ? Pour quels nombres de tapis D et de tapis V est-on certain que l'on ne peut pas réaliser un circuit ?

Au cours de la recherche, on va identifier des nombres de tapis D et de tapis V pour lesquels on n'est pas certain qu'il soit possible de réaliser un circuit, et vraisemblablement la question ne sera pas résolue en fin d'activité. L'activité doit permettre de dégager les idées de conjecture

Retour au sommaire

(« j'observe/il me semble que… », de condition nécessaire et suffisante (« si l'on dispose de [ce nombre de] pièces de tel type, alors je suis certain que … »).
On peut remarquer que l'on est ici dans un cadre constructiviste, puisque l'existence d'un circuit s'obtient par la réalisation explicite de ce circuit.

Règles de construction
On peut poser sur cette situation une mise en contexte qui fait travailler différents aspects mathématiques de la façon suivante. Les élèves sont maintenant placés dans le rôle d'un ingénieur qui doit diriger la construction d'un circuit. Il dispose initialement d'un certain capital (par exemple 100). La construction d'un virage coûte un certain prix fixe (par exemple 11) et celle d'une ligne droite également un certain prix fixe qui peut être différent (par exemple 14). L'activité de recherche semble la plus intéressante lorsque les élèves peuvent acheter « environ » une dizaine de pièces et que l'on peut identifier 3 ou 4 choix différents, il faut alors décider comment établir le meilleur choix (par exemple en utilisant la plus grande somme possible).
Remarque : les valeurs 11 et 14 peuvent être changées, toutefois celles-ci n'ont pas été choisies au hasard. Le rapport exact entre la longueur du quart de tour passant par le milieu des côtés et celle de la ligne droite est $\frac{\pi}{4}$; en utilisant la valeur approchée bien connue de π qui est $\frac{22}{7}$, cela signifie que l'on construit à peu près autant de routes avec 14 tapis V qu'avec 11 tapis D.
Il s'agit de répondre à une double problématique :

- Avec une somme donnée, quelles pièces est-il possible de commander ?
- Avec ces pièces, est-il possible de fabriquer un circuit ?

En première approche, il faut fixer des petites valeurs pour une bonne approximation du problème. Puis on conserve les valeurs de coût pour les pièces et on augmente la somme donnée.
Étude du problème : on peut construire une représentation sous forme de tableau afin d'identifier les coûts en fonction du nombre de chaque type de pièce (il semble intéressant de laisser les élèves remplir ce tableau).

0	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**	**110**
14	25	36	47	58	69	80	91	102	113	124
28	39	50	61	72	83	94	105	116	127	138
42	53	64	75	86	97	108	119	130	141	152
56	67	78	89	100	111	122	133	144	155	166
70	81	92	103	114	125	136	147	158	169	180
84	95	106	117	128	139	150	161	172	183	194
98	109	120	131	142	153	164	175	186	197	208
112	123	134	145	156	167	178	189	200	211	222
126	137	148	159	170	181	192	203	214	225	236

Si par exemple la somme disponible est de 119, il faut chercher dans ce tableau si 119 apparait. Si ce n'est pas le cas, il faut rechercher la plus grande valeur possible qui lui est inférieure. Et pour cette valeur, il faut ensuite déterminer si l'on peut fabriquer (au moins) un circuit avec les pièces commandées. Si on ne parvient pas à construire le circuit, on passe à une valeur encore plus petite, etc.

Retour au sommaire

Comme annoncé précédemment, l'étude de la réalisation d'un circuit pour des nombres connus de tapis de chaque type est plus compliquée et sa résolution complète ne saurait être attendue par les élèves. Indiquons pour les professeurs que cela mobilise des outils du cadre algébrique et qu'il faut également prendre en compte quelques contraintes locales. On peut dégager en particulier les propriétés suivantes :

(a) tout circuit doit contenir au moins 4 virages,
(b) tout circuit doit contenir un nombre pair de virages,
(c) tout circuit doit contenir un nombre pair de lignes droites,
(d) si l'on peut construire un circuit fermé avec d lignes droites et v virages, alors on peut construire un circuit fermé avec d+2 lignes droites et v virages,
(e) s'il n'y a aucune ligne droite, les circuits possibles sont ceux constitués d'un nombre de virage qui est un multiple de 4 non nul et différent de 8,
(f) avec 2 lignes droites, on peut construire un circuit avec v virages si et seulement si v est pair et supérieur ou égal à 4.

Nous ne démontrerons pas l'ensemble de ces points (le lecteur aura compris que cela lui est laissé en exercice !). Revenons tout de même sur le point (c) : on imagine que l'on dispose un circuit sur un quadrillage, aussi chaque pièce est identifiée par des coordonnées entières, une pièce jouant le rôle de point de départ, et donc aussi d'arrivée, pour une petite voiture qui parcourt l'intégralité du circuit dans le sens de son choix. À chaque fois que la voiture quitte une pièce pour une autre, la quantité abscisse + ordonnée augmente ou diminue de 1, donc sa parité change. Comme la case d'arrivée est aussi celle de départ, cela implique que le nombre total de changement de parité est pair, et ce nombre correspond au nombre total de pièces. On obtient de la sorte le point (c) comme une conséquence du point (b).
Finissons par une considération non purement mathématique : on peut aussi laisser libre court à l'imagination des élèves et admirer les productions car, pour les circuits pouvant être constitués avec un nombre de pièces de chaque type donné, le nombre de possibilités croit rapidement et on obtient une multitude de dessins bien différents, pouvant satisfaire une forte régularité ou au contraire se montrer bien désordonnés !

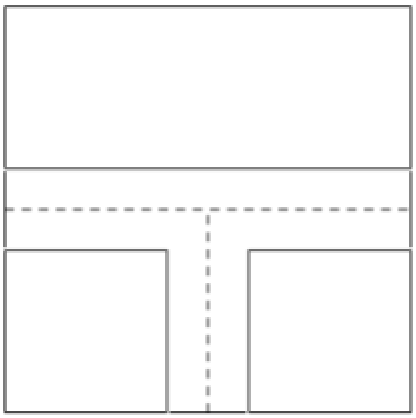
Prolongements possibles

Il existe diverses façons de généraliser l'activité de recherche présentée ici, et il faut être conscient que dans la plupart des cas, le niveau de difficulté de l'étude des circuits possibles augmente rapidement. On peut par exemple envisager :

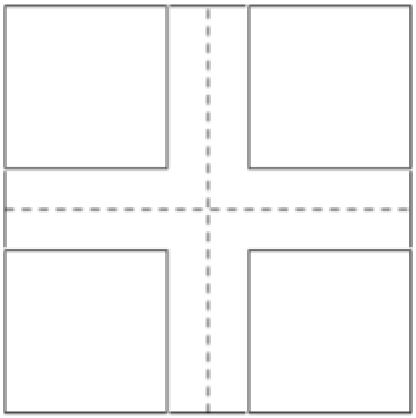
(1) de changer les routes possibles,
(2) de changer la forme des pièces,
(3) de changer la nature de l'espace de travail,
(4) d'augmenter la dimension de l'espace de travail.

Pour le premier point, on peut utiliser les pièces de François Boule qui ont été jusqu'ici mises de côté : les tapis « T » (avec un embranchement au milieu d'un carré et trois côtés concernés par une sortie de route) et les tapis « X » (un carrefour et tous les côtés concernés par une sortie de route).

Retour au sommaire



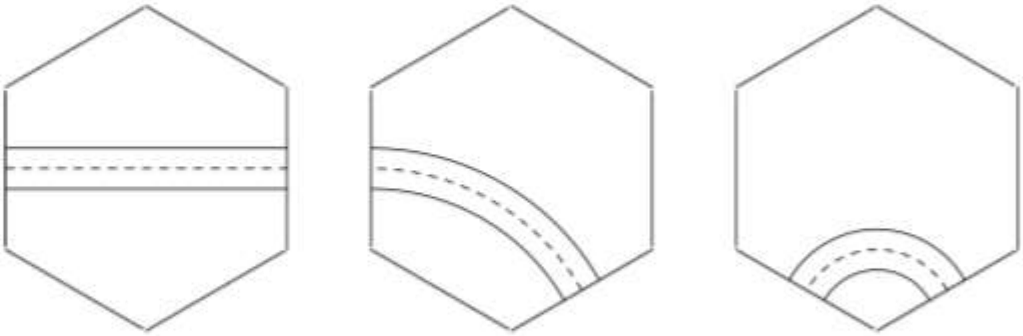
TAPIS T



TAPIS X

On peut alors reprendre les questions précédemment abordées dans un contexte plus large.
Une autre adaptation consiste à remarquer que jusqu'à présent, tous les tapis utilisés ont des routes qui passent par les milieux de leurs côtés ; si l'on se soustrait à cette obligation, cela permet de différencier de nouvelles pièces. Et pourquoi pas créer des tunnels ou des ponts pour encore plus de circuits...

Pour le deuxième point, on peut remplacer les carrés par des hexagones. Il y a des hexagones avec une ligne droite (D), les virages larges (L) et les virages serrés (S).



On pourra noter qu'il est possible de créer des pièces contenant plusieurs routes, par exemple une pièce que l'on appellerait LL, ou LS, ou encore SS (deux configurations distinctes possibles).
Le troisième point amènerait à considérer des circuits construits par exemple sur des cylindres ou des tores (que l'on peut laisser sur une surface plane habituelle en identifiant des bords). On peut remarquer que la propriété (a) n'est plus valable dans ce cas, puisque l'on peut obtenir un circuit fermé sans aucun virage sur de telles surfaces.
Enfin, si l'on remplace les pièces carrées par des pièces cubiques, avec des routes pouvant joindre deux faces opposées ou deux faces adjacentes, le lecteur pourra vérifier que les propriétés (b) et (c) ne sont plus satisfaites : il existe un circuit dans l'espace formé avec 1 « ligne droite de l'espace » et 7 « virages de l'espace ». C'est une conséquence du fait que, contrairement au plan, il n'y a plus nécessairement alternance entre deux directions possibles lorsqu'on utilise à la suite plusieurs virages.

Le lecteur trouvera [ici des pièces prêtes à découper téléchargeables](#).

[Retour au sommaire](#)

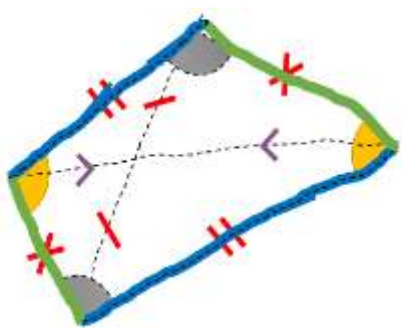
MATHS ET JEUX

LE PARALLÉLOGRAMME QUI RIT

« Le cochon qui rit », jeu bien connu, était un des quatre sujets traités cette année par quatre élèves de 4ème et quatre de 5ème des collèges Louis Armand (Moulins-lès-Metz) et Les Hauts de Blémont (Metz) durant les ateliers MATh.en.JEANS.
Les élèves ont joué et répondu à quelques questions portant sur les issues du lancer des 3 dés, celles d'un lancer de 2 ou 4 dés.
Ce sujet et ces questions avaient déjà été traitées dans le passé par le collège Jean Mermoz de Marly et par le collège de Marciac.
L'idée des animateurs
[1] était de faire poursuivre les recherches en trouvant un « objet » mathématique qui remplacerait le cochon, en lui adjoignant des « attributs ». Ils ont orienté les élèves vers un quadrilatère à choisir parmi ceux qu'ils avaient étudiés en classe.
Voici ce que les élèves ont présenté au congrès MATh.en.JEANS de Louvain-la-Neuve en Belgique, rédigé par eux.

Le cochon qui rit … pour aller plus loin.
Nos professeurs nous ont demandé d'essayer de créer un jeu du même type en prenant une figure géométrique connue. Nous avons tout d'abord recensé tous les éléments du cochon qui rit : 1 corps, 4 pattes, 2 oreilles, 2 yeux et 1 queue donc 10 attributs.
Nous avons choisi le parallélogramme car nous avons compté :

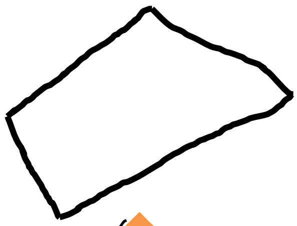
- 1 quadrilatère
- 2 côtés opposés parallèles,
- 2 autres côtés opposés parallèles,
- 2 côtés opposés de même longueur,
- 2 autres côtés opposés de même longueur,
- 2 angles opposés de même mesure,
- 2 autres angles opposés de même mesure,
- 1 diagonale avec son milieu,
- l'autre diagonale avec son milieu,
- Et comme il nous manquait un 10ème élément, nous avons pris les diagonales du quadrilatère.



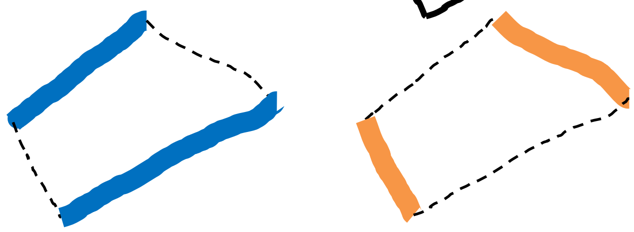
[1] Voir PV 138 et le site académique

Retour au sommaire

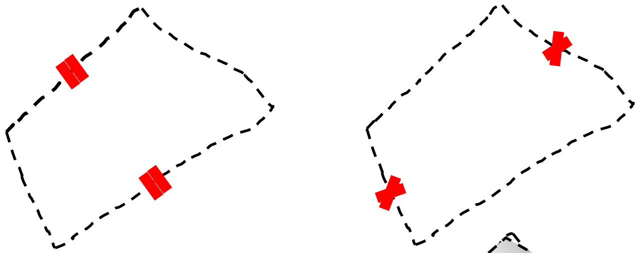
Voici les figures que nous avons utilisées :



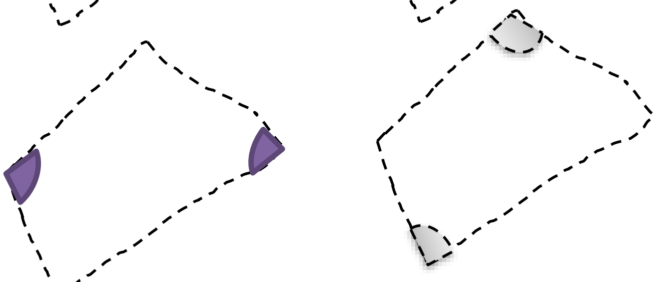
Le quadrilatère



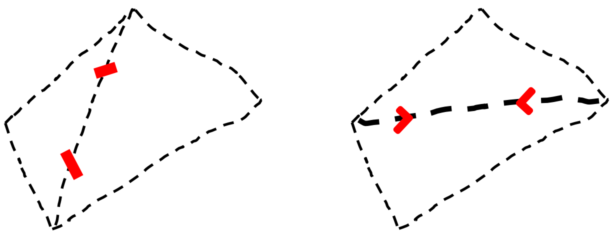
Les côtés opposés parallèles



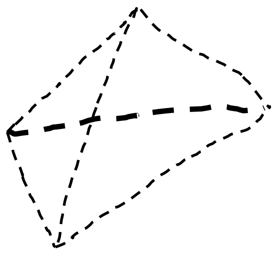
Les côtés opposés de même longueur



Les angles opposés de même mesure



Les diagonales avec leur milieu



Les 2 diagonales

Nous avons repris les règles du jeu du « Cochon qui rit » en remplaçant le corps du cochon par un quadrilatère tracé à main levée et les « attributs » du cochon par « ceux » propres au parallélogramme.

[Retour au sommaire](#)

La règle du jeu

Nombre de joueurs : de 2 à 4.

Chaque joueur doit faire apparaitre toutes les propriétés du parallélogramme à partir des éléments disponibles (côtés opposés parallèles, côtés opposés de même longueur, angles opposés de même mesure, diagonales et diagonales avec milieu).

- Les joueurs jettent trois dés lors de leur tour de jeu.
- Un 6 permet de prendre le quadrilatère (action préalable aux suivantes).
- Un 1 permet de placer 2 côtés opposés parallèles ou 2 côtés opposés de même longueur ou 2 angles opposés de même mesure ou une diagonale avec son milieu.
- Il faut deux 1 pour placer les deux diagonales du quadrilatère.
- Tant que le joueur obtient au moins un 1, il peut rejouer.

Le gagnant est le premier à terminer son parallélogramme, c'est-à-dire à avoir fait apparaitre toutes les propriétés du parallélogramme.

Voici une photo d'un parallélogramme qui a été entièrement complété en jouant avec les règles.

On peut envisager un autre jeu dont le but serait d'arriver en premier à obtenir un parallélogramme mais il faut changer les règles, par exemple ne pas pouvoir choisir sa carte en ayant fait un 1.

En effet, en changeant le but du jeu, il est plus difficile de gagner car nous ne pouvons plus choisir les cartes que nous voulons.

C'est-à-dire que pour gagner il faut soit avoir :

- 2 côtés opposés parallèles et les 2 autres côtés opposés parallèles.

Ou bien

- 2 côtés opposés de même longueur et les 2 autres côtés opposés de même longueur.

Ou bien

- 2 angles opposés de même mesure et les 2 autres angles opposés de même mesure.

Ou encore

- 1 diagonale avec son milieu et l'autre diagonale avec le même milieu.

Sans oublier

- 2 côtés opposés parallèles et ces 2 mêmes côtés opposés de même longueur.

Conclusion *(des élèves)* :

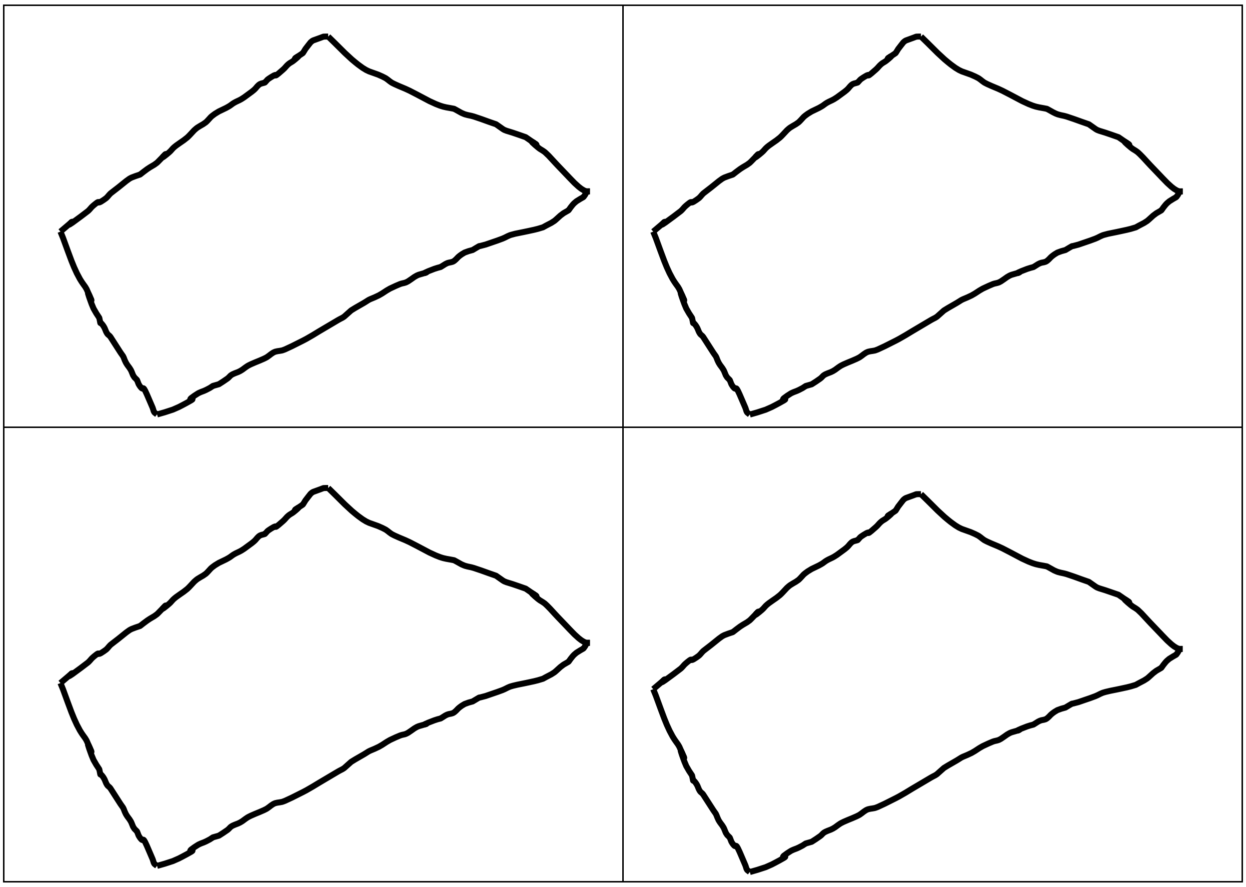
Retour au sommaire

Nous espérons qu'avec ces jeux du « parallélogramme qui rit », nous retiendrons mieux les propriétés du parallélogramme et aussi que nous saurons mieux démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

Ce jeu n'a été testé que par les élèves de l'atelier.
Un animateur est retraité, une autre a été nommée en lycée. Si l'envie vous prend de le tester, vous trouverez en annexe les fiches avec les figures à photocopier sur des transparents (prévus spécialement pour la photocopie sinon ça fond ;-)).
Les élèves avaient découpé du carton d'emballage pour le fond et la fenêtre puis collé du papier de couleur sur la fenêtre.
Et si vous le testez, n'hésitez pas à nous faire part de votre expérimentation, vos remarques …

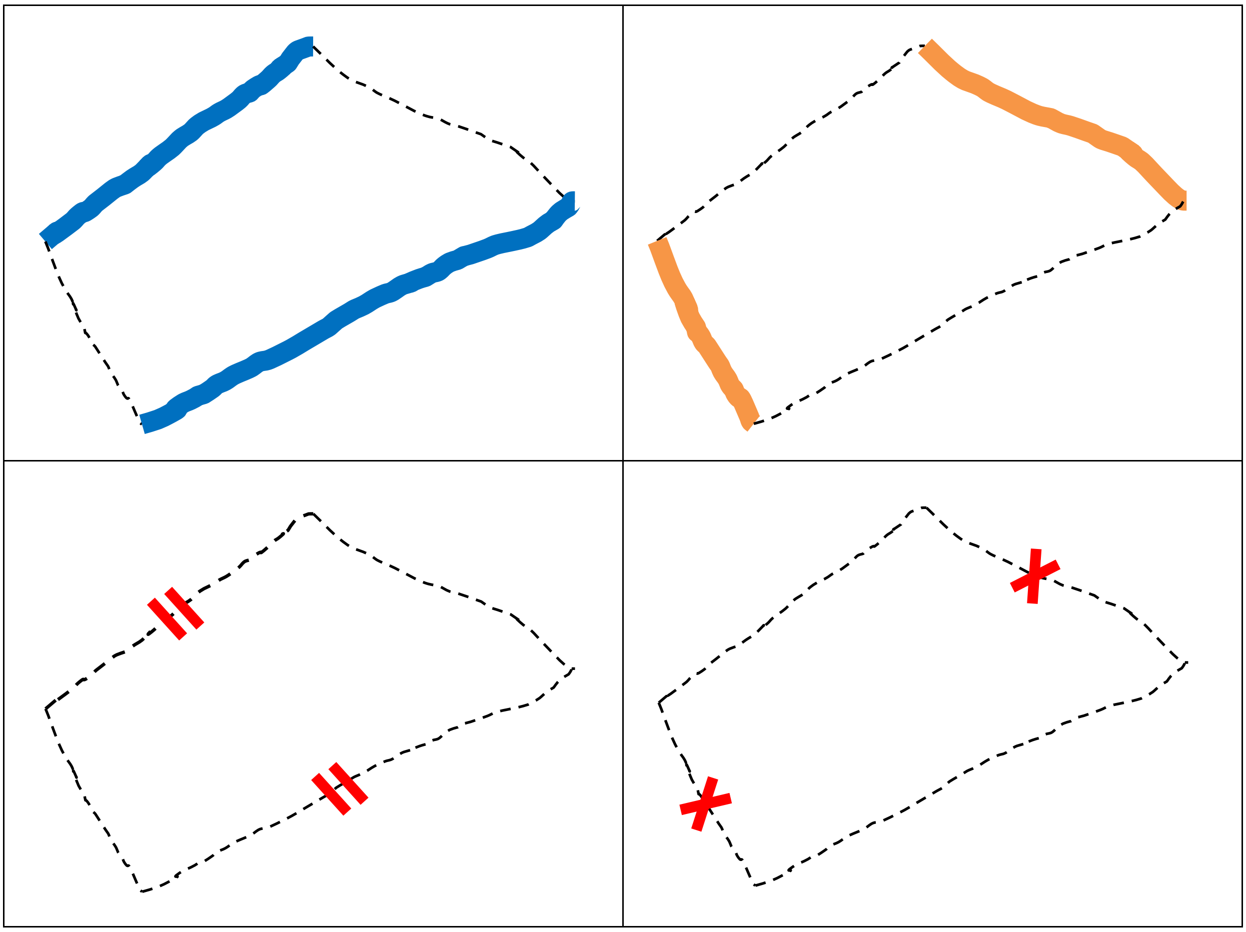
ANNEXES

Annexe 1 : Le quadrilatère

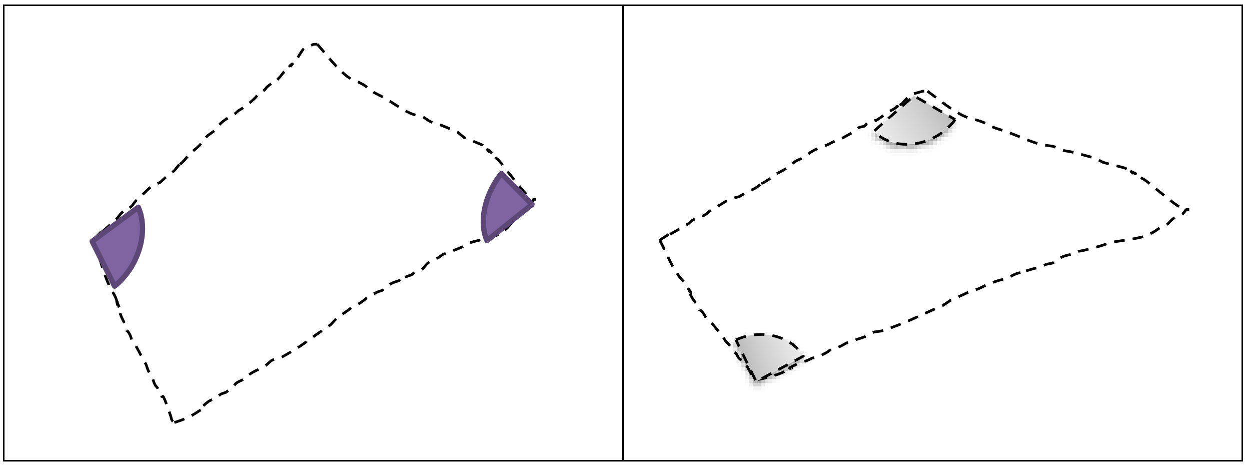


Retour au sommaire

Annexe 2 : Propriétés des côtés

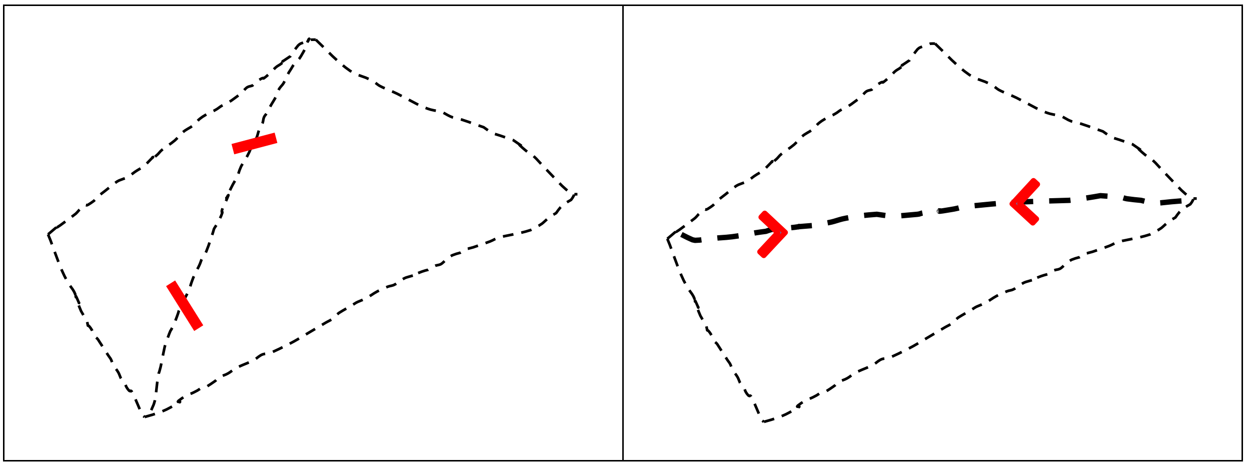


Annexe 3 : Propriétés des angles

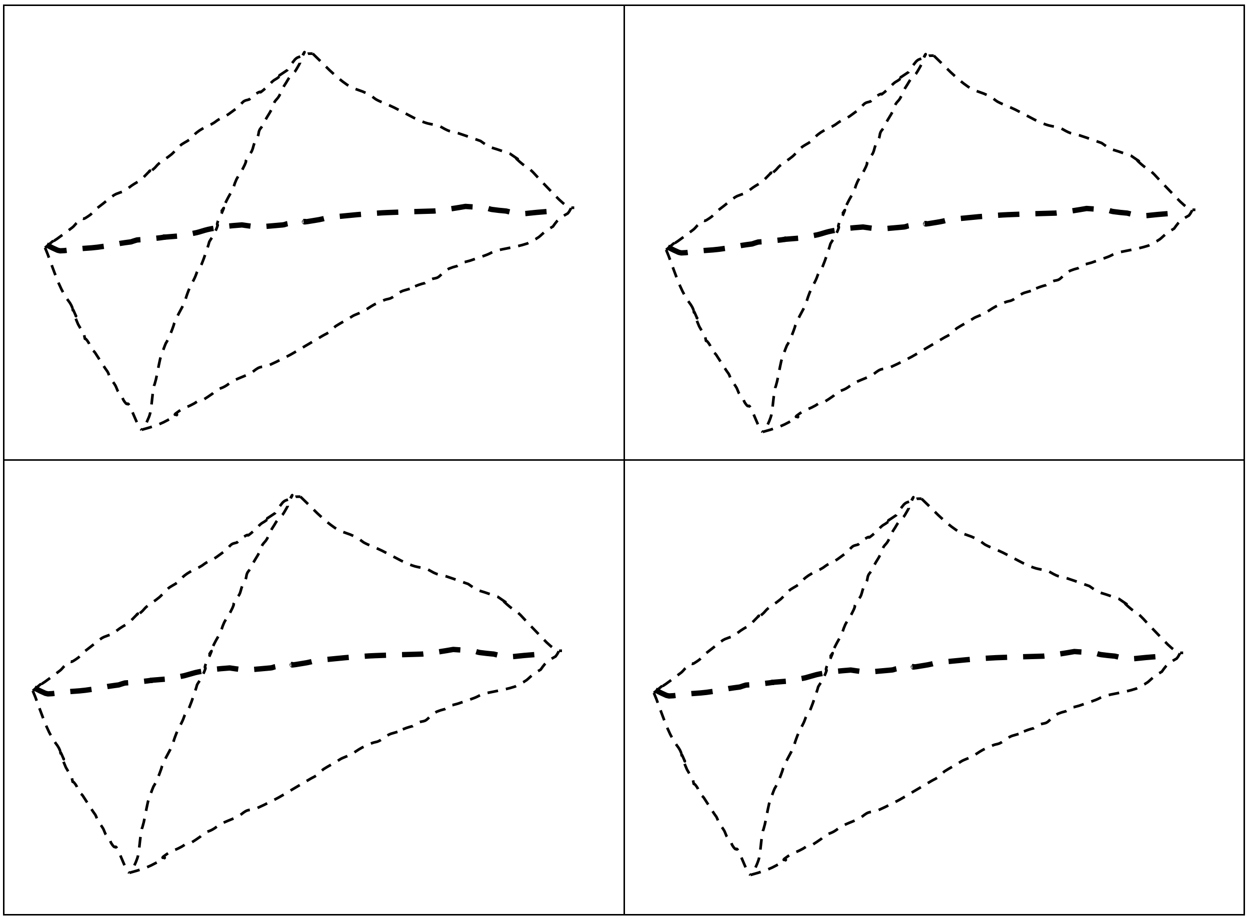


[Retour au sommaire]

Annexe 4 : Propriétés des diagonales



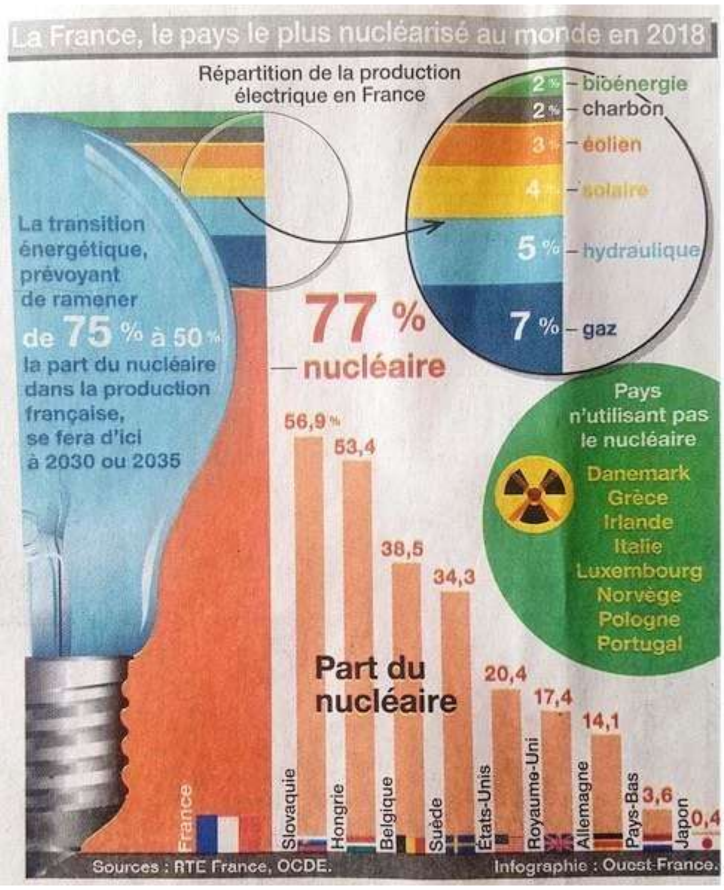
Annexe 5 : Le quadrilatère avec ses diagonales



[Retour au sommaire](#)

MATHS ET MÉDIAS

LA FRANCE, LE PAYS LE PLUS NUCLÉARISÉ AU MONDE EN 2018



Pendant ses vacances, Christophe, un de nos lecteurs, nous a envoyé cette infographie trouvée le 7 août 2019 dans Ouest France (édition de Brest).

L'objet de cette étude est la part représentée par l'électricité produite par le nucléaire.

Christophe propose quelques questions qu'on peut faire travailler au collège :

1. Que suggèrent le graphique et le titre "La France, le pays le plus nucléarisé au monde en 2018" ?
2. Rechercher les productions d'électricité des différents pays en TWh.
3. Déterminer la production d'électricité nucléaire de chacun.
4. Comparer ces productions, en particulier celle des États-Unis avec celle de la France.
5. Que penser du graphique et du titre ? Proposer une formulation du titre plus conforme.

Des pays n'utilisent pas le nucléaire. Quelles sont leurs sources d'énergie ? Concernant la Pologne, l'utilisation du charbon est prépondérante.
Le graphique représentant la répartition de la production électrique attire le regard du lecteur : l'aire de la zone verte correspondant aux 2% de bioénergie n'est pas égale à l'aire de la zone noire correspondant aux 2% de charbon et n'est pas la moitié de la zone jaune correspondant au solaire. Les élèves sauront réaliser une infographie plus satisfaisante.

Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

UN PROF DE MATHS CORRIGE « DEMAIN NOUS APPARTIENT», TF1 N'APPRÉCIE PAS.

Lu dans « Le Parisien » du 8 octobre, édition de Charente-Maritime

Dans l'extrait sélectionné, l'enseignant avait repéré lors d'une séance abordant les polynômes du second degré deux erreurs écrites au tableau et une dite à l'oral.
L'enseignant a dû retirer sa vidéo deux heures après la publication pour infraction au droit d'auteur. Nous sommes évidemment étonnés de la rapidité de l'injonction. Quant au droit d'auteur, pour ce qui est écrit, nous pouvons utiliser un cours extrait en citant nos sources (ce que nous faisons dans le Petit Vert). Les 22 secondes utilisées par le collègue forment-elles un extrait trop long dans l'audiovisuel ?
Nous avons demandé à un journaliste audiovisuel quelle était la durée d'un extrait pouvant être utilisé sans que cela ne soit une atteinte au droit d'auteur. Nous lui avons fourni le lien vers l'article du Parisien et voici sa réponse :

> *Il me faudrait voir la vidéo pour me faire une idée précise de ce qu'était l'extrait.*
> *La réponse à ta question est : 0 seconde.*
> *Pour ce cas précis, cela se joue sur le droit de citation dans un cadre d'information ou d'éducation et même dans ce cadre il n'y a pas durée (20 secondes d'une œuvre qui dure 1 minute ce n'est pas une citation, par contre d'un vidéo d'une heure oui). Plus que la vidéo en elle-même, le problème vient sans doute du support : Youtube.*
> *Un algorithme a dû repérer les images qu'il considère comme protégées, transmis à une personne humaine qui ne s'est pas posé de question et a bloqué la vidéo. Cela va être à ce professeur de math de prouver à la plateforme l'utilisation dans un cadre pédagogique. Un autre problème pourrait être qu'il monétise ses vidéos, c'est-à-dire qu'il gagne un peu d'argent grâce à la pub diffusée avant par Youtube, là on pourrait estimer être dans une utilisation commerciale d'image ne lui appartenant pas.*
> *Les solutions auraient pu être : un lien vers la vidéo originale sans montrer d'images. Un habillage particulier pour souligner la citation, ou, c'est la solution que j'utiliserais parce que plus sympa dans la narration, il se filme en train de regarder la série avant de passer sur ses explications. Après comme je n'ai pas vu la vidéo...*
> *Quitte à être dans la précision, il donne dans sa vidéo de demande de déblocage deux exemples de vidéos qui ne correspondent pas à son cas. Lui a utilisé les images d'une œuvre de fiction - une série, les deux vidéos sont des extraits de reportages ou de journaux d'informations, ce ne sont donc pas des œuvres audiovisuelles.*

Sur sa chaine Youtube, le collègue défend le droit à utiliser des extraits d'émissions télévisées pour développer le sens critique des élèves : nous ne pouvons qu'être en accord avec lui.

Nombre de collègues (adhérents ou non) utilisent des extraits de vidéos, de journaux, … pour relever des non-sens, contre-sens, erreurs, voire fautes et les corriger afin que cela ne s'imprime pas dans l'intellect malléable de nos jeunes et pour développer leur esprit d'analyse et leur esprit critique. Le souci est sans doute la diffusion accessible à tous et à toutes de la vidéo incriminée.

Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

10 € ÉCONOMISÉS ?

Le 18 octobre, dans l'émission « Affaire conclue » sur France 2, un objet vendu aux enchères atteint 170 €, prix jugé insuffisant pour la vendeuse. L'acheteur propose à celle-ci de lui donner la somme correspondant au premier nombre premier supérieur à 200. Réponse de la vendeuse : 201, somme qu'elle obtient de l'acheteur avec ses félicitations pour ses connaissances mathématiques...

Comment auriez-vous réagi ? Vous n'auriez sans doute pas proposé 201, mais auriez-vous proposé 211 ? Ne connaissant pas le nombre attendu par l'acheteur, recevant une offre à 201 €, nous pouvions penser qu'il était certain de faire une bonne affaire et pouvait féliciter la vendeuse pour ses « connaissances mathématiques ».
En revoyant la séance, l'impression est plutôt que l'acheteur souhaitait offrir à la vendeuse les 200 € qu'elle espérait (l'émission se déroule comme de vraies enchères et le vendeur peut refuser de vendre si le prix ne lui convient pas). Il a voulu pimenter sa proposition par ce petit jeu mais il surjoue la réponse à la vendeuse, n'ayant lui-même aucune idée de la réponse à la question. Ceci n'est évidemment qu'une interprétation.

CETTE SAISON, CRAQUEZ POUR CES MAGNIFIQUES BOOLE DE NOËL

Retour au sommaire

MATHS ET PHILO

LETTRES AU PÈRE NOËL

Didier Lambois

Faut-il croire au Père Noël et continuer à lui écrire ? Cela pourrait paraître bien naïf et pourtant, au XVIIème siècle, les plus grands savants se tournaient vers lui pour obtenir son approbation. Ce fut le cas, entre autres, de Descartes (1596-1650) et de Pascal (1623-1662), et leurs lettres au Père Noël ne manquent pas d'intérêt. Il faut dire que le Père Noël de l'époque n'avait ni le même costume ni la même fonction qu'aujourd'hui.
Le Révérend Père Noël, de son vrai nom Etienne Noël (1581-1659), est né en Champagne et a fait ses études au noviciat de Verdun puis au collège de Pont-à-Mousson. Il a enseigné la grammaire, la théologie et la philosophie à Rouen puis au collège de La Flèche où il eut comme élève René Descartes. Il est aussi l'auteur de plusieurs ouvrages dont *Aphorismi Physici* et *Sol Flamma*. Il était recteur de La Flèche puis recteur de Paris et avait été nommé vice-provincial de la Compagnie de Jésus. Cela permet de comprendre pourquoi la parole du Père Noël faisait autorité et pourquoi de nombreux savants se tournaient vers lui en espérant sa bénédiction.
En juin 1637, à la publication du *Discours de la Méthode*, Descartes avait envoyé son ouvrage au Père Noël, lequel avait répondu à son ancien élève avec bienveillance, mais en octobre de la même année Descartes lui réécrit en demandant expressément le jugement de son ancien maître.

Mon Révérend Père,
Je suis extrêmement aise d'apprendre par la lettre qu'il vous a plu m'écrire, que je suis encore si heureux d'avoir part en votre souvenir et en votre affection. Je vous remercie aussi de ce que vous me promettez de faire examiner le livre que je vous ai envoyé, par ceux des vôtres qui se plaisent le plus en telles matières, et de m'obliger tant que de m'envoyer leurs censures. Je souhaiterais seulement, outre cela, que vous voulussiez prendre la peine d'y joindre les vôtres ; car je vous assure qu'il n'y en aura point dont l'autorité puisse plus en mon endroit, ni auxquelles je défère plus volontiers. Etc.[1]

Descartes enverra de nombreuses autres lettres au Père Noël, notamment en 1644 lors de la parution de ses Principes de Philosophie, et leurs échanges resteront toujours cordiaux. Cela ne veut pas dire que le Père Noël cède facilement à toute demande, il sait parfois prendre l'initiative et s'opposer, sans faire de cadeaux.

La nature a horreur du vide, le Père Noël aussi

Bien que Torricelli (1608-1647) n'ait rien publié à ce propos, les travaux qu'il fait sur la pression atmosphérique vont être à l'origine de nombreux débats au XVII° siècle. C'est le Père Mersenne (1588-1648) qui rapporte que lors d'un voyage en Italie il a assisté à une expérience imaginée par Torricelli[2], expérience qui consistait à prendre un long tube fermé à une extrémité, à le remplir entièrement de mercure (le « vif-argent »), à le boucher avec son doigt et à le renverser dans une cuve elle aussi pleine de mercure. Le liquide descendait alors dans le tube et s'équilibrait vers 760mm et cela s'expliquait, pour Torricelli, par la pression atmosphérique[3].
Dès 1646 les savants français, Roberval et Pascal en particulier, vont reproduire ces expériences et en tirer toutes les conséquences sur la pression atmosphérique mais aussi sur l'existence du

[1] Lettre d'octobre 1637. *Œuvres et Lettres*, La Pléiade, p.981.
[2] Torricelli poursuivait les travaux de Galilée pour répondre à une question posée par les fontainiers de Florence et qui ne parvenaient pas à faire monter l'eau à plus de 10m33 dans leurs pompes.
[3] La pression sur la surface de mercure du récipient est égale au poids de la colonne de mercure restant dans le tube.

Retour au sommaire

vide, car en descendant dans le tube, le mercure laisse un espace « vide » de toute matière. Torricelli remettait ainsi en cause l'un des dogmes aristotéliciens enseigné par toute la scolastique : « *la nature a horreur du vide* ».
Aussi, lorsque Pascal publie le récit de ses *Expériences nouvelles touchant le Vide* (1647) le Père Noël ne tarde pas à réagir[1] :

Monsieur,
J'ai lu vos Expériences touchant le Vide*, que j'estime fort belles et ingénieuses, mais je n'entends pas ce vide apparent qui paraît dans le tube après la descente, soit de l'eau, soit du vif-argent. Je dis que c'est un corps, puisqu'il a les actions d'un corps, qu'il transmet la lumière avec réfractions et réflexions, qu'il apporte du retardement au mouvement d'un autre corps,* etc. Et le Père Noël explique que c'est « un air épuré », une matière subtile[2] qui vient remplir le « vide » laissé par le vif-argent.

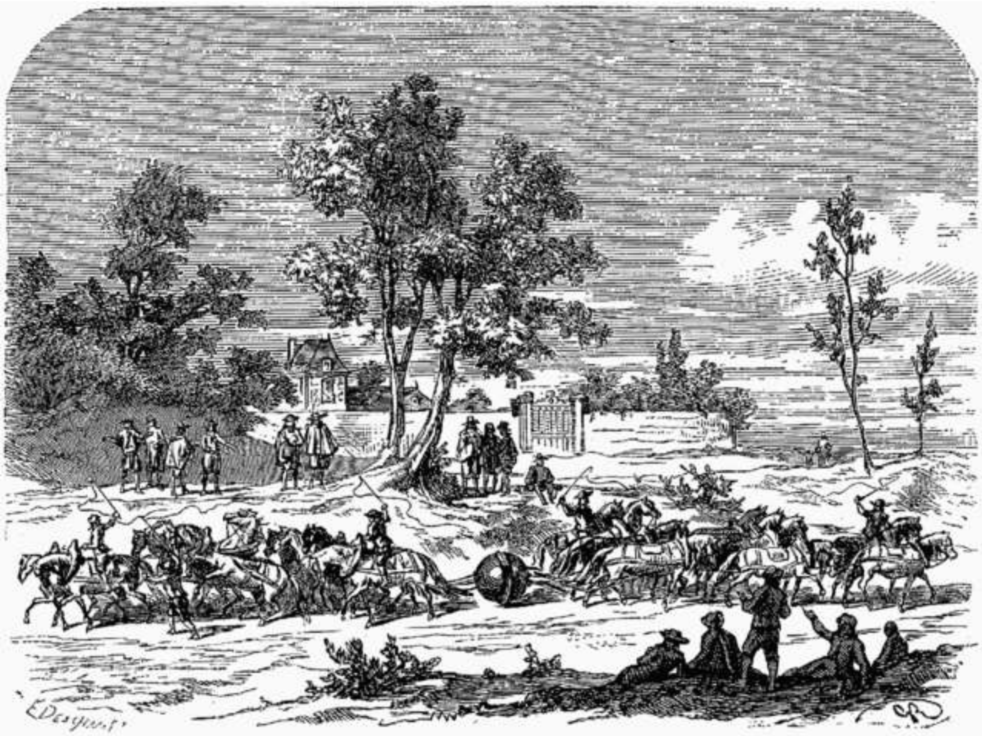
Pascal va répondre très longuement au Père Noël, et la *Lettre* qu'il lui envoie le 29 octobre 1647 mérite d'être lue attentivement car elle constitue l'un des actes de naissance de la science moderne. Pascal y reprend point par point les objections du Père Noël, mais il définit aussi les règles que doivent suivre tous ceux qui sont soucieux de vérité scientifique. Il montre le rôle des hypothèses et de l'expérience, affirmant entre autres que « *Pour montrer qu'une hypothèse est évidente, il ne suffit pas que tous les phénomènes la suivent ; au lieu de cela, si elle conduit à quelque chose de contraire à un seul des phénomènes, cela suffit pour établir sa fausseté.* »
Dans une seconde Lettre, le Père Noël va réfléchir longuement aux arguments de Pascal, et il termine cette seconde *Lettre* en donnant le sentiment de s'incliner… sauf sur le vide.

(…) Au reste, Monsieur, vous pouvez, en cette réponse, voir ma franchise et docilité, que je ne suis point opiniâtre, et que je ne cherche que la vérité. Votre objection m'a fait quitter mes premières idées, prêt à quitter ce qui est dans la présente contraire à vos sentiments, si vous m'en faites paraître le défaut. Vous m'avez extrêmement obligé par vos expériences, me confirmant en mes pensées, fort différentes de la plupart de celles qui s'enseignent aux écoles il me semble qu'elles s'ajusteraient bien aux vôtres, excepté le vide, que je ne saurais encore goûter.

Pascal ne répondra pas et il s'en explique dans une *Lettre* au mathématicien Le Pailleur[3]. Quant au Père Noël, il publiera au printemps 1648 un opuscule où il ne tient aucun compte des remarques de Pascal, et le titre est suffisamment provocateur : *Le Plein du Vide*. Si le Père Noël affirme ne pas être opiniâtre, nous dirons qu'il est quand même têtu !

[1] L'ouvrage de Pascal est publié le 8 octobre et la réponse de Pascal à la première lettre du Père Noël est datée du 29 octobre. Toute la correspondance du Père Noël et de Pascal se trouve dans les *Œuvres Complètes* de Pascal, édition La Pléiade, et peut être consultée.
[2] En parlant de « matière subtile » il se conforme aux théories de Descartes qui lui aussi s'opposera à l'idée de vide.
[3] Libertin, poète et savant décédé en 1654, il était l'ami d'Etienne Pascal (père de Blaise) et animait une académie très prisée au XVII° siècle.

Retour au sommaire



Les hémisphères de Magdebourg

Le vide n'est pas rien

La polémique sur le vide ne se limitera pas à la querelle entre Pascal et le Père Noël, tous les grands physiciens y prendront part et nous ne pouvons résumer ici tous les débats entre vacuistes et plénistes. Contentons-nous de constater qu'aujourd'hui encore la question est disputée et que la physique moderne conduit à penser que le vide absolu n'existe pas[1]. Est-ce à dire que les « têtus » avaient raison et que Pascal avait tort ? Ce serait oublier tout ce que ses travaux sur la pression et sur le « vide » ont permis.

On peut penser par exemple que les travaux de Pascal sont à l'origine des recherches faites par Otto von Guericke (1602-1686) qui met au point la première pompe à air pour créer du vide. Outre les célèbres expériences qu'il fait à Magdebourg en 1654 (il assemble deux hémisphères pour créer une sphère dans laquelle il fait le vide et montre que plusieurs chevaux ne peuvent parvenir à séparer les hémisphères liés par la force de la pression atmosphérique) il montre aussi qu'en faisant le vide derrière un piston la pression atmosphérique peut produire du mouvement et du travail, idée reprise ensuite par Denis Papin, puis Newcomen (1663-1729), puis Watt (1736-1819) etc. Avec le travail de Pascal c'est toute la science expérimentale qui se met en route !

Le Père Noël n'avait pas compris que c'est en remettant en cause les « vérités » reçues que la science progresse. En restant désespérément attaché à l'idée que la nature a horreur du vide, il a manqué cette mise en route de la machine scientifique, il est resté sur le quai, et la preuve en est : c'est qu'il voyage encore en traineau !

[1] La polémique vient surtout d'un malentendu sur le concept de vide, que l'on confond trop souvent avec celui de néant. Pourtant, dans sa Lettre au Père Noël du 29 octobre 1647 Pascal faisait déjà bien la différence. Il affirmait « qu'i*l y a autant de différence entre le néant et l'espace vide, que de l'espace vide au corps matériel ; et ainsi l'espace vide tient le milieu entre la matière et le néant.* ». Ce qui fait dire à Etienne Klein que « *le vide quantique a très exactement le statut que Blaise Pascal accordait au vide tout court* » : par son irrésistance il se distingue de la matière, mais par son extension il se distingue du néant, il n'est pas rien (Etienne Klein in Philosophie Magazine, hors-série n°42 sur Pascal.).

Retour au sommaire

DÉFI 1 - N°140 - POUR 2020

		18	
1	2	3	6
4	5	6	
7	8	9	

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ont été placés dans les 9 cases du carré.
En suivant les directions des côtés du carré, sont indiquées les sommes de la ligne ou de la colonne.

Pour chacun des jeux ci-dessous

Retrouve la place des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dans les 9 cases du carré.

Deux grilles à compléter

17	8	20	
			20
			16
			9

14		20	
			20
			11

Une première grille à créer

20			
			20

Combien peut-on créer de grilles différentes ?

Et pour cette grille ?

20	20	

Retour au sommaire

DÉFI 2 - N°140 – LA TABLETTE DE CHOCOLAT

PHOTO / REUTERS/ Kim Kyung-Hoon

Gilles nous a transmis cette photo de fèves de cacao et du chocolat exposés dans un bar, à Tokyo, au Japon, le 20 juillet 2017. Naturellement avec l'eau qui nous est venue à la bouche, des questions ont surgi dans nos têtes de profs de maths.
Sauriez-vous construire le découpage de cette tablette de chocolat ?
Quelle fraction de la tablette représente chaque morceau prêt à découper ?
Si l'unité était le petit « carré », que vaudrait la plaquette ? Chaque part ?
Si la tablette a une masse de 100 g, quelle quantité de chocolat vais-je manger en absorbant un seul des 32 petits carrés ?

DÉFI 3 - N°140 – LE PUZZLE

Une enseignante a acheté un puzzle pour ses enfants. Ils ont cherché les pièces de la périphérie mais n'étaient pas sûr de les avoir toutes. La question s'est alors posée de leur nombre dans chaque dimension. La boite indique qu'il y a 1008 pièces et précise la taille du puzzle : 50cm sur 70cm ? Pourriez-vous les aider ?

Retour au sommaire

DÉFI ALGORITHMIQUE - N°140

Certaines énigmes du rallye mathématique de Lorraine auraient certainement été plus simples à résoudre à l'aide d'un petit programme informatique.
Nous vous proposons ici, comme défi, de résoudre l'exercice ci-dessous à l'aide d'un programme.
L'énoncé avait été donné en 2015.

> On écrit tous les nombres entiers, les uns derrière les autres, à partir de 1 :
>
> 1234567891011121314151617...
>
> Quel est le deux-mille-quinzième chiffre de cette liste ? À quel nombre appartient-il ?

Proposez une fonction qui, à partir d'une année n quelconque renvoie le n-ième chiffre de la liste ci-dessus ainsi que l'entier auquel il appartient.

SOLUTION DU DÉFI N°139 - LA CARTE CADEAU

Une première solution

Il y a 6x6x6 nombres possibles dont la somme totale est intéressante à trouver.

Pour chaque chiffre des centaines possible, il y a 6x6 nombres différents.

La somme due aux centaines du total est donc :

36x(1+2+3+4+5+6)x100= 36x21x100= 756x100 = 75 600 (pour multiplier 36 par 21, je multiplie par 20 et j'ajoute 36).

De même, la somme due aux dizaines du total est 36x21x10 et la somme due aux unités du total est 36x21x1.

La somme totale est donc 75 600 + 7 560 + 756.

La moyenne de tous ces nombres est donc (75 600 + 7 560 + 756) : (6x6x6).

Après utilisation d'une calculatrice, le montant de cette « carte cadeau » est 388,50€.

Une deuxième solution

Notons X_1 la v.a. qui associe au résultat du lancer du premier dé la valeur de la face. On définit de même les v.a. X_2 et X_3. Les lancers sont indépendants les uns des autres donc les v.a. le sont aussi.
X est la v.a. qui au lancer des trois dès associe le nombre dont le chiffre des centaines est X_1, celui des dizaines est X_2 et celui des unités est X_3. On a : $X = 100X_1 + 10X_2 + X_3$.
Les v.a. étant indépendantes, la linéarité de l'espérance donne :

$$E(X) = 100E(X_1) + 10E(X_2) + E(X_3)$$

Les trois v.a. ont la même loi de probabilité (loi équirépartie) donc $E(X) = 111E(X_1)$ avec $E(X_1) = \frac{21}{6}$ donc $E(X) = \frac{2331}{6} = 388{,}5$
La somme moyenne est donc 388,5 euros.

Retour au sommaire

Plus simplement, la moyenne pour les centaines, dizaines et unités, est 3,5 donc la valeur moyenne pour le nombre est : $100 \times 3{,}5 + 10 \times 3{,}5 + 3{,}5 = 388{,}5$.

Une troisième solution

Sur tableur, on réalise la feuille suivante :

	A	B	C	D	E
1	N° lancer	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Nombre
2	1	1	1	1	111
3	2	1	1	2	112

On complète la colonne A par les entiers de 1 à 216 (le nombre de lancers de 3 dés).
On saisit dans B2, la formule « =QUOTIENT(A2-1;36)+1 » ; dans C2, « =MOD(QUOTIENT(A2-1;6);6)+1 » et, dans D2, « =MOD(A2-1;6)+1 ». Enfin, la formule dans E2 est « =100*B2+10*C2+D2 ». Puis, on recopie ces quatre cellules vers le bas, jusqu'à la ligne 217.
Dans, E218, la formule « =MOYENNE(E2:E217) » donne 388,5.

Une quatrième solution

En programmation, l'algorithme est :

```
Fonction Cadeau(n : entier;entier)
        somme ← 0 ;
        pour c allant de 1 à n, faire :
                pour d allant de 1 à n, faire :
                        pour u allant de 1 à n, faire :
                                nb ← 100c + 10d + u ;
                                somme ← somme + nb ;
                        finPour
                finPour
        finPour
        renvoyer somme/n³
```

En Python :

```
def Cadeau(n) :
        somme=0
        for c in range(1,n+1) :
                for d in range(1,n+1) :
                        for u in range(1,n+1) :
                                nb=100*c+10*d+u
                                somme=somme+nb
        return somme/n**3
```

Effectuer Cadeau(6) renvoie 388,5. On peut choisir un autre argument si Roméo dispose de dés tétraédriques, octaédriques, dodécaédriques, icosaédriques ou autres dés à 30 faces disponibles dans le commerce.

Retour au sommaire

SOLUTION DU DÉFI ALGORITHMIQUE N°139-RALLYE

Le défi algorithmique du PV 139 demandait de trouver le nombre d'entiers non-répétitifs (aucun de ses chiffres n'apparait plusieurs fois dans l'écriture du nombre) entre 1 et 2016 (inclus). La fonction 'repetitif' permet de savoir si l'entier est répétitif ; la fonction 'entiersRepetitif' compte le nombre d'entiers répétitifs entre 1 et n et renvoie le complément à n de ce nombre.

Effectuer 'entierRepetitif(2016)' permet d'obtenir la réponse cherchée.

Pseudo-code : Fonction **repetitif**(n : entier ; repet : booléen)

```
ch ← chaîne(n) ;
repet ← Faux ;
pour i allant de 1 à taille(ch), faire :
    pour j allant de i+1 à taille(ch), faire :
        si ch[j]=ch[i], alors :
            repet← Vrai ;
        finSi ;
    finPour ;
finPour ;
renvoyer repet.
```

Fonction **entierRepetitif**(n : entier ; entier)

```
nb ← 0 ;
pour i allant de 1 à n, faire :
    si repetitif(i), alors :
        nb ← nb+1 ;
    finSi
finPour
renvoyer n-nb
```

<u>Python</u>

```python
def repetitif(n):
    """
    Fonction repetitif(n : entier; repet : booléen)
    n : nombre dont on veut savoir s'il est répétitif
    ch : chaîne, conversion de n en chaîne de caractères
    i,j : entiers, positions dans la chaîne ch
    renvoie repet, Vrai si n est répétitif, Faux sinon
    """
    ch=str(n)
    repet=False
    for i in range(len(ch)):
        for j in range(i+1,len(ch)):
            if ch[j]==ch[i]:
                repet=True
    return repet

def entiersRepetitif(n):
    """
    Fonction entiersRepetitif(n : entier; entier)
    n : borne supérieure de la recherche
    nb : entier, nombre d'entiers répétitifs entre 1 et n
    i : entier, nombre courant à tester
    renvoie le nombre d'entiers non répétitifs entre 1 et n
    """
    nb=0
    for i in range(1,n+1):
        if repetitif(i):
            nb=nb+1
    return n-nb
```

Retour au sommaire

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE - N°140

D'après un problème proposé par Jacques Choné

On note, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_n le nombre de suites de n chiffres telles que la différence entre deux chiffres consécutifs soit d'une unité, et utilisant uniquement les chiffres 1, 2, 3 ou 4.
Par exemple pour $n = 10$ les suites 1234323434 ou 4321232343
Déterminer une relation de récurrence définissant la suite (u_n).
Le responsable de cette rubrique est Philippe Févotte. Vous pouvez lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème.

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT - N°139

Solution proposée par Philippe Févotte

Pour un entier i compris entre 2 et $n-1$, les listes qui constituent un record à l'instant i peuvent être construites de la façon suivante :

- on choisit i entiers entre 1 et n,
- on place le plus grand des nombres choisis au rang i,
- on permute les $i-1$ autres nombres dans les $i-1$ premières places,
- on permute les $n-i$ entiers non choisis dans les $n-i$ places restantes.

Sur les $n\,!$ listes possibles, le nombre de listes favorables est donc $\binom{n}{i}(i-1)\,!\,(n-i)\,!$.

Par conséquent la probabilité p_i d'obtenir un record à l'instant i est $\binom{n}{i}\frac{(i-1)!(n-i)!}{n!}$, ce qui après simplification donne $p_i = \frac{1}{i}$.

Par ailleurs pour obtenir un record au rang n, il faut et il suffit de placer le jeton numéroté n en dernière position. On a donc $p_n = \frac{1}{n}$. De plus, par convention, on sait que $p_1 = 1$.

On en conclut que pour tout entier i inférieur ou égal à n, $p_i = \frac{1}{i}$.

Pour déterminer l'espérance de X_n, sans connaître la loi de probabilité de cette variable aléatoire, on va décomposer la variable « compteur » X_n comme somme de variables « indicatrices » dont on connaît l'espérance.
En effet, si on note R_i la variable qui prend la valeur 1 s'il y a un record au rang i et 0 sinon, on a $X_n = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$.
Chaque variable R_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_i = \frac{1}{i}$; elle a pour espérance $\frac{1}{i}$.
On en déduit que $E(X_n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Retour au sommaire