LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

N° 129	MARS 2017

Stanislas (photo de Valérie)

Lire Maths et media : Globe terrestre en perspective.

www.apmeplorraine.fr

N° ISSN : 0760-9825. Dépôt légal : mars 2017. Directeur de la publication : Gilles WAEHREN.
Pour les adhérents lorrains de l'APMEP, à jour de leur cotisation, l'abonnement au Petit Vert est gratuit. Il est proposé en version électronique (PDF). Cependant, (seulement si vous n'êtes plus en activité et si vous n'avez pas d'adresse électronique), vous pouvez demander une version papier expédiée par la poste (en format réduit et sans la couleur) ; pour cela, envoyez une demande à jacverdier@orange.fr. Les adhérents qui sont mutés dans une autre académie peuvent demander de continuer à recevoir le Petit Vert quelque temps encore (version électronique PDF uniquement).

SOMMAIRE

Retour au sommaire

EN GUISE D'ÉDITO…

LES « JOURNÉES LORRAINES » DE L'APMEP

Ce numéro du Petit Vert parait quelques jours avant la journée du 22 mars 2017. Il sera lu non seulement par les adhérents, mais aussi par tous les participants à cette journée, qui viendront bientôt, si ce n'est pas déjà le cas, grossir le nombre de nos adhérents. Nous retraçons ici « l'historique » de ces journées.

La première « véritable » journée régionale([1]) (au sens où nous l'entendons actuellement), ouverte à tous, a eu lieu le 24 novembre 1993, sous la présidence de Michèle Fabrégas : deux plages d'ateliers le matin au CRDP, repas au Foyer du jeune ouvrier de Maxéville, puis table ronde l'après-midi. Cette journée avait été inscrite au plan de formation de la MAFPEN ([2]). Depuis 2010, deux ateliers sont proposés aux enseignants de premier degré, dans le cadre de leurs « animations pédagogiques.

La journée suivante a eu lieu en janvier 1995, puis l'habitude a été prise de programmer cette journée au mois de mars. A partir de 2001, le CRDP se révélant trop petit en regard du nombre d'ateliers proposés, les ateliers ont eu lieu l'après-midi à l'IUFM ou au collège Jean Lamour.

C'est en 2009 que la faculté des sciences de Vandœuvre nous a accueillis pour la conférence du matin, et le lycée Callot pour le repas et les ateliers de l'après-midi. En 2010, 2011 et 2012, c'est l'INRIA qui nous a accueillis pour la conférence du matin, mais à partir de 2013 c'était de nouveau à la faculté des sciences le matin et au lycée Callot pour l'après-midi.

A une certaine époque, il avait été évoqué de faire « tourner » le lieu de la journée dans les différents départements, mais cette idée a été abandonnée, Nancy étant une ville géographiquement centrale dans notre Académie.

Cette journée s'ouvre traditionnellement par une conférence. Les thèmes évoqués sont très variés : de « La théorie géométrique des «nœuds» aux « Usages spontanés et savants du hasard », de « L'analyse combinatoire en pays d'Islam » aux « Mathématiques du Chat de de Philippe Geluck », en passant par « La géométrie secrète des mosaïques antiques en Lorraine » et « Comment les mathématiques ont su décrire le monde ? »...

Les ateliers, au nombre de 15 à 20, sont animés par des enseignants qui veulent faire partager leurs connaissances et leurs savoir-faire ; ce sont des adhérents de l'APMEP issus des quatre départements lorrains, mais parfois aussi des régions voisines ou de Belgique (nous comptons d'ailleurs sur vous pour en animer un lors de nos prochaines journées). Là aussi, leurs thèmes sont très variés et « balaient » tous les niveaux et tous les domaines, comme vous avez pu le constater sur le document de présentation qui vous a été envoyé en janvier.

On ne saurait décrire ces journées sans parler du repas très convivial servi au lycée Callot, où vous pouvez retrouver de « vieilles connaissances » et en rencontrer de nouvelles.

1 Avant 1993, il n'y avait pas de “ Journée régionale APMEP ”, mais un des membres du Comité ou un invité faisait une conférence au moment de l'A.G. (c'était donc une “ demi-journée régionale ” ; seuls les adhérents y étaient invités).

2 Mission académique à la formation des personnels de l'Education nationale

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS DANS LE PETIT VERT

Nous reprenons ci-dessous l'éditorial écrit en mars 1992 par Jacqueline Euriat, qui était alors formatrice à l'I.U.F.M. (site d'Épinal) et vice-présidente de la régionale APMEP Lorraine.

Chaque année, quand je consulte les résultats des candidats au Concours de Recrutement des Élèves-Instituteurs, je suis perplexe : comment comprendre qu'ils produisent des résultats aussi faibles en mathématiques alors qu'ils ont suivi avec succès une scolarité jusqu'au niveau du DEUG ?

Ils ont, du Cours préparatoire à la Terminale, rencontré les mathématiques pendant une douzaine d'années. Certes, on peut se demander qui sortirait indemne d'une si longue fréquentation. Quelques uns se sont construit une culture mathématique. Mais pour la plupart, il ne subsiste qu'une relation affective : on aime, on déteste ou on a peur.

Jusqu'à présent, les futurs instituteurs bénéficiaient dans le cadre de leur formation initiale d'un enseignement mathématique obligatoire dont le programme rédigé bien sûr en termes de contenus restait en-deçà des limites de celui de l'enseignement secondaire.

La perspective contraignante d'avoir à enseigner des notions mathématiques provoquait souvent un rafraîchissement d'intérêt qui compensait en partie la modestie des savoirs et ouvrait la voie à une approche différente, constructive et émancipatrice des mathématiques. Mais pour beaucoup, le handicap était trop grand pour être surmonté pendant la durée de la formation.

Le nouveau mode de recrutement dans les IUFM situé en milieu de formation va-t-il changer quelque chose ?

En fait, la présence d'un concours où l'épreuve de mathématiques apparaît (avec l'épreuve de français) comme le premier barrage replace les étudiants en position de bachotage et les pousse à retrouver les pires réflexes scolaires : ils demandent des exercices types, des corrigés types, des contenus très limités.

On est loin des mathématiques de l'intelligence et de la liberté. Alors la situation est-elle désespérée ?

Oui... sauf peut-être si, quel que soit son niveau d'enseignement, quelques lourdes que soient les contraintes sociales et les traditions pédagogiques, chacun d'entre nous s'accorde avant chaque cours un petit instant, une lueur, un éclair, pour se demander si les maths qu'il va proposer à ses élèves apporteront quelque chose à leur future dignité de citoyens et à leur qualité d'hommes libres...

… Comme cela, sans complexes, même s'il y en a que cela fait ricaner.

Jacqueline Euriat

Depuis 25 ans, des choses ont changé. Les instituteurs sont devenus professeurs des écoles, formés à l'ÉSPÉ au lieu de l'I.U.F.M. Ils ont rencontré des mathématiques depuis l'école maternelle et certains d'entre eux n'en ont plus rencontré entre la classe de seconde et la préparation au concours.

Mais 25 ans plus tard, ce paragraphe reste d'une grande actualité : on est loin des mathématiques de l'intelligence et de la liberté. Alors la situation est-elle désespérée ? Oui... sauf peut-être si, quel que soit son niveau d'enseignement, quelque lourdes soient les contraintes sociales et les traditions pédagogiques, chacun d'entre nous s'accorde avant chaque cours un petit instant, une lueur, un éclair, pour se demander si les maths qu'il va proposer à ses élèves apporteront quelque chose à leur future dignité de citoyens et à leur qualité d'hommes libres...

… Comme cela, sans complexes, même s'il y en a que cela fait ricaner.

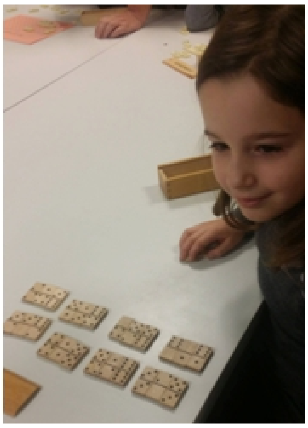
Pour télécharger la totalité du Petit Vert n°29, c'est ici :
http://apmeplorraine.fr/old/index.php?action=telecharger_pv&pv_id=29

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

OBJETS MATHÉMATIQUES

Nos retraités retournent régulièrement à l'école…



… pour des animations à la maternelle d'Herny (Moyenne et Grande section), aux écoles primaires de Lorry (CE et CM), de Talange (CP et CE1) et de Metz-Queuleu (CE1-CE2).

Notre expo "objets mathématiques" était au collège de Vigy…

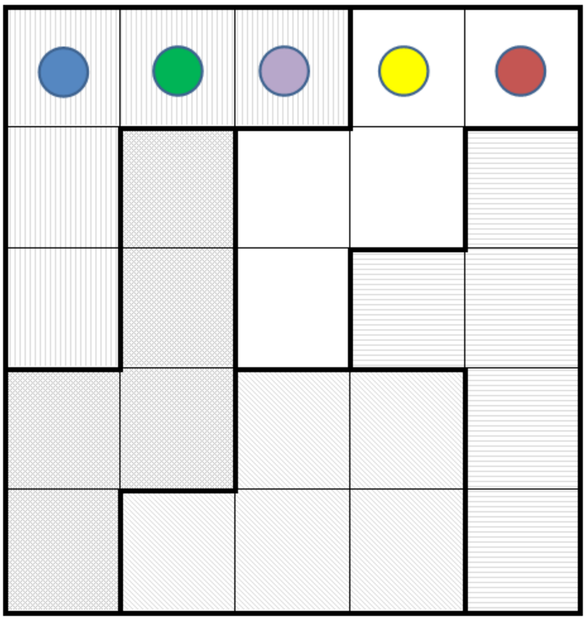
...pour la dernière semaine du premier trimestre, avec une animation pour les quatre classes de cinquième le vendredi.

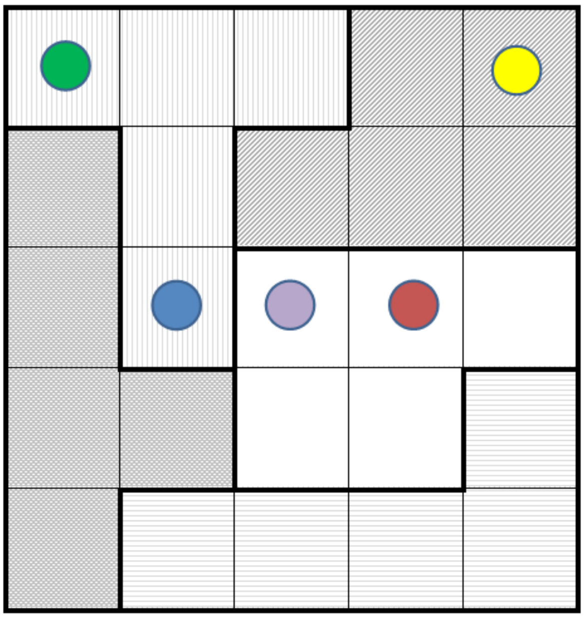
Un élève : « *C'était vraiment bien, tout le monde a apprécié et on a appris des choses* ».

Dans la photo ci-dessus à gauche, on voit deux élèves jouer au jeu « Cinq couleurs et cinq zones », sorte de sudoku qui consiste à remplir les cases ayant la forme d'un pentamino avec des pions de cinq couleurs différentes de telle façon que chaque couleur apparaisse une et une seule fois dans **chaque ligne**, **chaque colonne** et **chaque région**.

Voir, page suivante, deux plateaux pour ce jeu.

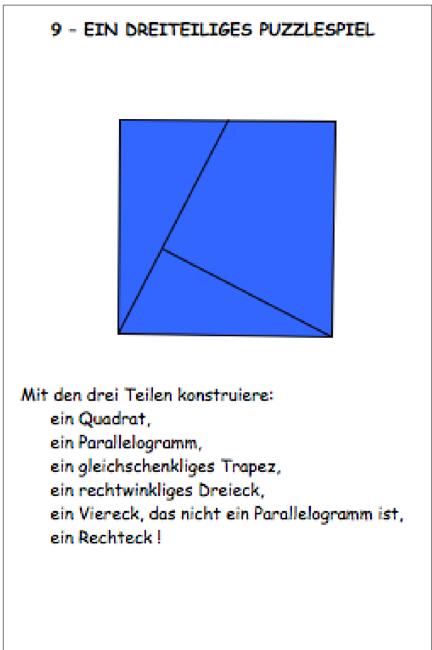
Retour au sommaire

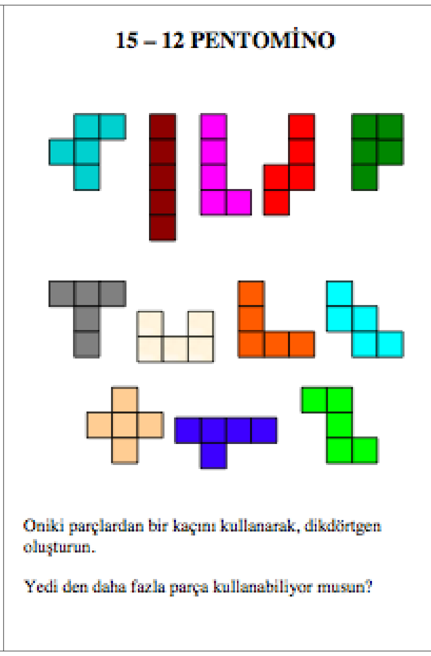


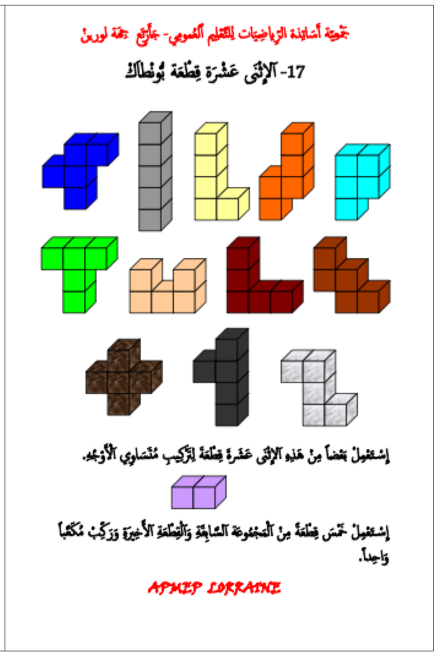


Qu'y a-t-il dans notre expo « Objets mathématiques » ?
Elle comporte dix-sept stands pour des manipulations essentiellement géométriques destinées aux élèves de cycle 3, de cycle 4, etc. Localement, des thèmes complémentaires ont été joints.

http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=coinjeux&choix=5 permet d'accéder au contenu ainsi qu'aux versions en allemand, anglais, espagnol, italien, et turc. La version en arabe n'est pas encore sur notre site.







Comment se procurer cette expo ?
Pour l'emprunter, contacter Andre.Stef@univ-lorraine.fr (54), joelle.agamis@free.fr (55), michel.ruiba@ecopains.net (57), baliviera.marie-jose@orange.fr (88) et pierre-alain.muller@wanadoo.fr (langues étrangères et Est-mosellan).

10 € seront demandés pour nous aider à renouveler les objets manipulés.

Retour au sommaire

PRÉSENTATION DES GROUPES I.R.E.M.

Par André STEF*, directeur de l'I.R.E.M.

1. L'I.R.E.M.

L'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (I.R.E.M.) a été créé au début années 70 (premiers statuts 1972) comme service commun de l'Université de Nancy I. La plupart des I.R.E.M. ont été créés à la même époque (il y a 28 I.R.E.M. en France et plusieurs à l'étranger). L'APMEP a eu un rôle très actif dans la création des I.R.E.M..

Depuis 2014, l'I.R.E.M. est une structure interne de l'École Supérieure du Professorat et de l'Éducation (E.S.P.É.). Il y intègre, avec la Maison Pour la Science (M.P.L.S.), le Pôle en charge du développement professionnel des personnels de l'Éducation Nationale. Dans ce cadre, il collabore avec la M.P.L.S.

L'I.R.E.M. a pour mission de développer une réflexion sur l'enseignement des mathématiques dans sa globalité. Il a vocation à participer à la recherche dans le domaine de la formation et de l'enseignement des mathématiques à tous niveaux, du primaire au supérieur.

L'I.R.E.M. de Lorraine contribue à la formation professionnelle initiale et continue des enseignants de l'académie Nancy-Metz. La formation continue des enseignants du second degré s'effectue dans le cadre du plan académique de formation (P.A.F.), en collaboration avec l'inspection pédagogique régionale de mathématiques et le Rectorat (M.I.F.O.R.).
En 2016/2017 L'I.R.E.M. intervient en formation continue des enseignants du premier degré dans le cadre des Animations Pédagogiques obligatoires des professeurs des écoles, en circonscriptions, avec le soutien des D.S.D.E.N. de l'Académie.

Il participe au niveau national à des échanges sur l'enseignement, la didactique, l'histoire et l'épistémologie des mathématiques au travers du réseau des I.R.E.M. : revue Repères I.R.E.M., commissions inter-I.R.E.M.(C.I.I.) nationales.

Les activités de recherche de l'I.R.E.M. de Lorraine sont menées au sein de groupes de travail rassemblant des enseignants de tous niveaux. Au plan individuel, l'I.R.E.M. permet à chacun de ses membres de prendre du recul sur ses pratiques d'enseignant : poser ses questions, partager son expérience avec des collègues d'horizons variés, sur tous les aspects du métier. Au delà de l'enrichissement de leur propre pratique pédagogique, leurs résultats ont des répercutions également sur celle des autres enseignants de l'académie au travers des productions des équipes (brochures, documents en ligne sur le site de l'I.R.E.M. ou sur celui du rectorat) ou des stages de formation qu'elles conçoivent et encadrent. On ne peut négliger l'apport, également, de cette réflexion d'enseignants-chercheurs, d'enseignants de l'U.L. et de tuteurs et de Professeurs Formateurs Académiques (P.F.A.) pour la formation initiale (master MEEF) des étudiants/élèves professeurs.

L'I.R.E.M. participe également à la diffusion de la culture scientifique et des actions sont menée dans ce sens, en participation (Semaine des Maths, Fête de la Science), soutien (congrès MATH en JEANS), collaboration (challenge « Graine de Sondeur ») ou organisation (Colloque Cathy Dufour, Math C2+).

2. Organisation institutionnelle

Le conseil de l'I.R.E.M. est composé de membres élus ou désignés et de membres de droit. Les animateurs des groupes I.R.E.M. y sont représentés par des membres élus : 6 animateurs de l'I.R.E.M. relevant du premier ou du second degré, 4 animateurs de l'I.R.E.M. en poste dans l'enseignement supérieur à l'Université de Lorraine. Le mandat des membres élus du conseil de l'I.R.E.M. est de cinq années et renouvelable. Les résultats des élections de 2014 sont consultables sur le site de l'I.R.E.M.

*texte issu d'éléments du rapport de l'IREM de Lorraine 2016, dont les contributeurs sont également Sylvie Sperner et les responsables de groupes.

Retour au sommaire

NB : L'APMEP Lorraine est présente au conseil (président de la Régionale, ou son représentant).

3. Personnels et moyens

Moyens : l'I.R.E.M. dispose d'un budget attribué par l'É.S.P.É. et de locaux situés à la Faculté des Sciences et technologies.

La direction de l'I.R.E.M. est assurée par un enseignant-chercheur nommé par le directeur de l'ESPÉ après avis du conseil de l'I.R.E.M. et avis conforme de l'Assemblée des directeurs d'I.R.E.M.., pour un mandat de trois ans. Directeur actuel de l'I.R.E.M. de Lorraine (depuis 2015) : André STEF, Maître de Conférences en mathématiques à la Faculté des Sciences et Technologies (FST) membre de l'Institut Elie Cartan de Lorraine (IECL).

Personnel administratif

Annie SALTEL, Adjoint Administratif, responsable de la bibliothèque (prêt gratuit aux enseignants).
Sylvie SPERNER, Adjoint Technique de Recherche et Formation, en charge du secrétariat.

Les animateurs I.R.E.M., ainsi sont appelés les membres d'un groupe I.R.E.M. **Le sont potentiellement tout lecteur de ce PETIT VERT qui enseigne des mathématiques (de la maternelle à l'université) :**

- des enseignants en poste en primaire, collège, lycée général ou professionnel (39 en 2016/2007),
- des enseignants et enseignants-chercheurs de l'Université de Lorraine (en mathématiques, informatique, physique).

L'engagement dans un groupe I.R.E.M. est un acte volontaire qui débute par une prise de contact avec le directeur de l'I.R.E.M. ou un membre de groupe I.R.E.M. (tel que le responsable du groupe).

L'É.S.P.É. attribue des heures à des enseignants en poste à l'université de Lorraine.
L'I.R.E.M. dispose pour les enseignants en poste dans le second degré d'heures supplémentaires effectives (HSE)/vacations attribuées par le ministère (DGESCO) ou par le rectorat.

4. Les groupes

Un groupe I.R.E.M. est constitué d'enseignants/chercheurs du supérieur et d'enseignants des premier et second degrés. La taille d'un groupe I.R.E.M. est d'un peu moins d'une dizaine d'animateurs environ. Un groupe se réunit six fois par an (en général un même après-midi, qu'il convient de définir l'année scolaire précédente pour demander un emploi du temps adapté aux chefs d'établissement).

Les travaux de recherche des animateurs de l'I.R.E.M. dans les groupes conduisent à l'élaboration de documents et à la préparation de stages s'adressant aux enseignants des premier et second degrés.
Les Inspections Régionales de Mathématiques et de Math-Sciences, la Mission à la Formation Continue (M.I.F.O.R.) apportent aux groupes I.R.E.M. un soutien important de par l'intérêt et l'aide financière qu'elles leur accordent.

Certains groupes sont inscrits dans l'offre de formation du PAF et leurs membres, enseignants du secondaire, bénéficient dans ce cadre de remboursements de frais de déplacement.

5. Descriptif des groupes de travail I.R.E.M. de Lorraine pour 2016-2017

Vous pouvez consulter les actualités des groupes de l'I.R.E.M. de Lorraine sur notre site web : http://www.I.R.E.M..univ-lorraine.fr - Onglet : **Groupes**

Retour au sommaire

5.1- Accompagnement des nouveaux enseignants, Responsable : Lionel Lambotte

Le groupe poursuit son travail sur la préparation de documents « clé en mains » à disposition des nouveaux enseignants de mathématiques débutant au collège ou au lycée. L'essentiel du travail en 2016-2017 se fait sur le niveau collège en lien avec la réforme, avec certainement quelques documents lycée à ajuster et d'autres déjà mis en ligne à modifier.
Documents mis à disposition des nouveaux professeurs sur le site de l'I.R.E.M. de Lorraine.
Formations PAF, niveau 1 et 2 des professeurs contractuels. Animation (lycée-collège) de 2 jours pour le niveau 1. Idem pour le niveau 2.

5.2 - Cycle 3 - Math premier degré, Responsable David Bertolo

Groupe créé en 2015/2016, Les membres du groupe sont enseignants dans les premier et second degrés et à l'Université de Lorraine.
Ce groupe de travail "Cycle 3 - Math 1er degré" a débuté en septembre 2015. Dans un premier temps, les membres du groupe ont défini les différents objectifs visés et les axes de recherche à explorer. Le sujet retenu a été : "L'entrée dans les problèmes par l'image". Dans un second temps, un ensemble d'images et de photos exploitables a été sélectionné. Ces images ont pour but de remplacer les énoncés de problèmes. L'entrée dans les problèmes par l'image concerne aussi bien les problèmes ayant plusieurs pistes de résolution ou plusieurs démarches possibles que les situations permettant des variations de problèmes autour d'une même image. Mais dans tous les cas, l'idée est que c'est l'élève qui réfléchit aux situations et aux questions possibles autour de ces images. Dans un troisième temps, les membres du groupe ont réalisé plusieurs expérimentations en classe à partir des images sélectionnées précédemment. Ce travail a donné lieu à autant de retours d'expériences qui ont mis en avant la forte motivation des élèves par rapport aux activités proposées ainsi que leur forte implication dans les tâches demandées. Enfin, en prenant appui sur les expérimentations menées, le groupe a commencé à définir le format et le cadrage des formations à venir pour l'année 2016-2017. (Animations pédagogiques à Pont-à-Mousson, Lunéville/Blainville, Thionville, Boulay/St Avold.).

5.3 - L'apprentissage du code informatique au collège, Responsable Serge Ermisse

Groupe créé en 2015/2016. Ce groupe de travail et de réflexion sur l'apprentissage du code informatique au collège est en lien direct avec les nouveaux programmes de cycle 4 (la décision de sa création a été prise alors que les programmes étaient encore en projet). En 2015-2016, le groupe a réfléchi à une approche pédagogique progressive de l'algorithmique et de programmation (logiciel scratch) correspondant au nouveau programme du cycle 4 en collège, mis en application à la rentrée 2016. Ces membres, particulièrement ceux qui enseignent au collège, ont pu expérimenter les différentes activités produites par le groupe, et ainsi analyser les réactions et les productions des élèves, lors des réunions et échanges par messagerie électronique. Au troisième trimestre, fort de leurs premières expériences de terrain, les membres du groupe ont participé à la conception de la première demi-journée de formation académique de tous les professeurs de collège ainsi qu'à leurs animations. En 2016, l'I.R.E.M. a fait l'acquisition de deux robots Thymio II avec Kits de découverte Yéti (pour le cycle 3), ainsi que d'un Mbot (Makeblock) à assembler.

Objectifs

S'appuyer sur le document d'accompagnement pour inciter les collègues à le consulter et à exploiter les fichiers scratch joints (autoformation, ressources). Travailler plus particulièrement la démarche de projet collaboratif. Aborder la problématique de l'évaluation (par compétences), particulièrement en cours formation, plus que pour l'évaluation finale du DNB (support papier). Réfléchir à la trace écrite (ou numérique). Permettre à tous les stagiaires de poursuivre leur propre apprentissage en algorithmique et programmation, des collègues ayant encore peu de maîtrise jusqu'aux experts (en prévoyant des approfondissements). Réfléchir au contenu de la deuxième demi-journée de formation académique et l'animer auprès de tous les collègues de collège de l'académie.

Retour au sommaire

Réfléchir à la liaison math-techno par l'intermédiaire de la robotique et en vue d'éventuelle demande de Formation d'Initiative Locale (FIL) sur ce sujet en 2017.

Animer les FIL fléchées « algorithmique et programmation » au deuxième et troisième trimestre.

Pour 2017/2018 : Il est envisagé que le groupe se scinde en deux groupes :

- un groupe « Lycée » (ou plutôt collège/lycée) qui réfléchira à la continuité de la réforme des programmes de collège au lycée en algorithmique et programmation

- un groupe « apprentissage du code au collège » qui continuera à travailler sur les nouveaux programme de collèges, avec un travail en commun avec des collègues de technologie.

5.4 - Les jeux dans l'enseignement des mathématiques, Responsable Julien Bernat

Groupe créé en 2015/2016

Le groupe, créé en septembre 2015, a essentiellement consacré son activité à la préparation d'une action de formation continue dans le cadre de l'offre de développement professionnel de la "Maison pour la science en Lorraine". Les principaux objectifs de cette formation ont été : de développer des jeux et approches ludiques permettant un travail sur les notions en lien avec les programmes du collège et du lycée, avec des compléments didactiques et historiques sur la place du jeu. De présenter un aperçu des types de jeux existants, ainsi que des possibilités d'adaptation pour une exploitation en mathématiques.

Le groupe réfléchit aux améliorations et adaptations à réaliser dans l'offre de formation ; d'autres pistes concernent la réalisation d'articles ou de fiches pédagogiques à destination des professeurs afin de pouvoir exploiter le travail de synthèse réalisé dans le groupe, avec un travail complémentaire de mutualisation de ressources externes.

5.5 - Mathématiques et informatique, Responsable Rodolphe Ley

Le groupe qui a commencé en 2014-2015, poursuit son travail dans le cadre de la médiation scientifique en informatique, les informaticiens d'INRIA Nancy-Grand Est et du LORIA ont développé un coffret d'activités ludiques autour de la notion d'algorithme. Ces jeux ont tout d'abord été testés lors d'ateliers auprès d'écoliers, de collégiens et de lycéens. Du succès de ces expérimentations a alors germé l'idée d'exploiter ces activités en classe au collège et au lycée, afin de favoriser le développement des aptitudes des élèves à verbaliser leur raisonnement, à l'argumenter et à le démontrer. « L'informatique débranchée » se veut également être par ses modalités de mise en œuvre innovante, une source de motivation pour l'enseignant des mathématiques.

5.6 Des outils pour gérer l'hétérogénéité des élèves de LP en mathématiques, Responsable Jean-Michel Bertolaso

Ce groupe intitulé : « Des outils pour gérer l'hétérogénéité des élèves en mathématiques en LP » est la continuité du groupe I.R.E.M. LP « Pratiques pédagogiques en Bac Pro 3 ans » qui s'est terminé 2015-2016. Il a souhaité se réorienter pour les trois prochaines années sur un autre axe de travail : Comment gérer l'hétérogénéité des élèves, qu'ils soient en difficultés ou qu'ils aient à l'opposé des perspectives de poursuite d'études : en B.T.S. pour les Bacs Pro et en Bac Pro pour les C.A.P. ? Le groupe proposera des séances d'exercices pouvant être proposés à LaboMEP (poursuite d'un travail déjà commencé par le groupe précédent), en travaillant et en recherchant les notions qui s'avèrent être difficiles pour les élèves de bac pro qui se retrouvent ensuite en BTS. Le groupe prépare une formation au PAF : Offre n°20160150 Maths-Sciences en LP, intitulée : "Des thèmes attractifs pour enseigner les mathématiques autrement en LP" (déroulement sur une journée en présentiel).

5.7 – Statistiques descriptives , Responsable Hélène Billon

Le groupe « Probabilités et statistiques » s'est terminé en 2016. Le nouveau groupe a pour but de produire une réflexion sur l'enseignement des statistiques dans l'enseignement secondaire.

Retour au sommaire

Au collège, les élèves ont une première initiation aux statistiques (notion de moyenne, de médiane...) Au lycée, ces notions sont reprises, poursuivies et approfondies.

Le prolongement, pour être naturel, n'en comporte pas moins des difficultés pédagogiques sérieuses afin d'éviter les confusions entre les différents aspects de la démarche scientifique : l'exploitation des données, le choix d'un modèle, le test de l'adéquation d'un modèle, les conclusions mathématiques tirées dans le cadre d'un modèle précis.

Le groupe de travail a pour objet de déceler ces écueils et de proposer des activités pédagogiques permettant de développer ces compétences. Il s'agit de produire des exercices pertinents et attrayants qui soient suffisamment balisés pour que la résolution des problèmes posés soit accessible aux élèves, sans pour autant se cantonner à la reproduction sans discernement de schémas appris par cœur. Il s'agit d'ancrer l'usage des statistiques dans un cadre scientifique rigoureux qui fait la part entre les hypothèses du modèle et leur traitement par le calcul. Pour cela nous souhaitons proposer des activités pour les différents niveaux du lycée en privilégiant la classe de seconde avec un fil conducteur.

Pour cette année, le groupe "statistiques descriptives" prépare une nouvelle formation à la Maison Pour La Science, sur 2 journées en présentiel, dont 1 se déroulera dans les locaux de l'INSEE de Nancy. Des membres du groupe animeront ces deux journées dont le thème est : « L'usage des statistiques : un problème d'éthique et d'intégrité scientifique ? » (NB : formation inscrite au PAF mais non ouverte faute d'un nombre suffisant d'inscrits).

6. Autres groupes se réunissant à l'I.R.E.M.

L'I.R.E.M. est également le lieu de rencontre de groupes de travail n'ayant pas pour but premier une mission de formation ou de production de documents à destination des enseignants du secondaire. Les thématiques de ces groupes sont cependant en lien avec l'enseignement des mathématiques. Les enseignants et chercheurs participant à ces groupes ne reçoivent pas d'heures mais s'impliquent dans ce travail par intérêt pour la thématique choisie. Ces groupes sont aussi des moments d'échanges entre des chercheurs de différentes disciplines. Ce qui est pour chacun, source d'enrichissements professionnels et personnels, à l'occasion d'un projet commun.

6.1 - Épistémologie et histoire des maths

Le groupe "Histoire des mathématiques" est un groupe de lecture et de discussion de textes mathématiques. Au delà d'acquérir des connaissances historiques, les intentions du groupe sont d'approfondir ou de découvrir ensemble certains points conceptuels ou méthodologiques. L'hypothèse basique pédagogique est d'une part, que se former en histoire des mathématiques est une occasion de faire des mathématiques et d'autre part, que l'on comprend mieux les idées et théories mathématiques en les appréhendant dans leur contexte de production.

Après s'être penché sur les travaux de Leibniz, le groupe qui avait repris ses activités début 2015 sur le thème du hasard, a poursuivi en 2016 sur le problème des partis.

6.2 Petit séminaire. Groupe « hébergé »

Le « petit séminaire », animé par Philippe NABONNAND (Archives Poincaré, UL) réunit des membres des Archives Poincaré, de l'Institut Jean Lamour et des membres de l'IECL à l'Université de Lorraine pour une lecture de textes de mathématiciens ou de physiciens..

En 2016 et 2017, le groupe analyse les textes de W. Paoli qui présente une synthèse de la théorie de la relativité dès 1921.

6.3 – Groupe « Cathy Dufour »

Le colloque annuel Cathy Dufour est soutenu par le Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie - Archives Henri Poincaré, l'Institut Jean Lamour, l'Institut Élie Cartan de Lorraine, l'I.R.E.M. de Lorraine, les départements de physique et de chimie de l'Université de Lorraine, l'UFR Connaissance de l'Homme de l'Université de Lorraine, la Maison des Sciences de l'Homme Lorraine (opération Kultmat), la Société Française de Physique et l'École doctorale IAEM

Retour au sommaire

(informatique, automatique, électronique, mathématiques) de l'Université de Lorraine.
L'édition du colloque de novembre 2016 a été consacrée à : « Symétries, invariances et classifications »

Cette manifestation annuelle est issue d'une longue collaboration entre des philosophes et historiens des sciences des archives Henri Poincaré, des mathématiciens de l'Institut Elie Cartan de Lorraine et des physiciens de l'Institut Jean Lamour.
Le colloque s'adresse aux étudiants en master ou doctorat et aux chercheurs en mathématiques, physique, philosophie. La manifestation est également ouverte à un public plus large notamment par le biais d'une conférence ''grand public''. Il a été inscrit au P.A.F. 2015/2016 et 2016/2017, une dizaine de stagiaires ont participé au colloque en 2015 et quatre en 2016.

7. Contacts

Pour toute information (attention : nouvelle numérotation téléphonique depuis janvier 2017)
Directeur : André Stef andre.stef@univ-lorraine.fr (03 72 74 56 61)
Secrétariat : Sylvie Sperner sylvie.sperner@univ-lorraine.fr (03 72 74 56 60)
Bibliothèque : Annie Saltel annie.saltel@univ-lorraine.fr (03 72 74 56 63)
Site Web : http://www.I.R.E.M..univ-lorraine.fr
Adresse : I.R.E.M. de Lorraine. Formations
FST/ Campus Aiguillettes
Bâtiment Henri Poincaré
BP 70239
54506 Vandœuvre les Nancy Cedex

Si le travail dans un groupe I.R.E.M. vous intéresse, n'hésitez pas à prendre contact avec le directeur ou le responsable du groupe pour en discuter tranquillement.

ANNONCE

À ne pas manquer au Palais de la Découverte à partir du 6 décembre et jusqu'au 27 aout 2017, une exposition remarquable sur les probabilités et les statistiques intitulée « Faites vos jeux ! Quand les maths s'en mêlent »".
Emmanuel Claisse a pu la découvrir en avant-première et elle se différencie nettement de l'espace mathématique désuet du Palais de la Découverte.
40 activités ludiques couvrent le programme collège-lycée : probabilités élémentaires, dénombrement, espérance, loi des grands nombres, sondages, estimation etc., dans l'esprit de l'exposition « Les maths pour tous » qui avait eu lieu à la médiathèque de Nancy en 2010.
En effet, comme celle de Nancy, l'exposition « Faites vos jeux » nous vient du célèbre Mathematikum de Giessen en Allemagne et elle est adaptee par le Musée d'Histoire des Sciences de Genève ainsi que par Universcience.
Bref, de quoi prendre plein d'idées d'activités pour la classe ou carrément y emmener vos classes.

Un "dossier enseignants" est téléchargeable à cette adresse.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

SEMAINE DES MATHS : MATHS ET LANGAGES

Vous pouvez télécharger le dossier officiel de la semaine des maths avec le lien ci-dessous :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/agenda/97/7/semaine_mathematiques_guide_2016-2017_web_660977.pdf

Voici quelques exercices ludiques que vous pouvez proposer à vos élèves.

De klääne Griene
Francis hadd 830g Mähl un 720g Zugga. Er baggt ä Kuche. Fer dene Kuche broucht ma so vill Zugga wie Mälh. Er hadd donn noch 250g Zugga iwerich. Konn er donn noch Ponnekuche mache, fer die 350g Mähll netig sin ?

Liponombres
Vous connaissez certainement les lipogrammes (on supprime une lettre : par exemple, comme l'a fait Pérec, écrire tout un roman sans utiliser la lettre "e"). On peut également, écrire des "liponombres" (par exemple sans la lettre "e" lorsqu'on écrit un nombre en toutes lettres). Combien y a-t-il de tels liponombres (sans la lettre "e") entre zéro et cent ?

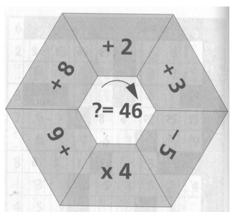
Sales at the fishmonger's
« Look at my fishes, they are so good ! A slice of tuna is worth two soles !... Four soles and two slices of tuna are 28 £ ! ». Determine the price of one sole.

Anagrammes
Tout le monde connait les anagrammes : des mots qui s'écrivent avec les mêmes lettres, comme par exemple "chien" et "niche", "utile" et "tuile", …
Voici une liste de termes, sauriez-vous en donner des anagrammes qui soient des termes mathématiques ? Récent ; rétine ; linge ; nord ; pari ; intégral ; piton ; sorti ; méditera ; larguer ; mômes ; glacèrent ; taperez ; pacsée ; fronçait ; égalons ; réunifier ; résumé.
(on ne tiendra pas compte d'éventuelles différences d'accents).

Gli animali di mio zio
Nella fattoria di mio zio vivono diversi animali. Sono tutti tori meno 4. Sono tutte mucche meno 4. Ci sono tanti cavalli quanti bovini, il resto sono galline. Quanti e quali animali ci sono nella fattoria di mio zio ?

Suite numérique
Il s'agit d'écrire une phrase la plus longue possible (et qui ait un sens, si possible mathématique), telle que le premier mot ait une seule lettre, le second deux lettres, et ainsi de suite. Voici un exemple d'une telle phrase : *À la fin, Hugo trace quatre cercles tangents* ...

Zahlenrad
Mit einer Zahl zwischen 1 und 9 sind sechs Rechenaufgaben hintereinander im Uhrzeigersinn abzuarbeiten, um auf das Endergebins 46 zu kommen. Begine oben mit der ersten Rechnung.
(d'après le livre Kopfsprünge, Denkensport für drei minuten).

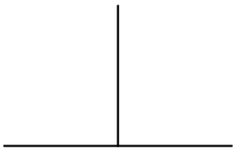


Poète et géomètre
Eugène Guillevic est un poète français, né en 1907 et mort en 1997. Il a l'art de rendre féeriques les objets. Dans un recueil intitulé « Euclidiennes » (1967), il décrit des objets géométriques. En voici deux exemples. À vous d'en proposer d'autres...

Retour au sommaire

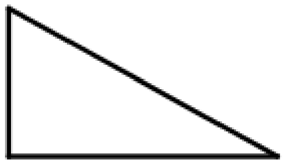
Perpendiculaire :

Facile à dire
Que je tombe à pic.
Mais c'est aussi sur moi
Que l'autre tombe à pic.

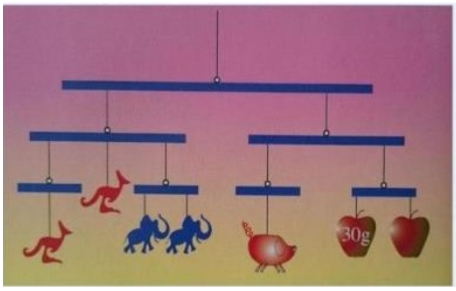


Triangle rectangle :

J'ai fermé l'angle droit
Qui souffrait d'être ouvert
En grand sur l'aventure.
Je suis une demeure
Où rêver est de droit.



Elephant



A mobile is hanging from the ceiling of a baby's bedroom. It's balanced as shown on the picture.
Work out the weight of the elephant.

La bolsa

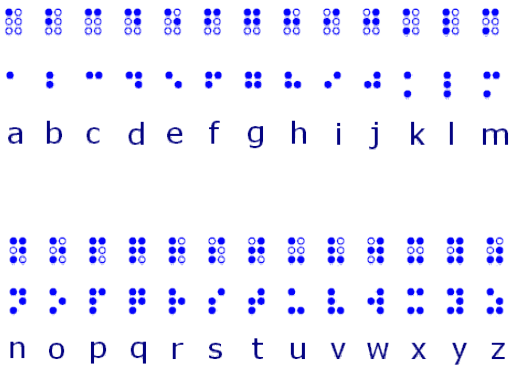
Una bolsa contiene 100 papeletas de una rifa numeradas del 1 a 100. Se extrae una papelata al azar. ¿ Cual es la probabilidad de :

a) que el número extraído tenga una sola cifra,
b) que el número extraído tenga dos cifras,
c) que el número extraído tenga tres cifras,
d) que el número extraído tenga cuatro cifras ?

Матрёшки (poupées russes)

Размеры самой маленькой из этих матрёшек- 1,4 см в вышину, 5 мм в ширину. Надо их умножить на 4/3 чтобы выявить размеры следующей. Определи вышину и ширину самой большой из них (округлить до мм).

Braille



En braille standard, un caractère est représenté dans une matrice de six points sur deux colonnes, chaque caractère étant formé par un à six points en relief.
A gauche, voici cet alphabet (pour les caractères de "a" à "z").
Outre ces 26 caractères, il en existe d'autres permettant de coder les lettres accentuées, etc.
Combien de caractères en tout peut-on coder ?
Parmi les lettres de notre alphabet, combien sont codées par un caractère à 1 point ? à 2 points ? à 3 points ? … à 6 points ?

Shadoks

Pour compter, les Shadoks ne disposent que de quatre chiffres : GA (qui correspond au zéro), BU (un), ZO (deux) et MEU (trois). On compte ainsi : GA, BU, ZO, MEU, BUGA, BUBU, BUZO,

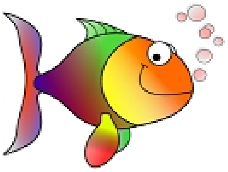
Retour au sommaire

BUMEU, ZOGA etc.

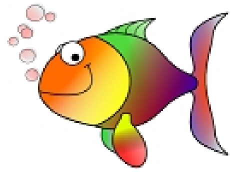
En numération Shadok, combien y a-t-il d'élèves dans ta classe ?
Et comment s'écrit 2017 ?

P.S. A propos des anagrammes, nous vous conseillons l'excellent petit livre d'Etienne Klein et Jacques Perry-Salkow "Anagrammes renversantes ou Le sens caché du monde", publié chez Flammarion en 2011. En voici deux exemples : "Albert Einstein → rien n'est établi" et "la quadrature du cercle → calcul rare du détraqué" !
https://coupsdecoeur.wordpress.com/2012/03/19/anagrammes-renversantes/

PATAFIAS ET GIBOUILLES...



Bac Pro pisciculture aprilesque
Épreuve de mathématiques et physique
(durée 1 heure, coefficient 2)



Les patafias sont des globelles gigouillant. La gigouille statique d'un patafia (mesurée en artémis) s'exprime par la formule :

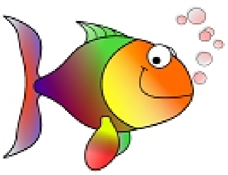
$$G = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{F_i \times q_i^n}{f^2 \sqrt{49}}$$

où F, mesurée en caracoiles, est la fidélité d'une bérouche à l'égard d'un patafia,
q, mesurée en verstes, est la distance d'une bérouche au patafia considéré,
et f, mesuré en burufes, correspond au flux de jawal du patafia.

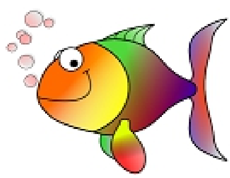
La gigouille statique $\boldsymbol{G}$ exercée par un patafia en milieu vaseux devient une gigouille dynamique $\boldsymbol{\Gamma}$. Cette gigouille dynamique est mesurée en artémis-bis.

La gigouille dynamique $\boldsymbol{\Gamma}$ est égale au quotient de la ductilité de la vase ($\boldsymbol{D}$, mesurée en floques) par le cosinus de l'angle de pénétration du patafia dans la vase.

Un patafia gigouille dynamiquement à $\boldsymbol{G}$ = 16 artémis-bis. Sachant qu'il maintient durant tout son parcours une distance constante avec chacune des bérouches et que celles-ci sont caractérisées par le tableau suivant :



	F_i	q_i
B_1	7	2
B_2	2	3
B_3	12,5	5
B_4	4	8



En sachant par ailleurs que la ductilité de la vase est de 8 floques et que le patafia considéré a un flux de jawal égal à 1/7 de burufe, déterminer l'angle de pénétration du patafia dans la vase.

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS DANS NOS CLASSES

REPRODUCTION D'UNE ŒUVRE DE MAX BILL

François DROUIN

Cet article relate une expérimentation faite en juin 2016 pendant une heure et quart dans une classe de C.M.1 d'une école de Meuse. L'enseignante était avec moi dans la classe.

Sans titre 1985

Max Bill a été présenté comme un artiste suisse né en 1908, décédé en 1994 et ayant vécu en Suisse, en Allemagne et en France. Les élèves ont su retrouver son âge à sa mort.
Sa rencontre avec Piet Mondrian a été évoquée. Montrer des reproductions d'œuvres de cet artiste leur a fait se souvenir de travaux faits en Arts Visuels dans des classes précédentes.

http://www.artnet.fr/artistes/max-bill/ohne-titel-r-wLlAK9twg-sASnzSdWoQ2 pour accéder à l'image utilisée.
https://fr.wikipedia.org/wiki/Max_Bill pour en savoir plus à propos de la vie et des œuvres de l'artiste.

L'expérimentation

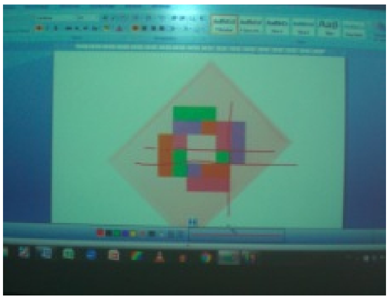
L'objectif présenté aux élèves était de bien observer l'image présentée au T.B.I. pour tenter de retrouver comment l'artiste avait pu dessiner les formes constituant son œuvre et en réaliser une reproduction sur papier. Mon objectif était d'une part de savoir si les élèves percevaient une « régularité » dans les formes dessinées et s'ils percevaient et réussissaient à retracer le quadrillage sans doute utilisé par l'artiste.

Dans un premier temps, les élèves ont écrit sur leur brouillon ce qu'ils voyaient et ce qu'ils imaginaient à propos de la façon dont les « formes » avaient été dessinées. Dans cette étape, il leur était demandé ne pas s'occuper des couleurs utilisées.

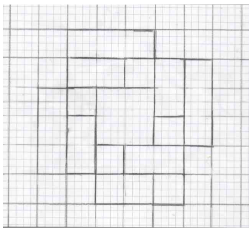
Les élèves ont perçu rapidement les quatre rectangles formés d'un carré, d'un grand rectangle et d'un petit rectangle, puis ils ont évoqué le carré central « entouré » par les quatre rectangles.

Pour faire émerger un quadrillage peut être utilisé par l'artiste, en accord avec l'enseignante de la classe, l'œuvre a été présentée orientée comme ci-contre.
Au centre d'une feuille de papier quadrillé 5mm $\times$ 5 mm, les élèves ont dessiné un carré de 2cm de côté.
Les œuvres de Mondrian font souvent apparaitre des lignes verticales et des lignes horizontales, les élèves ont aisément accepté le fait qu'un quadrillage dessiné sur la toile pouvait avoir été utilisé par l'artiste. L'enjeu pour les élèves était de reconstituer un quadrillage possible à partir du carré central dessiné.

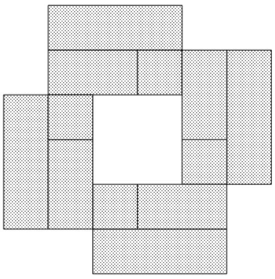
Retour au sommaire



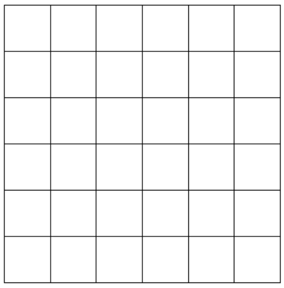
Malgré des alignements repérés sur l'image projetée, les élèves ont peiné à reconstituer un quadrillage. Ils ont été perturbés par le quadrillage préexistant sur le papier, n'ayant eux-mêmes pas encore l'habitude de dessiner des réseaux de parallèles régulièrement espacées.



Les élèves ont trouvé que le côté du carré central était le double du petit carré. Les dimensions des rectangles ont aussi été exprimées en fonction de celles des petits carrés : ce fut l'occasion de travailler sur les notions de moitié, double, tiers, triple). Le tracé a été réussi par quelques élèves qui ont pu ensuite être sollicités par leurs camarades.



Avec ces jeunes élèves, il aurait sans doute été préférable de faire rechercher des alignements dans un dessin de l'œuvre fait sur une feuille de papier et ensuite le reproduire sur un quadrillage fourni.



Ce qui n'a pas été expérimenté

Les élèves avaient perçu le placement des différentes pièces composant les quatre « grands rectangles ». Ils n'ont pas évoqué le fait que ces ensembles de pièces « tournaient » autour du carré central. Ce fait est important pour comprendre la logique de coloriage utilisée par l'artiste.

Rectangle 1	**Rectangle 2**	**Rectangle 3**	**Rectangle 4**
Carré orange	Carré vert	Carré violet	Carré rose
Rectangle violet	Rectangle rose	Rectangle orange	Rectangle vert
RECTANGLE vert	RECTANGLE violet	RECTANGLE rose	RECTANGLE orange

	vert	
orange		**violet**
	rose	

L'analyse des couleurs utilisées dans les quatre rectangles amène à concevoir la permutation de couleurs schématisée ci-contre.

Resterait à connaitre les raisons qui ont incité l'artiste à utiliser précisément ces quatre couleurs.

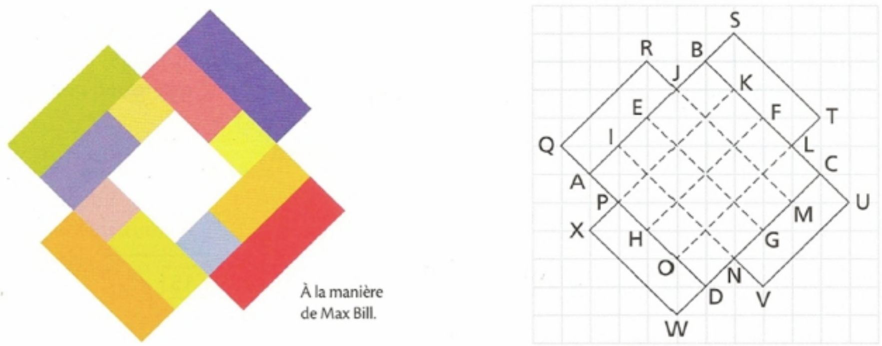
<u>Remarque</u> : Ce travail à propos de l'organisation régulière des dessins et des couleurs est peut-être plus conforme à ce qui pourrait être demandé à des élèves de cycle 4.

Retour au sommaire

ANNEXE 1 : Dans un manuel scolaire

Voici un extrait de « Opération Maths » CM1 Hatier, édition 2016, page 93

3 Pour reproduire cette œuvre à la manière de Max Bill, **construis** le carré ABCD sur un quadrillage.
Place les milieux E F, G, H des côtés. **Trace** les segments [EG] et [FH].
Les points I, J, K, L, M, N, O, P sont les milieux de certains segments. **Place** ces points.
Poursuis le tracé des segments en pointillés. **Construis** les 4 rectangles autour.
Efface les traits qui ont servi à la construction mais qui ne sont pas sur l'œuvre du peintre. **Colorie.**

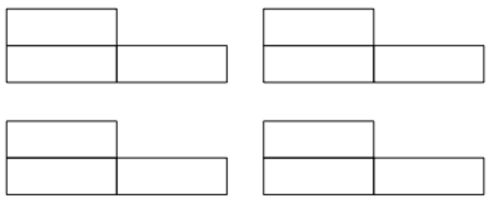


Il est indiqué « À la manière de Max Bill ». L'assemblage des formes est conservé, le coloriage ne présente pas d'organisation apparente. L'exercice proposé est un exercice de dessin et de repérage dans un carré ABCD dessiné en position non traditionnelle sur un quadrillage non précisé, les régularités dans les dessins de l'œuvre ne sont pas abordées. L'utilisateur devra compléter l'exercice par quelques informations à propos de l'artiste.

Cet extrait de manuel m'a donné envie d'en savoir un peu plus sur l'œuvre évoquée et d'essayer une reproduction en classe de CM1 à partir d'une image montrée sur le T.B.I.

Une autre œuvre de Max Bill

Rythmus um einem weißen quadrat, 1985



Ces quatre assemblages de trois rectangles entourent un carré central.

http://www.invaluable.com/auction-lot/max-bill,-rhythmus-um-ein-weisses-quadrat,-serigr-89-c-5d04b858ad pour accéder à l'image.

Comme pour l'œuvre précédente, une permutation circulaire organise le placement des couleurs.

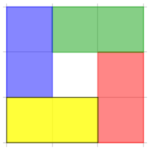
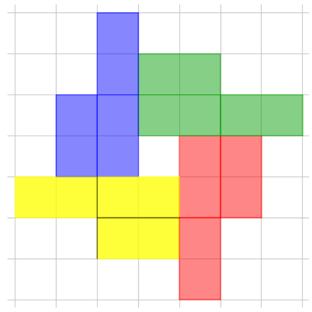
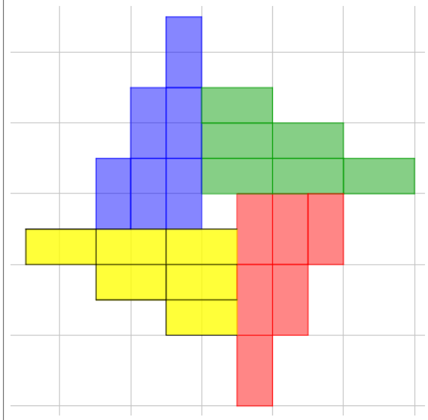
Rectangle « Haut »	Rectangle « Bas Gauche »	Rectangle « Bas Droite »
Orange	Vert	Bleu
Violet	Orange	Vert
Bleu	Violet	Orange
Vert	Bleu	Violet

Retour au sommaire

ANNEXE 2 : Proposition d'une activité en classe en cycle 4

Énoncé

On veut construire, « à la manière de Max Bill », un pavage. Pour cela, on dispose de « briques » rectangulaires, de dimension 1x2, et de quatre couleurs différentes. On pose les quatre premières briques autour d'un carré central (voir figure 1), puis on continue en respectant les schémas suivants. La figure 2 et la figure 3 montrent le procédé d'itération.

Étape 1	Étape 2	Étape 3
		

On constate qu'à l'étape 1 quatre briques on été utilisées, douze en tout à l'étape 2 et vingt-quatre en tout à l'étape 3.

Le problème est le suivant.

1. Combien de briques devra-t-on ajouter pour obtenir l'étape 4 ? Combien y aura-t-il de briques en tout à la fin ce cette étape 4 ?

2. Même question pour l'étape 5 puis pour l'étape 10.

3. On vient de terminer l'année 2016. Était-il possible de poursuivre ce processus en utilisant <u>exactement</u> 2016 briques ?

4. Si la réponse à la question précédente est non, quelle sera la prochaine année pour laquelle on pourra « terminer » la dernière étape, et combien de briques aura-t-on utilisé en tout ?

Quelques informations pour le professeur

Ce problème convient parfaitement pour une recherche interactive en petits groupes.

On peut se contenter de découper un grand nombre de « briques » de dimension 1x2 dans des feuilles de quatre couleurs différentes (le professeur pourra éventuellement, pour gagner du temps, les préparer à l'avance). Si le collège dispose d'une imprimante 3D (on peut rêver !), on pourra réaliser un matériau de meilleur qualité (et réutilisable).

On peut aussi utiliser un logiciel de géométrie dynamique, comme GeoGebra (il ne semble pas que Scratch soit le plus adapté pour ce genre d'activité). Ce pourra être l'occasion d'utiliser l'outil "rotation" (de centre le milieu de carré central, quand on a déjà une brique tracée et que l'on veut obtenir les trois autres), ou l'outil "symétrie axiale" (pour dupliquer un brique à partir de sa voisine), etc.

Réponses aux questions

Il faut 40 briques à l'étape 4, 60 à l'étape 5, … et 220 briques à l'étape 10. Les nombres de briques à ajouter pour passer d'une étape à la suivante sont respectivement 4, 8, 12, 16, 20 etc. Les « différences secondes » sont constantes (+4). Si cela est constaté par les élèves, cela pourra être l'occasion d'utiliser un tableur pour répondre aux dernières questions.

On ne peut pas faire une figure avec 2016 briques exactement. Avec 1984 briques, on le peut. Pour l'étape suivante, il en faudra 2112 !

Retour au sommaire

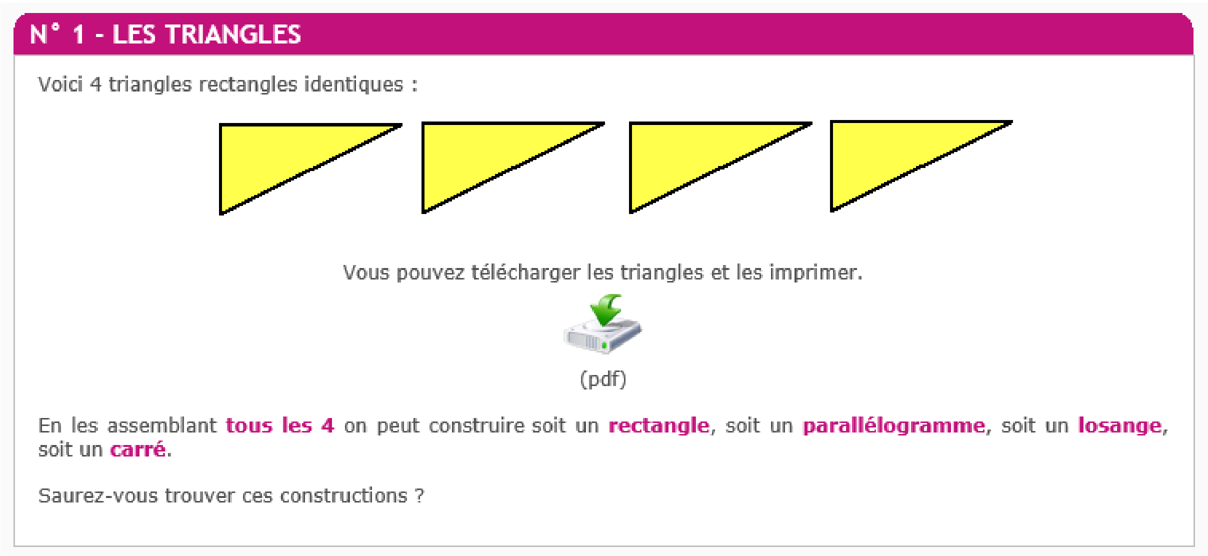
DANS NOS CLASSES

PUZZLES ET QUADRILATERES EN CYCLE 3

par Michel Ruiba

Origine

Il y a quelques années, je cherchais sur la toile des choses-style puzzle-pour préparer une liaison école-collège. Le document ci-dessous a attiré mon attention.



On peut le retrouver ici :
http://defis71.ac-dijon.fr/fete_internet_2013/cycle_3/defis_entrainement.php

Je décide d'enlever le parallélogramme, ses propriétés n'étant pas à ce moment au programme de sixième. En outre, je ne me voyais pas écrire non rectangle, non carré, non losange pour être rigoureux.
La construction du losange m'a interpelé. En codant les quatre triangles rectangles, on pouvait facilement retrouver sa définition, ses propriétés (diagonales et angles) et ses axes de symétrie.
Par contre, pas moyen de retrouver les propriétés du rectangle et du carré avec ces triangles rectangles ; j'ai alors envisagé 4 triangles rectangles isocèles identiques pour le carré et 8 triangles rectangles identiques pour le rectangle.

La classe

Une 6ème de 23 élèves, dans un collège REP+ (Les Hauts de Blémont à Metz), très hétérogène, avec une tête de classe de 6 élèves, la plupart des élèves sont volontaires et actifs.

La séquence

1ère séance

Les élèves ont trois jours* pour répondre aux questions sur la fiche « Un quadrilatère et ses propriétés »(*ci-dessous*), après avoir regardé l'animation GeoGebra déposée sur l'ENT du collège. Vous pouvez la retrouver ici.

Retour au sommaire

** les élèves ne possédant pas d'ordinateur ont eu le temps d'en utiliser un au collège.*

Un quadrilatère et ses propriétés

Si tu n’as pas déjà téléchargé le logiciel GeoGebra, fais-le en utilisant le lien ci-contre : http://www.geogebra.org/download.
Ouvre le fichier "quadrilatère (1)" que tu trouves en fichier joint sur l’ENT.
Clique sur l’étiquette "Réinitialiser", puis sur "Lancer l’animation" et plusieurs fois sur "Suivant".

Réponds aux questions suivantes :

1. Quelle est la nature du polygone rose de départ ?

2. Quelle est la nature du polygone bleu obtenu après l’animation complète ?

3. Que peux-tu dire des côtés du polygone bleu ? Pourquoi ?

4. Que peux-tu dire des diagonales du polygone bleu ? Pourquoi ?

5. Que peux-tu dire des angles du polygone bleu ? Pourquoi ?

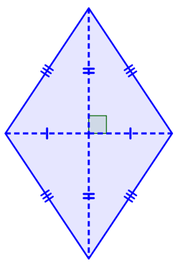
Projection au tableau de la fiche et correction orale.

Les questions 1 et 2 sont vite traitées, le triangle rectangle et le losange étant des figures usuelles vues au primaire.

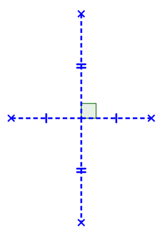
Pour la question 3, tous les élèves ont tenu compte du codage et répondent que les côtés du losange ont la même longueur ; pour la justification, certains invoquent « les petits signes » identiques et d'autres font remarquer que c'est la définition du losange. Contents d'avoir validé la réponse, personne ne cherche autre chose. Je propose de regarder si les côtés du losange n'ont pas une autre propriété.
Quelques doigts se lèvent. « Ils sont parallèles ». Je réussis à faire dire que « les côtés opposés sont parallèles » (*le parallélogramme n'ayant pas été abordé, nous n'en parlons pas*) .

Le codage a encore bien aidé les élèves pour la question 4 ; presque tous avaient écrit « les diagonales se coupent en leur milieu ». La justification se résume à l'égalité des « petits signes ».

En projetant le losange au tableau,



puis en faisant disparaitre les côtés,



des élèves remarquent qu'il y a un segment et sa médiatrice ;rapidement nous établissons qu'une diagonale est la médiatrice de l'autre.

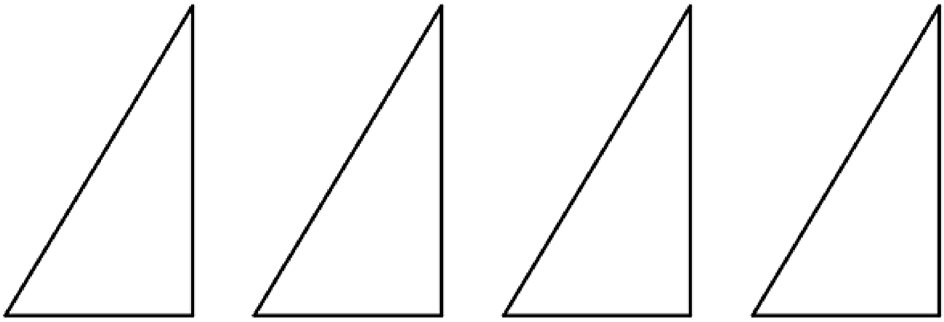
Retour au sommaire

Après qu'un élève a rappelé la définition de la médiatrice d'un segment, tous sont convaincus que ce qui vient d'être dit justifie que les diagonales du losange se coupent en leur milieu.

Un autre élève fait remarquer encore que chaque diagonale est un axe de symétrie du losange ; ce qui a grandement aidé à la réponse et à la justification de la dernière question. Je propose à chaque élève de retrouver cette même activité sur une feuille.

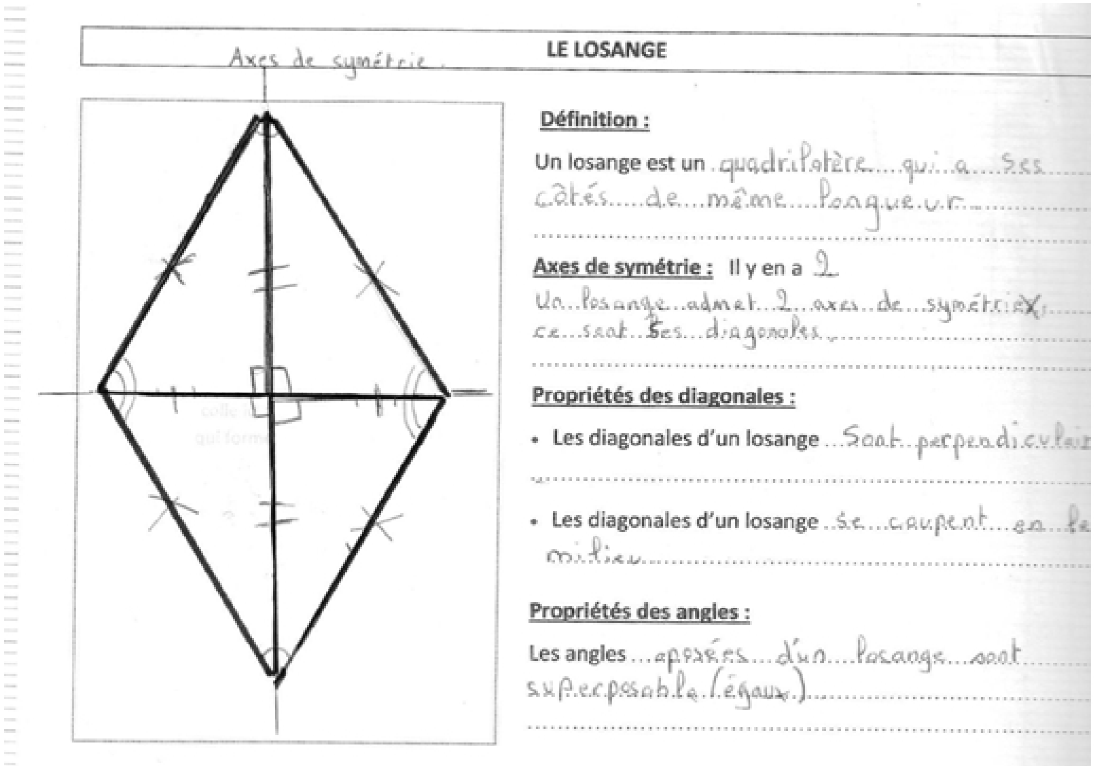
La trace écrite est faite en classe entière.

LOSANGE



Tu disposes de 4 triangles rectangles superposables verts *(photocopié sur papier vert)*.
Découpe soigneusement chaque triangle et assemble-les **tous les 4** pour obtenir un **losange**. Code la figure que tu as obtenue en tenant compte de chacun des triangles de départ, comme sur l'animation GeoGebra.
Lorsque tu as trouvé, colle ta construction à l'endroit prévu sur la fiche et complète-la en t'aidant des 4 triangles collés et du codage.

Retour au sommaire


Axes de symétrie

LE LOSANGE

Définition :

Un losange est un quadrilatère qui a ses côtés de même longueur

Axes de symétrie : Il y en a 2

Un losange admet 2 axes de symétrie, ce sont ses diagonales.

Propriétés des diagonales :

- Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires
- Les diagonales d'un losange se coupent en le milieu

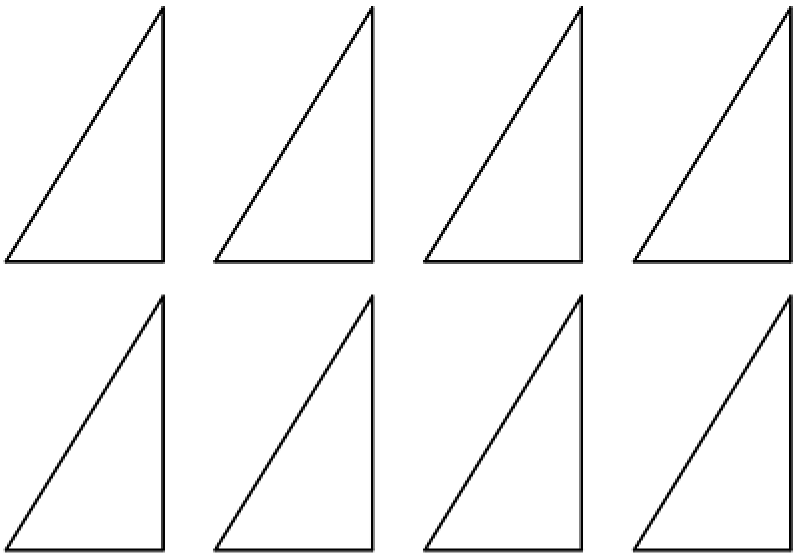
Propriétés des angles :

Les angles opposés d'un losange sont superposable (égaux).

2ème séance

Nous reprenons le même type d'activité. Les élèves travaillent en groupes de 2.

RECTANGLE



Tu disposes de 8 triangles rectangles superposables jaunes *(photocopié sur papier jaune)*. Découpe soigneusement chaque triangle et assemble-les **tous les 8** pour obtenir un **rectangle** avec ses diagonales visibles. Code la figure que tu as obtenue en tenant compte de chacun des triangles de départ, comme pour le losange.
Lorsque tu as trouvé, colle ta construction à l'endroit prévu sur la fiche et complète-la en t'aidant des 8 triangles collés et du codage.

aire

Beaucoup d'élèves réussissent à construire un rectangle mais les diagonales ne sont pas visibles ; on ne pourra pas énoncer de propriétés si on ne les voit pas.
5 groupes ont trouvé, d'autres suivent et ceux qui ont trouvé vont aider les autres.
Les groupes ont complété la fiche au crayon et la trace écrite est faite en classe entière.

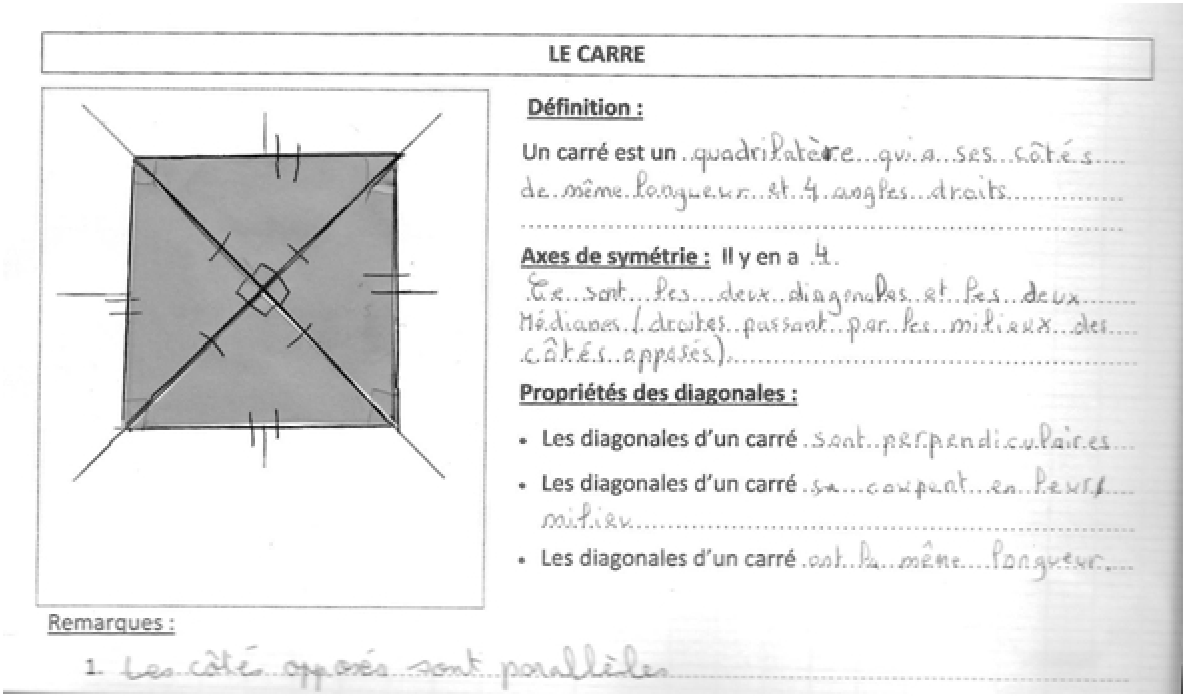
Pour le carré, je ne propose pas de triangles au départ mais demande aux élèves de les trouver, de manière à énoncer des propriétés des côtés, des diagonales et des angles.

Les élèves travaillent en groupes de 2.

CARRE

À ton tour, trace 4 triangles rectangles superposables (sur la feuille orange donnée par ton professeur) qui te permettront de construire un **carré**.
Pour t'aider dans ta réflexion, tu peux faire une (des) figure(s) à main levée sur un brouillon.
Quelle est la nature exacte de chaque triangle ? . . . .
Quand tu penses avoir trouvé, appelle ton professeur. Après validation, découpe soigneusement chaque triangle et assemble les **tous les 4** pour obtenir un **carré**. Colle ta construction à l'endroit prévu sur la fiche puis code la figure que tu as obtenue en tenant compte de chacun des triangles de départ, comme pour le losange et le rectangle et enfin, complète-la en t'aidant des 4 triangles collés et du codage.

Après un début infructueux, j'ai conseillé aux élèves de prendre le travail à contresens c'est-à-dire en traçant un carré et ses diagonales puis d'en extraire les 4 triangles rectangles. Presque tous ont vu qu'il fallait 4 triangles rectangles isocèles, les autres ont suivi.


LE CARRE

Définition :

Un carré est un quadrilatère qui a ses côtés de même longueur et 4 angles droits

Axes de symétrie : Il y en a 4.
Ce sont les deux diagonales et les deux médianes (droites passant par les milieux des côtés opposés).

Propriétés des diagonales :

- Les diagonales d'un carré sont perpendiculaires
- Les diagonales d'un carré se coupent en leurs milieu
- Les diagonales d'un carré ont la même longueur

Remarques :
1. Les côté opposés sont parallèles

Les élèves ont tous manipulé, essayé. Je pense que ceci leur permet de retenir la leçon plus facilement. Je complète en :

– demandant régulièrement des définitions ou propriétés de quadrilatères ou leur nature sous forme de devinette du genre : Je suis un quadrilatère qui a ses diagonales perpendiculaires. Qui suis-je ?

– faisant construire des quadrilatères avec programme de construction.

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

LES "JEUX DU SHÉRIF" EN SIXIÈME

par Valérian Sauton
Collège Raymond Poincaré à Bar-le-Duc

1 Présentation

Titularisé en septembre 2015, j'enseignais l'année passée au collège Louis Pergaud de Fresnes-en-Woëvre, à une vingtaine de kilomètres de Verdun. C'est un collège rural d'un peu plus de 300 élèves dans un village qui compte environ 750 habitants.

J'ai choisi de présenter mes "jeux du shérif".

Il s'agit d'une activité que j'ai mise en place afin de travailler tout d'abord les tables de multiplication avec mes élèves de sixième et ensuite l'étendre aux autres automatismes : calcul de pourcentages, égalité de fractions, etc.

Les 6C : 20 élèves d'un niveau homogène moyen, sans élève en grande difficulté et sans groupe de tête reconnaissable. Aucun problème de comportement, une classe assez enfantine avec des élèves assez "scolaires". Classe dans laquelle une AESH intervient dans ma matière afin d'aider un élève en situation de handicap.

Les 6B : 22 élèves avec un niveau très hétérogène avec un groupe de tête très percutant, notamment un élève passionné déjà très à l'aise dans la discipline, et des élèves déjà en très grande difficulté à l'entrée en sixième. Une classe avec des élèves turbulents, difficiles à canaliser et des bagarres très fréquentes.

2 Origines

Ma première idée était de créer un petit fichier tableur afin d'aider mes élèves à réviser leurs tables.

Lorsque je leur ai montré en classe entière, j'ai senti un réel enthousiasme de leur part en voyant les chiffres défiler, s'arrêter sur une opération à effectuer et un résultat à donner. Ils m'ont demandé de recommencer et, naturellement, ils se sont mesurés les uns aux autres afin d'essayer d'être le plus rapide à donner le résultat.

Le défilé des chiffres, la tension et l'impatience des élèves, m'ont rappelé les duels de cowboys des westerns. La manière directe de répondre des élèves, un coup de feu.

J'ai donc décidé d'organiser la semaine suivante un tournoi entre mes élèves afin de nommer le shérif de la classe pour une semaine. Le jeu du shérif était né.

3 Objectifs pédagogiques

Travailler les automatismes du programme de manière ludique.

Instaurer une petite et saine compétition entre les élèves afin de les pousser à s'entrainer et battre leur camarade.

Canaliser les élèves grâce au jeu du shérif et les en priver s'ils ne suivent pas les règles de la classe, s'ils ne travaillent pas suffisamment au cours de la semaine.

Créer en fin de semaine un petit moment convivial avec mes élèves afin de partir en weekend sur un bon souvenir pour eux et moi.

Donner une chance aux élèves ayant des difficultés de compréhension d'avoir une bonne estime d'eux-mêmes en étant un adversaire redoutable et redouté au jeu du shérif !

Retour au sommaire

4 Description de l’activité

4.1 Les tables de multiplication

Tous les vendredis, à 10 minutes de la fin du cours, je génère aléatoirement à l’aide d’un tableur les duels entre les élèves de ma classe. Un(e) élève est chargé(e) de recopier les noms des duellistes sur un tableau Velleda.

Pendant ce temps j’ouvre mon fichier tableur et je lance sur l’ordinateur une musique de Western. Les élèves rangent leurs affaires et se préparent aux duels.

Chacun à leur tour, deux par deux, ils viennent se placer face au tableau.

Un élève est chargé de faire défiler les nombres (en appuyant sur Ctrl+Maj+F9 sur LibreOffice) et de stopper quand il le souhaite.

Les duellistes réfléchissent et le plus rapide à donner le résultat, en mimant le geste d’un pistolet qu’on dégaine, remporte le duel. Je suis dans la classe jouant le rôle d’arbitre du duel, vérifiant la réponse donnée et le premier à l’avoir prononcée (ce rôle peut être donné à un élève).

Si un élève se trompe, son adversaire a "tout le temps" qu’il souhaite pour donner une réponse. C’est "un tir" chacun son tour.

4.2 Et on accumule…

Après avoir épuisé les tables de multiplication, j’ai ajouté à mon fichier tableur la possibilité de calculer un pourcentage, par exemple : "calculer 18 % de 2024".
De manière aléatoire le fichier génère donc soit une table de multiplication soit un calcul de pourcentage.

17	%	de	6 587

ou

6	X	8	=

Dorénavant les élèves ont donc le droit d’utiliser leur calculatrice ou leur portable face au tableau. Cette possibilité a donné davantage de chance aux moins bons de battre les meilleurs à condition de taper plus vite qu’eux et lire le nombre plus rapidement. De plus, cela a motivé les élèves à gagner en vitesse sur les tables afin d’aller plus vite que ceux qui ne les connaissent pas et calculent les résultats à la machine.

Les habitués de l’arbre final se trouvent davantage menacés et le tournoi n’en est que plus exaltant !

5 Matériels et documents utilisés

Un fichier tableur réalisé par mes soins et disponible sur mon site pour que les élèves puissent s’exercer chez eux.
Un ordinateur et de quoi projeter l’écran sur un tableau.

Retour au sommaire

6 Évaluation

Le gagnant d'un tournoi du shérif se voit attribuer un 20/20 à coefficient quatre fois moindre qu'un DS et une petite récompense (paquet de bonbons, petite peluche...).

7 Notes personnelles

Ce tournoi de fin de semaine est à chaque fois un moment de convivialité très apprécié par les élèves et moi-même. Je n'envisage pas une seule seconde de m'en passer !

Si le premier tournoi a pris 20 minutes, une fois les élèves habitués cela défile et nous prend 10 minutes maximum !

Presque tous les élèves ont joué le jeu et se sont entrainés afin d'essayer de gagner et obtenir la récompense. Après quelques tournois, quelques-uns se sont un peu découragés puisque certains sont devenus de vraies machines de guerre.

Durant les tournois, les élèves observateurs encouragent les duellistes, notamment ceux qui ont des difficultés dans la matière mais s'en sortent très bien sur les tables ou les automatismes.

Le renouveau et l'ajout de nouveaux tests utilisant la calculatrice a redonné de l'enthousiasme à ceux qui avaient baissé les bras.

La manière dont j'organise le tournoi varie énormément selon la classe.

Avec les 6C, plus calmes, l'ambiance est décontractée pendant le tournoi. Certains sont assis sur les tables en attendant leur tour, d'autres sont debout pas très loin des duellistes pour les encourager.

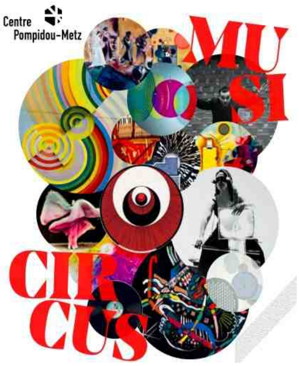
L'agitation des 6B ne me permet pas ce genre de relaxe. Dès que je leur autorise un peu plus de liberté ils dérapent et en font toujours trop. C'est pourquoi les tournois sont beaucoup plus structurés et proches d'un cours "standard", ce qui restreint les apports de mon activité.

Cette situation est assez frustrante. Nous profitons beaucoup moins de ces moments puisque je reste encore beaucoup dans mon costume de professeur mandataire de l'autorité au lieu d'être l'arbitre du tournoi.

Avec mon collègue Pierre Lacroix nous avons organisé un championnat entre nos deux classes basé sur cette activité. Chaque semaine, chacun de nous envoie une équipe de 3 joueurs chez l'autre. Les joueurs s'affrontent ensuite individuellement et l'équipe gagnante ramène un point à sa classe. Une fois tous les élèves passés, la classe ayant le plus de points remporte le championnat. A elle la gloire et la récompense.

Malheureusement, bien que motivée à gagner, la majorité des élèves ne s'est pas investie davantage afin de faire gagner sa classe. La récompense promise au vainqueur (deux paquets de bonbons) n'a pas dû les intéresser suffisamment, nous chercherons quelque chose de plus motivant pour le prochain championnat.

ANNONCE



MUSICIRCUS

Du 20 avril 2016 au 17 Juillet 2017, le Centre Pompidou de Metz présente des œuvres faisant le lien avec la musique.
L'amateur de mathématiques y repèrera Kandinsky et Delaunay ; le lecteur du Petit Vert y retrouvera les « rotoreliefs » de Marcel Duchamp (Petit Vert n°120) et Sol LeWitt (Petit Vert n°112).
http://www.centrepompidou-metz.fr/musicircus-uvres-phares-du-centre-pompidou
http://www.centrepompidou-metz.fr/sites/default/files/issuu/dp_musicircus_mel.pdf

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

DIFFÉRENTS TYPES DE CROISSANCE

N.d.l.r. L'activité décrite ici est une réécriture d'une activité parue dans la brochure « Déchiffrer par les maths »[3]. Elle a toute sa place au niveau de la classe de première de série générale ou de série technologique STI2D ainsi qu'au niveau de terminale STMG ou ST2S.

Objectifs visés

- Comparer différents types d'évolution , en particulier la croissance linéaire et la croissance exponentielle, à partir d'une représentation graphique et/ou d'un tableau de données ou d'un algorithme.
- Analyser et critiquer des documents commentant la croissance de certains phénomènes.

Cette activité sur les « types de croissance » se place avant de traiter le chapitre sur les suites numériques. La raison en est la suivante : nous ne voulions pas aborder simultanément deux nouvelles notions, la croissance exponentielle d'une part, et la notation mathématique des suites numériques. De plus, l'erreur que l'on retrouve couramment dans les médias, qui consiste à considérer comme exponentielle toute croissance très rapide, montre la nécessité d'analyser des croissances indépendamment d'utilisation de notions mathématiques mal maitrisées

Un avantage de cette démarche est aussi de proposer le chapitre « Suites numériques » comme un chapitre de modélisation mathématique. Une fois les concepts concernant la croissance linéaire et la croissance exponentielle acquis dans le langage vernaculaire, on pourra les formaliser ultérieurement en utilisant le langage des suites : bien sûr, on montrera alors l'intérêt de cette formalisation, en particulier dans tous les problèmes où la valeur initiale est inconnue.

L'activité 1 (*voir annexe 1*) commence par une étude de données concernant les croissances de la population cinq villes.

Il est demandé aux élèves de caractériser le plus précisément possible, par écrit et en langage courant, les cinq types de croissance proposés. Pour que l'activité puisse se poursuivre correctement, il est recommandé de prendre une dizaine ou une quinzaine de minutes en fin d'heure pour faire ce travail : ainsi, le professeur aura le temps de recenser les réponses des élèves et, de retour chez lui, de les analyser, de les classer, et éventuellement de préparer un diaporama pour présenter quelques-unes de ces réponses à la classe. Leur analyse sera reprise en fin du T.P. sur ordinateur.

Pour votre information, les croissances proposées ont été calculées de la façon suivante :
A) Croissance linéaire (suite arithmétique de raison 30 000).
B) Croissance exponentielle de 8 % par an (suite géométrique de raison 1,08).
C) Écart exponentiel décroissant entre la population et une « limite asymptotique » : $P = 600\,000 - 300\,000*0{,}8^x$, x étant le nombre d'années écoulées depuis 2008.
D) Différences secondes constantes : croissance parabolique $P = 3750x^2 + 3750x + 300000$, x étant le nombre d'années écoulées depuis 2008).
E) Croissance sans régularité apparente.
Voici, en exemples, quelques unes des réponses qui avaient été données par des élèves à la première question.

3 Cette brochure, publiée en 2002, est en vente à l'IREM de Lorraine et sur le site de l'APMEP. Les auteurs étaient Brigitte Cousinou, Virginie Maitrot, Janine Marchal, Marie-Hélène Munier, Michel Prunier et Jacques Verdier.

Retour au sommaire

Ville A :
Les mots qui reviennent le plus souvent sont « *croissance régulière* », « *constante* », « *ligne droite* », « *croissance linéaire* ». On trouve cependant « *croissance progressive* », « *croissance proportionnelle* », et « *une courbe qui évolue dans le sens de l'augmentation* ».

Ville B :
La majorité des élèves constatent que la courbe « *n'est pas une droite* », « *pas linéaire* ». Cependant, un nombre non négligeable qualifie cette croissance de « *linéaire* ». Certains qualifient l'augmentation de « *rapide* ». En ce qui concerne la régularité, une majorité opte pour « *régulière* », et une minorité pour « *irrégulière* », avec des nuances comme « *courbe semi-régulière* », « *courbe irrégulière mais régulière en chiffres* ».

Ville C :
La majorité des élèves constatent que la croissance « *se ralentit* », que « *ça augmente de moins en moins fort* », « *de moins en moins vite* », etc. En ce qui concerne la forme de la courbe, elle est « *courbée vers le haut* », « *fortement bombée* »… Plusieurs la qualifient de « *parabole* », une élève précisant même « *la forme de la courbe nous permet de deviner que la population va diminuer à partir de 2016* ». Très peu d'élèves utilisent encore l'adjectif « *régulière* », mais il en reste qui la qualifient toujours de « *linéaire* ».

Ville D :
Comme pour l'exemple précédent, mais en « *accélérant* », croissant « *de plus en plus vite* », etc. pour une grande majorité. Avec même une extrapolation : « *rien ne laisse présager une descente* » (ce n'est pas la même élève que celle qui l'avait pressentie pour la courbe C). La croissance n'est plus « *régulière* » que pour très peu d'élèves, elle reste « *linéaire* » pour une seule, mais apparait le mot « *exponentielle* » (rarement).

Ville E :
Une quasi-unanimité pour qualifier la croissance (ou la courbe) « *d'irrégulière* », plus rarement de « *variable* ». La forme de la courbe est qualifiée de « *cassée* » (assez souvent), « *tordue* », « *saccadée* », « *en dents de scie* », « *ligne brisée* ». Quelques élèves précisent qu'elle reste cependant toujours croissante, certains fort maladroitement : « *l'augmentation reste constante malgré tout* ».

Second temps de l'activité : Les élèves travaillent sur l'onglet 'Feuille de calculs'[4] du fichier 'TP Types de croissance'. Le premier onglet doit être « protégé », ainsi que les colonnes en vert du second fichier.

Il est demandé aux élèves de calculer, pour chacune des cinq villes, l'écart et le taux d'évolution d'une année à l'autre. A la fin de cette activité et de ce T.P., on donnera en « cours » la définition de la croissance linéaire et de la croissance exponentielle ; on fera le lien avec des graphiques (ceux qui étaient proposés dans l'activité et ceux qu'on trouve dans la plupart des manuels) qui permettent de retenir une « image mentale » équivalente à la définition.

Définitions que l'on peut donner :

Une croissance est dite exponentielle lorsque les taux d'évolution successifs sont constants, ou encore lorsque les coefficients multiplicatifs successifs sont constants.

Une croissance est dite linéaire lorsque les écarts successifs sont constants.

On précisera qu'il n'y a aucune raison de se restreindre aux cas où le coefficient multiplicateur est supérieur à 1 : dans le cas où il est inférieur à 1, il s'agit alors d'une « décroissance », mais qui rentre dans le modèle de « croissance exponentielle » (le taux d'évolution est négatif).

On précisera également (éventuellement au cours des activités et exercices suivants) que ces taux sont calculés sur des périodes identiques (tous les ans, tous les mois, etc.) ; cependant, si on l'inclut dans la définition, celle-ci devient trop lourde.

Mais comment reconnaitre une croissance linéaire ? une croissance exponentielle ? On verra dans les exercices d'application ci-après (*voir annexe 3*) que si l'on peut se fier au graphique pour ce qui est de la croissance linéaire, c'est impossible dans le cas d'une exponentielle : on devra donc recourir au calcul du taux d'évolution (annuel, le plus souvent).

N.B. Dans les exemples concrets, si les taux d'évolution sont "quasiment constants", cela légitime que l'on choisisse la croissance exponentielle comme modèle.

L'activité 2 (*voir annexe 2*) fait travailler les élèves sur l'utilisation abusive du vocable « croissance exponentielle » dans les médias.

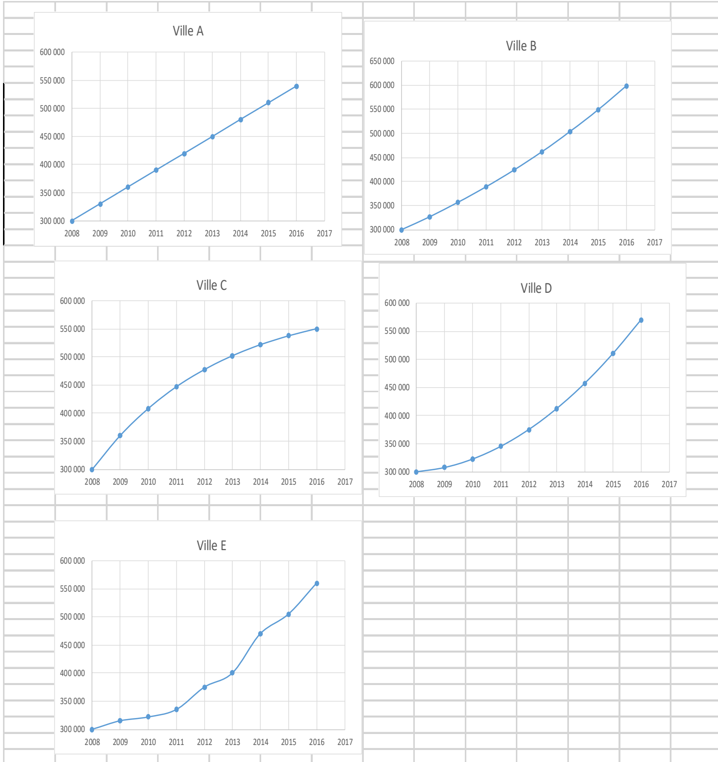
4– La feuille de calcul est disponible ici.

Retour au sommaire

ANNEXE 1 (FICHE ÉLÈVE)

Premier temps : travail individuel de quelques minutes (écrivez vos propositions sur papier).

Année	Ville A	Ville B	Ville C	Ville D	Ville E
2008	300 000	300 000	300 000	300 000	300 000
2009	330 000	327 000	360 000	307 500	315 000
2010	360 000	356 430	408 000	322 500	322 000
2011	390 000	388 509	446 400	345 000	335 000
2012	420 000	423 474	477 120	375 000	375 000
2013	450 000	461 587	501 696	412 500	400 000
2014	480 000	503 130	521 357	457 500	470 000
2015	510 000	548 412	537 085	510 000	505 000
2016	540 000	597 769	549 668	570 000	560 000



La feuille distribuée propose cinq types de croissances (exemples fictifs de populations de cinq villes de 2008 à 2016).
Caractériser le plus précisément possible, en langage courant, ces cinq types de croissance.

Deuxième temps : travail par groupes de deux sur ordinateur.

Ouvrir le fichier « TP Types de croissance », et l'enregistrer dans votre espace personnel.

- Pour chacune des cinq villes, calculer l'écart d'une année à l'autre.
- Pour chacune des cinq villes, calculer le taux d'évolution d'une année à l'autre.
- Caractériser le plus précisément possible, en langage mathématique, ces types de croissances ; notez vos réponses sur une feuille.

Troisième temps : synthèse en classe.

Comparaison de ce qui a été fait dans le premier temps avec ce qui a été fait dans le deuxième temps.
Explications, compléments éventuels, débat.
Recherche de formulations le plus exactes possibles (au point de vue mathématique).

ANNEXE 2 (FICHE ÉLÈVE)

Vous disposez de trois documents, issus de sites Web.

Les deux premiers parlent de croissance exponentielle : vous devez relever, dans ces deux textes, les arguments qui confirment ou qui infirment le fait qu'il s'agit bien de croissances exponentielles.

Retour au sommaire

Dans le troisième, il y a beaucoup de pourcentages : la valeur de 10 000 % vous parait-elle plausible, ou n'est-elle destinée qu'à frapper le lecteur ? Les valeurs énoncées dans cet article vous incitent-ils à penser qu'il s'agit bien là d'une croissance exponentielle ?
Qu'en est-il en 2017 ?

Une croissance exponentielle pour OpenStudio

OpenStudio, éditeur de logiciel e-commerce, basé au Puy-en-Velay, a le vent en poupe. Voici quelques jours, nous annoncions que la petite entreprise locale connaissait un taux de croissance exponentielle de 2816% sur 5 ans, se hissant à la dixième position des entreprises françaises technologiques de croissance (…).

Pourquoi une telle croissance d'autant plus que la même société affichait déjà l'an dernier une progression mirifique. Elle était déjà lauréate en 2013 du FAST50 Deloitte avec 1635% de taux de croissance et s'était classée à la 21^{e} place au niveau national sans oublier qu'elle avait été déjà récompensée en 2012 avec les trophées de la CCI.

C'est en 2006 que l'aventure débuta. A l'époque, elle n'était pas promise à des lendemains enchanteurs, loin de là : "*J'ai débuté en 2006 en partant de zéro, dans ma maison à Saint-Pal de Senouire en créant des sites internet et des logiciels libres, ça a mis du temps à démarrer, j'ai vendu ma première prestation au bout de 8 mois, j'avais des revenus inférieurs au SMIC à l'époque*", explique Arnault Pachot, directeur de la start-up.

Source : http://www.leveil.fr/haute-loire/Une-croissance-exponentielle-pour-OpenStudio-societe-ponote-de-logiciel-e-commerce-105585

EMISYS surfe sur la crise et enregistre une croissance exponentielle

Alors qu'EMISYS vient à peine de fêter ses 5 ans, l'entreprise de conseil et d'ingénierie, spécialisée en management de projets, enregistre un taux de croissance record... (+30 % de croissance en moyenne et +135 % en 2012) et un fort développement de la masse salariale (115 salariés en 2015).

Source : http://www.industrie-mag.com/article7356.html

L'avenir du Web

60 millions de personnes dans le monde avaient accès à Internet en juillet 1996, 90 millions en juillet 1997, 151 millions en janvier 1999. Le nombre d'internautes continue de croitre de plus de 10 % par mois et le trafic de 15 %... par mois !

En France, 22 % des foyers ont un équipement micro et 6 % ont un accès Internet. 25 000 sites web dans le monde en janvier 1996, 650 000 en janvier 1997, 1,2 millions en juillet 1997, et 2,8 millions en juillet 1998, soit une croissance de **plus de 10 000 % !**

Le chiffre d'affaires mondial généré par le secteur Internet, de 331 milliards de dollars, se situe à un niveau proche de celui de l'industrie automobile.

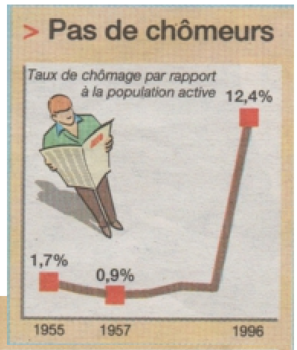
Le montant des transactions pour le commerce électronique est estimé à 140 milliards de francs en 1998; **et ce chiffre double chaque année**. En 1999, seulement 1,3 % des Français ont acheté via Internet alors que 9,6 % des Américains, 4,8 % des Suédois et 2,7 % des Britanniques réalisent des achats sur le réseau mondial ; mais on note, depuis le début de l'année 2000, une explosion du marché en France, qui place aujourd'hui notre pays dans les premiers rangs des grands acteurs de la "nouvelle économie".

Généralisation de l'accès à l'Internet dans les PME-PMI européennes... Se connecter à Internet entre de plus en plus dans les mœurs des PME ; aujourd'hui, près de 80 % des entreprises disposant d'ordinateurs sont connectées au réseau mondial.

Retour au sommaire

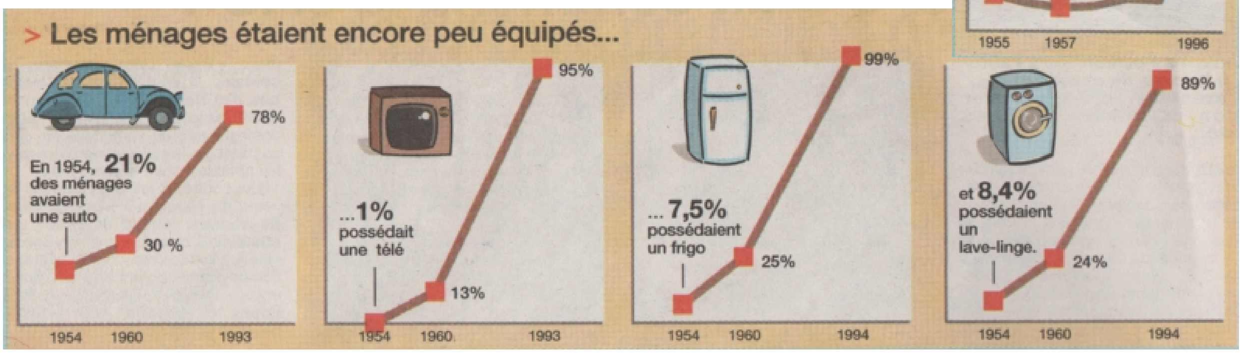
ANNEXE 3 (EXEMPLES D'EXERCICES D'APPLICATION)

Exercice 1



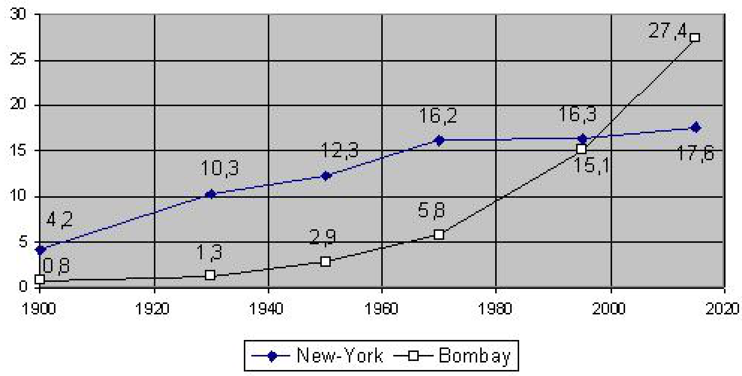
Parmi les graphiques ci-contre[5], lesquels vous semblent correspondre à une croissance linéaire ? quasi-linéaire ? exponentielle ? quasi-exponentielle ?

Justifiez « mathématiquement » vos réponses.



Exercice 2

Le graphique ci-dessous représente l'évolution de la population de New-York et de celle de Bombay. Les données sont en millions. Les données correspondent aux années 1900, 1930, 1950, 1970, 1995 et 2015. Pour 2015, il s'agit d'une estimation.



Il semble à première vue que la ville de Bombay ait une croissance exponentielle.
Calculer le taux annuel moyen de progression de sa population entre 1930 et 1950.
Calculer le taux annuel moyen de progression de sa population entre 1995 et 2015.
Conclure.

Note pour l'enseignant :
Le graphique correspondant à l'évolution de la population de Bombay amène les élèves à dire qu'il s'agit d'une croissance exponentielle. On saisit donc cette occasion pour faire calculer le taux « moyen » de croissance annuelle correspondant à deux périodes distinctes et montrer aux élèves que, dans cet exemple, le taux de croissance est plus fort dans la partie de la courbe où la pente est la moins forte : on fera expliquer les causes de cette illusion visuelle.

5 Extraits de « Les années 50 : la vie quotidienne de 1950 à 1959 », éditions Ouest-France, juillet 1996.

Retour au sommaire

Exercice 3 :

On a calculé le prix de divers objets placés dans un « Dépôt-Vente » ; ces objets perdent chaque mois 10% de leur valeur. Voici une copie de l’écran obtenu.

Objets			Table	Train	Console
		Prix initial :	**800,00 €**	**150,00 €**	**230,00 €**
au bout de	1	mois	720,00 €	135,00 €	207,00 €
au bout de	2	mois	648,00 €	121,50 €	186,30 €
au bout de	3	mois	583,20 €	109,35 €	167,67 €
au bout de	4	mois	524,88 €	98,42 €	150,90 €
au bout de	5	mois	472,39 €	88,57 €	135,81 €
au bout de	6	mois	425,15 €	79,72 €	122,23 €
au bout de	7	mois	382,64 €	71,74 €	110,01 €
au bout de	8	mois	344,37 €	64,57 €	99,01 €
au bout de	9	mois	309,94 €	58,11 €	89,11 €

1. Comment peut-on caractériser l’évolution de ces prix ?
2. Comment expliquer qu’il faut 7 mois (et non pas 5) pour arriver à la moitié du prix initial ?
3. Parmi les 3 algorithmes suivants quel est celui qui donne le premier mois pour arriver au quart du prix initial ?

Algorithme 1

Entrées	M nombre entier naturel
	P Nombre réel
Traitement	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*
	M prend la valeur 0
	Tant que $p > 0{,}25 \times p$
	p prend la valeur $0{,}9 \times p$
	M prend la valeur M + 1
	Fin de Tant que
	Afficher M

Algorithme 2

Entrées	M nombre entier naturel
	P Nombre réel
Traitement	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*
	M prend la valeur 0
	Tant que $p \leq 0{,}25p$
	p prend la valeur $0{,}9 \times p$
	M prend la valeur M + 1
	Fin de Tant que
	Afficher M

Retour au sommaire

Algorithme 3

Entrées	M nombre entier naturel
	p Nombre réel
Traitement	Demander à l'utilisateur la valeur de *p*
	M prend la valeur 0
	Tant que $p > 0{,}25 \times p$
	p prend la valeur 0,9 x *p*
	Fin de Tant que
	Afficher M

4. Combien faudra-t-il de mois pour arriver au quart du prix initial ?
5. Combien faudra-t-il de temps pour que les objets coutent moins de 10 € ?

L'ESSAI DE MALTHUS (1798)

Une lecture de cet ouvrage pourrait également fournir matière à des exercices.
Il est disponible en intégralité (et libre de droits) sur
http://classiques.uqac.ca/classiques/maltus_thomas_robert/essais_population/principe_de_population.pdf
En voici quelques extraits, le premier concernant l'accroissement des populations :

Dans les États du nord de l'Amérique, où les moyens de subsistance ne manquent pas (...), pendant plus d'un siècle et demi la population a doublé en moins de vingt-cinq ans. Dans les territoires de l'intérieur, où l'agriculture était l'unique occupation des colons (...), la population a doublé tous les quinze ans.
Selon la table d'Euler, si l'on se base sur une mortalité de 1 sur 36 et si naissances et morts sont dans le rapport de 3 à 1, le chiffre de la population doublera en 12 années et 4/5. Ce n'est point là une simple supposition : c'est une réalité qui s'est produite plusieurs fois, et à de courts intervalles. Cependant, pour ne pas être taxé d'exagération, nous nous baserons sur l'accroissement le moins rapide, qui est garanti par la concordance de tous les témoignages.
Nous pouvons être certains que lorsque la population n'est arrêtée par aucun obstacle, elle double tous les vingt-cinq ans, et croît ainsi de période en période selon une progression géométrique.

Cet autre extrait concerne l'accroissement des ressources nécessaires à la subsistance des habitants :

Il est moins facile de mesurer l'accroissement des produits de la terre. Cependant, nous sommes surs que leur accroissement se fait à un rythme tout à fait différent de celui qui gouverne l'accroissement de la population (…). Lorsque tous les arpents ont été ajoutés les uns aux autres jusqu'à ce que toute la terre fertile soit utilisée, l'accroissement de nourriture ne dépendra plus que de l'amélioration des terres déjà mises en valeur. Or cette amélioration ne peut faire des progrès toujours croissants, bien au contraire.
(…) Supposons que grâce à une excellente administration, sachant donner de puissants encouragements aux cultivateurs, la production des terres double dans les vingt-cinq premières années (il est d'ailleurs probable que cette supposition excède la vraisemblance !). Dans les vingt-cinq années suivantes, il est impossible d'espérer que la production puisse continuer à s'accroitre au même rythme, et qu'au bout de cette seconde période la production de départ aura quadruplé : ce serait heurter toutes les notions acquises sur la fécondité du sol.

Il compare alors l'accroissement de la population et l'accroissement des ressources, et en tire les conclusions suivantes :

Comparons ces deux lois d'accroissement : le résultat est frappant. Comptons pour onze millions la population de la Grande-Bretagne, et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir. Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de vingt-deux millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir. Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à quarante-quatre millions : mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que trente-trois millions d'habitants. Dans la période suivante, la population - arrivée à quatre-vingt-huit millions - ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre. A la fin du premier siècle, la population sera de cent soixante-seize millions, tandis que les

Retour au sommaire

moyens de subsistance ne pourront suffire qu'à cinquante-cinq millions seulement. Cent vingt et un millions d'hommes seront ainsi condamnés à mourir de faim !
Considérons maintenant la surface de la terre, en posant comme condition qu'il ne sera plus possible d'avoir recours à l'émigration pour éviter la famine. Comptons pour mille millions le nombre des habitants actuels de la Terre. La race humaine croitra selon la progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256... tandis que les moyens de subsistance croitront selon la progression 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Au bout de deux siècles, population et moyens de subsistance seront dans le rapport de 256 à 9 ; au bout de trois siècles, 4096 à 13 ; après deux mille ans, la différence sera immense et incalculable.

Exemple de questions que l'on peut proposer à partir de ce texte.
1. On supposera, comme l'écrit Malthus, que la Grande Bretagne avait 11 000 000 d'habitants à l'époque où cet essai a été écrit, soit vers 1800. Malthus annonce qu'à la fin du siècle, la population serait de 177 millions ; ce résultat est-il conforme à l'hypothèse que fait l'auteur ? Si vous ne trouvez pas le même résultat que lui comment expliquez-vous la différence ?

2. Quelle aurait dû être la population en l'an 2000 ? Les chiffres fournis par l'U.E. annoncent 59 100 000 habitants au Royaume-Uni en 2000 : croyez-vous que l'hypothèse de Malthus soit plausible ? Comment Malthus justifie-t-il cette hypothèse ?

3. Déterminer (approximativement) le taux annuel de croissance de la population qui correspondrait à un doublement en 25 ans ? Comment doit-on procéder ?

4. Le taux moyen d'accroissement de la population du Royaume-Uni, sur la période 1995-2000, a été de 0,1 % par an. A ce rythme, Quel serait le pourcentage d'augmentation en 25 ans ? En combien d'années la population doublerait-elle, si ce taux était maintenu (on pourra se contenter d'une valeur approximative) ?

Pour information : Taux de croissance de la population (en % par an) :

Période	1970-1975	1975-198	1980-1985	1985-1990	1990-1995	1995-2000
Monde entier	1,95	1,72	1,72	1,72	1,48	1,2
Europe seule	0,6	0,49	0,38	0,44	0,16	-0,12

Source : Annuaire économique et géopolitique mondial

Image de couverture de la brochure « Dé-chiffrer par les maths »
(dessin de Pol Le Gall)

Retour au sommaire

ÉTUDES MATHÉMATIQUES

GRANDEURS, PROPORTIONS, FRACTIONS ET NOMBRES...

D'après une conférence donnée par Jean Dhombres
à Liège le 9 octobre 1996

LES GRANDEURS CHEZ EUCLIDE

On ne trouve aucune définition du terme « grandeur » chez Euclide. Il y a des grandeurs « de même genre » : les longueurs, les surfaces, etc. Les entiers ne sont pas considérés comme des grandeurs.

L'opération fondamentale sur les grandeurs est **l'addition**.
Cette addition est intimement liée à l'ordre : si A > B, il existe C tel que B + C = A.
Cela donne, pour chaque type de grandeur, une structure de groupe abélien totalement ordonné et archimédien.

Euclide utilise un isomorphisme entre ces divers groupes : c'est la théorie des proportions (*λόγος*), développée au livre V.

Conséquence : le seul objet qui résume tous les autres est le rapport de longueurs $\frac{L}{L'}$; on peut donc mesurer une grandeur *L* **<u>par</u>** une autre grandeur *L'*.

Mais...
Rien dans Euclide ne permet d'ajouter un *λόγος* à un autre (le *λόγος* n'est pas une grandeur).
On peut cependant les multiplier, comme une composition d'opérateurs :

$$\left[\frac{A}{B}\right]\times\left[\frac{B}{C}\right]=\left[\frac{A}{C}\right].$$

Remarque
Euclide ne définit pas le *λόγος*, mais il définit la proportion, ou égalité de raison ou analogie (*αναλογια*) $\left[\frac{A}{B}\right]=\left[\frac{C}{D}\right]$, « *A* est à *B* comme *C* est à *D* », d'une façon équivalant à ceci : il y a analogie si on ne peut 'rien' insérer entre les deux, c'est à dire s'il n'existe pas d'entiers *m* et *p* tels que $\left[\frac{A}{B}\right]<\frac{p}{m}<\left[\frac{C}{D}\right]$ (voir note [6]).

On peut faire des calculs sur les *λόγος* sans se préoccuper de la nature des grandeurs. Par exemple :
si $\left[\frac{A}{B}\right]=\left[\frac{C}{D}\right]$, alors $\left[\frac{A}{B}\right]=\left[\frac{C}{D}\right]=\left[\frac{A+C}{B+D}\right]$.

> Le problème qui va se poser jusqu'au XVII^e^ siècle :
> Il y a deux théories entièrement distinctes,
> - la théorie des proportions (livre V d'Euclide),
> - la théorie des fractions d'entiers (livre VII).

6 En réalité, sa définition est la suivante : *A* et à *B* comme *C* et à *D* si, pour tous les entiers *n* et *p* possibles, les trois affirmations suivantes sont vraies simultanément :
1°) Si $nA > pB$ alors $nC > pD$,
et 2°) Si $nA = pB$ alors $nC = pD$,
et 3°) Si $nA < pB$ alors $nC < pD$.

Retour au sommaire

LES MATHÉMATICIENS ARABES

Les mathématiciens arabes (à partir du IX^{e} siècle) ont travaillé à partir des éléments d'Euclide et de la théorie des proportions. Mais en ce qui concerne le domaine numérique, ils ont profité de l'apport de la numération indienne décimale de position (sans toutefois perdre la numération sexagésimale, notamment en astronomie).
Le premier à utiliser les fractions décimales est **Al Uqlidisi** (première moitié du X^{e} siècle), dans *Kitab al fusul fi l'hisab al hindi*[7].
A l'aide du principe que la moitié de 1 est un nombre, il peut remplacer 1/2 par 0'5. Par exemple, il divise 19 par 2 cinq fois successivement :

19 → 9'5 → 4'75 → 2'375 → 1'1875 → 0'59375.

Il est très à l'aise dans l'utilisation des puissances de 10, n'hésite pas à diviser ou à multiplier un nombre par 10 en le déplaçant d'un rang vers la droite ou vers la gauche. Il insiste sur la nécessité de marquer par un signe (une espèce d'apostrophe) la place de la séparation des unités et de la partie fractionnaire. Lorsqu'il veut exprimer en toutes lettres un résultat, il exprime la partie décimale sous forme d'une fraction décimale : par exemple, 12'35 se dira « *douze et trente cinq centièmes* » et il ajoute, pour correspondre au langage usuel, « *douze et un quart et un dixième* ».
Mais le changement ne s'est pas fait dans la vie courante : il aurait fallu abandonner une terminologie et des techniques héritées de traditions millénaires : l'une d'origine égyptienne, l'emploi des fractions unitaires (1/2, 1/3, 1/4...), l'autre d'origine babylonienne, l'emploi des fractions sexagésimales ; sans compter la répulsion que peut engendrer un système dans lequel les fractions les plus simples deviennent compliquées sinon inexprimables (par exemple le *danaq* (1/6) très fréquemment utilisé, qui devient un dixième et six dixièmes de dixième et six dixièmes d'ordre trois et six dixièmes d'ordre quatre etc.)[8].

Malheureusement, l'œuvre de Al Uqlidisi est restée inconnue ; il a fallu attendre **Nasir ad Din at Tūsi** (1201-1274, œuvre publiée à Rome en arabe en 1594 et en latin en 1657), puis **Al Kaši** (1380-1429) pour trouver une véritable pratique de l'arithmétique décimale (les mêmes algorithmes, de multiplication par exemple, étaient utilisés pour les entiers et pour les décimaux, avec simplement un décalage de la virgule).

La redécouverte des décimaux en Europe à la fin du XVI^{e} siècle par Simon Stevin sera, elle, suivie de leur usage généralisé dans les livres d'abaques (tables de calcul). Ci-dessous un extrait de sa ***Disme*** :

Donne ſomme (par le 1 probleme de l'Arithmeti-
que) 941304, qui ſont (ce que demonſtrent les ſignes
deſſus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que
les meſmes ſont la ſomme requiſe. *Demonſtration.* Les
27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition)
27 $\frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, enſemble 27 $\frac{847}{1000}$, & par meſme
raiſon les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent 37 $\frac{675}{1000}$, & les
875 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront 875 $\frac{782}{1000}$, leſquels trois
nombres, comme 27 $\frac{847}{1000}$, 37 $\frac{675}{1000}$, 875 $\frac{782}{1000}$, font
enſemble (par le 10e probleme de l'Arith.) 941 $\frac{304}{1000}$,
mais autant vaut auſſi la ſomme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③,

---

7 Écrite vers l'an 952, son œuvre n'a été découverte qu'en 1966.

8 D'après un article de Mahdi Abdeljaouad, paru dans le n°50 de ***Miftah al Hissab***, bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, juin 1978.

Retour au sommaire

عُمَر الخَيّام

'Umar al Khayyam (1048-1123) a beaucoup travaillé sur la théorie des proportions d'Euclide. En ce qui concerne les rapports incommensurables, qui posaient problème chez les grecs, il adopte une démarche qui consiste à décomposer un rapport *A/B* en une fraction continue :

à partir d'une longueur x, il cherche le plus grand entier q contenu dans x, et pose $x_1 = \frac{1}{x-q}$ (c'est à dire que $x = q + \frac{1}{x_1}$), nécessairement supérieur à 1 ; puis le plus grand entier q_1 contenu dans x_1, et pose $x_2 = \frac{1}{x_1 - q_1}$ (c'est à dire que $x_1 = q_1 + \frac{1}{x_2}$), et ainsi de suite.

Al Khayyam énonce qu'il y a égalité de deux rapports de grandeurs s'il y a égalité de leurs quotients partiels (q, q_1, q_2 ... q_n) pour toute valeur de n :

Il définit d'abord l'égalité de deux rapports :

"Étant [données] *quatre grandeurs [telles que] la première soit égale à la seconde et la troisième égale à la quatrième, ou bien* [telles que] *la première soit une partie de la seconde, et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien* [telles que] *la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est nécessairement comme le rapport de la troisième à la quatrième, et ce rapport est numérique."*

En termes actuels, cela signifie que deux rapports sont égaux si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

i) A = B et C = D,
ii) A = B/n et C = D/n,
iii) A = p×B/n et C = p×D/n.

Il s'intéresse ensuite au cas où aucune des conditions précédentes n'est vérifiée (ce que nous appelons les cas d'incommensurabilité)[9] .

Si les grandeurs ne sont pas selon ces trois formes et que, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la première [contenus dans la seconde] *jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la première, et si de la même manière, lorsqu'on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur à la troisième, et que le nombre de multiples de la première contenu dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième* [contenu] *dans la quatrième. Et si après* [cela*], on retranche* [de la première] *tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la première, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde, et que de la même* [manière], *on retranche* [de la troisième] *tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quatrième, et qu'alors le nombre de multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième ;* [...] *Et si, lorsque de la même manière, on retranche tous les multiples des résidus successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre correspondant de la troisième et de la quatrième,* [et ce] *indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième. Et c'est cela le rapport véritable pour le type géométrique* [des grandeurs].

9 Extrait du chapitre ***De la théorie des proportions à la théorie des nombres réels***, d'Éliane Cousquer, dans l'ouvrage ***La mémoire des nombres***, Actes du X[eme] colloque d'épistémologie et d'histoire des mathématiques à Cherbourg (27-29 mai 1994), édité par l'IREM de Basse-Normandie en 1997.

Retour au sommaire

Et il s'efforcera de prouver que sa théorie est équivalente à celle du livre V d'Euclide. Il soulève alors le problème profond entre la notion de rapport (*λόγος*) et celle de nombre, qui est pour lui de nature philosophique :
« *Un rapport peut-il être par essence un nombre, ou est-il seulement accompagné d'un nombre, ou encore le rapport est-il lié à un nombre non par nature mais à l'aide de quelque chose d'extérieur, ou bien le rapport est-il lié au nombre et n'a-t-il besoin, de ce fait, de rien d'extérieur ?* [10]»

LE XVII^e SIÈCLE EN OCCIDENT CHRÉTIEN

On voit apparaitre des « *grandeurs numériques* » (cette terminologie disparaissant rapidement au profit de « *quantités* » ; plus tard Newton les qualifiera de *nombres*).
On arrive donc à une **identification** entre les grandeurs et leurs mesures : c'est clair chez Descartes, ça l'est encore plus chez Newton.

Ce qui a permis cette identification, ce sont les logarithmes. En 1620, Napier montre l'isomorphisme entre grandeurs ET addition d'une part, mesures ET multiplication d'autre part :

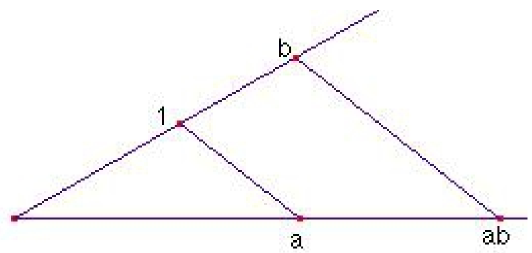
$$\log\left(\left[\frac{A}{B}\right]\times\left[\frac{C}{D}\right]\right)=\log\left(\left[\frac{A}{B}\right]\right)+\log\left(\left[\frac{C}{D}\right]\right)$$

À la moyenne arithmétique correspondra la moyenne géométrique, car :

$$\log\sqrt{xy}=\frac{\log x+\log y}{2}.$$

Les deux théories (celle des proportions et celle des fractions) sont désormais liées. L'analogie de structure a été comprise dès ce XVII^e siècle.

La « **révolution** » de Descartes (elle tient en une page et demie, au début de son livre *La Géométrie*, 1736) [voir en annexe] est une véritable révolution intellectuelle, qui gomme toute la théorie des proportions : le produit de deux longueurs peut être une longueur (et non plus nécessairement une surface). Tout se réduit au numérique, à partir du moment où on a choisi une unité.



$$\Rightarrow \frac{ab}{a}=\frac{b}{1}$$

LE XX^e SIÈCLE

Les « grandeurs » ont totalement disparu de l'enseignement secondaire (pas complètement du primaire). Or les fractions « passent mal ».
Voici ce qu'en pense Nicolas ROUCHE, dans un article intitulé *Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique* (Repères IREM[11] n° 14, d'avril 1996, pages 25 à 36), dont je vous recopie le début de l'introduction :

10 Citation trouvée dans ***Une histoire des mathématiques, Routes et dédales***, de Amy Dahan-Dalmédico et Jeanne Peiffer, éditions Point-Seuil, 1986, page 103)

11 http://www.univ-irem.fr/exemple/reperes/articles/15_article_99.pdf

Retour au sommaire

Les grandeurs sont le sujet du Cinquième Livre d'Euclide - l'un des plus importants des Éléments - et de nombreux travaux ultérieurs. Elles sont aussi l'objet de multiples observations et opérations quotidiennes : une chose est plus lourde qu'une autre, on ajoute une longueur à une autre, etc.

Or le progrès de la technologie au cours du XX^{e} siècle a abouti à une conséquence paradoxale. En effet, alors qu'un nombre croissant d'actions même parmi les plus quotidiennes s'appuient sur des mesures, les êtres humains manipulent de moins en moins des grandeurs dans des opérations pratiques de mesure : ils lisent directement sur des cadrans les résultats des mesures exécutées par des instruments automatiques.

Au cours du même siècle ou à peu près, les grandeurs ont disparu des mathématiques. Alors qu'elles avaient été au long de l'histoire le matériau même de l'élaboration des nombres, elles ont été remplacées par la théorie des nombres réels directement construits à partir des naturels, eux-mêmes rattachés à la théorie des ensembles. La mesure des grandeurs (à ne pas confondre avec la théorie mathématique de la mesure) est passée dans le domaine de la physique.

Les grandeurs ayant disparu des mathématiques, elles ont aussi quasiment disparu de l'enseignement, tout au moins aux niveaux secondaire et supérieur. Heureusement toutefois, l'étude de la droite réelle demeure associée à l'idée de mesure des longueurs. Il reste quelques traces des grandeurs dans l'enseignement primaire, principalement sous la forme de manipulations introduisant aux fractions et aussi dans l'étude du système décimal de mesures.

Or, même si les grandeurs ont disparu des mathématiques constituées, elles demeurent sans doute un passage obligé pour les enfants. En effet, d'abord nous vivons au milieu d'objets qu'il nous faut, avant même toute idée élaborée de mesure, saisir sous leur aspect de grandeur, et déjà à ce niveau un certain nombre de choses ne vont pas de soi. Ensuite, puisqu'on recourt sans cesse à des mesures dans la vie civilisée d'aujourd'hui, il faut bien apprendre en quoi elles consistent et ce qu'elles nous apportent. Enfin on peut croire que même si les réels peuvent être tirés axiomatiquement des ensembles sans passer par les grandeurs, la genèse des nombres dans chaque esprit passe nécessairement par les grandeurs et leur mesure.

Acceptons donc ce point de départ : il faut enseigner les grandeurs dans les écoles maternelles et primaires. *Bien sûr, il ne faut surtout pas organiser à ce niveau un enseignement axiomatique.* Il faut faire vivre et comprendre aux élèves l'essentiel des phénomènes familiers liés à la comparaison de deux grandeurs de même espèce, à l'addition des grandeurs, à leur multiplication et leur division par un nombre naturel. Ces phénomènes sont plus nombreux qu'on ne le croirait de prime abord.

ANNEXE

Extraits de « La Géométrie » de René Descartes, édition de 1886, Livre premier
Des problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites.

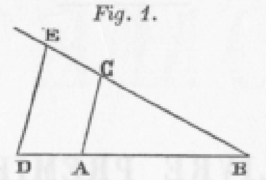
Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaitre la longueur de quelques lignes droites pour les construire.
Et comme toute l'arithmétique n'est composée que de quatre ou cinq opérations qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction des racines, qu'on peut prendre pour une

Retour au sommaire

espèce de division, ainsi n'a-t-on autre chose à faire en géométrie touchant les lignes qu'on cherche pour préparer à être connues, que leur en ajouter d'autres ou en ôter ; ou bien en ayant une, que je nommerais l'unité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, et qui peut être ordinairement prise à discrétion, puis en ayant encore deux autres, en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux autres comme l'autre est à l'unité, ce qui est le même que la multiplication ; ou bien en trouver une quatrième qui soit à l'une de ces deux comme l'unité est à l'autre, ce qui est le même que la division ; ou enfin trouver une ou deux ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'unité et quelque autre ligne, ce qui est le même que tirer la racine carrée ou cubique, etc. Et je ne craindrai pas d'introduire ces termes d'arithmétique en la géométrie, afin de me rendre plus intelligible.

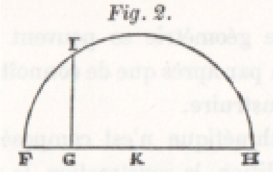
Soit par exemple AB l'unité (*figure 1*), et qu'il faille multiplier BD par BC, je n'ai qu'à joindre les points A et C, puis tirer DE parallèle à CA, et BE est le produit de cette multiplication.

Fig. 1.

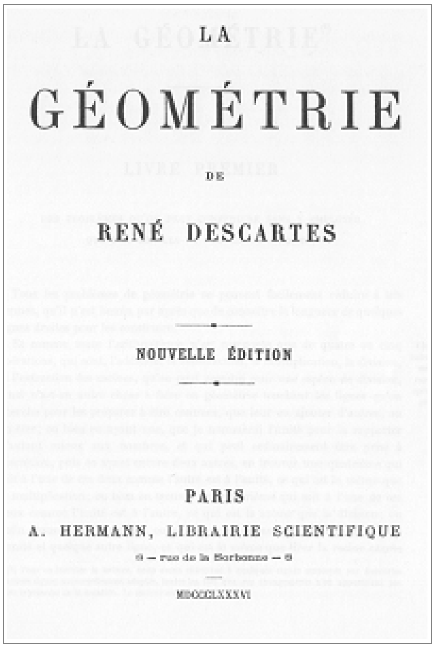


Ou bien, s'il faut diviser BE par BD, ayant joint les points E et D, je tire AC parallèle à DE, et BC est le produit de cette division.

Fig. 2.



Ou, s'il faut tirer la racine carrée de GH (*figure 2*), je lui ajoute une ligne droite FG qui est l'unité et, divisant FH en deux parties égales au point F, du centre K je tire le cercle FIH, puis élevant du point G une ligne droite jusques à I à angles droits sur FH, c'est GI la racine cherchée.



LA

GÉOMÉTRIE

DE

RENÉ DESCARTES

NOUVELLE ÉDITION

PARIS

A. HERMANN, LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE

8 — rue de la Sorbonne — 8

MDCCCLXXXVI

Retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

LA PERSPECTIVE : CAVALIÈRE OU PARALLÈLE ?

A la fin de l'éditorial (page 3 de ce Petit Vert), nous vous donnions le lien pour télécharger le Petit Vert n°29 de mars 1992, dans lequel on pouvait trouver un article intitulé « Cubes et sphères en perspective ». Cet article faisait suite à un article publié par ***Bernard PARZYSZ*** *(alors enseignant-chercheur à l'IUFM de Lorraine) traitant de ce sujet dans le numéro 57 (daté de décembre 1991) de la revue PLOT*[12]*. Nous le reproduisons ci-après, avec autorisation de son auteur.*

Un point de vocabulaire

Pour beaucoup d'enseignants, les deux expressions « perspective cavalière » et « perspective parallèle » sont parfaitement synonymes. Est-ce vraiment le cas ? La question mérite d'être posée, ne serait-ce qui pour éclairer le problème des diverses dénominations que l'on peut rencontrer.

Remarquons tout d'abord que le terme perspective parallèle (ou cylindrique) désigne la projection sur un plan selon une direction de droite. Une telle projection peut être orthogonale ou oblique, selon que cette direction est, ou non, orthogonale à celle du plan de projection.

« Perspective » est donc ici synonyme de « projection », et l'existence des deux termes ne fait que refléter les origines de la géométrie projective, issue de la perspective des peintres (ou perspective linéaire), laquelle n'est autre que la projection centrale (ou conique). Il suffit d'envoyer alors le point de fuite à l'infini pour passer de la perspective linéaire à la perspective parallèle.

Et, si on se propose d'établir un … parallèle entre les deux types, on obtient ce tableau :

Point de vue ...	… à distance finie	… à l'infini
Projection ...	… conique	… cylindrique
	… centrale	… parallèle
	… linéaire	… ?

Dans ce tableau, une case reste vide. Beaucoup la complètent par « perspective cavalière », qui entre ainsi en opposition (comme disent les linguistes) avec « perspective linéaire ». Que nous apprennent à ce sujet les ouvrages de référence ?

La norme AFNOR

Le Larousse encyclopédique en dix volumes (édition 1963) indique : « Perspective cavalière, projection oblique de l'objet à représenter sur un plan », et ignore la perspective parallèle … alors qu'il signale « perspective centrale ...(on dit aussi perspective conique ou perspective linéaire) ». Il semble donc bien que notre perspective parallèle ressemble beaucoup à cette perspective cavalière, mis à part que celle-ci est nécessairement oblique.

Cependant la norme AFNOR se montre encore plus restrictive : elle définit la projection oblique dite « cavalière » comme « projection oblique parallèlement à une direction donnée sur un plan de projection parallèle à l'une des faces du cube de référence », et l'oppose à la « projection axonométrique » : « projection orthogonale de l'objet sur un plan de projection oblique défini par les angles que font entre elles les projections sur ce plan des trois arêtes concourantes, indiquées en traits forts, du cube de référence » (NF E 04-108 : Dessins techniques pour industries mécaniques, électriques et connexes. Représentations dites perspectives, février 1953)[13].

Tentons d'y voir clair !

Le style n'est pas limpide, mais tentons d'y voir plus clair.

1. La projection cavalière est oblique, tandis que la projection axonométrique est orthogonale.

12 *PLOT était alors le bulletin commun aux régionales APMEP de Poitiers, Limoges et Orléans-Tours.*

13 *N.d.l.r. Cette norme a été remplacée par la norme NF E04-521 en décembre 1986.*

Retour au sommaire

2. Dans la projection axonométrique, le plan de projection est oblique par rapport au cube de référence, alors que dans la projection cavalière il est parallèle à l'une des faces de ce cube.

Deux remarques
a) Par rapport à la définition du Larousse, on trouve ici mention d'un « cube de référence », qui définit en fait un repère orthogonal de l'espace. Les projections envisagées se font donc relativement à ce repère.
b) Il y aurait (théoriquement) deux autres cas à envisager :

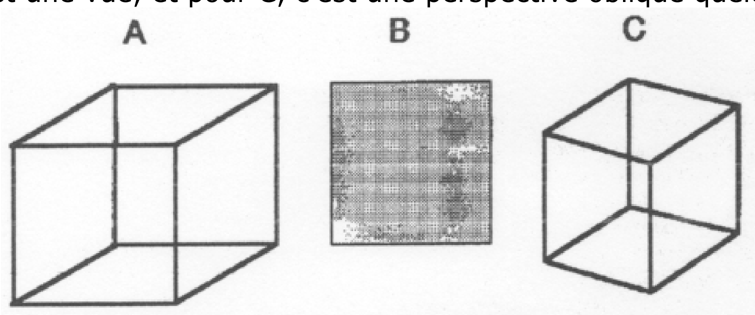
- La projection orthogonale sur un plan parallèle à l'une des faces de référence du cube ; cette projection est attestée sous le nom de « vue » (de face, de profil, etc.) ;
- La projection oblique sur un plan oblique.

On aurait alors défini la projection parallèle dans sa généralité !

Les dessins industriels
La norme AFNOR étant d'usage courant dans les professions où l'on utilise le dessin industriel, nous pouvons nous référer à celle-ci et considérer la projection cavalière comme un cas particulier de la projection parallèle. Nous avons déjà mentionné ses deux particularités : elle est oblique, et son plan est parallèle au cube de référence.

Le problème est que, lorsqu'on dessine un objet quelconque, le cube de référence n'apparait pas. Comment alors savoir si la perspective est cavalière ? Il peut très bien s'agir d'une perspective quelconque. C'est que la norme AFNOR, comme les dessinateurs, s'intéresse uniquement au dessin d'un objet, et non à une projection de l'espace ; c'est cet objet qui, en fait, définit le « cube de référence » : si l'objet a une face plane, on place cette face parallèlement au cube de référence ; ou, ce qui revient au même, on prend une face du cube parallèle à ce plan.

A propos du dessin ci-dessous (où sont représentés, en perspective oblique, trois pavés droits) nous pouvons alors dire que la perspective considérée est cavalière pour A, mais pas pour B ni pour C (pour B, c'est une vue, et pour C, c'est une perspective oblique quelconque).



N.d.l.r. Voir aussi https://fr.wikipedia.org/wiki/Perspective_isom%C3%A9trique sur la perspective isométrique

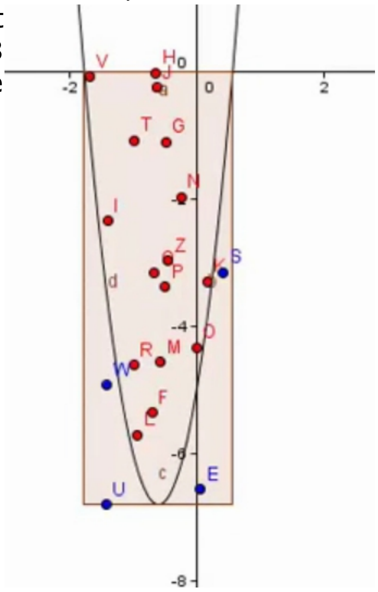
VU SUR LA TOILE

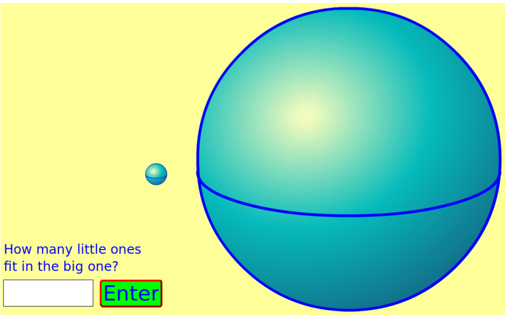
SIMULATIONS

« Simuler » : faire semblant. Jouer à faire semblant est une activité enfantine précurseuse dans l'apprentissage de l'abstraction. La simulation s'appuie sur un modèle parfois difficile à construire mais qui permet d'anticiper des résultats, d'illustrer et de s'approprier un problème.

On trouvera ici des liens vers des sites contenant des vidéos ou des applications intégrées. Pour une entrée en matière, on pourra perdre son temps devant cette conférence de Pierre-Louis Lions donnée en 2000 : c'est là .

La méthode de Monte-Carlo donne lieu, comme un certain nombre d'exemples issus de la théorie des probabilités, à des mises en œuvre informatiques souvent attractives. On commencera avec ce travail d'un jeune étudiant de 18 ans : un combo GeoGebra-Python surprenant, qui démontre de grandes qualités mathématiques et didactiques : https://www.lucaswillems.com/fr/articles/21/calcul-daires-avec-la-methode-de-monte-carlo . Le Laboratoire Mathématiques Raphaël Salem de Rouen intègre sur son site de nombreuses animations dont cette illustration du théorème de Pick que j'ai découvert tout récemment (http://lmrs.univ-rouen.fr/Vulgarisation/Pick/Pick.html) ainsi qu'une simulation paramétrable de la planche de Galton (http://lmrs.univ-rouen.fr/Vulgarisation/Galton/galton.html) déjà présentée dans une rubrique consacrée au bricolage de vacances (PV 118). On se précipitera sur les autres pages de ce site.



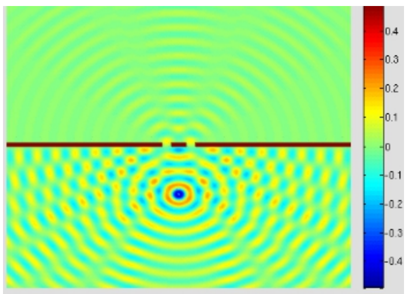


Pour tous les âges, l'Université du Colorado propose de nombreuses applications pour expérimenter, simuler, manipuler, jouer. C'est anglais, certes, mais c'est très bien fait.

https://phet.colorado.edu/en/simulations/category/new

La dérive génétique est un principe de SVT selon lequel la fréquence d'un allèle dans une population peut évoluer de façon imprévisible :c'est là. Une manière de modéliser ce phénomène est de recourir à des tirages de boules dans une urne : http://www.ac-nice.fr/svt/productions/freeware/derive/ .

La simulation n'est pas uniquement numérique. L'étude des ondes permet aussi de produire des figures programmables et d'observer leurs formes. On trouvera sur xymaths plusieurs exemples de modélisation et simulation de la propagation d'une onde : C'est là.



Pour les plus ambitieux, on peut envisager de simuler la vie tout simplement à l'aide du célèbre Jeu de la vie de Conway : http://jean-paul.davalan.pagesperso-orange.fr/divers/jeuvie/index.html.

On pourra aussi se laisser guider par les énigmes de ce petit jeu en ligne : http://armorgames.com/play/2660/the-irregulargame-of-life?via-search=1

gilles.waehren@wanadoo.fr

Retour au sommaire

MATHS ET PHILO

L'ABSURDE et ses vertus positives

Par Didier LAMBOIS

En latin, le mot *surdus* signifiait « inaudible » et c'est sur ce mot qu'a été formé le mot « sourd ». Le mot latin *absurdus*, qui en dérive, signifiait « dissonant » et renvoyait donc à ce qui ne peut s'entendre. Ainsi l'absurde est au sens premier ce qui est insupportable, ce qu'on ne peut ouïr, ce qu'on ne peut entendre. Mais dans notre langue française, entendre c'est aussi comprendre. Lorsque vous dites que vous vous entendez bien avec votre voisin ce n'est pas pour dire que votre logement est mal insonorisé ! L'entendement renvoie à notre faculté de comprendre. En ce sens, est absurde ce qui ne s'accorde pas avec la logique, avec les lois de la raison, avec le sens commun ou le bon sens.
Ainsi le but du **raisonnement par l'absurde** est de parvenir à une proposition que nous ne pouvons supporter d'entendre parce qu'elle contrarie la logique. Ce faisant, nous montrons que la proposition contradictoire[14] est vraie.
Nous pouvons par exemple démontrer que √2 est un nombre irrationnel. Un nombre rationnel peut, lui, s'écrire comme une fraction p/q, avec p et q entiers, sans diviseur commun, et $q \neq 0$; un nombre irrationnel ne le peut pas. Supposons que √2 soit rationnel, nous devrions admettre qu'il existe deux entiers p et q, sans diviseur commun, tels que $p/q=\sqrt{2}$. En élevant les deux membres de l'égalité au carré nous aurions $(p/q)^2=2$, d'où $p^2=2q^2$. Ainsi p^2 serait pair et par conséquent p lui-même serait pair. Il existe donc un entier p' tel que $p=2p'$. De $p^2=2q^2$ et $p=2p'$ il résulte que $(2p')^2=2q^2$ qu'on peut simplifier en $2p'^2=q^2$. Ainsi q^2 est pair, donc q également ; 2 serait donc un diviseur commun à p et à q, ce qui contredit l'hypothèse concernant ces nombres. Admettre que √2 soit rationnel mène donc à une contradiction ; ainsi nous devons nécessairement reconnaitre que sa négation, c'est-à-dire que √2 est irrationnel, est vraie.

> « *Le procédé analytique des géomètres grecs devient le procédé par la réduction à l'**absurde**, lorsque, pour démontrer la vérité d'une proposition, on part de la proposition contradictoire comme d'une hypothèse, afin d'arriver, de conséquence en conséquence, jusqu'à une proposition reconnue fausse, ou qui contredit une proposition reconnue vraie ; ce qui entraine l'absurdité de l'hypothèse, et par suite la vérité de la proposition contradictoire ».* A. COURNOT, *Essai sur les fondements de nos connaissances,*1851, p. 390.

Bien sûr ce mode de raisonnement, parfois nommé « apagogique », n'est pas l'apanage des mathématiques ; il est fréquemment utilisé dans la vie courante. Pour montrer que la thèse que nous défendons est bonne nous pouvons essayer de montrer que la thèse adverse mène à des conclusions absurdes. Ainsi l'absurde est la plupart du temps le miroir qui nous renvoie à la vérité. L'absurde est notre garde-fou, notre guide.

« *Je suis revenu sur mes pas, toutes les fois que j'ai vu que j'étais conduit à l'**absurde**, c'est-à-dire, à des conclusions contraires aux faits postérieurs ; et j'ai toujours trouvé l'endroit où je m'étais égaré, c'est-à-dire où j'avais mal vu les faits antérieurs. Enfin, je suis venu sans suppositions, sans inconséquences, et sans lacunes, à un résultat que je n'avais ni prévu, ni voulu. Il est plausible, il est très-général, il rend raison de tous les phénomènes…* » A.-L.-C. DESTUTT DE TRACY, *Éléments d'idéologie,* Logique, t. 3, 1805, p. 424.

14En logique il faut distinguer « contradictoire » et « contraire ». Deux propositions sont contraires si elles ne peuvent être vraies toutes les deux ensembles, mais si elles peuvent être fausses l'une et l'autre (cela concerne des propositions universelles : tout S est P, nul S est P). Sont contradictoires des propositions qui ne peuvent être ni vraies ni fausses en même temps (dans ce cas, démontrer la fausseté de l'une permet de conclure à la vérité de sa contradictoire : si « quelque S est P » est fausse je suis certain que « nul S est P » est vraie).

Retour au sommaire

Mais l'absurde n'a pas pour seule vertu de nous conduire à la vérité. L'absurde a aussi des vertus esthétiques et humoristiques. Bon nombre d'artistes en ont usé, en usent encore et en abusent parfois. Mais sans parler nécessairement du théâtre de l'absurde[15] ou des excès créatifs de l'art moderne, nous pouvons constater que l'absurde est déjà présent dans les farces de Plaute (254-184 av. J.-C.), ou encore au Moyen-âge, et toujours d'actualité dans les *nursery rhymes* ou le *nonsense*[16] britannique. La présence constante de toutes ces fantaisies délirantes pourrait nous laisser penser qu'elles nous sont essentielles, qu'elles ont une fonction éducative et qu'elles sont inscrites dans notre humanité, comme l'est le rêve. Quoi de plus absurde en effet que le rêve, mais Freud (1856-1939) en a montré toute la richesse et les neurobiologistes, sur de toutes autres bases, ne font que confirmer cette approche.

Pourtant l'absurde pose problème. Face à la vie humaine, l'homme est confronté au sentiment de l'absurde. Quel sens peut avoir notre vie ? La conscience de la mort, la monotonie de la vie, la souffrance, l'étrangeté du monde font naitre en nous la question du « pourquoi », « à quoi bon ». « *Pourquoi y a-t-il quelque chose plutôt que rien ?* » se demandait Leibniz (1646-1716). Et face à ces questions du pourquoi et du sens nous restons muets ; il n'y a rien à entendre ; nous sommes face à l'irrationnel.

« *Ce monde en lui-même n'est pas raisonnable, c'est tout ce qu'on peut en dire. Mais ce qui est absurde, c'est la confrontation de cet irrationnel et de ce désir éperdu de clarté dont l'appel résonne au plus profond de l'homme* ». A. CAMUS, *Le Mythe de Sisyphe*, p.38.

Les philosophes sont nombreux à faire ce constat d'absurdité, de non sens. Pascal (1623-1662) en est une des illustrations les plus évidentes : l'homme est face au néant, misérable, perdu dans ce vide infini. La solution qu'il propose est claire et séduisante : il faut croire, espérer en Dieu, c'est notre seule voie de salut pour trouver du sens. D'autres, athées et plus pragmatiques, proposent de se révolter pour remettre sur pieds ce monde qui marche sur la tête. C'est le cas, par exemple, de Marx (1818-1883). Ainsi, les idéologies religieuses et politiques cherchent à redonner du sens là où nous l'avons perdu. Mais force est de constater, l'histoire en témoigne chaque jour, que ces idéologies peuvent avoir des effets très pervers : violence, fanatisme et dictatures en sont les produits directs. Tous ceux qui pensent avoir trouvé le sens de l'histoire sont enclins à vouloir contraindre par la force à aller dans ce sens.

Face à cette absurdité l'homme pourrait aussi être tenté de fuir par le suicide, mais Albert Camus, athée, propose une autre voie : la révolte, mais une révolte qui n'a rien de politique. Camus refuse le suicide, ce serait donner raison à l'absurde, il refuse l'opium religieux, ce serait choisir l'illusion, mais il refuse aussi les idéologies qui veulent nous asservir plutôt que nous servir. Vouloir qu'il y ait un sens c'est toujours s'enfermer dans un ordre qui va penser pour nous. Nous devons accepter l'idée que la vie n'en a pas, accepter que l'existence est et restera « sans justification », accepter de vivre pour rien, de vivre simplement par générosité, par amour, là est notre liberté et notre grandeur. La confrontation à l'absurde est une affaire personnelle et l'homme doit oser affronter ce non-sens sans se résigner, il doit reconnaitre sa liberté et vivre pleinement sa vie, avec passion, gouter la vie comme le condamné à mort qui sait que la vie est précieuse et qui refuse la mort. Puisque tout est absurde, son destin lui appartient et son courage fait sa grandeur : « *sentir sa vie, sa révolte, sa liberté et le plus*

15 Le **théâtre de l'absurde** est un style apparu dans les années 1950 ; il se caractérise par une rupture totale avec les conventions théâtrales classiques, telles que le drame ou la comédie, et par une déstructuration du langage. Il s'agit d'un genre traitant fréquemment de l'absurdité de l'Homme, celui-ci n'étant de fait qu'un pantin, et du non sens de la vie en général, celle-ci menant toujours à la mort. Ionesco (1909-1994) en est un des principaux représentants.

16 Né en Angleterre, le *nonsense* désigne une forme d'humour lié à l'absurdité ou à l'excentricité. Il s'agit de présenter des personnages ou des situations incongrues avec la plus grande fantaisie. Si nous employons aussi le terme anglais c'est parce qu'il a une extension beaucoup plus vaste que ne pourrait avoir l'expression non-sens en français. Le nonsense désigne une « bêtise », du « n'importe quoi », alors que le non-sens est presque un terme technique définissant un raisonnement illogique.

Retour au sommaire

possible, c'est vivre le plus possible ». La conscience de l'absurde s'accompagne alors de joie. Quand bien même Sisyphe[17] sait que son tourment ne connaitra pas de fin, par la conscience qu'il en prend, par son défi, il se rend supérieur à ce qui l'écrase.

Parce que nous vivons dans un univers privé de sens, *« un univers désormais sans maitre »,* nous vivons libres et responsables.

La lutte elle-même vers les sommets suffit à remplir un cœur d'homme.
Il faut imaginer Sisyphe heureux.

CAMUS Albert (1913-1960) : né en Algérie, journaliste à *Combat,* philosophe et écrivain, prix Nobel de littérature en 1957, il était devenu célèbre en 1942 en publiant la même année un roman *(L'Étranger)* et un essai (*Le mythe de Sisyphe*) tous deux passionnants. Ce succès s'amplifia avec ses pièces de théâtre (*Le Malentendu*, 1944. *Caligula,* 1945). Soucieux de promouvoir un humanisme fondé sur la solidarité humaine face au mal (*La Peste*, 1947), plusieurs de ses ouvrages mettent en évidence le non sens de l'existence humaine, l'absurde. Considéré longtemps comme existentialiste, il s'opposa à Jean-Paul Sartre, en particulier dans *La Chute* (1956).

BROCHURES EN LIGNE

Un certain nombre de nos anciennes brochures régionales sont épuisées. Nous n'avons pas prévu de les rééditer en version papier. Par contre, nous avons décidé de mettre à votre disposition des versions PDF, téléchargeables sur notre site http://apmeplorraine.fr/.

« Travail de groupe en séquences longues (démarche de recherche sur problèmes ouverts) avec un index des fiches et des mots clés (76 pages).

« Maths et arts » : réédition en couleurs (l'original était en noir et blanc) avec quelques compléments et une sitographie très étoffée (138 pages).

« Avec des pentaminos », de François Drouin, avec un peu de couleur et une table des matières interactive (133 pages).

Et aussi « Le nombre d'or et la cathédrale de Metz » : une reprise d'une partie d'une publication de l'IREM de Lorraine (99 pages).

17 ***SISYPHE***. *Roi mythique de Corinthe, fils d'Éole, célèbre pour sa ruse et pour le châtiment qu'il encourut « à cause de son impiété ». Ayant tenté d'enchainer Thanatos, le dieu de la Mort, il fut condamné dans les Enfers à rouler éternellement sur la pente d'une montagne un rocher qui retombait à chaque fois avant d'avoir atteint le sommet. Albert Camus a fait de Sisyphe le symbole de la condition humaine et de son absurdité.*

Retour au sommaire

MATHS ET ARTS

VAN DOESBURG INSPIRE GARY ANDREW CLARKE

par François DROUIN

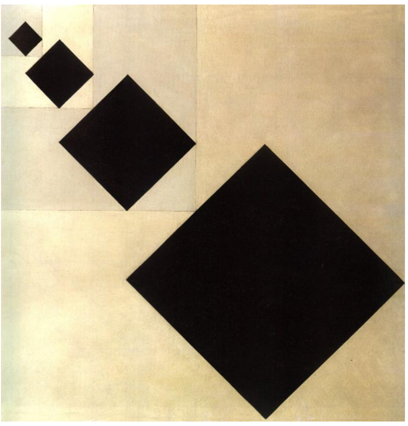
Cet article relate une expérimentation faite en juin 2016 pendant une heure et demie dans une classe de C.M.2 d'une école de Meuse. L'enseignant était avec moi dans la classe. « Arithmetic composition » a été évoquée dans le Petit Vert n°111 (pages 21 à 25). Une promenade dans les œuvres de Gary Andrew Clarke a été proposée dans le Petit vert n°123 (pages 55 à 57).

Pour télécharger le Petit Vert n°123 : http://apmeplorraine.fr/pv/PV123.pdf ; et pour l'article du Petit Vert n°111 : www.apmeplorraine.fr > Ancien Site Internet > Activités en classe (page 1/14) ; l'article est intitulé « Arithmetic composition ».

https://www.artstar.com/collections/gary-andrew-clarke

Untitle (25 mai 2011)
http://garyandrewclarke.tumblr.com/post/33307794356/title-untitled-date-25th-may-2011

L'artiste né en 1970 en Angleterre a été présenté. Les élèves ont calculé son âge en 2016 et l'ont comparé avec celui de leurs parents. Quelques autres œuvres ont été montrées, extraites de son site personnel http://garyandrewclarke.tumblr.com/. Étudier le travail d'un artiste encore vivant et créant des œuvres numériques n'est pas quelque chose d'habituel.
En parallèle leur a été montrée une reproduction de « Arithmetic composition » peinte en 1930 par Théo Van Doesburg http://wiki.cultured.com/people/Theo_van_Doesburg/ .



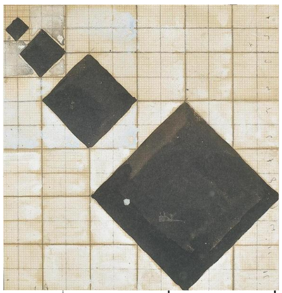
Van Doesburg a été présenté comme un artiste hollandais, né en 1883, décédé en 1931 et ayant vécu aux Pays Bas, en Allemagne, en France et en Suisse. Les élèves ont su retrouver son âge à sa mort.

Des reproductions de ses œuvres ont été montrées ainsi que quelques unes de Piet Mondrian avec lequel il a travaillé (la vision d'œuvres de ce second artiste leur à fait se remémorer des travaux faits en Arts Visuels dans des classes précédentes : des tracés d'horizontales et de verticales avaient été faits). Lorsque les espacements sont identiques, les élèves ont convenu qu'un quadrillage avait peut-être été dessiné au préalable sur la toile.

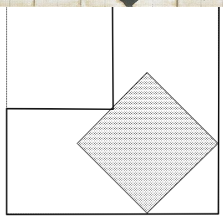
Les deux œuvres présentent la même organisation des formes (celle de Clarke est peut-être un hommage à celle de Van Doesburg).

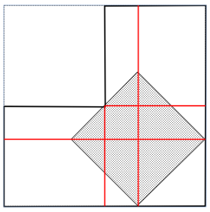
Retour au sommaire

Les élèves ont noté sur leur feuille de papier ce qu'ils observaient et ont essayé de réfléchir à la méthode utilisée pour réaliser l'œuvre. Ils ont vu des carrés, des triangles, des « flèches », des carrés « cachés » (incomplets), des diagonales, des carrés de plus en plus grands (ou des carrés de plus en plus petits). Ce dernier point a été approfondi car il est une ouverture possible vers une méthode de construction du motif.

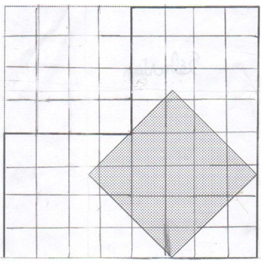


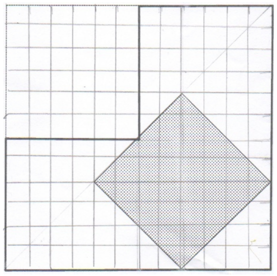
L'objectif présenté aux élèves était la reproduction de l'œuvre, le mien était de savoir si les élèves repéraient et savaient gérer le quadrillage utilisé pour le dessin du motif et l'aspect répétitif du dessin. Je considère que ces objectifs ont été atteints par un nombre important d'élèves.
http://www.wikiart.org/en/theo-van-doesburg/arithmetic-composition-1929
Cette esquisse réalisée en 1929 montre clairement que l'artiste a pris appui sur un quadrillage pour réaliser sa composition.



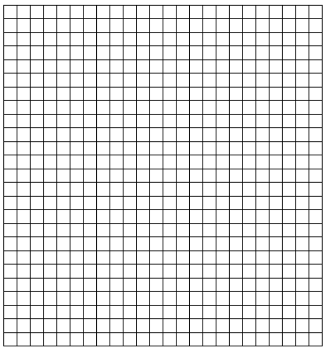


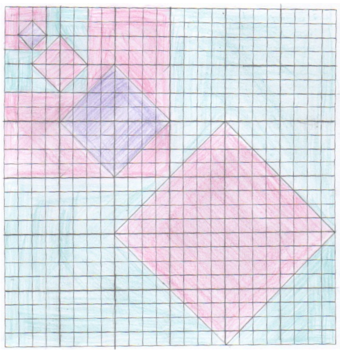
Les élèves ont travaillé sur une sous-figure reproduite sur papier. Des tracés sont rapidement apparus amenant à retrouver le quadrillage utilisé

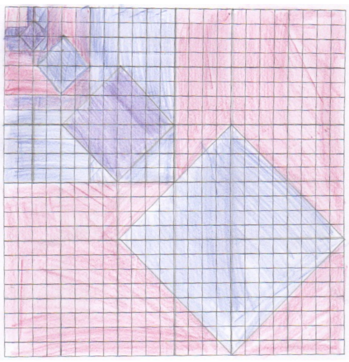




Certains élèves n'ont pas utilisé les points du motif mais ont cherché à trouver un fractionnement des côtés du carré initial. Le premier exemple montre un partage en 2, en 4 et en 8. Le second produit un quadrillage utilisable mais a privilégié l'utilisation de la longueur 12 cm des côtés du carré.







Un carré quadrillé 24×24 a été fourni à chaque élève. Il a été décidé de se limiter à la reproduction de quatre motifs (et non cinq comme dans l'œuvre de Clarke) et de laisser les élèves libres pour le coloriage.

Cet aspect « motifs de plus en plus petits » ou « de plus en plus grands » pourrait être repris lors de l'apprentissage de la notion d'échelle en faisant utiliser des expressions comme « deux fois plus petit » ou « quatre fois plus grand ».

Suite à cette expérimentation, j'ai fait parvenir aux élèves ma reproduction de l'œuvre de Clarke : elle utilise ce qu'ils ont découvert et elle a été réalisée avec la partie dessin de ma suite bureautique.

Retour au sommaire

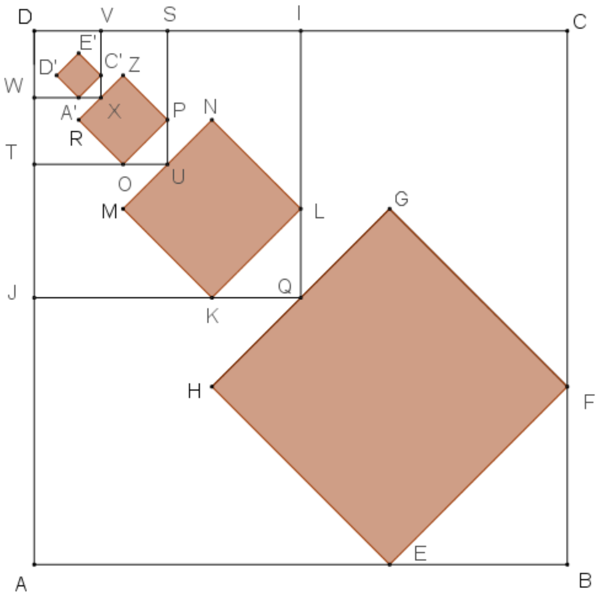
En complément, retour sur un tracé fait et exploité en classe de troisième

En décembre 2013, Claire Staub avait proposé à ses élèves de troisième un devoir à la maison (énoncé dans l'encadré ci-dessous) amenant à une construction d'un dessin de l'œuvre et à s'intéresser à des coefficients de réduction entre les carrés colorés. Ses objectifs étaient de montrer que des mathématiques se cachent dans des œuvres d'art, de leur faire reproduire le tableau en leur donnant certaines infos, de réexploiter le calcul d'un coefficient d'agrandissement/réduction et de faire utiliser le théorème de Pythagore pour des calculs de longueurs. Le devoir a été distribué sans explications particulières.

Le cours suivant, il n'y a pas eu de questions à propos de la construction, il a juste fallu réexpliquer le calcul d'un coefficient d'agrandissement/réduction.

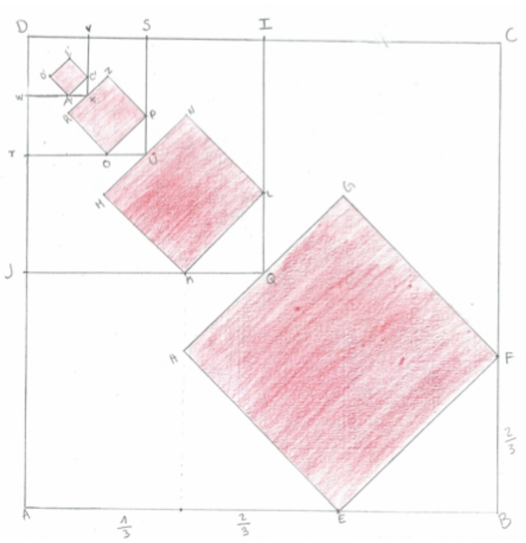
On sait que :

- ABCD, DIJQ, DSUT et DVXW sont des carrés.
- Les quadrilatères coloriés EFGH, KLNM, OPZR et A'C'E'D' sont des carrés.
- $E \in [AB]$ tel que $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$
- $F \in [BC]$ tel que $\frac{CF}{CB} = \frac{2}{3}$
- (KH) est perpendiculaire à (AB) et coupe [AB] au tiers de [AB] à partir de A.
- (EF), (KL), (OP) et (A'C') sont parallèles.
- (EH), (KM), (OR) et (A'D') sont parallèles.
- I milieu de [CD], J milieu de [AD]
- KQ = QL
- (OM) est perpendiculaire à (TU)
- OU = UP
- (A'R) est perpendiculaire à (WX)
- A'X = C'X
- V milieu de [DS], W milieu de [DT]



L'enseignante estime qu'au final, tous les objectifs ont été atteints sauf le dernier : certains ont mesuré sur le dessin au lieu de calculer avec le théorème de Pythagore. Ce type de calculs a été renouvelé lors d'un autre devoir à la maison abordant un tracé de l'étoile à huit branches.

Voici quelques remarques à propos d'une production d'élève.



2. le triangle EBF rectangle en B d'après le théorème de Pythagore on a :

$EF^2 = FB^2 + EB^2$

$EF^2 = \left(\frac{18}{3}\right)^2 + \left(\frac{18}{3}\right)^2$

$EF^2 = 6^2 + 6^2$

$EF^2 = 36 + 36$

$EF^2 = 172$

$EF = \sqrt{172}$

$\boxed{EF = 8,5}$

le triangle KOL rectangle en O d'après le théorème de Pythagore on a :

$KL^2 = LO^2 + KO^2$

$KL^2 = \left(\frac{9}{3}\right)^2 + \left(\frac{9}{3}\right)^2$

$KL^2 = 3^2 + 3^2$

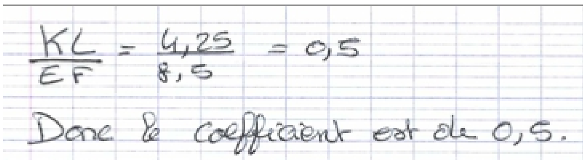
$KL^2 = 18$

$KL^2 = \sqrt{18}$

$\boxed{KL^2 = 4,25}$

Retour au sommaire

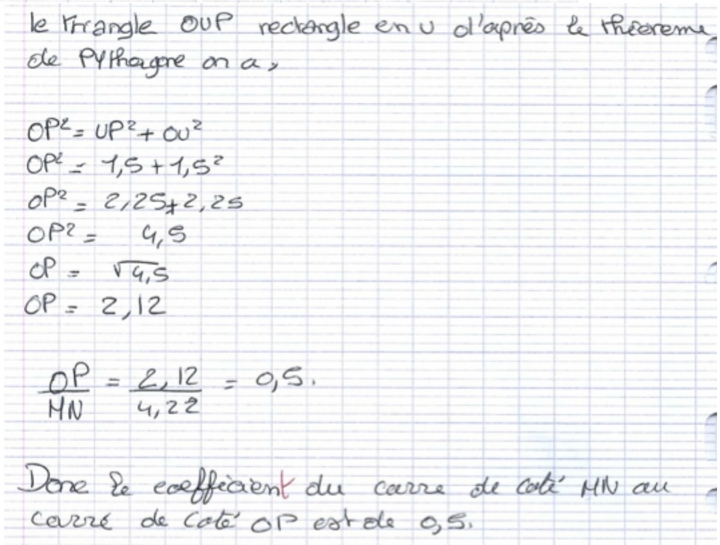
Le dessin a été réussi.
Une erreur de recopiage fait écrire 172 au lieu de 72 (un brouillon a été utilisé…). Il est à noter que pour l'élève un résultat doit s'écrire sous forme d'un nombre décimal, comme le sont les mesures de longueurs dans la vie courante.



$\frac{KL}{EF} = \frac{4,25}{8,5} = 0,5$

Donc le coefficient est de 0,5.

Le souci est que l'élève utilise ces valeurs approchées dans la suite de ses calculs.



le triangle OUP rectangle en U d'après le théorème de Pythagore on a,

$OP^2 = UP^2 + OU^2$
$OP^2 = 1,5 + 1,5^2$
$OP^2 = 2,25 + 2,25$
$OP^2 = 4,5$
$OP = \sqrt{4,5}$
$OP = 2,12$

$\frac{OP}{MN} = \frac{2,12}{4,22} = 0,5.$

Donc le coefficient du carré de côté MN au carré de côté OP est de 0,5.

Les longueurs UP et OU ont été mesurées sur le dessin proposé dans l'énoncé.

Les valeurs approchées continuent à être utilisées dans les calculs et le forcing a été fait pour retrouver le coefficient trouvé à la question précédente.

En 2016, du temps pourrait être pris en classe de troisième pour faire découvrir par les élèves un tracé plausible utilisé par l'artiste, puis d'utiliser les notions d'agrandissement/réduction dans un programme de construction d'un dessin de l'œuvre.
Il est à noter que les quotients de deux nombres écrits avec des radicaux ne peuvent plus être calculés au collège, mais le travail à partir d'un quadrillage tel celui repéré dans l'article précédent permet d'évoquer des longueurs doubles ou moitiés d'autres longueurs.

Dans d'autres classes

« Arithmetic Composition » est à l'honneur dans deux manuels de classe. Le manuel « Hélice 6ème (DIDIER 2009) » propose un exercice de reproduction sur quadrillage qui est assez proche de la méthode semblant être utilisée par l'artiste. Le manuel « Maths-x 2nde (Didier 2010) » s'intéresse à la proportion de la toile représentée par les carrés noirs.
https://sip.ac-mayotte.fr/attachments/article/357/De_Stijl_-_avec_liens_vers_les_oeuvres.pdf (activité 2). L'élève travaille à propos de l'inscription d'un carré dans un triangle isocèle. Un coefficient de réduction et la proportion de la toile représentée par les carrés noirs sont également évoqués.

Diaporama
http://auch2.free.fr/Documents/AnimsPeda/MLPeltier_Auch_Geomerie_C2_C3.pdf page 83
et
https://www.ac-caen.fr/ia61/circos/laigle/blog/public/animations_pedagogiques/2012_2013/geometrie/geometrie_L_Aigle_C2-C3.pdf , page 2 : l'œuvre est évoquée dans ces deux documents utilisés lors d'animations pédagogiques.

Dans le premier, elle est utilisée à propos de l'étude des diagonales du carré. Dans le second, les images sont extraites du document de Mayotte et rendent visibles des alignements de points.

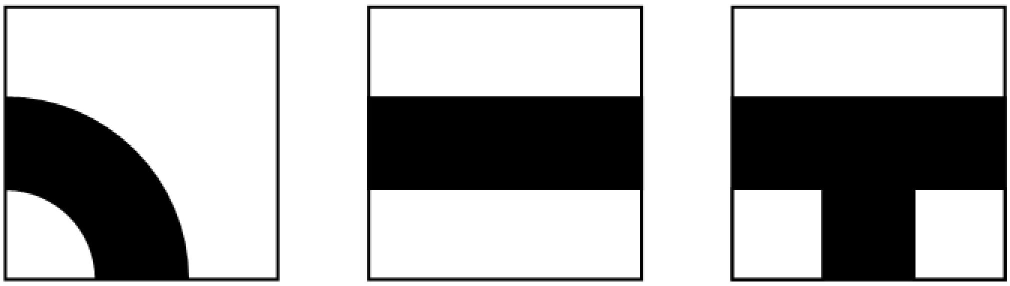
Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

LES CIRCUITS DE FRANÇOIS BOULE

François Drouin

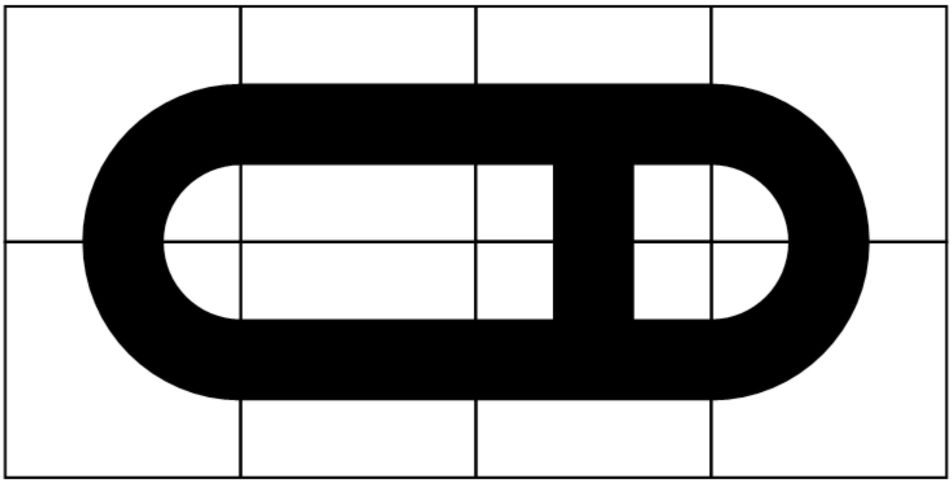
Le



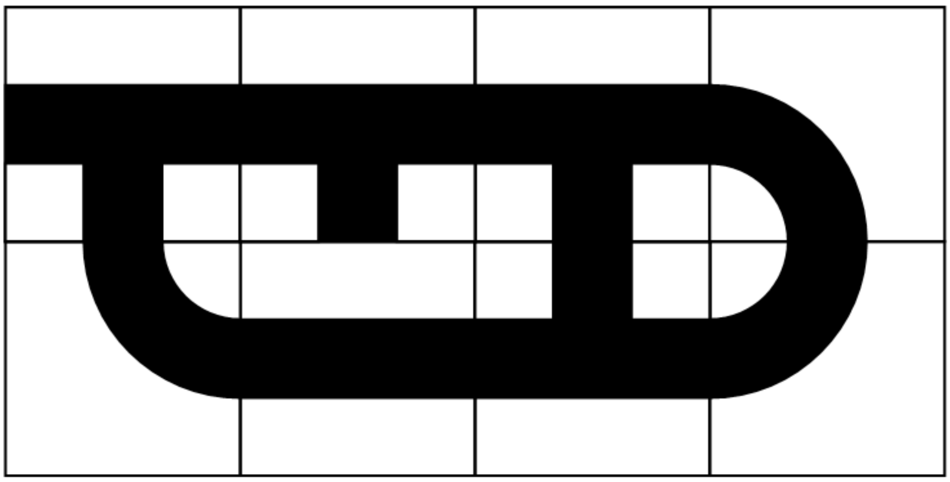
9 exemplaires   8 exemplaires   8 exemplaires

Réaliser
im
p
asse

OUI



NON

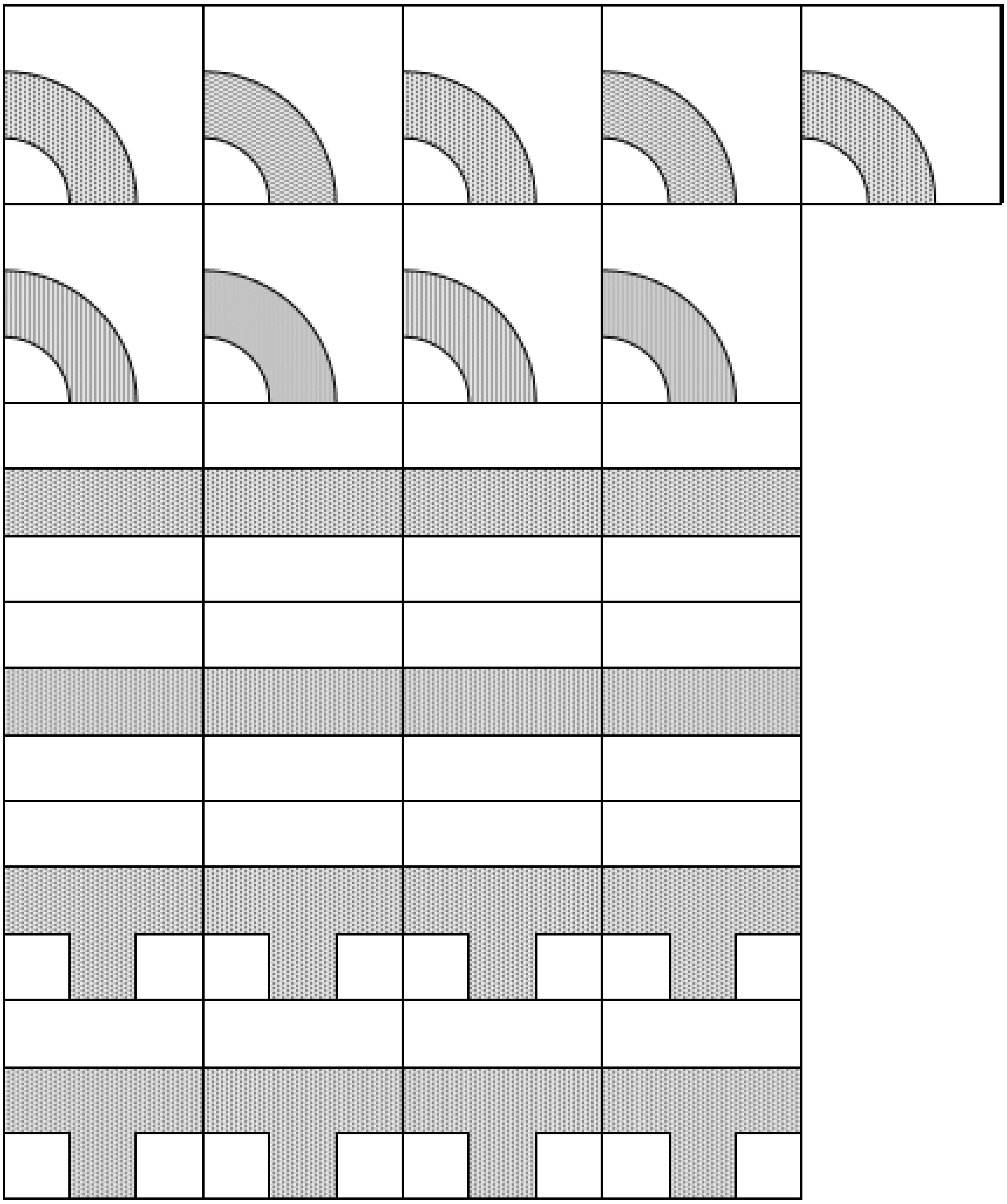


Retour au sommaire

<u>Variante proposée par François Boule</u> : limiter l'aire de jeu à un carré de cinq fois cinq cases.

<u>Variante pour des élèves de collège</u> : utiliser le plus possible de pièces pour former des circuits symétriques.

Le
déc



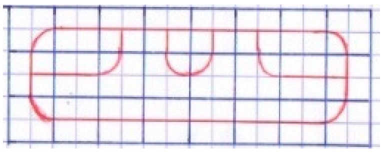
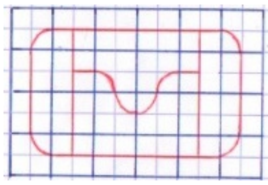
Ce jeu créé par François Boule il y a plus de 30 ans pour des élèves de l'école primaire m'a été transmis par Christine Oudin (APMEP Groupe Jeux). Les pièces se retrouvent page 17 dans le fascicule « Faites vos jeux – matériel pour la rééducation mathématique » diffusé en 1986 par

Retour au sommaire

le C.A.E.I et l'E.N. d'Auteuil ; le jeu est présenté page 63 dans « Mathématiques et Jeux » (Cedic 1976) ainsi que page 2 dans le document « Faites vos jeux à l'École - Espace » (Éditions Didier 2005) mis à disposition par des collègues de l'académie d'Amiens.
http://dsden02.ac-amiens.fr/ien-soissonnais/CGCDE/documentation/07.prevenir_remedier/faites_vos_jeux_a_lecole.pdf.

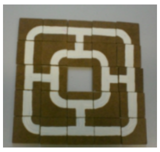
Lors d'échanges entre deux joueurs lorrains

Voici deux exemples symétriques utilisant 24 pièces.

En octobre 2016, lors de la Fête de la Science à Metz-Bridoux

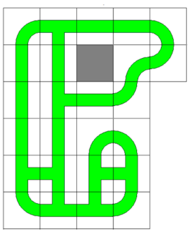
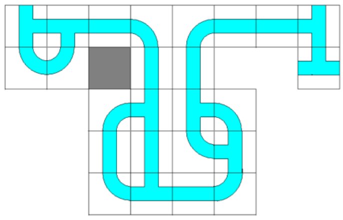

Les grandes pièces ont eu beaucoup de succès. Pour les plus jeunes élèves, il s'est agi de réaliser des routes et des garages pour la voiture. Des circuits inscrits dans un carré de cinq fois cinq cases ont été obtenus par des élèves de cycle 3.



← Cette intéressante solution symétrique a été trouvée par un étudiant animant l'atelier.

Dans un cadre associatif

À Troyes, avec l'association « l'albatros », Christine Oudin proposait ce jeu à des enfants précoces âgés de 3 à 5 ans. Elle photographiait leurs circuits, les numérisait et leur en donnait un tirage papier à la séance suivante.

Les pièces ne sont pas toujours toutes utilisées, certains circuits sont ouverts.

Les circuits en « Kazparkaz » (activité proposée par Christine Oudin)

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

Il s'agit de retrouver les circuits en connaissant le repérage des pièces. Les circuits sont constitués d'une (ou plusieurs) lignes fermées.
Le tableau ci-contre est à reproduire en tenant compte des dimensions des pièces.

Retour au sommaire

Page suivante, trois exemples de circuits.

Circuit n°1

 : A1 E1 B2 E2 E3 A5 B5 C5 D5

 : C1 A2 C2 A3 B3 C3 C4 E4

 : B1 D1 D2 D3 A4 B4 D4 E5

Circuit n°2

 : A1 E1 A2 B2 D2 A3 D4 A5 E5

 : C1 E2 B3 C3 D3 E4 B5 C5

 : B1 D1 C2 E3 A4 B4 C4 D5

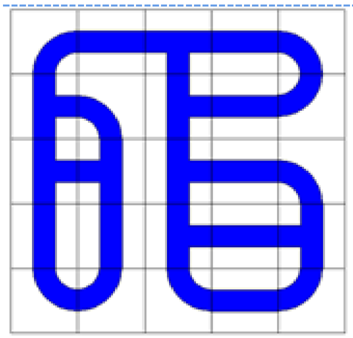
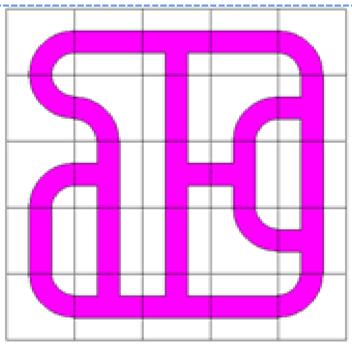
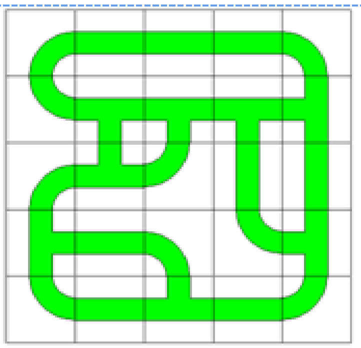
Circuit n°3

 : A1 E1 A2 A3 C3 C4 D4 A5 E5

 : B2 C2 D2 E2 B3 A4 E4 C5

 : B1 C1 D1 D3 E3 B4 B5 D5

Les solutions

CIRCUIT 1	CIRCUIT 2	CIRCUIT 3
		

…/…

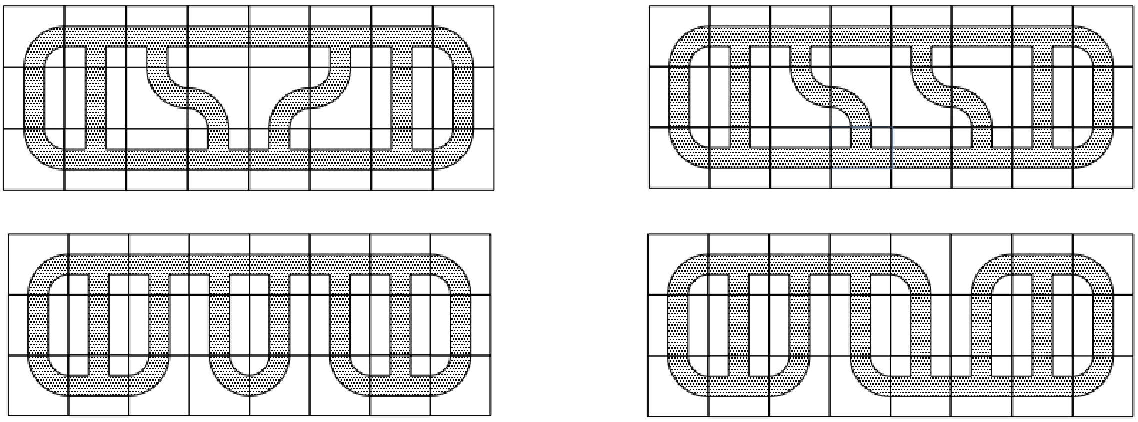
Retour au sommaire

Avec des élèves

Le jeu est utilisable dès le cycle 1 : les circuits peuvent ne pas être fermés et ne pas utiliser toutes les pièces. La recherche de circuits symétriques pourra commencer dès le cycle 3, l'utilisation d'une symétrie centrale sera réservée aux élèves de cycle 4.
Bien que le repérage d'une case dans un quadrillage soit rencontré au cours du cycle 2, l'activité « Kazparkaz » nécessite de retrouver l'orientation des pièces : elle sera plutôt destinée à des élèves à partir du cycle 3. La recherche des circuits, leur codage et leur décodage par d'autres élèves pourront être des supports d'échanges mathématiques « en classe » ou « entre classes ».
Peut-on réaliser un circuit admettant un centre de symétrie en utilisant les 25 pièces ? Et si on utilisait des nombres différents de pièces ? Des contraintes apparaissent, elles sont évoquées dans les écrits de François Boule elles peuvent être la source d'un questionnement ouvert adressé aux élèves.
Que de bonnes raisons pour remettre en avant ce jeu trentenaire !

Pour terminer

Voici deux exemples montrant que certaines solutions admettant un axe de symétrie peuvent être transformées pour devenir des assemblages admettant un centre de symétrie.



" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale A.P.M.E.P. Lorraine.
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur les activités de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges "mathématiques" entre les adhérents.
Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à jacverdier@orange.fr .

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, François Drouin, Rachel François, Françoise Jean, Michel Ruiba, Walter Nurdin, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

La maquette et la mise en page sont réalisées par Geneviève Bouvart et Michel Ruiba.

Retour au sommaire

MATH & MEDIA

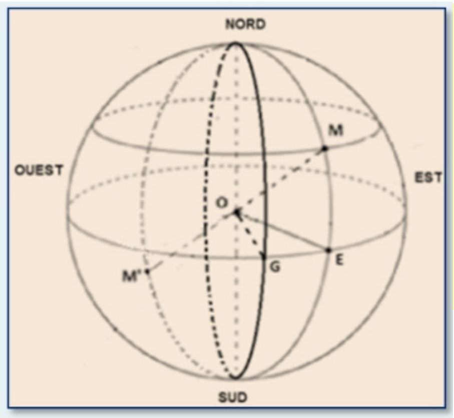
Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi - et surtout - les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.

Envois par la poste à Jacques VERDIER (7 rue des Bouvreuils, 54710 FLEVILLE) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr .

Les archives de cette rubrique seront bientôt disponibles sur notre nouveau site à l'adresse : www.apmeplorraine.fr

GLOBE TERRESTRE EN PERSPECTIVE

Dans le document « Ressources pour l'évaluation en mathématiques (cycle 4) » édité par Éduscol, nous avons repéré l'énoncé ci-dessous, situé à la page 34.
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/mathematiques/33/1/EV16_C4_Maths_Situations_evaluation_690331.pdf



Énoncé de l'exercice :

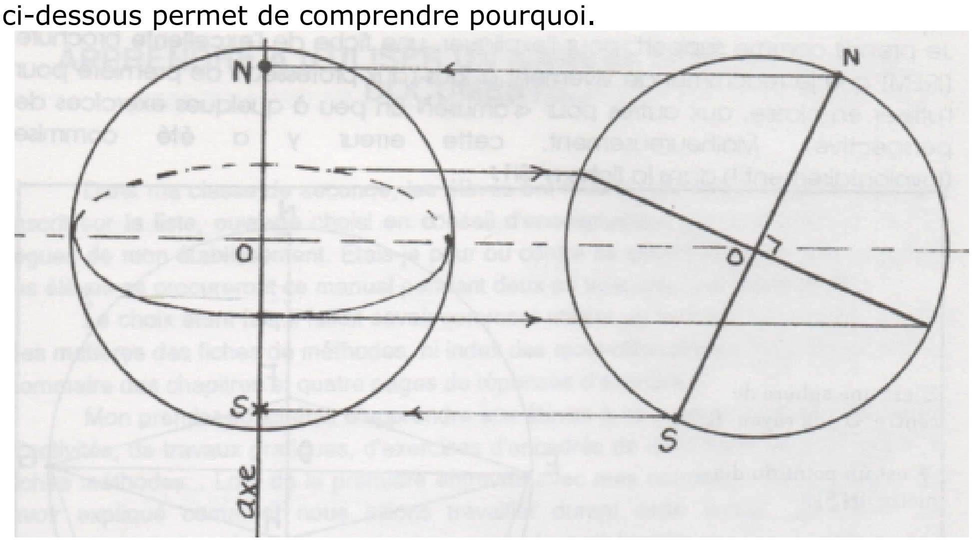
Le point E est sur l'équateur.
Le point G est sur le méridien de Greenwich.
Les coordonnées géographiques du point M sont 40° Nord et 25° Est.
Le point M' est diamétralement opposé au point M.

1. Déterminer les coordonnées géographiques de G et de E.
2. Déterminer les coordonnées géographiques de M'.

Or il s'avère que la figure proposée est incorrecte. En effet :

- soit le globe est vu depuis un point situé au dessus du plan équatorial, et alors le pôle nord est visible, mais pas le pôle sud ;
- soit les deux pôles sont visibles (et situés sur les bords de la figure), et alors l'équateur est « réduit à un trait ».

Le schéma ci-dessous permet de comprendre pourquoi.

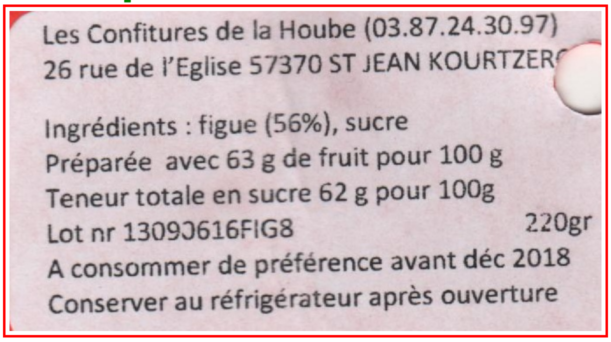


Plus d'explications dans le Petit Vert n°29 : Activités en classe Cubes et sphères en perspective

Retour au sommaire

MATHS ET GASTRONOMIE

LES DOIGTS DANS LE POT DE CONFITURE, mais les yeux sur l'étiquette !



Pendant les vacances de la Toussaint, un de nos adhérents a apprécié les petits déjeuners pris tranquillement.

Il a même eu le temps de lire l'étiquette du pot de confiture artisanale qu'il était en train de déguster*. Les deux premières lignes lui ont semblé contradictoires.

Un autre adhérent, faisant lui même ses confitures, lui a fait cette proposition :
Dans ma bassine, je mets 63 g de fruit pour 100 g. Pendant la cuisson, de l'eau des fruits s'évapore. Il reste 56% de fruits (il n'y a pas d'évaporation pour le sucre...).

En classe, on pourrait simplement donner l'étiquette aux élèves et animer un débat.

Au cas où ce débat aurait du mal à s'instaurer, ou aurait besoin d'être « recadré », l'enseignant pourrait alors suggérer des idées de questions, par exemple « Quel est le pourcentage de masse perdue par les fruits au cours de la fabrication ? » ou « Quelle est la masse perdue par les fruits au cours de la fabrication de ce pot ? » (il faut dans ce cas lire la masse du pot sur l'étiquette) et « Comment expliquer que la teneur totale en sucre soit de 62 g pour 100 g alors que le pourcentage de sucre, facilement calculable, donné dans les ingrédients est moindre ? ».
Qui a dit que les enseignants ne travaillaient pas pendant les vacances ?

MATHS & MÉDIAS

COMMENT PAYER 200% MOINS CHER QU'EN FRANCE ?

Un de nos fidèles lecteurs non lorrains nous a fait parvenir un scan extrait de la quatrième de couverture du magazine de l'UFAL (Union des familles laïques). Parmi divers livres militants (laïcité, santé...), les numéros 65 (juin 2016) et 67 (décembre 2016) comportent cette annonce non corrigée.

Pourquoi les Allemands paient leur loyer deux fois moins cher que les Français ?
Edition : Osez la République sociale, 2012
Auteur : Christophe Hordé
Les Allemands ont en moyenne des loyers inférieurs de 200 % par rapport aux Français. Pourquoi ? L'exemple allemand permet de mieux comprendre les dérives françaises.
Format : 13 x 16 cm – 96 pages – 8,50 €

Cette utilisation de « moins 200% » en traduction de « deux fois moins cher » est, hélas, fréquente dans les médias. Voici donc une bonne raison de travailler cet extrait en classe.

La présentation du livre donne malgré tout envie de l'acheter : les loyers sont-ils deux fois moins chers en Allemagne qu'en France, ou la proportion des revenus dépensés pour payer son loyer en Allemagne est-elle moitié de celle payée en France ? La lecture du livre nous en dira plus...*Pour approfondir ce sujet :*
http://www.latribune.fr/vos-finances/immobilier/pourquoi-l-immobilier-en-l-allemagne-est-moins-cher-486584.html
http://www.lexpress.fr/actualite/immobilier/immobilier-comment-l-allemagne-empeche-les-prix-de-flamber_1352181.html

---

* *http://www.moselle-tourisme.com/manger/produits-du-terroir/ficheproduit/F848150183_les-confitures-de-la-hoube-saint-jean-kourtzerode.html*

MATHS & MÉDIAS

UNE BOULE COMPOSÉE D'HEXAGONES

Repéré dans « le MAG », le supplément de l'EST RÉPUBLICAIN du 20 novembre 2016

Cette boule composée d'hexagones est la plus géométrique des créations de Lor Oberre.

Une évocation de pentagones associés aux hexagones nous aurait fait placer cet extrait dans la rubrique Maths & Arts.
Question pour les élèves : combien d'hexagones et combien de pentagones ont été utilisés ?

Pour les fanas du foot, il y a une réponse ici :
http://www.apprendre-en-ligne.net/blog/index.php/?q=platoniciens.

Pour les fanas des maths, c'est plutôt là :
https://fr.wikipedia.org/wiki/G%C3%A9ode_(g%C3%A9om%C3%A9trie).

La galerie de Lor Oberre :
http://www.deloralalumiere.com/index.php?IDR=2&TG=1&N=1

LA PHRASE DU TRIMESTRE

Pensez deux fois avant de parler et vous parlerez deux fois mieux.

PLUTARQUE

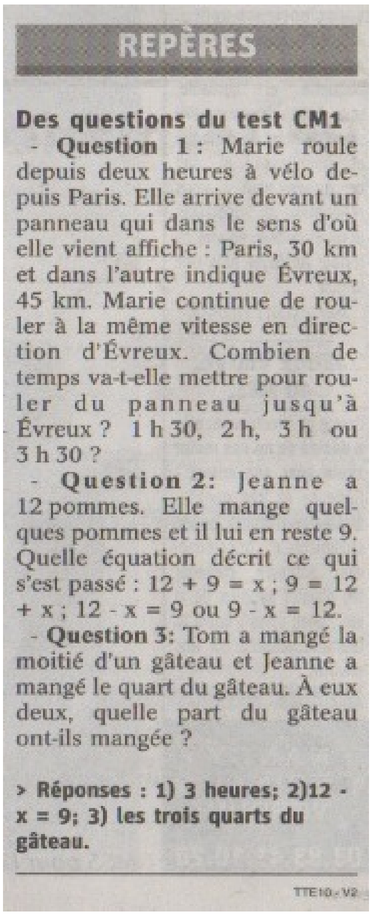
Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

MATHS : LE TRÈS MAUVAIS BULLETIN DES ÉCOLIERS FRANÇAIS

C'était sur deux pages, le titre, d'un article de l'EST RÉPUBLICAIN du 30 novembre 2016. Les médias nationaux ont également relayé l'information, les hommes politiques sont intervenus, mais nous restions sur notre faim car nous ne connaissions pas cette évaluation et nous ne savions pas ce qu'elle avait évalué.

https://en.wikipedia.org/wiki/Trends_in_International_Mathematics_and_Science_Study aide à comprendre ce qu'est cette évaluation TIMSS et qui l'organise.



REPÈRES

Des questions du test CM1

- **Question 1 :** Marie roule depuis deux heures à vélo depuis Paris. Elle arrive devant un panneau qui dans le sens d'où elle vient affiche : Paris, 30 km et dans l'autre indique Évreux, 45 km. Marie continue de rouler à la même vitesse en direction d'Évreux. Combien de temps va-t-elle mettre pour rouler du panneau jusqu'à Évreux ? 1 h 30, 2 h, 3 h ou 3 h 30 ?
- **Question 2:** Jeanne a 12 pommes. Elle mange quelques pommes et il lui en reste 9. Quelle équation décrit ce qui s'est passé : 12 + 9 = x ; 9 = 12 + x ; 12 - x = 9 ou 9 - x = 12.
- **Question 3:** Tom a mangé la moitié d'un gâteau et Jeanne a mangé le quart du gâteau. À eux deux, quelle part du gâteau ont-ils mangée ?

> Réponses : 1) 3 heures; 2)12 - x = 9; 3) les trois quarts du gâteau.

Concernant ce qui a été évalué, l'EST RÉPUBLICAIN confiait à ses lecteurs trois des exercices proposés aux élèves de CM1. Nous pouvons remarquer qu'il s'est montré rassurant en fournissant les réponses.

Ce qui suit est une synthèse exercice par exercice des remarques de membres du comité de rédaction du Petit Vert et de collègues connaissant les mathématiques enseignées au CM1.

La « **question 2** » interpèle dès la lecture de l'énoncé. Le mot « équation » et l'usage de la lettre *x* sont introduits en France au collège pendant le cycle 4. Il n'est pas surprenant que nos élèves de CM1 échouent à cet exercice. Il serait intéressant de connaitre la version originale de cet exercice : le mot « équation » est peut être une mauvaise traduction d'un mot évoquant une expression ou un calcul.

Il aurait été préférable de proposer des « opérations à trou » telles « 12 + 9 = … », « 9 = 12 + … » et « 9 – … = 12 ». On peut aussi se poser la question de l'intérêt de modéliser un tel problème par une « équation ». La situation proposée donne envie de connaitre le nombre de pommes mangées. Ce nombre est obtenu à l'aide du résultat de la soustraction « 12 – 9 ».

Concernant la **« question 3 »**, excepté le mot de "part" qui aurait pu avantageusement être remplacé par "fraction" pour nos élèves de CM1, c'est un problème qui devrait être réussi. L'addition de fractions n'est certes pas au programme mais une représentation en « parts de tartes » devrait suffire.

La **« question 1** » a suscité un nombre important de remarques. Tout d'abord, la distance « Paris-Évreux » n'est pas 75 km mais 105 km (d'après Google maps). Ce sont des distances qui ne seront pas parcourues à vélo par un élève de CM1. De plus, quand nous roulons prenons-nous le temps de lire les indications des panneaux en bordure de route ? Rentrer dans l'« histoire » racontée dans l'énoncé n'est pas des plus aisés.

Plus gênant, les vitesses ne sont pas travaillées en CM1. Même si du "bon sens" suffit, il n'est pas évident de traiter cette situation comme une situation de proportionnalité si la proportionnalité entre la durée et la distance parcourue n'a jamais été rencontrée. On sous-entend, bien sûr, que la vitesse est uniforme. Ce point n'est guère évident pour un élève de CM1 qui dans son environnement ne rencontre que les vitesses instantanées repérées en voiture.

En conclusion, le « bulletin » n'est peut-être pas bon mais il est dommage que les médias et les politiques ne se soient intéressés qu'au classement final.

Au sujet des enquêtes internationales, voir également le communiqué de presse de l'APMEP :
http://www.apmep.fr/Communique-de-presse,6738

Retour au sommaire

MATHS & MÉDIAS

TOUS LES NOMBRES ENTIERS SONT DES NOMBRES PREMIERS

Voici quelques lignes extraites du calendrier 2017 créé pour « LA POSTE » par la société « Oberthur ».

> En mathématiques, le chiffre 7 se situe entre le 6 et le 8, il est également le quatrième nombre premier (divisible par 1 ou lui-même). Le 7 correspond au numéro atomique de l'azote.

Comme souvent dans les médias, il semble difficile d'imager qu'un nombre entier puisse être écrit avec un seul chiffre. Il n'y a pas pourtant pas de difficulté à accepter les mots d'une lettre. Cette confusion « chiffre/nombre » avait déjà été évoquée dans le Petit Vert n°121 à propos de « 5 » dans le calendrier 2015 du même éditeur.
À cette époque, nous n'avions pas évoqué cette intéressante précision à propos des nombres premiers : tout nombre entier est divisible par 1, nous en déduisons que tout nombre entier est premier, tout nombre entier est divisible par lui même, nous en déduisons que tout nombre entier est premier. À moins que le mot « ou » ne soit un « ou exclusif » : dans ce cas, seul 1 est premier.

Soyez rassuré, le Petit Vert n'hésitera pas à mettre en avant les médias qui utiliseront le vocabulaire mathématique de manière pertinente et rigoureuse.

MATHS ET GASTRONOMIE

Des symboles mathématiques pour les amateurs de fondant au chocolat

Sans avoir fait d'études scientifiques, l'acheteur comprend qu'en ajoutant 3 œufs et 125g de beurre au contenu de la boite, on obtient une pâte qui, cuite au four entre 10 et 15 minutes, nous permet d'obtenir un gâteau pour 8 personnes.

Objection de l'acheteur utilisateur : on ne me dit pas comment régler le thermostat du four.

Objection du lecteur du Petit Vert : en classe, je ne me vois pas additionner des œufs avec des grammes de beurre et l'égalité n'est pas symétrique.
Faisant fi de cette objection, un de nos lecteurs a acheté cette préparation pour un « fondant au chocolat », l'a dégusté en famille et a eu envie de partager avec nous cet intéressant extrait de l'emballage.

Retour au sommaire

MATHS ET GASTRONOMIE

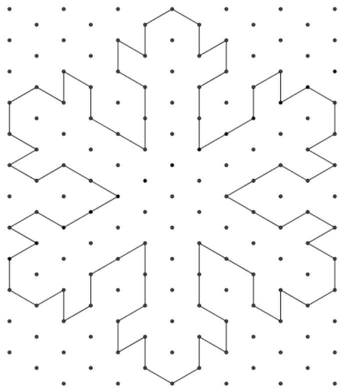
UN FLOCON SURPRISE

François DROUIN

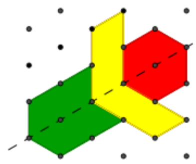
La lecture d'un catalogue de vente de surgelés peut être source de bons moments géométriques.

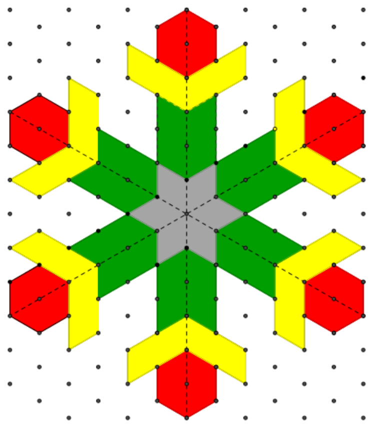
Cette photo m'a interpelé : j'ai eu envie d'imaginer comment redessiner la vue de dessus de ce flocon et comprendre comment la machine a été programmée pour le découpage et la mise en place des parties du flocon.

Le flocon a six « bras », la partie centrale est une étoile à six branches, il semble être inscrit dans un hexagone régulier : ces trois raisons m'incitent à commencer ma recherche sur un réseau triangulé.



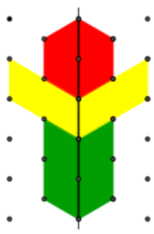
En comparant des longueurs sur un même « bras », je suis parvenu au dessin de droite. Une observation attentive de la photo m'a fait remarquer que des couleurs différentes étaient visibles et que les bras étaient formés d'assemblages de deux types de prismes



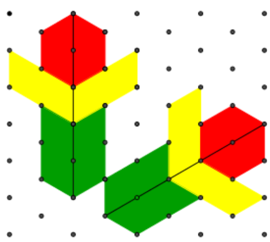


Le dessin est réalisable avec les instruments de géométrie traditionnels à partir d'un réseau triangulé tracé dans un hexagone régulier de côté « 6 ». Il est cependant tentant d'utiliser les transformations du plan mises à disposition par les logiciels de géométrie dynamique.

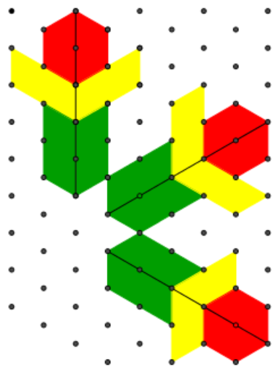
Un premier ensemble de trois polygones dessinés dans un réseau triangulé...



... une symétrie orthogonale...

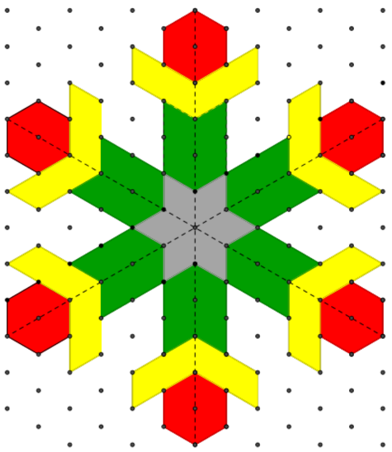


... une rotation de 60°...



... une rotation de 120° (ou la rotation précédente)...

Retour au sommaire



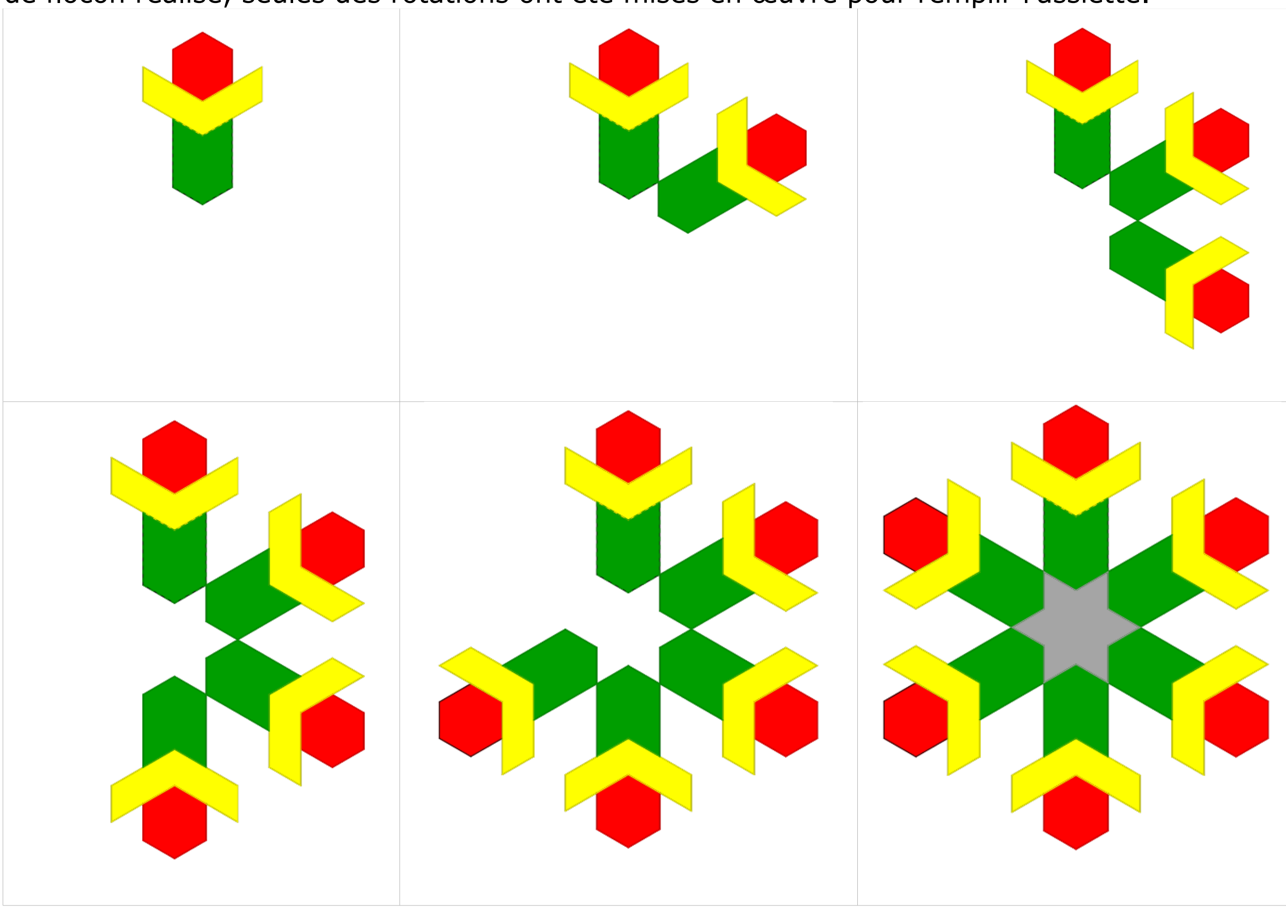
… et enfin une nouvelle symétrie orthogonale qui permet de terminer le motif.

D'autres algorithmes de construction sont envisageables et pourraient être proposés par des élèves.

Et à l'usine de fabrication ?

Parallélogrammes et trapèzes isocèles pavent le plan, facilitant le découpage des pièces.

Sur l'assiette de présentation, l'étoile à six branches permet d'imaginer qu'une fois un « bras » de flocon réalisé, seules des rotations ont été mises en œuvre pour remplir l'assiette.



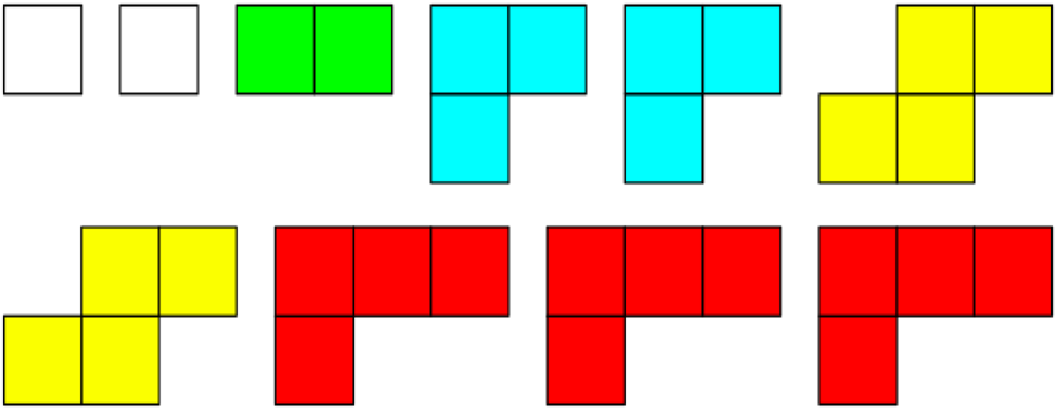
Voici de quoi montrer aux élèves l'utilité de la géométrie dans le monde professionnel !

Retour au sommaire

MATHS & MÉDIAS

DES DÉFIS POUR DE JEUNES ÉLÈVES

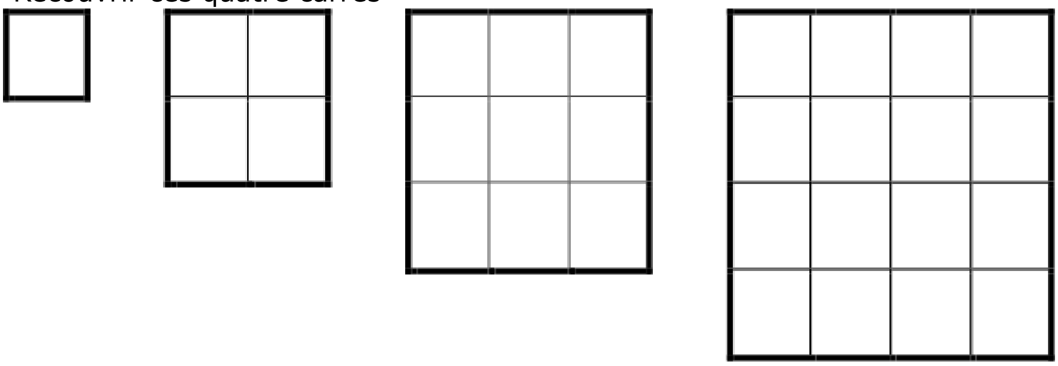
Les dix pièces



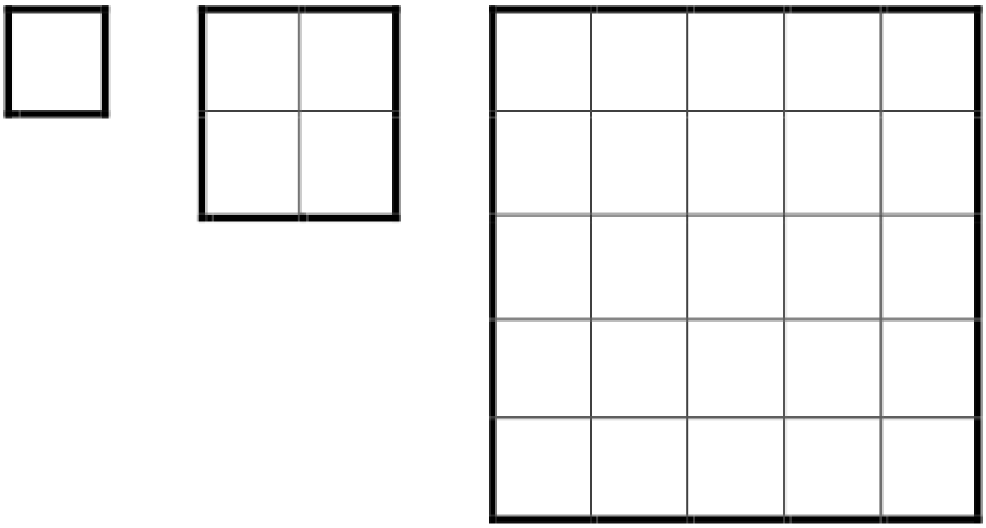
Les pièces sont retournables et de même couleur sur les deux faces. Elles peuvent être réalisées en carton, en « carton mousse », etc. Des carrés de base de 3 cm de côté facilitent leur manipulation par des petites mains.

Trois défis avec les dix pièces

1 – Recouvrir ces quatre carrés

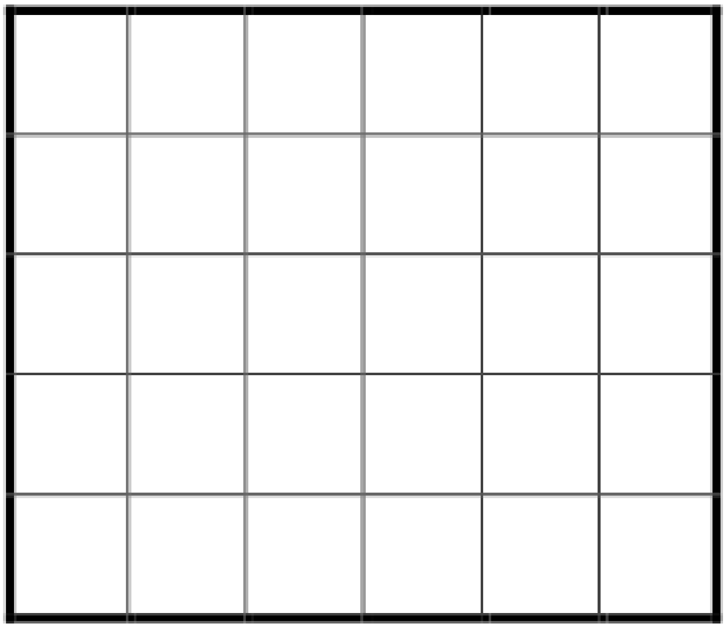


2 – Recouvrir ces trois carrés



3 - Recouvrir ce rectangle de telle sorte que deux pièces de même couleur ne se touchent ni par un sommet, ni par un côté.

Retour au sommaire



LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°129)

Proposition de problème

(par Jacques Choné)

On considère, pour $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, la matrice carrée d'ordre n, $S(n)$, formée "en serpent" par les nombres $1,2,\dots,n^2$. Par exemple, $S(2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $S(3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang, le déterminant et la trace de $S(n)$.

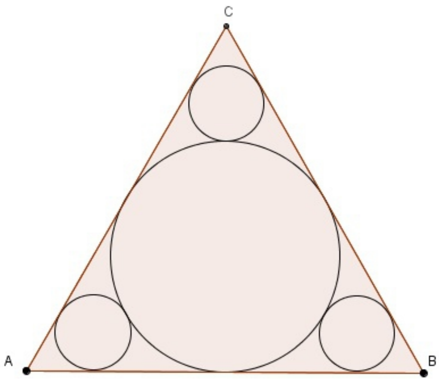
2. On prend n termes de $S(n)$ de telle façon qu'un terme soit choisi dans chaque ligne et dans chaque colonne. Quel est l'ensemble des valeurs des sommes que l'on peut obtenir en ajoutant ces n termes ?
Comparer le résultat avec celui correspondant à la même démarche effectuée sur la matrice carrée d'ordre n, $M(n)$ formée par les nombres $1,2,\dots,n^2$ où les termes de chaque ligne sont rangés par ordre croissant, par exemple : $M(2)=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $M(3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Un grand merci à André Stef, qui a tenu depuis 2014 cette rubrique « Problèmes ». C'est désormais Philippe Févotte qui en a la charge ; c'est à lui que vous devez envoyer vos propositions de solutions, ainsi que toute proposition ou suggestion de nouveau problème.

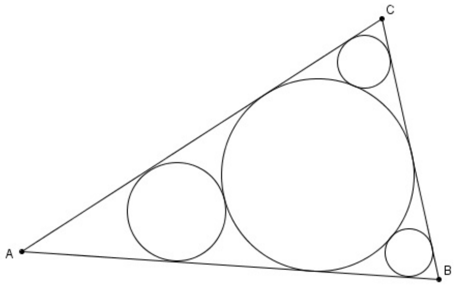
Retour au sommaire

UN PREMIER DÉFI POUR VOS ÉLÈVES (n° 129-a)

Défi proposé par Laurent



Un triangle équilatéral étant donné, construire cette figure : un cercle tangent aux trois côtés, et trois cercles « dans les coins », tangents au premier cercle et à deux des côtés.
Il faudra donner un programme de construction.



Prolongement : tracer quatre cercles tangents dans un triangle quelconque, dans une disposition analogue à la figure ci-contre. Donner également un programme de construction.

UN SECOND DÉFI POUR VOS ÉLÈVES (n° 129-b)

Girard, Stevin, Cédric et Pol

Le commissaire Girard, qui est maintenant à la retraite (il a été remplacé par le commissaire Stevin) discute mathématiques avec son petit-fils Pol.

« Je vais te montrer quelque chose d'intéressant : tu prends un nombre entier. S'il est pair, tu le divises par 2 ; s'il est impair, tu le multiplies par 3 et tu ajoutes 1. Et tu continues ainsi avec le résultat jusqu'à obtenir 1. Par exemple, si je pars de 3, j'obtiens successivement 10, 5, 16, 4, 2, 1 en 7 coups.
- Mais si je n'obtiens pas de 1, ça ne s'arrêtera jamais ?
- On n'a jamais trouvé d'exemple où ça ne s'arrête pas.
- Alors c'est démontré ?
- Non ! Ce n'est pas parce qu'on n'a jamais trouvé un tel exemple que c'est démontré. Mais si tu arrives un jour à la démontrer, tu auras peut-être la médaille Fields comme ton oncle Cédric ».
Ils essayent ensemble encore quelques exemples :
En partant de 2 : 2 → 1. C'est fini en un coup !
En partant de 5 : 5 → 16 → 8 → 4 → 3 → 2 → 1. Il a fallu 5 coups.
En partant de 19 :
19 → 58 → 29 → 88 → 44 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 10 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1.

Retour au sommaire

« Oh ! Il a fallu 21 coups ! Et on est « monté jusqu'à 88, c'est énorme ! ».

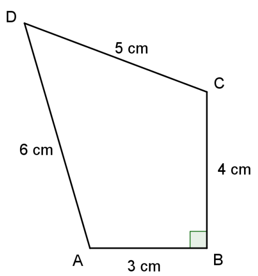
Papy Girard dit à son petit fils : « J'ai même écrit un algorithme pour faire des essais, et je l'ai ensuite programmé sur mon ordinateur. Le voici ».

```
Variable n (entier non nul) : c'est le nombre de départ.
Début de l'algorithme
        Lire n
        Tant que n≠1 faire ceci :
                si n est pair alors remplacer n par n/2 sinon le remplacer par 3n+1
        (fin de l'instruction "faire")
        Afficher n
Fin de l'algorithme
```

Après quelques essais, Pol réplique : « Il fonctionne bien, ton programme, mais il use beaucoup de papier ; il affiche tous les nombres trouvés, mais pas le nombre de coups ni la valeur maximale rencontrée en cours de route. Moi je voudrais quelque chose qui n'affiche pas la liste des nombres, mais simplement le nombre de coups et la valeur maximale. Par exemple, en partant de 19, ça m'afficherait : 21 coups, maximum 88 ».
Papy lui répond : « Tu es assez grand, tu as dû apprendre à écrire un algorithme. Alors tu peux le faire toi-même ! ».

Et vous, sauriez-vous comment modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche ce que désire Pol ?

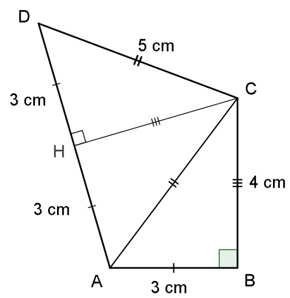
SOLUTION DU DÉFI 128-a



Quelle est l'aire du quadrilatère ABCD ?

Solution : La mesure de l'hypoténuse [AC] du triangle rectangle ABC est 5 cm (théorème de Pythagore). Le triangle ACD est don isocèle en C. Soit(CH) est la médiatrice de [AD].

Les triangles ABC, AHC et DHC sont superposables et ont la même aire donc l'aire du quadrilatère ABCD est 3 x 6 cm² = **<u>18 cm²</u>**



SOLUTION DU DÉFI 128-b

Rappel du défi : Avec les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, chacun n'étant utilisé qu'une seule fois, on forme des nombres de un, deux ou trois chiffres. Par exemple : 136, 40, 8, 95, 27. On calcule la somme de ces nombres ; avec l'exemple précédent, on obtient ce total : 136+40+8+95+27=306.

Le défi était le suivant : obtenir, si c'est possible, **un total égal à 2017**, ou s'en approcher le plus près possible.

Retour au sommaire

Il semble que ce soit impossible d'obtenir 2017 ; nous allons d'ailleurs le démontrer ci-dessous. Par contre, on peut obtenir 2016, et de beaucoup de façons : par exemple 485+621+903+7 ou 673+852+490+1.... (voir en fin de cet article).

♦ Première remarque préliminaire : le plus petit nombre que l'on puisse obtenir est 0+1+2+...+9 = 45. Le plus grand est 963+852+741+0 = 2556 (ou son "jumeau" 963+852+740+1), que l'on obtient en prenant tout d'abord les plus grandes centaines (9, 8 et 7), ensuite les plus grandes dizaines (6, 5 et 4) et enfin le reste.

♦ Seconde remarque : plus il y a de « morceaux » pour décomposer le nombre, moins ce nombre sera élevé. Or on veut obtenir (ou approcher) 2017. Avec une décomposition en quatre « morceaux » (du type XXX+XXX+XX+XX), on ne peut pas dépasser 1926 (973+862+51+40 ou 973+862+50+41). Pour obtenir 2017, les seules combinaisons possibles seront donc de la forme XXX+XXX+XXX+X.

♦ Troisième remarque : si une somme est du type XXX+XXX+XX0+1, on ne la modifie pas en la remplaçant par XXX+XXX+XX1+0.

♦ Quatrième remarque : quand on a trouvé une solution, on constate que c'est toujours un multiple de 9.

Nous allons démontrer les deux propriétés suivantes :
- si le nombre qu'on veut obtenir n'est pas multiple de 9, c'est impossible (propriété 1) ;
- on peut atteindre tous les multiples de 9, de 45 à 2556 inclus (propriété 2).

Propriété

Montrons que pour toute écriture utilisant une seule fois chacun des chiffres de 0 à 9, l'addition de nombres à un chiffre ou deux chiffres ou trois chiffres donne nécessairement un multiple de 9.
Pour envisager toutes les écritures on va convenir que tout nombre de trois chiffres va s'écrire *CDU* quitte à ajouter à l'écriture d'un nombre à deux chiffres un zéro à gauche des dizaines, voire même deux zéros pour un nombre à un chiffre.

Donc avec la convention précédente toute somme peut s'écrire : $\sum_{i=1}^{i=10} CiDiUi$

(Rappel : avec les zéros qui n'ajoutent rien il faut se souvenir que 0+1+2+3...+9=45)

$\sum_{i=1}^{i=10} CiDiUi = \sum_{i=1}^{i=10} 100\,Ci+10\,Di+Ui = \sum_{i=1}^{i=10} 99\,Ci+Ci+9\,Di+Di+Ui = 9\sum_{i=1}^{i=10} 11\,Ci+Di + 45$,

puisque la somme des chiffres des centaines des dizaines et des unités fait 45.

Ainsi toute somme peut s'écrire :$9\{(\sum_{i=1}^{i=10} 11\,Ci+Di\,)+5\}$. Le résultat est bien un multiple de 9.

Propriété

Peut-on obtenir tous les multiples de neuf à partir de 45 jusqu'à 2556 ?
Lorsqu'on échange une centaine avec une dizaine on obtient une différence de *CDU-DCU* = 90*(C-D)* ; pour un échange d'une centaine avec une unité, *CDU-UDC* =99 (*C-U*) ; pour un échange d'une dizaine avec une unité, *CDU-CUD* = 9(*D-U*). Cela est valable que ce soit pour des nombres à deux ou à trois chiffres.
En partant de 2556 (la plus grande valeur possible), avec les échanges évoqués ci-dessus, on peut soustraire à un nombre donné 9, 18,...81 avec 9(*D-U*), soustraire 90 avec 90(*C-D*) ou soustraire 99 avec 99(*C-U*).
On peut donc ainsi obtenir tous les multiples de 9 de 2556 à 45. La seconde propriété est démontrée.

Finalement, on a démontré qu'on ne pouvait pas atteindre 2017, et on subodore qu'il y a beaucoup de façons d'obtenir le nombre le plus proche qui est 2016.

Retour au sommaire

On aimerait obtenir toutes les combinaisons qui permettent d'atteindre 2016. Nous en avons déjà cité deux tout au début de cet article. L'informatique va nous y aider...

Alain Humbert, professeur de mathématiques et d'ISN au lycée Poncelet de Saint-Avold, a conçu un petit programme qui lui a permis d'obtenir **2880 combinaisons différentes pour 2016**. Il a d'abord remarqué, comme nous l'avons montré ci-dessus (remarque 2) que seules les combinaisons de type XXX+XXX+XXX+X pouvaient convenir.
En prenant les blocs de type ABC+DEF+GHI+J, il constate que l'on peut permuter les chiffres des unités (soit 4! possibilités), les chiffres des dizaines (3! possibilités) ou encore les chiffres des centaines (3! possibilités). Mais on aura alors compté les permutations de ABC DEF GHI entre eux trois : 3! possibilités, qui ne sont pas de nouvelles solutions. Finalement, la réponse en donne 4!x3!x3!/3! C'est-à-dire 144 possibilités. Au final, il n'y a vraiment que 20 possibilités multipliées par les 144 permutations donc 2880 solutions.
Il a écrit le code sous Python : il trouve en 1 minute 15 sur son vieux PC de 2008.
La liste des possibilités tient sur **46 pages A4** (à raison d'une ligne par solution, en Times new roman 10) !
Nous le remercions pour son travail.

Nous remercions également Serge Ermisse, qui a utilisé un programme sous Python. Au bout de 20 minutes, après 10 millions de tirages, le programme lui a fourni les 2880 solutions pour 2016. Quant à obtenir 2017, ne voyant rien venir après un certain temps, il a abandonné...

SOLUTION DU PROBLÈME DU TRIMESTRE (n°128)

Sur l'algorithme d'Euclide « étendu »

Rappel de l'énoncé

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD de deux entiers (ou plus généralement de deux éléments d'un anneau … euclidien, par exemple celui des polynômes à coefficients dans un corps commutatif. Restons en à l'ensemble des entiers pour ce problème),

***Algorithme d'Euclide** pour le calcul du pgcd de deux entiers a et b, avec b non nul (prouver qu'il s'arrête bien n'est pas l'objet de ce problème).*
On écrit successivement les divisions euclidiennes (les termes r_k en fin d'égalité désignent les restes et les termes q_k les quotients) :

$a=q_1 b+r_1$
$b=q_2 r_1+r_2$
$r_1=q_3 r_2+r_3$
...
$r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$
...
$r_{n-1}=q_{n+1} r_n+0$ *, où r_n désigne le dernier reste non nul. On a alors $pgcd(a,b)=r_n$.*

Lorsqu'on « étend » l'algorithme d'Euclide pour le calcul de deux entiers a et b, on peut alors de déterminer deux entiers u et v tels que $au+bv=pgcd(a,b)$. (L'identité de Bézout exprime l'existence d'un tel couple))

On peut « remonter » l'algorithme*. On écrit ainsi*

$pgcd(a,b)=r_n=r_{n-2}-q_n r_{n-1}$

$pgcd(a,b)=r_{n-2}-q_n(r_{n-3}-q_{n-1}r_{n-2})=r_{n-2}(1+q_n q_{n-1})+r_{n-3}(-q_n)$

...

$pgcd(a,b)=u_n a+v_n b$

On peut « descendre » l'algorithme. *On écrit*

$r_1=a-b*q_1$

$r_2=b-q_2 r_1=b-q_2(a-q1*b)=a*(-q_2)+b(1+q_1*q_2)$

...

$r_k=r_{k-2}-q_k r_{k-1}=a*\alpha_{k-2}+b*\beta_{k-2}-q_k(a*\alpha_{k-1}+b*\beta_{k-1})=a*(\alpha_{k-2}-q_k\alpha_{k-1})+b*(\beta_{k-2}-q_k\beta_{k-1})$

...

$r_n=r_{k-2}-q_n r_{n-1}=a*\alpha_{n-2}+b*\beta_{n-2}-q_n(a*\alpha_{n-1}+b*\beta_{n-1})=a*(\alpha_{n-2}-q_k\alpha_{n-1})+b*(\beta_{n-2}-q_k\beta_{n-1})$

$r_n=a*\alpha_n+b*\beta_n=pgcd(a,b)$

Ces deux algorithmes fournissent alors deux couples (u_n,v_n) *et* (α_n,β_n) *satisfaisant l'identité de Bézout.*

Question : *Ces deux couples sont-ils égaux ?*

Solution proposée par Jacques Choné.

La réponse est OUI.

En utilisant les notations de l'énoncé et en posant, de plus, $r_{-1}=a$, $r_0=b$, écrivons matriciellement les égalité considérées.

Par exemple $r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k$ se traduit par $\begin{pmatrix} r_{k-1} \\ r_k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_{k-2} \\ r_{k-1} \end{pmatrix}$.

1. En « remontant » l'algorithme :

$$\begin{pmatrix} r_{n-1} \\ r_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_{n-2} \\ r_{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-1} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r_{n-3} \\ r_{n-2} \end{pmatrix}=.....=\left(\prod_{k=0}^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-k} \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

On notera que la multiplication des matrices n'étant pas commutative le produit indiqué doit respecter l'ordre des indices.

2. En « descendant » l'algorithme :

Montrons, à l'aide d'une récurrence finie, qu'on a alors pour tout $m\in\{1,\ldots,n\}$:

$$\begin{pmatrix} r_{m-1} \\ r_m \end{pmatrix}=\left(\prod_{k=0}^{m-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{m-k} \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} .$$

Comme $r_1=a-bq_1$ *et* $r_0=b$, la proposition est vraie pour $m=1$.

Soit $m\in\{1,\ldots,n-1\}$; Supposons, (HR), que la proposition soit vraie pour *m.*

Puisque $r_{m+1}=r_{m-1}-r_m q_{m+1}$, on a (d'après (HR) pour la seconde égalité) :

Retour au sommaire

$\begin{pmatrix} r_m \\ r_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{m-1} \\ r_m \end{pmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{m+1-k} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ce qui termine la récurrence.

La proposition étant vraie pour *n*, cela signifie que r_n est déterminé comme combinaison linéaire de *a* et *b* en descendant l'algorithme par la même formule qu'en le remontant.
D'où le résultat.

Les coefficients de de *a* et *b* sont les termes de la seconde ligne de $M = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_{n-k} \end{pmatrix} \right)$

c'est-à-dire les termes de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} M$ *.*

Autre solution*, ou plutôt autre rédaction, par André Stef.*
On précisera ici, en lien avec les algorithmes vus en lycée ou en premières années post BAC, les constructions des couples (u_n, v_n) *(qu'on renommera et réordonnera) et* (α_n, β_n) *.*

On pose, comme pour la solution de Jacques Choné, $r_{-1} = a, r_0 = b$ *et* $r_{n+1} = 0$ *(« premier » reste nul)*

Remontée de l'algorithme *(vue au lycée ou en post BAC, notamment pour les polynomes). On pose* $x_{n+1} = 0, x_n = 1$ *. On a ainsi* $pgcd(a, b) = x_n r_n + x_{n+1} r_{n-1}$

On a alors, par une récurrence descendante finie (oui : descendante et finie), $pgcd(a, b) = x_k r_k + x_{k+1} r_{k-1}$ *pour tout entier* $k \in [\![0, n]\!]$ *, où on aura posé pour tout* $k \in [\![0, n-1]\!]$ $x_k = -q_{k+1} x_{k+1} + x_{k+2}$ *.*

NB : on vérifie l'hérédité par l' écriture , pour $1 \leqslant k \leqslant n$ *:*
$pgcd(a, b) = x_k r_k + x_{k+1} r_{k-1} = x_k (r_{k-2} - q_k r_{k-1}) + x_{k+1} r_{k-1} = (-q_k x_k + x_{k+1}) r_{k-1} + x_k r_{k-2} = x_{k-1} r_{k-1} + x_k r_{k-2}$

Ainsi, pour $k = 0$ *, on a* $pgcd(a, b) = x_k r_k + x_{k+1} r_{k-1} = x_0 b + x_1$ *.On obtient ainsi que le couple* (x_1, x_0) *satisfait l'identité de Bézout (il s'agit du couple* (u_n, v_n) *présenté en énoncé).*

Mise en forme matricielle : On pose $M_k = \begin{pmatrix} -q_k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ce qui permet d'écrire* $\begin{pmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{pmatrix} = M_k \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix}$ *pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ *, et ainsi* $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = M_1 M_2 \ldots M_n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Descente de de l'algorithme *(on la rencontre dans les livres de TS, en lien avec une feuille de calcul sur tableur)****.*** *On pose* $\alpha_{-1} = 1, \beta_{-1} = 0, \alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$ *. On a ainsi* $r_{-1} = \alpha_{-1} a + \beta_{-1} b$ *et* $r_0 = \alpha_0 a + \beta_0 b$ *.*

On démontre alors par récurrence double finie (oui : double et finie) qu'on a alors $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ *pour tout entier* $k \in [\![-1, n]\!]$ *, où on aura posé pour tout* $k \in [\![1, n]\!]$ $\alpha_k = \alpha_{k-2} - q_k \alpha_{k-1}$ *et* $\beta_k = \beta_{k-2} - q_k \beta_{k-1}$

(on le vérifie par l' écriture : $r_k = r_{k-2} - q_k r_{k-1} = \alpha_{k-2} a + \beta_{k-2} b - q_k (\alpha_{k-1} a + \beta_{k-1} b)$ *)*

Retour au sommaire

Ainsi, pour $k=n$ *, on a* $pgcd(a,b)=r_n=\alpha_n a+\beta_n b$ *.On obtient ainsi que le couple* (α_n,β_n) *satisfait l'identité de Bézout.*

Mise en forme matricielle : Avec la même notation $M_k=\begin{pmatrix}-q_k & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *, on a* $\begin{pmatrix}\alpha_k\\ \alpha_{k-1}\end{pmatrix}=M_k\begin{pmatrix}\alpha_{k-1}\\ \alpha_{k-2}\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\beta_k\\ \beta_{k-1}\end{pmatrix}=M_k\begin{pmatrix}\beta_{k-1}\\ \beta_{k-2}\end{pmatrix}$ *, pour tout* $k\in[\![1,n]\!]$ *, et ainsi* $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=M_n M_{n-1}\dots M_1\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\beta_n\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}=M_n M_{n-1}\dots M_1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *.*

Symétrie :
Posant $A=M_1 M_2\dots M_n$ *et* $B=M_n M_{n-1}\dots M_1$ *, on remarque que les matrices* M_k *sont toutes symétriques, et donc* A *et* B *sont symétriques, et on a également :* ${}^tA={}^tM_n{}^tM_{n-1}\dots{}^tM_1=M_n M_{n-1}\dots M_1=B$ *, donc* $A=B$ *.*
On déduit de $\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\beta_n\\ \beta_{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *que* $x_0=\beta_n$ *.*
L'argument (à nouveau) de la symétrie de A (matrice 2x2) permet de déduire de $\begin{pmatrix}x_0\\ x_1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ *que* $x_1=\alpha_n$ *.*
Ainsi $(x_1,x_0)=(\alpha_n,\beta_n)$.

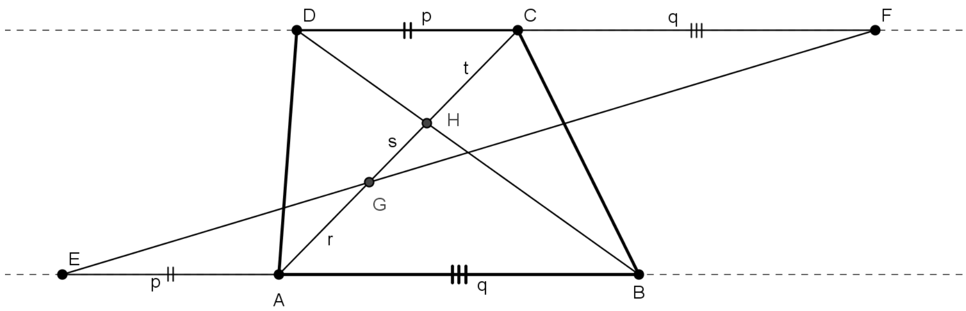
Les deux algorithmes fournissent donc le même couple de coefficients pour l'identité de Bézout.

LE SOPHISME DU TRIMESTRE (n° 129)

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Pour étudier ces sophismes, il est recommandé de faire les figures « à main levée », même si elles ne sont pas tout a fait exactes.
Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit. Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Théorème : La somme des deux côtés parallèles d'un trapèze est nulle

Considérons un trapèze ABCD de bases AB = q et DC = p. Prolongeons DC d'une longueur CF = q, et BA d'une longueur AE = p, comme le montre la figure ci-dessous.



On trace la droite (EF) qui coupe (AC) en G et la droite (DB) qui coupe (AC) en H.

Retour au sommaire

On appelle r, s, t les longueurs respectives des segments [AG], [GH], [HT].

Nous allons démontrer que p+q = 0.
Pour cela, nous avons besoin d'une propriété (bien connue) des proportions qui est la suivante :
Si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, alors $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{a}{b}=\frac{a-c}{b-d}$.

Les triangles ABH et CDH sont semblables, car les angles $\widehat{HAB}$ et $\widehat{HCD}$ sont égaux (angles alternes-internes), les angles $\widehat{HDC}$ et $\widehat{HBA}$ sont égaux (angles internes), et les angles $\widehat{HAB}$ et $\widehat{HCD}$ sont égaux (opposés par le sommet). ;
Par conséquent, $\frac{DC}{AB}=\frac{HC}{HA}$, soit $\frac{p}{q}=\frac{t}{r+s}$.
On montre de la même manière que les triangles EAG et FGC sont semblables, d'où $\frac{p}{q}=\frac{r}{s+t}$.
Il en résulte que $\frac{p}{q}=\frac{r}{s+t}=\frac{t}{r+s}$.
En appliquant la propriété des proportions énoncée ci-dessus, on a $\frac{p}{q}=\frac{r-t}{(s+t)-(r+s)}=\frac{r-t}{t-r}=-1$

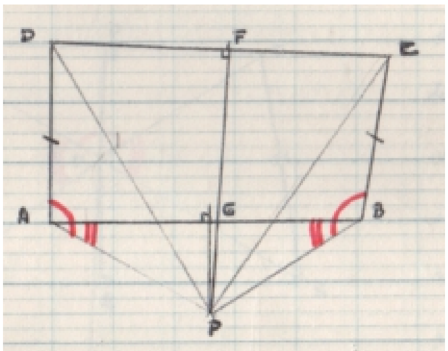
On en conclut donc que p et q sont opposés, et que leur somme p+q est nulle.

Le théorème ci-dessus est donc démontré.

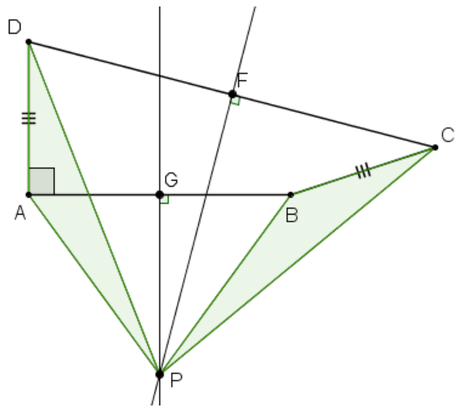
Ce sophisme est extrait de « Trugschlüsse », de W. Leitzmann, publié à Leipzig (éd. Teubner) en 1913.

SOPHISME N°128 : LA SOLUTION

Le sophisme proposé était le suivant : « **Un angle droit est égal à un angle obtus** ».



La figure proposée était la suivante : la médiatrice de [DC] et celle de [AB] se coupent en P (la figure, faite à main levée, est approximative). Les triangles PAD et PBC sont égaux (puisque PA=PB et PD=PC).
D'où l'on déduisait que les angles GAD et GBC étaient égaux, ce qui démontrait la proposition.



En réalité, la figure « approximative » était faite pour vous induire en erreur : les deux triangles PAD et PBC ne sont pas disposés comme sur la figure ci-dessus, mais comme sur la figure de gauche (réalisée sous GeoGebra) : la disposition des segments [PD] et [PC] est telle que les angles s'ajoutent d'un côté et de retranchent de l'autre (alors que la démonstration proposée dans le Petit Vert 128 suggérait , comme on le voyait sur la figure, qu'ils se retranchaient des deux côtés).

Retour au sommaire

Moralité : quand on vous dit que « la géométrie est l'art de raisonner juste sur une figure fausse » (citation de Descartes), ce n'est pas tout à fait exact !!!

Retour au sommaire