LE PETIT VERT

Bulletin de la Régionale Lorraine APMEP

N° 128	DECEMBRE 2016

Une enseigne, rue Saint Jean, à Lyon

Voir l'énigme des pentagones page 45

Voir aussi Nos premières journées nationales et Push & Pop

www.apmeplorraine.fr

N° ISSN : 0760-9825. Dépôt légal : décembre 2016. Directeur de la publication : Gilles WAEHREN.
Pour les adhérents lorrains de l'APMEP, à jour de leur cotisation, l'abonnement au Petit Vert est gratuit. Il est proposé en version électronique (PDF). Cependant, (seulement si vous n'êtes plus en activité et si vous n'avez pas d'adresse électronique), vous pouvez demander une version papier expédiée par la poste (en format réduit et sans la couleur) ; pour cela, envoyez une demande à jacverdier@orange.fr. Les adhérents qui sont mutés dans une autre académie peuvent demander de continuer à recevoir le Petit Vert quelque temps encore (version électronique PDF uniquement).

SOMMAIRE

Retour au sommaire

ÉDITO

NOS PREMIÈRES JOURNÉES NATIONALES DE L'APMEP

Fin juin 2016 : « Que faites-vous au début des vacances de la Toussaint ? Accompagnez-nous aux journées nationales de maths à Lyon ! Ça va vous plaire ! ». On ne peut rien refuser à Odile : elle anime depuis deux ans des ateliers jeux-mathématiques dans nos classes. Quelle bouffée d'oxygène ! Nous pouvons enfin faire des mathématiques autrement, en petits groupes.

Rendez-vous est pris gare de Metz, le 21 octobre, non sans une certaine appréhension : saurons-nous trouver un langage commun avec des professeurs de mathématiques ? Dans notre entourage, nous ressentons même, étrangement, une certaine compassion…

Problème n°1 : Si on admet que Metz, Strasbourg et Lyon sont les sommets d'un triangle rectangle en S, que l'on connait le temps t1 de (MS) et le temps t2 de (SL), est ce que la SNCF peut optimiser le temps de voyage en prenant l'hypoténuse (ML) du triangle ?

Cette année, à Lyon, le thème est « A la lumière des mathématiques ». Est-ce pour cela que nous sommes marquées en jaune comme les centaines de cellules présentes ?

Cela fait longtemps que nous ne trouvons pas dans l'éducation nationale une formation stimulante. Toutes seules devant les FOAD, il n'y a que l'écran qui soit lumineux.

Nous voilà à la conférence inaugurale de Laure Saint-Raymond, professeure à l'Université Pierre et Marie Curie et à l'ENS de Paris : « Le désordre est presque sûr ». Le désordre annoncé était bien… dans notre cerveau ! Impressionnées par tant de savoirs et d'aisance, un peu noyées par l'équation de Boltzmann, mais pas découragées.

Samedi et dimanche : participation à des ateliers variés et accessibles (nous voilà rassurées). Serge Petit et Annie Camenisch : maths, linguistique et poésie (Guillevic) ; Françoise Bertrand : jeux à photocopier et plastifier (nous avons encore toutes les vacances....) ; Céline Nigon et Anthony Simand : description des logiciels pour une initiation à la programmation dans nos classes ; Nicolas Pelay, de "Plaisir Math" : découverte de nouveaux jeux. On se frotte par avance les mains de l'aide que va nous apporter WIMS, ce service libre d'exercices interactifs. Côté conférence, nous avons été bluffées par le facétieux "magimathématicien" Jean-Baptiste Aubin, nous ne regarderons plus les nombres 37 et 142857 de la même façon.

Nous avons déambulé ravies, ne sachant où donner de la tête parmi tous les exposants. Nous sommes même embarquées dans un trafic de Pentaminos dans les couloirs.

Point d'orgue des journées, le repas de la Régionale Lorraine. Pour atteindre la Brasserie Georges, nous devons trouver l'issue du véritable anneau de Moëbius qu'est la gare Perrache. Ce retard nous vaut les huées de toute la salle.

Problème n° 2 : Si on estime qu'une personne occupe une surface de 1 m^2 et que l'on suppose que la salle de la brasserie est carrée, si 20 personnes sont alignées sur le côté droit de la salle, quel est le niveau sonore en décibels dans cette pièce ?

Après un repas copieux, nous faisons nos fonds de poches pour nous acquitter de notre dette, la CB ayant été désavouée au dernier moment. Bonne chance à la trésorière ! Journée bien remplie, nous nous hâtons de rentrer avec notre équipée (mécaniciennes à leurs heures perdues) afin de faire notre rituelle partie de jeu (on joue toujours avec Odile). C'était sans compter sur un sac suspect qui a fait arrêter notre métro... (pourvu que le sac ne soit pas jaune !).

Nous avons trouvé l'accueil de ces journées très chaleureux. Nous avons rencontré des personnes simples, accessibles, passionnées. Ces journées ont été enrichissantes professionnellement et humainement. L'étincelle est revenue... Merci à vous touTEs.

Rendez-vous est pris pour « SurpreNantes ». Vive les maths !

Merci Odile !!!

Catherine et Sophie, école primaire de Lorry-les-Metz

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

IL Y A 25 ANS DANS LE PETIT VERT

Dans le n°28 de décembre 1991, on pouvait lire cet éditorial signé Daniel Vagost.

EST-CE LE TEMPS DES SOLDES ?

Qui n'a pas vu le mois dernier le gros titre sur fond noir (comme une annonce mortuaire) du Point : "On liquide les profs", avec le sous-titre "On brade la formation des enseignants" ? Qui n'a pas entendu ces jours-ci parler des difficultés de la mise en place des I.U.F.M. ? Qui n'a jamais entendu les échanges entre matheux et didacticiens ?

Et nous dans ce débat ? (ce déballage !!).

Nous croyons toujours qu'effectivement un professeur de mathématiques doit avoir une solide formation scientifique («un socle solide» qu'ils ont dit à Lyon !!), mais nous pensons aussi qu'un enseignant ne peut ignorer la façon dont un élève peut (doit !!) "recevoir" les connaissances. Un enseignant ne peut ignorer la façon dont les concepts s'installent dans l'esprit des élèves...

Nous croyons (et nous espérons ne pas être naïfs !!) que les I.U.F.M. peuvent (et doivent) apporter de vraies réponses à l'enjeu qu'est notre formation (initiale et continue)... Cet enjeu est énorme, il est l'affaire de tous, les solutions (pas de pseudo-solutions !) ne sont connues de personne (quiconque a un jour posé la question : "Quelles sont les mathématiques qu'il faudrait étudier?" sait que les réponses sont nombreuses, variées, contradictoires !).

Dans ce grand débat, l'A.P.M.E.P., et par elle chacun de nous, a sa place. L'A.P.M.E.P. - et notre régionale en particulier - ne peut participer à une entreprise de sabotage... Bien au contraire, nous croyons que nous pouvons être une force de propositions. Ensemble nous pouvons faire vivre toutes les structures qui se mettent en place et qui ne doivent avoir qu'un seul objectif : des professeurs compétents, efficaces, motivés par la réussite de leurs élèves.

C'est bien le sens de toutes nos actions.

Aujourd'hui « on » ne liquide plus vraiment les profs mais demain … nous verrons bien après les élections présidentielles.

En ce qui concerne la formation, il suffit de remplacer I.U.F.M par ÉSPÉ et c'est toujours et encore, voire plus que jamais, d'actualité.

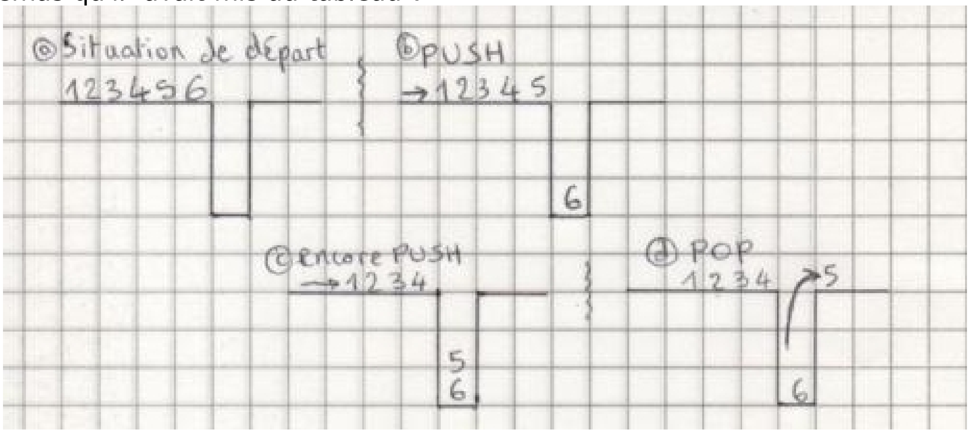
Cette année encore, nous présenterons notre association, ses activités et ses productions (brochures, exposition itinérante, site) aux futurs collègues préparant un M2 à l'ÉSPÉ de Nancy et de Metz.

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

PUSH & POP ! MES JOURNÉES À LYON EN OCTOBRE 2016

Ce titre m'est venu comme une lumière après la ***conférence de clôture*** d'Étienne Ghys. Voici les schémas qu'il avait mis au tableau :



Lorsqu'on conceptualise, « push » revient à ouvrir une parenthèse et « pop » à la fermer. Vous n'avez pas tout compris ? Il fallait venir à Lyon !

Morale de l'histoire : <u>Pour aborder une situation complexe, il faut d'abord examiner un modèle simple.</u>

C'est aussi ce qui ressort pour moi de la ***conférence d'ouverture*** « Le désordre est presque sûr ». Laure Saint-Raymond fait tourner l'anneau de Kac avec des boules noires qui deviennent blanches si elles passent sur un marqueur ; ce modèle simple pour montrer comment elle utilise l'équation de Boltzmann pour les gaz rares. J'avoue, j'ai un peu décroché…

Remarque : <u>Pour être un conférencier qui intéresse son auditoire, il vaut mieux savoir manier l'humour et moduler sa voix.</u> C'était le cas pour les deux personnes que je viens de citer. Peut-être est-ce aussi utile pour un prof de math ?

J'en viens au début : Jaq ([1]) n'a pas eu besoin de trop me PUSHer pour que je promette d'écrire un compte-rendu dans le Petit Vert. Il m'apporte la preuve que j'ai su le faire pour les Journées de Lyon en 1991. Voici le début de mon article il y a 25 ans : « *Cela commence (presque) déjà à Metz le jeudi soir : 5 professeurs de mathématiques dans la même voiture !* ».

Vendredi 21/10/2016 : nous quittons Metz, 4 femmes retraitées dans une voiture. Au bout de quelques km, Odl qui conduit sent que le volant ne répond pas bien. On constate qu'une roue est à plat, et on s'arrête avant l'autoroute sur le parking d'un hôtel à Fey. MGé a une vraie roue de secours placée sous le coffre. Pour la déverrouiller, il y a écrit PUSH sur la manette… MGé, un peu énervée, me demande au moins 3 fois ce que veut dire PUSH, alors que ses compétences linguistiques auraient largement suffi. Après les conseils avisés d'un monsieur en costume et d'un livreur, MGé emploie la violence sur la manette et c'est seulement là que ça marche (et moi qui plaide pour que la violence fasse partie des 7 péchés capitaux à la place de la gourmandise…). Bien sûr, il faut encore dévisser les 4 écrous à l'aide de coups de pied, positionner le cric, mettre la roue crevée dans le coffre puis rentrer les bagages dans l'espace qui y reste.

Malgré ce contretemps, on récupère les clés de notre logement, puis après un trajet en métro, notre ***sac à dos jaune***, avec tickets et plans ; et on arrive à la conférence d'ouverture.

Le soir on se retrouve à 8 dans l'appartement pour le repas. La toute jeune prof des écoles devra grimper pour rejoindre sa couche : POP ! Il y a encore Cat et Sof qui sont professeurs des écoles ; elles seront désignées volontaires pour écrire leurs impressions car ce sont leurs premières Journées.

Les Lyonnais ont prévu 6 conférences en parallèle (à Metz on en avait 4). Comme en 1991 « *Je suis étonnée que les sièges soient à chaque fois tous occupés* ». Il parait qu'on approche des 900 congressistes.

Ma conférence du samedi : « **Les mathématiques un phare dans les tempêtes (finances, environnement)** ? **Comment mesurer les risques ?** ». J'apprends que c'est seulement en 1755, suite au tremblement de terre qui dévaste Lisbonne, suivi d'un raz de marée,

[1] Pour préserver l'anonymat de mes collègues Lorrains je ne mets que quelques éléments de leur prénom.

Retour au sommaire

que débute la conceptualisation des risques. Auparavant on l'expliquait par l'intervention du divin. La modélisation repose sur les probabilités : on essaie le plus souvent de s'approcher de la loi normale, ou bien de la loi exponentielle, de celle de Student ou encore de Pareto. On ajuste les données. On parle de « Value at Risk ».

Le dimanche j'assiste à une conférence passionnante : « **Toute la lumière sur l'affaire Van Meegeren** ». Il s'agit d'une affaire qui a éclaté aux Pays Bas après la 2e guerre mondiale et qui concerne des soi-disant faux Vermeer (✝1675). En effet le peintre et marchand d'art Van Meegeren est arrêté en 1945, accusé d'avoir vendu un Vermeer à Göring, pour une belle somme. Il risque la peine de mort ; pour sa défense il prétend lui avoir vendu un faux parmi plusieurs autres faux qu'il a peints dans les années 30 ! Il meurt d'une crise cardiaque en 1947 sans que les divers experts se soient mis d'accord. L'affaire sera tranchée en 1967 grâce à la datation au plomb, sur des prélèvements de pigments (blanc de plomb). Ceci nécessite les connaissances liées à la radioactivité, des équations différentielles… pour prouver que les tableaux ne pouvaient avoir plus de 200 ans.

Les 3 **ateliers** auxquels j'ai assisté :

- samedi matin : Est-ce qu'on pourrait faire simple et logique avec les règles d'accord du participe passé ? À l'époque de Marot et Villon on accordait toujours ; plus tard l'Académie a instauré diverses règles ; plus récemment on tolère 2 versions dans certains cas…
- samedi après-midi : Présentation d'une activité en 4e s'appuyant sur une villa italienne (plans, calcul d'aires, maquettes).
- dimanche matin : Une exploration mathématique liée à la biologie où une chercheuse explique comment créer l'arbre phylogénétique de l'évolution d'une espèce. Elle travaille avec le séquençage ADN.

Remarque : cette jeune chercheuse est Albanaise d'origine, a fait ses études supérieures en Italie et travaille en France. Elle nous dit qu'elle communique en anglais pour ses recherches. Ghys nous dit qu'il a écrit son dernier livre en anglais directement, alors qu'il défendait l'utilisation du français écrit pendant une grande partie de sa carrière. Véronique Maume-Deschamps, lors de sa conférence sur les risques, utilise du vocabulaire anglais.

À dire et redire : ne pas négliger l'anglais, indispensable pour les scientifiques ! D'où mon titre.

En vrac :

- Station de métro **Ampère** (ce doit être un clin d'œil au thème des Journées), lorsque nous rentrons vers 23 h du repas des Lorrains : « Colis suspect, évacuez le métro ». Alors POP, en surface ! Ouf, le colis n'était pas un sac jaune.
- le dimanche après-midi, je retrouve un couple d'anciens collègues qui n'est jamais revenu en Moselle, trop proche du pôle nord, depuis sa mutation à Lyon en 1993. Après visite du quartier de la cathédrale, nous empruntons les marches pour aller à **Fourvière** : POP, POP, POP… j'exagère car à mon âge on ne saute plus de marche en marche, surtout qu'il y en a beaucoup. En haut, devant le point de vue, un sac à dos jaune : coucou El H.
- visite le lundi après-midi d'un institut de recherche qui s'intéresse aux transports, l'**IFSTTAR**. On nous présente les travaux sur la résistance de la peau ou du foie lors d'un accident ; comment on évalue la gravité de l'état des victimes et les séquelles liées aux accidents ; comment on fait pour étudier et réguler le trafic ; aussi un simulateur de conduite qui devrait discerner si l'on est encore apte à conduire. Elé est avec moi et le trajet (2 métros + tram) a été long. Nous sommes étonnées de la façon dont on nous reçoit comme des VIP, du nombre de personnes qui ont été mobilisées pour tout nous expliquer pendant plus de 3h, et ce sont des chercheurs enthousiastes. Nous repartons avec un sac vert et une clé USB qui contient des données pour enseigner les statistiques.

Pour finir, un morceau de phrase de 1991 : « *… et bien sûr les cabines téléphoniques qui permettent de faire le lien, pendant quelques minutes, avec la vie normale* ». Alors là, c'était vraiment une autre époque ! Cependant dans notre groupe on a Zaza qui n'a pas de téléphone portable et qu'on essaie de ne pas perdre.

Conclusion : POP, faisons sauter les bouchons mentaux !

Marie-Claire Kontzler, mclairekontzler@wanadoo.fr

Retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

JOURNÉE RÉGIONALE : 22 mars 2017

La prochaine Journée régionale des mathématiques aura lieu le mercredi 22 mars prochain, le matin à la Faculté ses Sciences (campus de Vandœuvre), et l'après-midi au lycée Jacques Callot.

Elle débutera par une conférence d'El Haj Laamri (voir détails ci-après). Elle se poursuivra par l'assemblée générale, les réunions des commissions par niveau, et deux plages d'ateliers.

Titre de la conférence : Alan Turing et la modélisation du vivant

Résumé : Alan Turing (1912-1954) est surtout connu aujourd'hui comme le fondateur de l'informatique et le concepteur des ordinateurs. Mais ses contributions ne s'arrêtent pas là. Il a aussi participé, et de façon déterminante, au décryptage des codes secrets nazis pendant la deuxième guerre mondiale. Comme il a posé une question centrale : une machine peut-elle penser ? Et dans les années précédant sa disparition tragique en 1954, Alan Turing s'est intéressé à la compréhension mathématique de certains mécanismes fondamentaux en biologie et a expliqué, par exemple, comment apparaissent les rayures des zèbres. Son article publié en 1952 et intitulé « The chemical basis of morphogenesis » a ouvert la voie à une théorie mathématique de la naissance des formes dans les systèmes biologiques.

Dans ce exposé, nous allons tout d'abord revenir sur le parcours de ce prodigieux mathématicien. Puis nous allons expliquer comment les idées fondamentales de Turing s'appliquent aujourd'hui à de nombreux autres domaines comme la chimie, la dynamique des populations et l'écologie, pour n'en citer que trois. Enfin, nous présenterons quelques résultats connus ainsi que des questions ouvertes.

APPEL À ATELIERS

Un des temps forts, gage de réussite de cette journée, est la présentation d'ATELIERS. Le but de ces ateliers est de permettre de partager, d'échanger, de transmettre, de susciter la curiosité, d'ouvrir des pistes, de débattre… sur des sujets en rapport avec les mathématiques et leur enseignement.

Ces ateliers doivent être **variés et nombreux** : il serait bon qu'il y en ait une vingtaine, et nous avons déjà quelques pistes. Nous lançons donc un appel auprès de tous les collègues qui voudraient en animer un. Ces ateliers se dérouleront l'après-midi, durant 1 h 20 et pourront rassembler chacun de 20 à 30 participants.

Envoyez vos propositions le plus rapidement possible à valerie.pallez@ac-nancy-metz.fr .

Nous comptons sur vous !

retour au sommaire

RÉADHÉSION APMEP 2017

Vous avez reçu, avec le dernier BGV, votre bulletin de réadhésion à l'APMEP. Si ce n'est déjà fait, n'attendez pas pour le remplir. Le plus simple est de le faire en ligne, en vous identifiant : http://www.apmep.fr/Adherer-S-abonner,5804. N'oubliez pas que si votre réadhésion parvient au secrétariat avant le 31 décembre, 66 % du montant seront déduits de votre impôt sur les revenus de cette année. Une réadhésion "Tout APMEP" à **50 €** (indice inférieur ou égal à 445) ne vous coûtera en réalité **que 20 €**, une réadhésion à 75 € (indice supérieur à 445) vous coutera **39 €** ; sommes minimes eu égard aux services rendus. Mais vous pouvez même faire beaucoup mieux : opter pour une cotisation « de soutien » (un soutien au tarif de 120 €, par exemple, ne vous coutera que 54 €, mais rapportera 120 € à l'association).

Faites également adhérer vos collègues et amis (la première adhésion "Tout APMEP" pour les enseignants du second degré est au tarif de 45 €, qui n'en coutent finalement que 15 compte tenu de la réduction fiscale). Tous les renseignements sont à la page 36 de la plaquette « Visages 2016-2017».

MATHS ET MÉDIAS

SUDOKU : JEU DE LOGIQUE ? JEU MATHÉMATIQUE ?


SUDOKU

Une grille se compose de 81 cases regroupées en 9 blocs de 9 cases. Le joueur doit compléter la grille avec des chiffres allant de 1 à 9. Chaque chiffre ne peut être utilisé qu'une seule fois dans chaque ligne, dans chaque colonne et dans chaque bloc. Voilà bien la difficulté et tout l'intérêt de ce jeu de logique qui n'est en aucun cas mathématique.

On peut aimer les Sudokus et se surprendre à relire la présentation du jeu dans son quotidien favori ! (« L' Yonne Républicaine » du 16 octobre 2016, en l'occurrence).

Une adhérente de la régionale Champagne-Ardenne a été quelque peu surprise par la dernière phrase. Il est vrai qu'il faut rassurer certains lecteurs (et certains journalistes) pour qui travailler avec des chiffres, comme cela se fait parfois en mathématiques, pourrait inciter à tourner la page du journal.

Une petite visite sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Sudoku
ou sur http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Sudoku.pdf,
vous montrera que ce jeu logique est au contraire très mathématique...

retour au sommaire

VIE DE LA RÉGIONALE

RALLYE 2016 : QUESTION SUBSIDIAIRE DIFFICILE (suite)

Les énoncés des questions du rallye 2016, ainsi que les corrigés, sont disponibles sur le site de la régionale :
http://apmeplorraine.fr/doc/Rallye%20Math%C3%A9matique%20de%20Lorraine%202016.pdf
et
http://apmeplorraine.fr/doc/Rallye%20Math%C3%A9matique%20de%20Lorraine%202016_solutions.pdf

Dans le précédent Petit Vert, nous avions analysé les réponses des collégiens (classes de troisième). Voici maintenant l'analyse des réponses des lycéens (classes de seconde).

Le problème posé était assez difficile : 35 classes (sur les 116 participantes) n'ont pas répondu du tout à la question posée (mais peut-être par stratégie, cette question n'étant prise en compte que pour départager les ex-æquo).

La première difficulté consistait à éviter le « piège » de l'équiprobabilité (s'il y a deux possibilités, c'est une chance sur deux, s'il y en a trois, c'est une chance sur ...), piège rencontré nettement moins souvent qu'au collège. La seconde difficulté était de reconnaitre que les lancers non-valables ne devaient pas être pris en compte : l'énoncé les excluait. La troisième difficulté, et non des moindres, consistait à utiliser la position du centre de la pièce pour discerner, parmi les lancers valables, lesquels étaient gagnants ou perdants.

4 classes ont donné une réponse sans aucune explication : $\frac{16}{29}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{9}{32}$ et $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

Il reste donc 77 réponses, plus ou moins argumentées, à « analyser ».

Parmi celles-ci, on trouve 10 bonnes réponses : $\frac{1}{9}$ et 12 réponses $\frac{16}{49}$ (c'était déjà la réponse majoritaire parmi les collégiens ; on en verra une explication ci-après).

Voici un exemple de réponse correcte :

> L'aire totale de la table est 28² cm² soit 784 cm². Or la pièce ne doit pas dépasser de la table. Son rayon étant de 2 cm, on enlève 2x2cm de chaque côté, ce qui donne une aire de 24² cm² soit 576 cm².
> L'aire des carrés gris est de 8²x4 cm² soit 256 cm².
> Or, pour que le lancer soit gagnant, la pièce ne doit pas dépasser ces carrés. On enlève donc 4 cm de chaque côté, ce qui donne une aire de 4²x4 cm² = 64 cm².
> Il y a donc $\frac{64}{576}$ chances qu'un lancer valable soit gagnant, cela donne $\frac{1}{9}$ en simplifiant.
>
> *2e 11 du lycée Georges de la Tour, Metz*

Et un exemple d'une erreur fréquente, qui prenait en compte la totalité de l'aire des quatre carrés, sans se soucier du fait que la pièce ne devait pas dépasser ces carrés :

retour au sommaire

Soit l'aire totale de la table : 28² = 784 cm².
Soit l'aire des quatre carrés : 4x8² = 256 cm².
On considère que chaque unité d'aire qui peut être touchée par le jeton a la même probabilité. On calcule donc la probabilité que le jeton soit gagnant :

P(*jeton valable gagnant*) = $\dfrac{\text{aire 4 carrés}}{\text{aire total table}}=\dfrac{4\times8^2}{28^2}=\dfrac{4\times8^2}{28^2}=\dfrac{256}{784}=\dfrac{16}{49}$.

2e 2 du lycée Teyssier, Bitche

Cependant, l'erreur la plus fréquente (et de loin, 19 copies) consistait à introduire l'aire de la pièce à un moment ou un autre de la démarche.

En voici l'exemple le plus succinct :

Aire des carrés gagnants – 2 cm de chaque côté = 144 cm². Aire du jeton = 4π cm².
$\dfrac{4\pi}{144}=\dfrac{36}{169}$. La probabilité est donc $\dfrac{36}{169}$.

Lycée Jean XXIII, Montigny

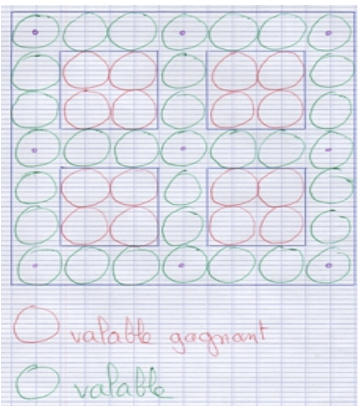
Et un autre, plus détaillé :

On sait qu'un lancer est dit « gagnant » si la pièce de monnaie atterrit sur un carré gris sans déborder.
$A_{\text{carré gris}}$ = 8x8 = 64 cm².
A_{cercle} = πR² = πx2² = 4π cm².
De plus, les lancers valables ou gagnants ont tous la même chance de se produire.
$P(A)=\dfrac{A_{cercle}}{A_{4\ carrés\ gris}}=\dfrac{4\pi}{64}$ Donc la probabilité qu'un lancer soit gagnant est de $\dfrac{4\pi}{64}$.
On sait qu'un lancer est dit valable si la pièce tombe à plat sur la table.
$A_{carré}=28\times28=784\ cm^2$ et $A_{cercle}=4\pi\ cm^2$
Soit l'évènement B « le lancer est valable ». $P(B)=\dfrac{4\pi}{784}$
Soit l'évènement C « un lancer valable est un lancer gagnant ». $P(C)=\dfrac{4\pi}{64}\times\dfrac{4\pi}{784}$
Donc P(C) ≈ 0,003.

Lycée Bichat, Lunéville

N.d.l.r. Il est donc quasiment impossible de gagner à ce jeu !!!

Voici maintenant, illustrée, la justification la plus donnée permettant de trouver la probabilité (erronée) annoncée plus haut, 16/49 :



Sachant qu'une pièce a un diamètre de 4 cm, et que les bandes blanches sont de 4 cm de largeur, il est donc possible qu'il y ait deux pièces sur chaque côté des carrés. Ce qui nous donne un total de **24** lancers valables mais non gagnants. Il y a en plus **9** lancers valables mais non gagnants qui peuvent s'interposer dans les coins (•). Dans les carrés gris de 8 cm de côté, 4 pièces peuvent être entreposées donc **4x4 = 16** lancers valables et gagnants. L'ensemble des possibilités est **24**+**9**+**16** = 49.

Donc la réponse est $\dfrac{16}{49}$.

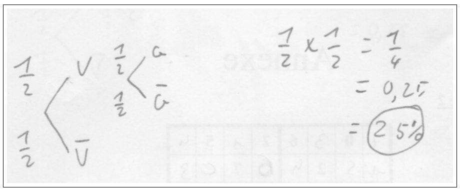
Lycée Charles Hermite, Dieuze

retour au sommaire

Plusieurs classes ont adopté cette démarche, en calculant le nombre de pièces que l'on pouvait poser <u>simultanément</u> sur le damier.

Nous ne pouvons pas détailler ici l'ensemble des autres solutions proposées, tant elles sont diverses...

Cependant, soyons optimistes : il y a seulement une seule classe qui a donné comme réponse $\frac{1}{3}$ (car il y a trois possibilités différentes de lancer : valable gagnant, valable non-gagnant, non-valable), et deux classes qui ont utilisé l'arbre ci-contre donnant une probabilité de. $\frac{1}{4}$



C'est, heureusement, nettement mieux qu'au collège !

ANNONCE

LES MATHS PAR LE JEU

La ressource pédagogique « les maths par les jeux » vient enfin de voir le jour ! Elle est accessible sur la page des ressources pédagogiques d'Ėduscol dédiées au cycle 4 :
http://eduscol.education.fr/cid99696/ressources-maths-cycle.html
et se télécharge ici : *http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Maths_par_le_jeu/92/4/01-RA16_C3_C4_MATH_math_jeu_641924.pdf.*

C'est une ressource « arborescente », en ceci que le document introductif vous amènera par liens à découvrir des sous-ressources thématiques, d'où vous pourrez accéder à des vidéos ainsi qu'au matériel de jeu.
Jouez bien !
Arnaud Gazagnes

Note du comité de rédaction du Petit Vert

L'illustration en tête du document (voir ci-contre) semble avoir été inspirée par les œuvres d'Auguste HERBIN. Un de nos lecteurs pourrait-il nous en dire plus ?

https://fr.wikipedia.org/wiki/Auguste_Herbin

retour au sommaire

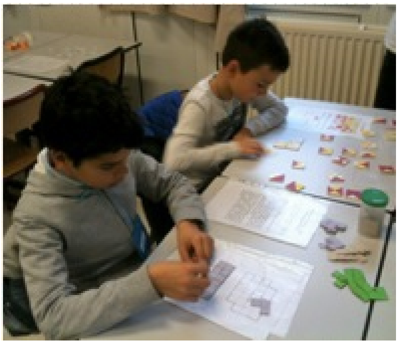
VIE DE LA RÉGIONALE

FÊTE DE LA SCIENCE 2016

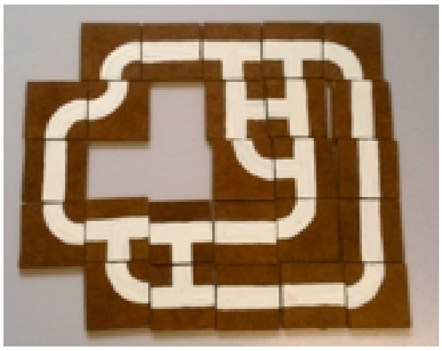
Sur le Campus de Metz Bridoux

Des étudiants aidés par trois adhérents de la régionale ont animé un atelier au « Jardin des enfants de la Science » organisé en octobre pendant la Fête de la Science.

Quatre quarts de pyramide à assembler



Des « Petits L » et les carrés de Mac Mahon



« C'est pas écrit qu'il ne faut pas de trous ! »

De plus grandes pièces pour faire circuler la petite voiture. Il faudrait que le circuit soit fermé !

Des étudiants testant pour « Jeux École 3 » l'utilisation des pièces de la « Pyramide Aztèque ».

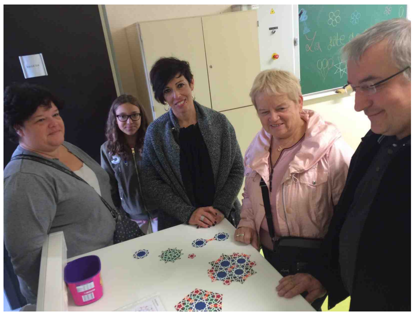
Les étudiants ont montré beaucoup d'intérêt, ils se sont énormément investis, très contents de montrer une image inhabituelle des mathématiques.

« On peut se tromper, ne pas trouver tout de suite ; ce qui est important c'est de chercher, de réfléchir, d'essayer ». Ce message semble être bien passé, y compris auprès des Professeurs des Écoles et des parents accompagnateurs.

Pour un élève de CM2 : « *C'est la meilleure journée depuis que je vais à l'école !* »

Ce fut aussi une bonne occasion de faire connaitre notre association auprès des parents et enseignants rencontrés.

Au lycée Georges de la Tour à Metz



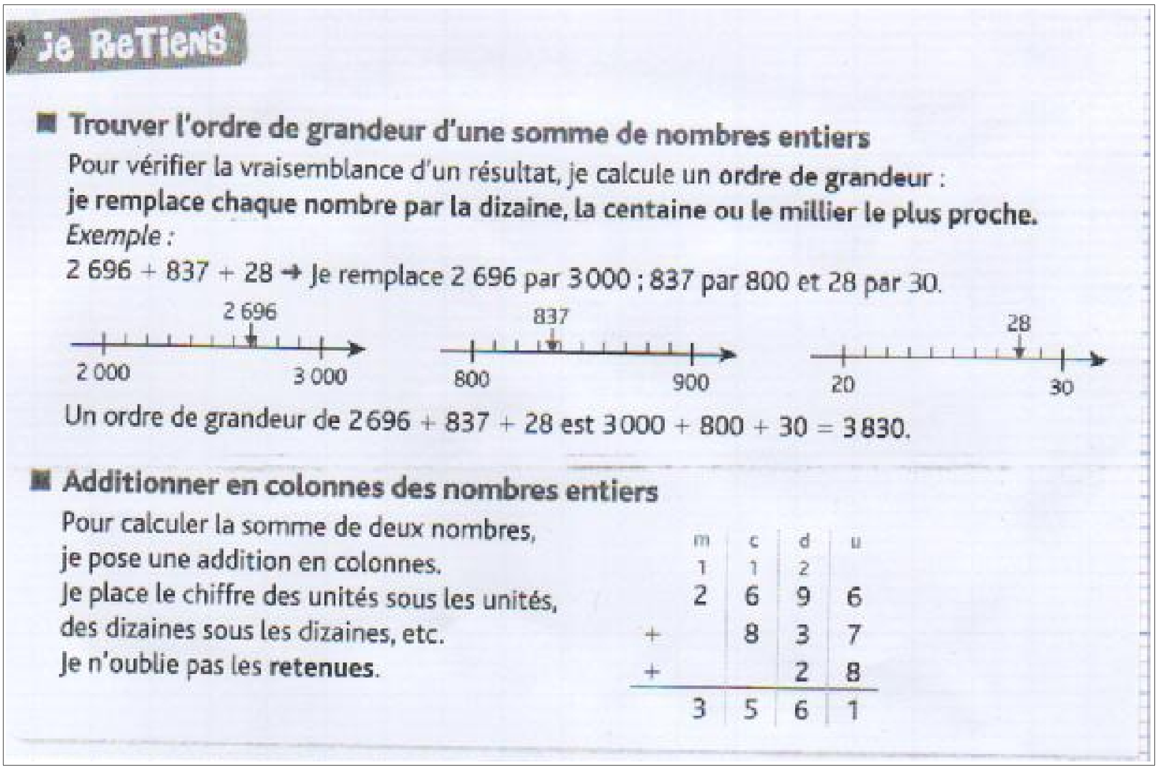
Un adhérent a animé un atelier « Jeux » : les zelliges intéressent les participants de tout âge.

retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

RÉFLEXIONS À PROPOS D'UN EXTRAIT DE MANUEL DE CM2

Un de nos adhérents a découvert ce cours photocopié dans le cahier de sa fille élève de CM2 et est resté bien perplexe. Ce document est extrait de « Au rythme des maths CM2 » (BORDAS). :


Je ReTiens

Trouver l'ordre de grandeur d'une somme de nombres entiers

Pour vérifier la vraisemblance d'un résultat, je calcule un **ordre de grandeur** :
je remplace chaque nombre par la dizaine, la centaine ou le millier le plus proche.
Exemple :
2 696 + 837 + 28 → Je remplace 2 696 par 3000 ; 837 par 800 et 28 par 30.

Un ordre de grandeur de 2696 + 837 + 28 est 3000 + 800 + 30 = 3830.

Additionner en colonnes des nombres entiers

Pour calculer la somme de deux nombres,
je pose une addition en colonnes.
Je place le chiffre des unités sous les unités,
des dizaines sous les dizaines, etc.
Je n'oublie pas les **retenues**.

	m	c	d	u
	1	1	2	
	2	6	9	6
+		8	3	7
+			2	8
	3	5	6	1

Ce qui suit est le résultat d'échanges entre des membres du comité régional. Prendre 3000 comme ordre de grandeur de 2696 et 800 comme ordre de grandeur de 837 ne choque pas, mais ne faudrait-il pas négliger 28 ? On pourrait aussi prendre 3000 et 1000 et négliger 28. L'ordre de grandeur de la somme serait alors 4000. Celui proposé dans le manuel est plus proche, mais n'y aurait-il pas quelque part confusion entre valeur approchée d'un nombre et ordre de grandeur d'un résultat ?On pourrait aussi fixer un même ordre de grandeur pour chaque valeur (à la centaine par exemple) et additionner les valeurs obtenues. La phrase « je remplace chaque nombre par la dizaine, la centaine ou le millier le plus proche » ne signifie pas grand chose pour un élève de CM2 : ne risque-t-il pas de se fourvoyer en proposant 2700 + 840 + 30 ?Un autre souci est l'utilisation du déterminant "l'" au début "trouver **l'**ordre de grandeur d'une somme" qui devient "un" dans la "réponse" (**Un** ordre de grandeur ...).
Mettre "un" partout conviendrait mieux : ordre de grandeur devenant synonyme de nombre proche. Ceci pourrait être complété par un travail à propos de la vraisemblance d'un résultat.
L'échange s'est poursuivi entre membres du comité à propos des « mathématiques formelles » et des « mathématiques de la vie courante » évoquées dans un récent rapport du CNESCO (http://www.cafepedagogique.net/lexpresso/Pages/2016/09/27092016Article636105565886694049.aspx) :

retour au sommaire

Le fait d'intégrer, dans les apprentissages en mathématiques, des mathématiques formelles, permet d'acquérir un haut niveau de conceptualisation et de performance globale dans cette discipline.

L'enquête PISA montre que la France est l'un des pays qui accorde le plus d'importance aux mathématiques formelles (comme le Japon, la Corée ou la Pologne), par opposition aux mathématiques de la vie courante.

Pour autant, en France, l'exposition des élèves à cet enseignement des mathématiques formelles est très marquée socialement. Les élèves les plus défavorisés sont moins exposés à l'enseignement des mathématiques formelles que les élèves favorisés. Cette différence de traitement est plus importante en France que dans les autres pays de l'OCDE.

Force est de constater que cet extrait de manuel de CM2 reste dans des mathématiques formelles. Dans la partie « additionner en colonnes des nombres entiers », des liens pourraient être faits avec des sommes de mesures de longueur, renforçant la compréhension de ce que sont les dizaines, les centaines et les milliers. De plus, un élève est en droit de se demander si la somme « 28 + 837 + 2696 » se calcule en colonne de façon identique.

Michel rajoute qu'en REP+ nous faisons beaucoup de « mathématiques de la vie courante », mais que nous essayons ensuite d'emmener le plus grand nombre d'élèves vers des mathématiques formelles. Il nous arrive aussi de faire le cheminement inverse, soit partir d'un exercice de mathématiques formelles et de construire un problème de la vie courante pour une meilleure compréhension de la tâche à effectuer.

Concernant les « mathématiques de la vie courante », voici un petit rappel de ce qui était écrit dans le Petit Vert n°79 (septembre 2004), rubrique "Maths et médias" :

Extraits de manuels scolaires nord-coréens (fournis par le quotidien polonais "RzECzPOSPOLITA", traduits par le Courrier International n°712 du 24 au 30 juin 2004) :

Sur un champ de bataille, douze enfants tirent sur un chacal d'Américain. Trois d'entre eux ratent leur tir : calcule combien d'entre eux ont visé juste (niveau CM1). *Pendant la guerre de Libération de la Patrie, un soldat nord-coréen veut réduire en morceaux 87 Américains. Il en tue 51, et fait prisonnier les autres. Combien en a-t-il attrapé vivants ?* (niveau CM2). *Dans une ville Corée du Sud occupée par ces chacals d'Américains, 2 350 enfants ne peuvent pas fréquenter l'école. Un nombre X d'enfants travaillent comme cireurs de chaussures et les autres doivent mendier pour manger. Si X = 1 578, combien d'enfants doivent mendier ?* (niveau 6e).

Vous trouvez peut-être surprenants ces énoncés. Nous vous proposons aussi, extrait de "Mathématique appliquée et impertinente" (Jean-Louis FOURRIER, Documents Payot, 1993) :

Dans la même position depuis 1507, la Joconde a des crampes et souhaiterait étirer les bras. Les dimensions du cadre : 77 cm de haut sur 53 cm de large, ne le lui permettent pas. Quelle doit être la surface du tableau pour que la Joconde puisse étendre ses bras horizontalement, sachant qu'elle a une envergure de 1,80 m ?

N.D.L.R. Le travail à propos de problèmes que certains nomment concrets n'est pas toujours politiquement neutre et nous avouons préférer les cas où se glisse quelque humour.

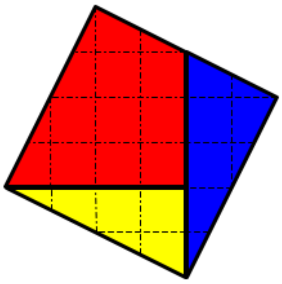
Dans les manuels utilisés par vos élèves, vos enfants, etc., vous trouverez sans doute d'autres extraits qui vous interpellent. N'hésitez pas à les faire parvenir au comité de rédaction du Petit Vert (François Drouin).

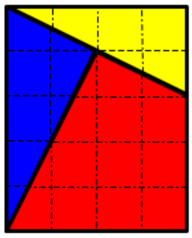
retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

TROIS PIÈCES QUI NE MANQUENT PAS D'AIRE EN CYCLE 3

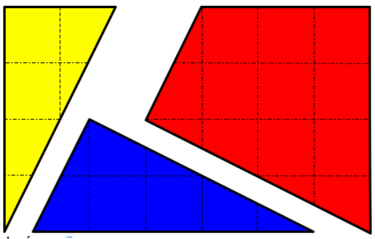
François DROUIN



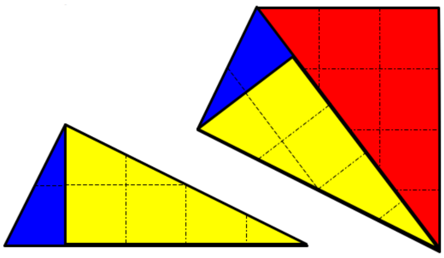


Le puzzle a été créé pour Jeux 1 comme découpage d'un carré en trois pièces permettant en particulier la réalisation d'un rectangle.
Le rectangle pouvant aisément être tracé en utilisant les nœuds d'un quadrillage, les trois pièces le composant laissent visible le même réseau de carrés.
Les aires des trois pièces pourront être comparées par superposition des pièces, la mesure des aires de chaque pièce pourra être déterminée en utilisant le quadrillage visible sur chacune.

Comparaison des aires

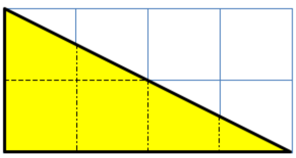


Des recouvrements permettent d'ordonner les pièces de la moins vaste à la plus vaste.

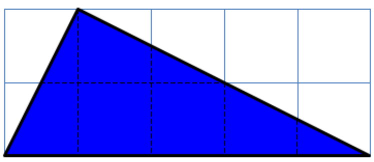


Le petit triangle jaune recouvre une partie du grand triangle bleu, le grand triangle bleu recouvre une partie du quadrilatère rouge.
Le triangle jaune est la pièce la moins vaste, le quadrilatère rouge est la pièce la plus vaste.

Mesures des aires en utilisant l'aire d'un rectangle

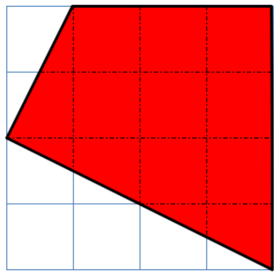


L'aire du petit triangle jaune est égale à la moitié de l'aire d'un rectangle.



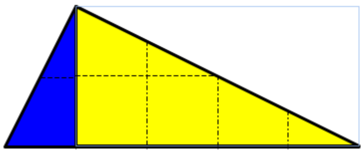
L'aire du grand triangle bleu est égale à l'aire d'un rectangle moins l'aire de deux triangles rectangles.

retour au sommaire

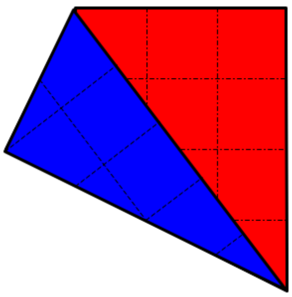


L'aire du quadrilatère rouge est égale à l'aire d'un carré moins l'aire de deux triangles rectangles.

Mesure des aires par recouvrements et additions

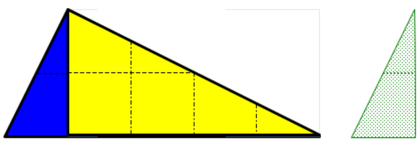


L'aire du grand triangle bleu est égale à l'aire du petit triangle jaune plus l'aire d'un triangle rectangle.

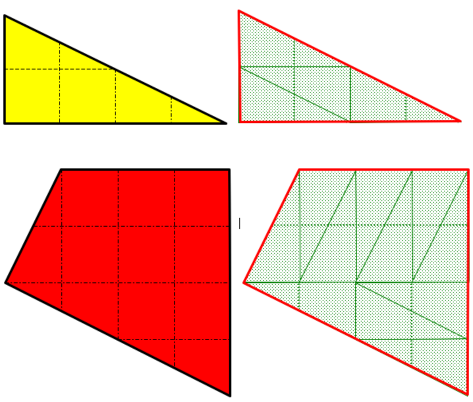


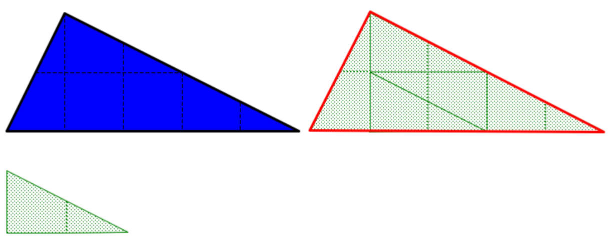
L'aire du quadrilatère rouge est égale à l'aire du grand triangle bleu plus l'aire d'un triangle rectangle.

Mesure des aires en utilisant une autre unité



Le recouvrement du grand triangle bleu par le petit triangle jaune donne envie de recouvrir chacune des trois pièces par des triangles semblables à celui dessiné ci-contre.

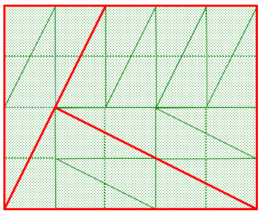




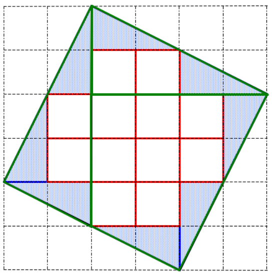
Si l'aire d'un tel triangle est l'unité d'aire, les aires des trois pièces du puzzle sont respectivement 4, 5 et 11.

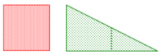
L'aire des polygones réalisés avec les trois pièces est 20.

retour au sommaire



L'aire des polygones réalisés avec les trois pièces est 20. Ci-contre, voici un exemple avec le rectangle.





Sur les pièces du carré peuvent être disposés un total de 12 carrés, complétés par 8 triangles rectangles de même aire que ces carrés. Si l'aire d'un des carrés ou d'un des triangles rectangles est choisie comme unité d'aire, l'aire totale des trois pièces est donc égale à 20.

Dans les programmes de cycle 3

Nous y trouvons des justifications à l'utilisation en classe des propositions précédentes.

Connaissances et compétences associées

Comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure.

Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple.

Estimer la mesure d'une aire par différentes procédures.

Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève

Situations amenant les élèves à :

- superposer, découper*, recoller des surfaces ;*
- *utiliser des pavages a*fin de mieux comprendre l'action de mesurer une aire.

Éléments de sitographie

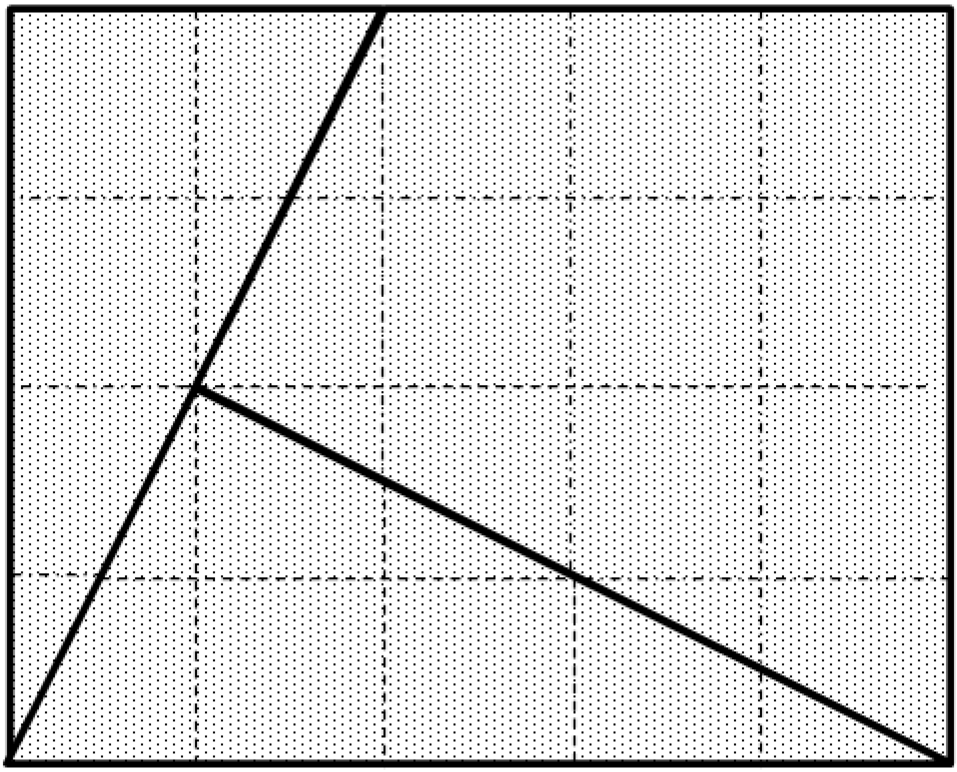
http://www.apmep.fr/article5917 : le puzzle et son utilisation en collège sont évoqués dans le Bulletin Vert n°496 de l'A.P.M.E.P.
http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Puzzle_3_pieces_elementaire.pdf : ce complément à la brochure « JEUX 9 » a été écrit en vue d'une utilisation à l'École Élémentaire.
http://apmeplorraine.fr/old/index.php?module=coinjeux&choix=5&dir=09_puzzle_3_pieces_et_famille : il est utilisé dans le stand n°9 de notre exposition « Objets Mathématiques » et dans les documents d'accompagnement élaborés par la régionale Lorraine de l'A.P.M.E.P.
http://apmeplorraine.fr/old/modules/espaces/ecole/Puzzles_geometriques/puzzle_trois_pieces.zip : des documents ont été fournis il y a quelques années à de futurs Professeurs des Écoles pour une utilisation avec de très jeunes élèves.

.../...

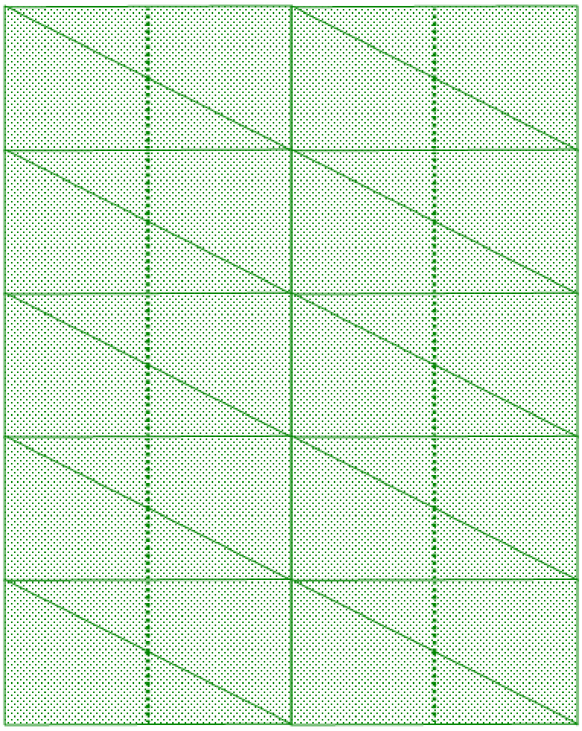
retour au sommaire

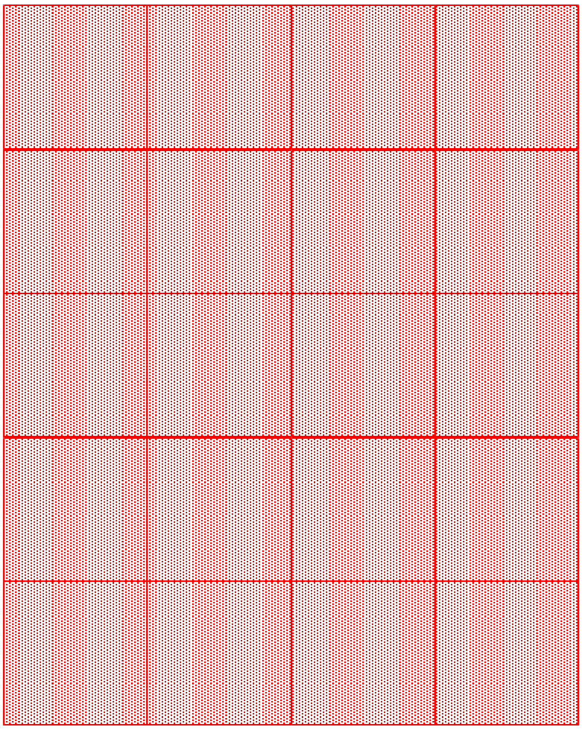
Annexe

Les trois pièces à découper



Des triangles et des carrés pour évaluer l'aire des trois pièces





retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

UN JEU « UNO-FRACTIONS » EN CLASSE DE CINQUIEME

Par Laurine HUGUIN

Collège Paul Langevin PIENNES

Remarque du comité de rédaction : Les pages qui suivent reprennent ce que l'auteure a écrit en 2016 pour la validation d'une UE de M2 évaluée pendant l'année de son stage. Certains de nos lecteurs ne connaissent peut être pas encore le jeu « UNO ». Ce site pourra leur être utile : https://fr.wikipedia.org/wiki/Uno.

Construction du jeu

Le jeu que j'ai choisi est basé sur le jeu de UNO. J'ai trouvé mon inspiration sur http://www.laclassedemallory.com/uno-des-fractions-a105704284, site d'un Professeur des Écoles qui conçoit et/ou utilise des jeux pédagogiques pour le premier degré. En imprimant son jeu de UNO sur les fractions, et en le testant je me suis rendue compte que le jeu paraissait interminable et les règles ne correspondaient pas à mes objectifs. Je l'ai donc modifié pour l'utiliser avec ma classe de cinquième. Le jeu cible ainsi davantage la notion de fractions égales, utilise des fractions de numérateurs et dénominateurs variés et les parties sont plus rapides.

Après plusieurs tests, j'ai trouvé les fractions qu'il fallait pour que le jeu fonctionne. J'ai imprimé ce jeu en six exemplaires (car six groupes) et j'ai plastifié les cartes pour qu'elles puissent être en bon état à la fin de l'heure et donc réutilisables. Des élèves en salle de permanence m'ont aidé à découper les cartes.

Analyse a priori

Prérequis nécessaires : Notions de fractions (vocabulaire : numérateur, dénominateur), fractions égales

Objectifs du jeu : Reconnaitre des fractions égales (réviser ou comprendre la notion selon le niveau d'acquisition des élèves).

Avant de commencer à jouer, une lecture des règles du jeu sera faite en classe entière, ainsi que la description des cartes présentes dans le jeu. Ceci en s'assurant que tous les élèves aient compris. Ensuite, un exemple sera fait. Je prévois 15 minutes pour expliquer les règles du jeu et donner un exemple.

D'après les règles du jeu, les élèves peuvent jouer une carte lorsqu'ils ont, dans leur jeu, une fraction égale à celle jouée par le joueur précédent OU si ils ont une fraction de même dénominateur. Je pense que beaucoup d'élèves vont chercher la facilité et donc jouer une fraction de même dénominateur. Ce n'est pas l'objectif premier du jeu. Pour remédier à ce problème, j'ai remarqué que si l'on jouait de cette façon, le gagnant arriverait tardivement ou jamais donc le jeu deviendrait ennuyant. J'avertirai alors les élèves de ne pas jouer ainsi une fois qu'ils auront pris connaissance du jeu (une partie finie dans chaque groupe). J'ai dû cependant garder l'utilisation des dénominateurs égaux car il faut pouvoir passer des cartes qui sont égales à 1/3 (2/6, 4/12, 8/24) aux autres groupes de fractions égales, par exemple celles qui sont égales à 1/6 (2/12, 4/24, 8/48), sinon le jeu se bloquerait à un moment. Donc j'ai créé un lien entre les groupes de fractions égales en utilisant les dénominateurs.

La première partie comptera « pour du beurre », les élèves auront le droit de s'aider entre eux pour une meilleure compréhension des règles du jeu.

Les élèves seront placés en groupe de 4 ou 5 avec au sein du groupe deux binômes de tutorat (thème de mon mémoire) face à face. Je choisis cette disposition pour que les échanges soient facilités puisque les élèves connaissent déjà leur binôme.

Au sein du groupe, les élèves devront vérifier ce que chaque joueur pose pour ne pas qu'il y ait de tricherie de la part de certains. Des désaccords auront lieu, ils devront alors expliquer leur raisonnement et le bruit va s'installer. Une consigne sera donnée dans les règles du jeu « ne pas crier, ne pas s'énerver, et expliquer calmement l'erreur d'autrui ou son raisonnement »

Le bruit sera forcément présent, mais ce bruit sera surement en adéquation avec le cours. Néanmoins, il faudra faire des retours au calme pour ne pas que le niveau sonore augmente sans cesse.

Retour au sommaire

Déroulement

➢ Classe de cinquième avec 25 élèves. Dernière heure de cours avant les vacances. Mon tuteur-établissement était présent.
➢ La classe est disposée en groupes (5 groupes de 4 élèves et 1 groupe de 5 élèves) et le plan de classe est affiché au tableau. En raison d'élèves absents, il y avait au final 2 groupes de 3 élèves et 4 groupes de 4 élèves.
➢ Les élèves n'ont pas encore le jeu devant eux.

<u>Pendant 15 minutes</u>
- Découverte de la règle principale (fractions égales et fractions de même dénominateur) à l'aide des cartes du jeu projetées au TBI (annexe 2).
- Découverte des cartes spéciales (+2 ; inversement de sens ; joker ; +4), petit exemple d'une partie qui pourrait se produire.
- Distribution des jeux Les élèves ont commencé à jouer directement sans poser d'autres questions. J'ai donc été observatrice dès le début.

<u>Au bout de 11 minutes</u>
Certains groupes avaient déjà fini au moins une partie. Un groupe n'en avait toujours pas fini une, cela venait du fait que les élèves jouaient beaucoup avec les fractions de même dénominateur et non les fractions égales. C'est à ce moment là que j'ai fait le premier retour au calme en prenant la parole. En interrogeant les élèves sur leur façon de jouer, je leur ai fait remarquer qu'il ne fallait pas jouer en priorité avec les fractions de même dénominateur car sinon la partie serait longue et il n'y aurait peut être pas de gagnant.
Retour aux parties : je suis passée dans les groupes pour observer leur façon de jouer ou donner des conseils, je me suis permise de m'assoir dans certains groupes et le reste de la classe ne pensait plus du tout à moi, ils étaient absorbés par le jeu.

<u>Environ 10 minutes plus tard</u>
Retour au calme afin de baisser le niveau sonore et expliquer que l'on pouvait chuchoter en jouant ou du moins faire attention au bruit que chaque groupe pouvait produire. J'ai changé quelques élèves de groupe afin qu'il y ait cinq groupes au lieu de six.

<u>5 minutes avant la sonnerie : arrêt des jeux</u>
Les élèves rangent les jeux dans les sachets de départ. Ils ont ensuite sorti une feuille pour répondre aux questions suivantes : Avez-vous aimez le jeu ? Avez-vous été gagnant ? Est-ce que cela vous a aidé dans les égalités de fractions ? (révisions, progrès) Les règles étaient-elles difficiles ? Le jeu était-il ennuyeux ou pas ? Avez-vous aidé un camarade ou été aidé ? Les élèves ont fini de répondre aux questions avant la sonnerie, je leur ai donc demandé à l'oral comment ils trouvaient le jeu, puis si ils aimeraient pouvoir y jouer tout seuls (au CDI par exemple). Les résultats de cette enquête sont joints dans l'annexe 3.
En prenant le temps d'expliquer clairement les consignes, les élèves ont pu se lancer directement dans le jeu et moi je me sentais presque inutile pour eux dès la première minute. Le fait d'expliquer les règles avant de distribuer les jeux était une bonne chose car les élèves étaient très attentifs aux explications et ont compris rapidement.
En plaçant les élèves en binôme de tutorat, ils n'ont pas hésité à s'aider sans que je leur dise pour autant, et cela pas seulement pour la première partie. Je pense que cette entraide est survenue naturellement car ils avaient envie de jouer, d'avancer dans le jeu. Les retours au calme ont servi même si au bout de trois minutes le niveau sonore augmentait de nouveau. Cela a permis aussi de faire des mises au point. J'avais prévu ce bruit, je pensais qu'il serait moins en adéquation avec le jeu (chamailleries) mais c'était tout le contraire, les élèves argumentaient le fait de pouvoir jouer cette carte ou pas pour éviter toute tricherie. Pour remédier à ce bruit, j'aurais pu désigner un « maitre du silence » dans chaque groupe.
En changeant les groupes, j'ai cassé la monotonie du jeu. Les élèves ont pu apporter à autrui leurs connaissances ou profiter de leurs explications. De plus, en formant cinq groupes au lieu de six, le niveau sonore était plus bas. L'élève ayant une A.V.S. habituellement a été contente de venir en mathématiques, bien qu'ayant travaillé seule ce jour là : un sourire que je n'arrivais pas à faire resurgir depuis le mois de novembre. Elle s'est impliquée dans le jeu et écoutait attentivement les conseils de sa « tutrice » dans le groupe.

Retour au sommaire

Outre cette élève, j'ai remarqué beaucoup d'enthousiasme au sein de la classe mis à part un élève qui trouvait que son groupe était trop faible pour jouer correctement. Avec cette réflexion, on pourrait penser à faire des groupes de niveaux mais dans un groupe d'élèves ayant des difficultés, il est nécessaire d'avoir un élève volontaire qui soit en mesure d'expliquer les erreurs faites.
De plus, deux élèves m'ont parlé d'une alliance qu'ils avaient formée, on peut donc voir que ce jeu développe le sens de la logique et la stratégie chez les élèves. En fin d'heure, les questions que j'ai choisi de poser sont des questions fermées. Ce n'était peut-être pas une bonne idée car peu d'élèves ont développé leur réponse. En revanche, les questionner à l'oral dans les deux dernières minutes était alors un bon moyen pour avoir un retour plus approfondi de leur part. Les élèves ont répondu positivement au fait de laisser un jeu au CDI pour qu'ils puissent rejouer entre eux et pourquoi pas jouer avec des élèves d'autres classes.

En conclusion

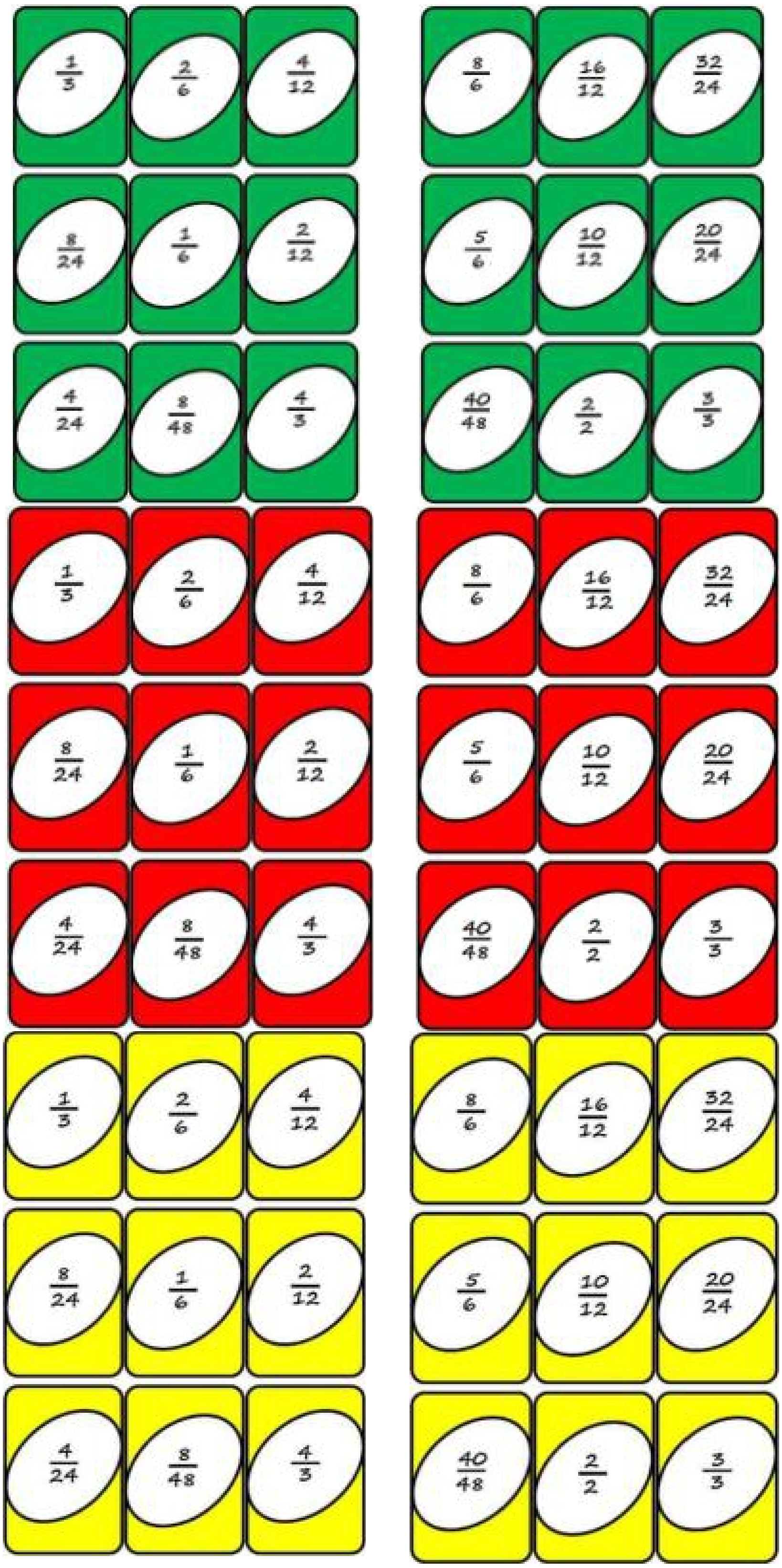
Je suis satisfaite du jeu que j'ai construit. Les cartes colorées donnaient envie de jouer. La plastification a rendu le jeu proche d'un jeu vendu dans le commerce. Les cartes spéciales ont permis une ambiance joyeuse. Une partie est rapide et les élèves peuvent en faire plusieurs dans l'heure. Seul petit bémol, les élèves ont tendance à jouer avec les fractions de même dénominateur donc il faut bien les informer de l'objectif principal du jeu.
Environ quatre élèves m'ont fait part de leurs réels progrès sur la notion de fractions égales. Cela est aussi dû aux explications données par leur camarade pour que la partie avance et que tout le monde puisse jouer. Les élèves étaient en totale autonomie, j'ai apprécié ce moment car j'ai pu me rapprocher des élèves en difficulté pour les conseiller (m'assoir au sein d'un groupe). Cependant, je me suis sentie presque inutile car les élèves se corrigeaient entre eux, ce qui est pourtant un bon point. J'ai eu l'impression, et les élèves aussi, de ne pas faire une séance de mathématiques. Je ressens alors une légère perte de temps au niveau du programme, mais pourtant cette séance a beaucoup apporté à la classe au niveau du comportement et a permis a beaucoup d'élèves de voir le cours de mathématiques plus attractif. C'est pourquoi je propose que ce jeu soit utilisé dans le cas où deux groupes y jouent en autonomie, au fond de la classe, et d'autres élèves soient avec le professeur sur une autre activité. Ainsi le bruit serait moindre et le professeur serait disponible pour un petit nombre d'élèves. Les conditions, dans lesquelles cette séance s'est déroulée, étaient plutôt satisfaisantes (règles simples, motivation pour le jeu, groupe, binôme de tutorat). J'appréhendais cette séance. Je pensais que les élèves n'allaient pas être concentrés sur le jeu mais ce fut tout le contraire, ils ne pouvaient parler que du jeu et des stratégies entre eux. C'est donc une agréable surprise et un agréable moment que j'ai passé. D'après l'enthousiasme et le bilan des élèves, ils ne se sont pas ennuyés. Ils ont trouvé que cette séance était originale et ils sont prêts à recommencer. Un jeu sera donc disponible au CDI.

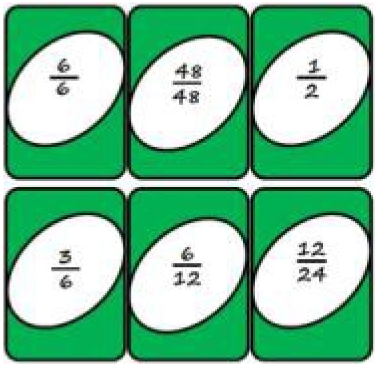
Prolongements

Suite à cette utilisation, les élèves ont construit en **A**ide **P**ersonnalisée des boites pour ranger les jeux et les conserver dans l'armoire du CDI. Ils ont mesuré les dimensions du tas de cartes, réalisé un patron de la boite, etc. Il leur a donc été proposé un problème concret. La motivation était au rendez vous, surtout chez un élève faible et discret en mathématiques qui a fait preuve de réussite dans cette activité manuelle ET mathématique.
Je prévois de réutiliser le jeu en classe de sixième. Le programme leur fait utiliser des fractions égales simples comme $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$. De plus, le jeu utilise les tables de multiplication.
Ce sera un jeu d'approfondissement que j'envisage de proposer en fin d'année.

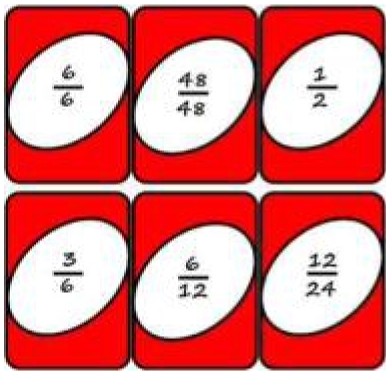
Retour au sommaire

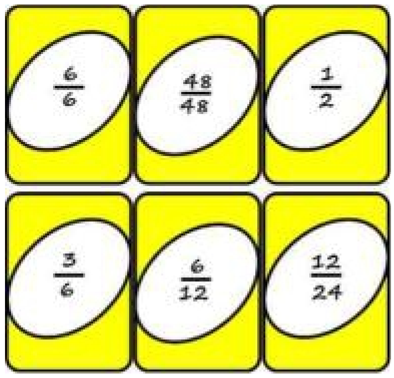
Annexe 1 : Les cartes du jeu



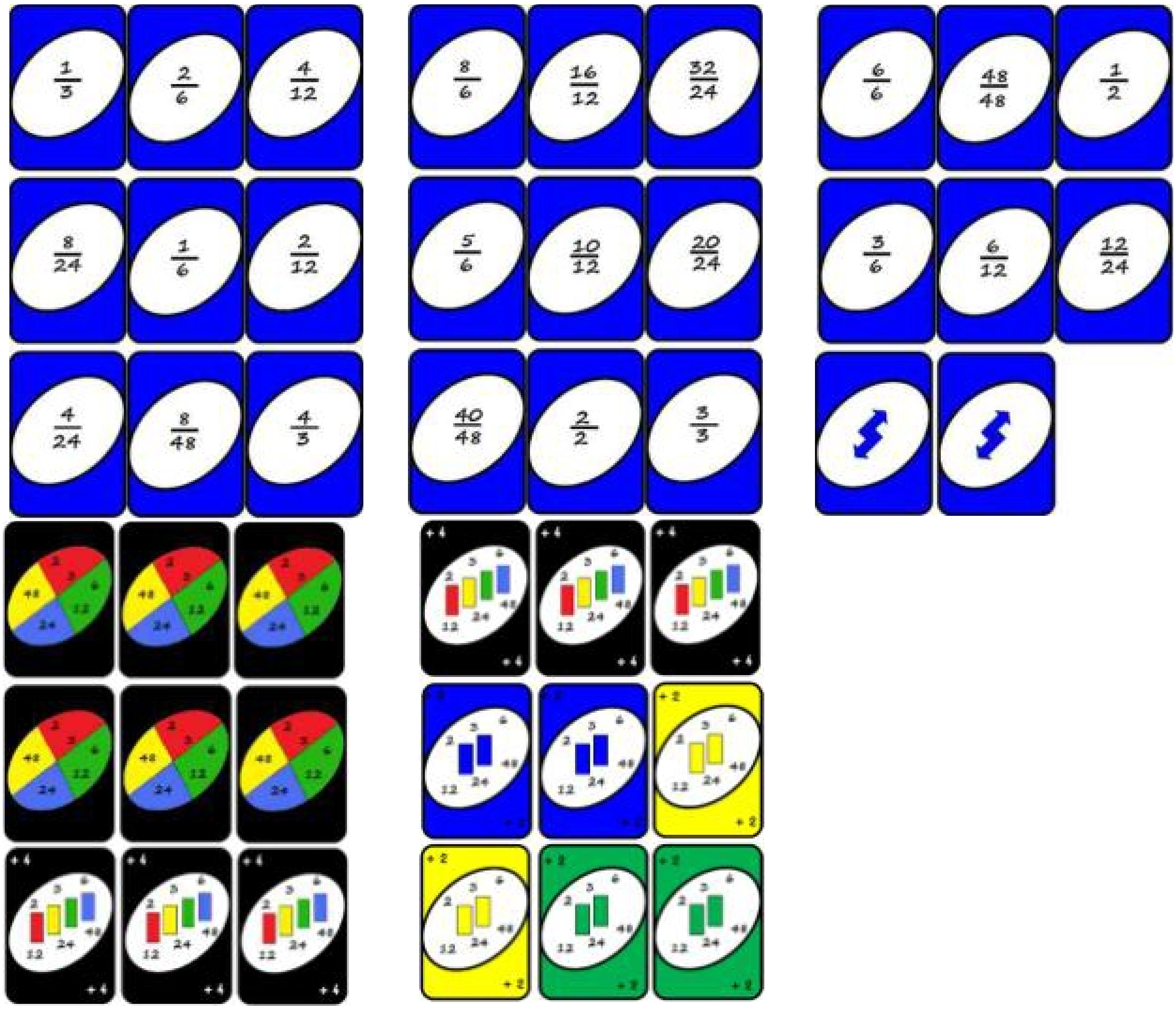


N.B. Les cartes utilisées en classe étaient de taille voisine de celle des jeux de cartes traditionnels.



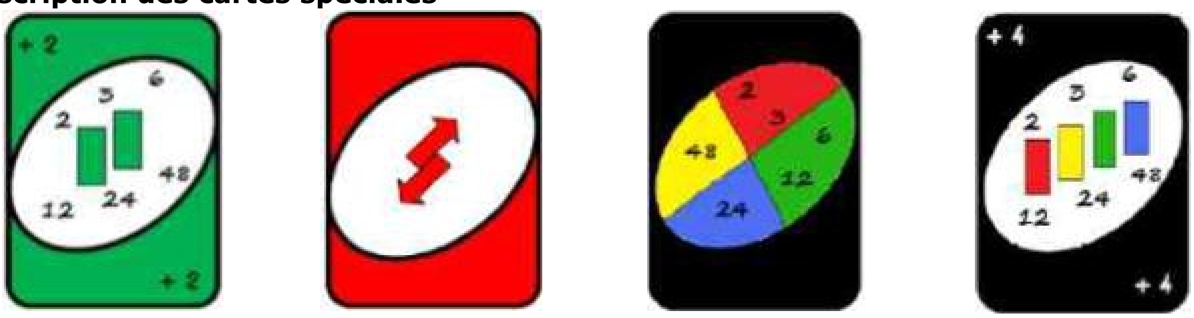


Retour au sommaire



Annexe 2 : Règle du jeu « Uno Fractions » (2 à 5 joueurs)

Description des cartes spéciales



La carte "+2" (jaune, bleu, rouge, vert) : Lorsqu'un joueur joue cette carte, le joueur suivant doit piocher 2 cartes et passe son tour. Cette carte doit être posée sur une carte de même couleur. De plus, le joueur qui joue cette carte peut choisir ou non de changer le dénominateur (2-3-6-12-24-48) pour la prochaine carte jouée.

La carte "Inversement de sens" (jaune, bleu, rouge, vert) : Lorsqu'un joueur joue cette carte, le sens de la partie est inversé. Cette carte doit être posée sur une carte de même couleur.

La carte "joker" : Lorsqu'un joueur joue cette carte, il peut ou non choisir de changer le dénominateur (2-3-6-12-24-48) pour la prochaine carte jouée.

La carte "+4" : Lorsqu'un joueur joue cette carte, le joueur suivant doit piocher quatre cartes et passe son tour. De plus, le joueur qui joue cette carte peut choisir ou non de changer le dénominateur (2-3-6-12-24-48) pour la prochaine carte jouée. Attention cette carte ne peut être jouée que si le joueur n'a pas d'autre possibilité. Si un joueur décide de bluffer et qu'il se fait démasquer, il aura une pénalité (1 carte à piocher).

Déroulement de la partie

1. Tout d'abord, un des joueurs distribue à chacun sept cartes. Le reste des cartes fait office de pioche.
2. Pour commencer, le joueur ayant distribué retourne la première carte de la pioche et le joueur situé à sa gauche commence la partie (La partie se déroule dans le sens des aiguilles d'une montre). Il doit recouvrir la carte retournée par une carte ayant une fraction égale ou de même dénominateur, ou bien une carte de même symbole.
3. **Si le joueur ne peut pas jouer**, il a la possibilité de poser une carte « joker » ou « +4 ». Dans le cas où le joueur ne possède aucune de ces cartes, il doit en piocher une. Si la carte piochée peut être jouée, il peut directement la poser, sinon il devra la conserver dans son jeu.
4. Lorsque qu'un joueur n'a plus qu'une carte en sa possession, il doit dire « Uno » pour avertir tous les autres joueurs. S'il oublie de le faire et qu'un joueur s'en aperçoit, il devra piocher une carte en pénalité. Il est interdit de finir la partie par une carte joker.
5. Le premier des joueurs à s'être débarrassé de toutes ses cartes gagne la partie et la partie s'arrête.

Option compter les points :

Le vainqueur marque l'addition des points des cartes restantes dans la main des autres joueurs.

- Les cartes sous forme de fraction se comptent en prenant la valeur du numérateur.
- La carte «+2» vaut 20 points.
- La carte «Inversement de sens» vaut 20 points.
- La carte «Joker» vaut 50 points.
- La carte «+4» vaut 50 points.

Annexe 3 : Compte rendu des élèves sur le jeu « UNO Fractions »

Des élèves n'ont pas répondu à toutes les questions

	Oui	Un peu	Non	Remarques
Avez vous aimé le jeu ?	21	1	0	« j'ai adoré » « c'était original »
Avez-vous été gagnant au moins une fois ?	8		14	
Le jeu vous a-t-il aidé dans les égalités de fractions ? Révision ? Progrès ?	Révision : 8 Progrès : 9	2	2	« mieux que d'apprendre sur un cahier »
Les règles sont-elles difficiles ?	0	1	21	
Avez-vous trouvé le jeu ennuyant ?	1	2	19	« tout le monde à notre table s'est bien amusé » « équipe non équitable »
Avez-vous aidé vos camarades ?	10	3	8	« on a créé une alliance »

Retour au sommaire

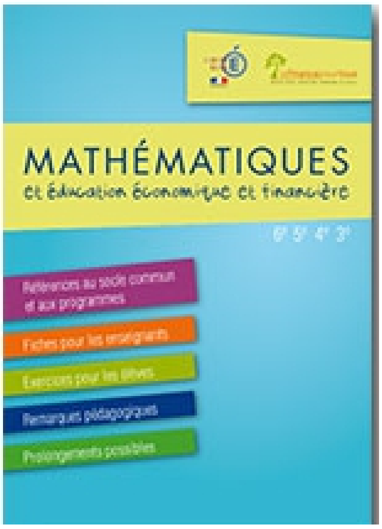
DANS NOS CLASSES

MATHÉMATIQUES ET FINANCE

Par Claire STAUB,
collège Anjou à Sablé-sur-Sarthe (établissement REP).

Je cherchais des idées de problèmes ouverts et de tâches complexes pour mes séances d'Accompagnement Personnalisé (AP) en 3$^{\text{ème}}$. En allant voir sur l'espace pédagogique dédié aux mathématiques de l'académie de Nantes, dans la partie « tâches complexes », un article intitulé « La finance pour tous » a piqué ma curiosité.

Cet article fait référence à la mise en ligne sur le site académique d'Amiens de la brochure « Mathématiques et éducation économique et financière » réalisée par « l'Institut pour l'Éducation Financière du Public » en partenariat avec l'Académie d'Amiens.



Dans cet ouvrage, on trouve des fiches d'exercices avec version commentée pour l'enseignant. Les exercices sont classés dans les cinq thèmes du programme de mathématiques du collège. Dans chaque thème, les exercices sont classés par niveau (6$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$, 4$^{\text{ème}}$ et 3$^{\text{ème}}$), on nous indique les compétences qu'ils permettent de travailler, une durée conseillée par exercice ainsi que le(s) sujets d'éducation financière qui y sont abordés (Argent et moyens de paiement ; Ressources, dépenses et budget personnel ; Crédit, épargne et placements ; Droits et responsabilités des consommateurs ; Finance, économie et société).

En complément, le site http://www.lafinancepourtous.com/ fournit gratuitement pour chaque module : une version PowerPoint de tous les exercices qui peut être projetée en cours ou imprimée pour les élèves ; une version PDF avec tous les exercices, les références aux compétences utilisées, les remarques pédagogiques, les prolongements possibles (reprise de cet ouvrage) et les corrigés des modules sur demande. On trouve également sur la page mathématiques de ce site, des ressources pour le lycée et le lycée professionnel.

Revenons sur les séances d'AP en 3$^{\text{ème}}$. J'ai déjà fait deux séances sur les problèmes ouverts utilisant la proportionnalité, les pourcentages, les théorèmes de Pythagore et de Thalès.
Pour cette séance (voir annexe), j'ai décidé de travailler la notion de fonction que je viens de finir en classe avec eux. J'ai choisi les exercices 3.5 à 3.9 du thème « fonctions ». Les élèves vont être évalués par compétences lors de ces séances cette année. Les compétences travaillées sont en en-tête de la fiche de travail.
Nous sommes en salle de technologie ou en salle TICE, en demi-classe (13 élèves), les élèves ont ainsi à leur disposition un ordinateur chacun, afin d'utiliser GeoGebra ou le tableur pour répondre aux questions. Un groupe est avec un enseignant de mathématiques pour travailler des tâches complexes, l'autre groupe est avec un collègue de technologie pour travailler sur tableur, GeoGebra et Scratch. Seuls les 3$^{\text{ème}}$ CHAD (Classe Horaires Aménagés Danse) n'ont pas pu bénéficier de cette organisation. J'ai donc les deux groupes la même semaine.
Lors de la séance, nous n'avons eu le temps d'aborder que les deux premiers exercices. Le premier exercice n'a pas posé de problème pour le calcul du prix TTC en France. J'ai dû faire de la différenciation pour le calcul du pourcentage de TVA en Angleterre (par exemple, réalisation d'un tableau de proportionnalité). J'ai reformulé l'énoncé du deuxième exercice, et j'ai guidé les élèves pour le passage du calcul « papier » à la formule à rentrer dans le tableur. Le

tableur, bien qu'utilisé tous les ans au collège, n'est toujours pas un outil que les élèves maîtrisent aisément. Ils l'utiliseront en mathématiques et en technologie cette année.

Sitographie

- Espace pédagogique dédié aux mathématiques de l'académie de Nantes : http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/
- Article « la finance pour tous » : http://www.pedagogie.ac-nantes.fr/mathematiques/enseignement/la-finance-pour-tous-684391.kjsp?RH=1160078262078
- Site de l'association pour les compléments : http://www.lafinancepourtous.com/Espace-Enseignants/Mathematiques

ANNEXE

AP 3ème

Compétences travaillées

	CHERCHER	1	2	3	4
CH1	Extraire d'un document les informations utiles, les organiser, les confronter à ses connaissances				
CH2	S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, avec des logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture				
CH3	Tester, essayer plusieurs pistes de résolution				
CH4	Décomposer un problème en sous-problèmes				
	MODELISER				
M1	Reconnaître des situations de proportionnalité et résoudre les problèmes correspondants				
M2	Traduire en langage mathématique une situation réelle (par ex. à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques)				
	RAISONNER				
RA1	Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions				
	COMMUNIQUER				
CO1	Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer les spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française				
CO2	Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange				
CO3	Vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire de tableaux, des graphiques, des diagrammes				

Exercice 1 : comparaison de prix entre deux pays

Voici un tableau donnant le prix de deux scooters 500cc dans deux pays :

Prix en France		Prix en Angleterre	
Monnaie	Euro (€)	Monnaie	Livre sterling (£)
Prix hors taxe	830	Prix hors taxe	676,6
Taxe en %	19,6	Taxe en %	
Prix TTC (en €)		Prix TTC (en £)	795

1. Compléter le tableau.
2. Utiliser un moteur de recherche pour trouver sur Internet le taux de change de la livre en euros. Quel est le scooter le moins cher ?

Retour au sommaire

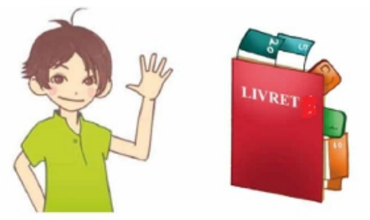
Exercice 2 : La prime d'assurance

Un automobiliste paye pour sa voiture, en 2012, une prime d'assurance de 1 000 €.
S'il n'a pas d'accident au cours de l'année, il bénéficie l'année suivante d'une réduction de 5 % sur la prime de l'année en cours. Il peut continuer à bénéficier de réductions successives plusieurs années de suite. Toutefois, sa prime ne peut pas être inférieure au montant plancher de 500 €, c'est-à-dire à la moitié du montant initial de la prime.

1. Combien d'années faut-il sans accident à l'automobiliste pour qu'il obtienne une prime d'assurance égale au plancher ?
2. Faire apparaître les résultats sous forme d'un tableau ou à l'aide d'un tableur.

Exercice 3 : Le livret épargne

Maxime place 500 € sur un livret d'épargne rapportant 4 % par an.



1. Si Maxime épargne cet argent pendant 5 ans, quel sera le montant des intérêts perçus ?
2. De quel capital disposera-t-il au bout des 5 ans ? Faire apparaître les résultats sous forme d'un tableau ou à l'aide d'un tableur.

Exercice 4 : Le livret épargne de la sœur de Maxime

Le banquier lui a expliqué que la formule donnant le nouveau capital d'une somme S placée à 4 % pendant n années est : $S \times \left(1+\frac{4}{100}\right)^n$.

1. A l'aide de cette formule, calculer le capital obtenu par Maxime s'il épargne ses 500 € pendant 3 ans à un taux d'intérêt de 4 %. Puis calculer pour 5 ans au même taux.
2. A la naissance de la sœur de Maxime, ses grands-parents lui ont ouvert un livret d'épargne et y ont déposé 1 000 € placés à 4 %. De quelle somme la sœur de Maxime disposera-t-elle à sa majorité ? Que peut-on constater ?

Exercice 5 : QCM et crédit

On emprunte une somme de 8 000 € et on rembourse en 30 mensualités de 300 €. Le coût du crédit est...	☐ 1 000 € ☐ 9 000 € ☐ 100 €
M. Durand emprunte 10 000 € et va rembourser en 50 mensualités égales. Sachant que le coût du crédit est de 1 500 €, le montant de chaque mensualité est...	☐ 200 € ☐ 230 € ☐ 30 €
M. Dupont emprunte 3 000 € à un taux de 10% l'an. Sachant qu'il rembourse son crédit en une seule fois à la fin de l'année, il devra rembourser...	☐ 300 € ☐ 3 000 € ☐ 3 300 €
On emprunte une somme de 500 €. La somme remboursée est de 600 €. Le pourcentage de la somme empruntée que représente le coût du crédit est de ...	☐ 6 % ☐ 16,6 % ☐ 20 % €
On a emprunté 8 000 € et on a remboursé cette somme en 36 mensualités de 250 €. Le pourcentage de la somme empruntée que représente le coût du crédit est de ...	☐ 10 % ☐ 12,5 % ☐ 25 %

Retour au sommaire

DANS NOS CLASSES

SÉANCE DE JEU EN CLASSE DE 1ère E.S.

Par Cédric SOTTEAU,
Lycée Louis de Cormontaigne, Metz

Remarque du comité de rédaction *: Les pages qui suivent reprennent ce que l'auteur a écrit en 2016 pour la validation d'une UE de M2 évaluée pendant l'année de son stage. Certains de nos lecteurs ne connaissent peut-être pas encore le jeu « Time's Up ! ». Ce site pourra leur être utile :* https://fr.wikipedia.org/wiki/Time's_Up.

Introduction

J'ai, à plusieurs reprises, utilisé des approches ludiques en cours de mathématiques avec cette classe afin de les intéresser de manière différente à mon enseignement. Mais je n'avais pas encore osé faire une séance entière de jeu en classe entière (35 élèves c'est un peu effrayant !). J'ai décidé de franchir le cap pour cette séance du vendredi situé juste avant les vacances. C'est un créneau un peu plus difficile à gérer, où les élèves débordent d'énergie et ont surtout envie d'être libérés. Alors pourquoi ne pas utiliser toute cette énergie de manière différente ?

Analyse a priori

Positionnement de la séance

a) Liens avec le référentiel de compétences

Cette action s'inscrit dans le cadre du référentiel de compétences que doit maitriser l'enseignant. Je dégage en particulier trois points :
- *P3. Construire, mettre en œuvre et animer des situations d'enseignement et d'apprentissage prenant en compte la diversité des élèves.* En particulier : favoriser l'intégration de compétences transversales (créativité, responsabilité, collaboration) et le transfert des apprentissages par des démarches appropriées.

- *P4. Organiser et assurer un mode de fonctionnement du groupe favorisant l'apprentissage et la socialisation des élèves.* En particulier : favoriser la participation et l'implication de tous les élèves et créer une dynamique d'échanges et de collaboration entre pairs.

- *P7. Maitriser la langue française à des fins de communication.* En particulier : intégrer dans son activité l'objectif de maitrise de la langue orale et écrite par les élèves.

b) Place dans la progression

Cette séance "Loi binômiale" est située après les chapitres "Second degré", "Pourcentages", "Statistiques", "Fonctions de référence", "Probabilités (variable aléatoire)" et "Nombre dérivé".

c) Liens avec le programme officiel

Je n'utiliserai que des termes (notions et méthodes) vus ensemble en cours, et « présents » dans le programme officiel.

d) La classe

Une classe de 35 élèves, répartition filles/garçons équitable. Les débuts ont été difficiles, car beaucoup d'élèves avaient une mauvaise image des mathématiques, de mauvais souvenirs, des lacunes et au final peu d'intérêt pour cet enseignement. Mais au fil du temps et avec

Retour au sommaire

beaucoup d'investissement de ma part et finalement de leur part, ils sont devenus attentifs, motivés et « presque » travailleurs. Je les considérais donc prêts pour essayer « autre chose ».

Conception de la séance

a) Objectifs de la séance

Je peux dégager de multiples intentions et objectifs pour cette séance :

- Réviser un grand nombre de notions du programme.
- Faire des mathématiques « autrement ».
- Obliger les élèves à communiquer et se comprendre autour de notions mathématiques.
- Rester rigoureux dans leurs propositions.
- Faire comprendre aux élèves qu'il n'est pas facile d'expliquer et que cela demande de la rigueur, de l'inventivité, mais aussi une bonne maitrise des notions.
- Pour le professeur, rester en retrait, les élèves étant les seuls acteurs de cette séance.

b) Choix des supports

Les polycopiés

Il y en a deux : Pour le juge du groupe, une feuille A4 avec toutes les définitions des termes figurant sur les cartes de jeu. Pour les joueurs : un récapitulatif des règles.

Les cartes de jeu

Vingt cartes, sur chacune est inscrit un terme, ou une expression, à faire deviner.

Des supports TICE vidéo projetés

Le récapitulatif des règles est projeté au tableau.

c) Création des supports

Les cartes de jeu (qui figurent en annexe). J'ai choisi d'en créer 20 afin que les élèves aient assez de temps pour toutes les deviner. Chacune porte un mot ou un groupe de mots issu des chapitres traités ensemble et que les élèves devront faire deviner. Au dos, l'inscription Math's up. J'ai découpé et collé chacune des cartes et vérifié qu'on ne voyait pas au travers.

Les règles du jeu : Elles sont grandement inspirées du Time's up classique, mais simplifiées afin de mettre rapidement les élèves en situation de jeu et leur permettre, si besoin, de vérifier très rapidement un point de règle.

La feuille de définitions : Afin de garantir une certaine rigueur mathématique lors des échanges, il paraissait nécessaire de fournir un outil de vérification et d'attribuer à un élève le rôle de juge.

d) Les règles du jeu

Le jeu se joue en trois manches : l'équipe gagnante est celle qui totalise le plus de points à la fin des trois manches. Un point est accordé pour chaque carte découverte.

Les équipiers jouent à tour de rôle.

Première manche

Durant cette manche, l'équipier qui a la parole doit faire deviner le mot inscrit sur la carte en parlant, mais sans prononcer un seul des mots présents sur la carte. L'équipe dispose d'une minute pour en faire deviner un maximum ! On a le droit à autant de réponses que l'on désire et on ne peut pas passer et/ou changer de carte.

Seconde manche

Cette fois, l'équipier qui a la parole ne peut tenter de faire deviner le mot inscrit en ne prononçant qu'un seul mot. L'équipe n'a le droit qu'à un seul essai ! On peut décider de passer. La manche dure aussi une minute.

Troisième et dernière manche
Pour faire deviner le mot inscrit, l'équipier ne peut à présent que dessiner ou écrire des formules, symboles (mais bien sûr pas le mot à deviner). L'équipe n'a à nouveau le droit qu'à une proposition et on peut changer de carte.

Les trois manches sont finies, on compte les points et on désigne les gagnants !
Il est important qu'il y ait un gagnant car les élèves sont des joueurs nés et ils aiment la compétition !

Déroulement de la séance

Prévisions

Les dix premières minutes seront dédiées à la remédiation d'une évaluation formative réalisée la séance précédente. Puis ensuite, afin de les surprendre, mais surtout leurs faire ranger rapidement leurs affaires en vue de bouger les tables, je leur demande de ranger leurs affaires et de prendre une feuille et un crayon, tout en allumant le rétroprojecteur.
S'affichera alors un message déjà préparé : « Avez-vous déjà joué au Time's up ? ».
J'expliquerai ensuite les règles aux élèves (soulagés), mise en place des tables, constitution des groupes et équipes, choix des juges, distribution des cartes et des polycopiés et début du jeu en autonomie.
Je circule en spectateur, répondant aux questions si besoin, et écoutant attentivement les réponses des élèves et canalisant les débordements.
Fin de la séance, désignation des vainqueurs !

Déroulement effectif

a) Du « côté élèves »

Ils attendaient la remédiation, donc pas de surprise.
Des protestations virulentes lorsque je leur demande de ranger les affaires et sortir une feuille et un stylo, mais dès l'apparition du « avez-vous déjà joué au Time's up » grand soulagement collectif et émergence d'une grande curiosité.
J'explique les règles, que beaucoup connaissent déjà (j'avoue avoir compté aussi sur ce fait) et les laisse au tableau.
Je demande de former des groupes et de bouger les tables, tout se fait très rapidement et naturellement, ils sont pressés de jouer !
Distribution des cartes et polycopié, en quelques minutes, tous les groupes jouent en autonomie.
Fin de la séance, les gagnants sont fiers, les élèves ont compris les difficultés liées à l'explication, et surtout ils ont beaucoup, beaucoup, aimé !
Citations : « monsieur, si les maths étaient toujours comme ça, j'en ferai plus souvent ! », « j'ai adoré », « cela change », « ah les maths c'est bien finalement », « on recommence quand ? ».

b) Du « côté enseignant »

Difficile mais agréable de n'être que spectateur.

Retour au sommaire

Le créneau pour cette expérience était bien choisi.

Mise en autonomie rapide, règles suffisamment simples, mots à deviner bien choisis.

L'esprit de compétition est très fort, même en mathématiques, et j'en ai été surpris !

Les juges ont utilisé la feuille fournie et ont pris leur rôle très à cœur, mais en sachant faire preuve d'un peu d'ouverture d'esprit. Mais ils ont tenu à retrouver dans les propositions des joueurs les idées ou mots-clés ! Je n'ai pas noté d'autres pressions que des "allez, allez, c'est la même chose". Ils ont été, je pense, plus rigoureux que j'aurais pu l'être, preuve de leur implication ! En cas de litige ils se sont bien évidemment tournés vers moi.

Quelques débordements et tentatives de triche, que j'ai dû réguler.

Élèves souriants et motivés.

Timing un peu léger, les 10 minutes de remédiation auraient pu être utiles à certains groupes pour finir.

Tous les groupes n'ont pas fini la troisième manche, ce qui n'a pas empêché d'avoir quand même un vainqueur.

Analyse a posteriori

Le déroulement

Conforme à mes prévisions, un léger manque de temps pour certaines équipes.
Je n'aurai pas pensé que certains tenterait de tricher !
L'effet de surprise était bien amené et a tout de suite « scotché » les élèves.
Bon dosage du matériel et des règles, pas d'élève perdu ou embrouillé.

Les mots et expressions proposés

Pour la grande majorité, ils n'ont pas désarçonné les joueurs.
Un bémol sur : *« Équation de la tangente à une courbe », « L'espérance d'une variable aléatoire X », et « Un ensemble de définition ».*
Pour les deux premières expressions, c'était en fait assez prévisible, moins pour la dernière, mais j'ai pu ainsi m'apercevoir qu'il fallait revenir sur la notion d'ensemble de définition.

L'engouement des élèves

Que dire, sinon que du positif ! Depuis ce jour j'ai beaucoup, beaucoup de demandes de jeux ! Et j'en fais de manière régulière, mais sur des temps plus courts.

Le post-séance

Au vu du succès de cette séance, mais aussi de l'intérêt de certains collègues, ce jeu sera perfectionné et enrichi. En effet, il suffit de créer de nouveaux paquets de cartes au fur et à mesure que de nouveaux chapitres sont abordés. Un collègue va d'ailleurs le tester en classe inversée.

Conclusion

J'ai été vraiment surpris de l'engouement des élèves, car -je l'avoue- j'étais plutôt anxieux de faire jouer des adolescents de 16-17 ans. Mais ils ont beaucoup aimé et ont montré un grand esprit de compétition, doublé d'une véritable envie de bien expliquer. Le jeu reste donc, en première, un formidable moyen d'enseigner autrement, à condition d'instaurer de bonnes règles équitables, simples et permettant une rigueur mathématique. Il ne faut pas, en effet, que des élèves assimilent des « choses » erronées. C'est une expérience que j'ai déjà rééditée, et un jeu que je vais capitaliser pour la suite de mon parcours et pour en faire profiter les collègues (qui eux aussi le feront évoluer).

Retour au sommaire

ANNEXE 1

Les 20 cartes

Discriminant	Arbre de probabilités	Polynôme du second degré	La médiane
Le premier quartile	Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur	La fonction bénéfice
La fonction cube	Un tableau de signes	Nombre dérivé	Taux d'accroissement
Un ensemble de définition	Un évènement	Une probabilité	Équation de la tangente à une courbe
Loi de probabilité d'une variable aléatoire	L'espérance d'une variable aléatoire X	Un diagramme circulaire	Le logiciel GeoGebra

Les cartes utilisées en classe étaient des rectangles d'environ 5 cm de long et 4 cm de large.

Les règles du jeu

Le jeu se joue en trois manches : l'équipe gagnante est celle qui totalise le plus de points à la fin des trois manches. Un point est accordé pour chaque carte découverte.
Les équipiers jouent à tour de rôle.

Première manche
Durant cette manche, l'équipier qui a la parole doit faire deviner le mot inscrit sur la carte en parlant, mais sans prononcer un seul des mots présents sur la carte. L'équipe dispose d'une minute pour en faire deviner un maximum ! On a le droit à autant de réponses que l'on désire et on ne peut pas passer et/ou changer de carte

Seconde manche
Cette fois, l'équipier qui a la parole peut tenter de faire deviner le mot inscrit en ne prononçant qu'un seul mot. L'équipe n'a le droit qu'à un seul essai ! On peut décider de passer. La manche dure aussi une minute.

Troisième et dernière manche
Pour faire deviner le mot inscrit, l'équipier ne peut à présent que dessiner ou écrire des formules, symboles, etc. (mais bien sûr pas le mot à deviner). L'équipe n'a à nouveau le droit qu'à une proposition et on peut changer de carte.

Les trois manches sont finies,
on compte les points et on désigne les gagnants !

Retour au sommaire

ANNEXE 2 : La feuille de référence (définitions)

1 Discriminant : Le discriminant de l'équation, est le nombre Δ, défini par $\Delta = b^2 - 4ac$

2 Arbre de probabilités : c'est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire et ou figurent les probabilités connues.

3 Polynôme du second degré : On appelle polynôme (ou trinôme) du second degré toute expression pouvant se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c$.

4 La médiane : Une médiane d'une série statistique est une valeur *m* qui permet de couper l'ensemble des valeurs en deux parties d'effectif égal.

5 Le premier quartile : On appelle premier quartile la plus petite valeur de la série, notée Q_1, telle qu'au moins 25 % des valeurs de la série soient inférieures ou égales à Q_1.

6 Le taux d'évolution : Le taux d'évolution d'une variable numérique (une quantité) est le **rapport** $T = \frac{Vf - Vi}{Vi}$ où V_i est la valeur initiale de la variable et V_f sa valeur finale.

7 Coefficient multiplicateur : Un coefficient multiplicateur est un coefficient de proportionnalité qui traduit l'application d'un pourcentage par une multiplication.

8 La fonction bénéfice : Il s'agit de la différence entre la fonction recette et de la fonction cout.

9 La fonction cube : La fonction cube est la fonction définie sur **R** par x^3 .

10 Un tableau de signes : En mathématiques, un **tableau de signes** est un tableau à double entrée qui permet de déterminer le signe d'une expression algébrique factorisée, en appliquant la règle des signes et en facilitant l'organisation du raisonnement.

11 Nombre dérivé : Le nombre dérivé au point d'abscisse *a*, d'une fonction *f*, est égal au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de cette fonction en ce même point. On le détermine en calculant la limite quand *h* tend vers 0 du taux de variation.

12 Taux d'accroissement : On appelle taux d'accroissement de la fonction *f* entre *a* et (*a*+*h*), le rapport $T = \frac{Vf - Vi}{Vi}$ où *Vi* est la vitesse initiale de la variable et *Vf* la valeur finale.

13 Un ensemble de définition : L'ensemble de définition de *f* contient toutes les valeurs de *x* qui ont une image par *f*.

14 Un évènement : C'est l'un des résultats possible d'une expérience. Il est composé d'une ou plusieurs issues de cette expérience.

15 Une probabilité : la probabilité est égale au rapport $\frac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ de\ cas\ possibles}$ (c'est un nombre compris entre 0 et 1).

16 Équation de la tangente (à une courbe) : Si une fonction *f* est dérivable en *a*, alors sa courbe représentative admet, au point A d'abscisse a, une tangente passant par A de coefficient directeur $f'(a)$. Une équation de cette tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

17 Loi de probabilité d'une variable aléatoire : La loi de probabilité d'une variable aléatoire X associe à chaque valeur *a* prise par X la probabilité de l'évènement (X = a_i). On la représente généralement sous forme de tableau.

18 L'espérance d'une variable aléatoire X : On appelle espérance mathématique de X le nombre
$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + ... + x_n \times p_n$

19 Un diagramme circulaire : Un diagramme circulaire (aussi appelé diagramme en secteurs, camembert) est un type de diagramme utilisé en statistiques. Il permet de représenter un petit nombre de valeurs par des angles proportionnels à ces valeurs.

20 Le logiciel GeoGebra : GeoGebra est un logiciel éducatif en mathématiques pour les élèves du collège et du lycée permettant de travailler facilement et de manière dynamique en algèbre, géométrie et calcul analytique.

Retour au sommaire

ÉTUDE MATHÉMATIQUE

ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE COURBES

Par Alain SATABIN,
Lycée Gaspard Monge, Charleville

1. De quoi s'agit-il ?

1.1. Définissons la chose

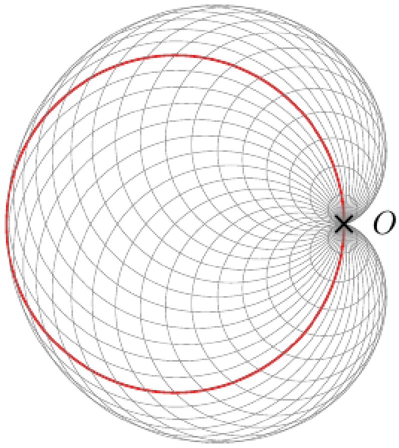
Considérons dans le plan une famille $\mathscr{F}$ de courbes. Lorsqu'elles sont toutes tracées, on remarque bien souvent qu'elles ne remplissent pas la totalité du plan et qu'il existe une courbe $\mathscr{E}$ tangente en tout point à une des courbes de $\mathscr{F}$.
$\mathscr{E}$ est appelée l'*enveloppe* de la famille $\mathscr{F}$.

1.2. Un exemple purement graphique

Considérons un point fixe O et un cercle Γ (en rouge) passant par O.
$\mathscr{F}$ (en gris) est la famille de cercles définie par

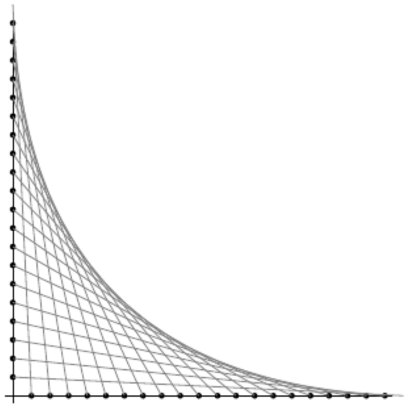
$$\mathscr{F} = \{\text{cercles de diamètre}[OM];\, M\in\Gamma\}$$

Tout logiciel de tracé mathématique qui se respecte donnera le tracé ci-contre. L'enveloppe $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ nous fait fortement penser à une cardioïde.



1.3. Le cas des droites

Très souvent, l'ensemble $\mathscr{F}$ est une famille de droites.
La figure obtenue est alors comparable à un tableau de fils tendus entre des clous enfoncés dans une planche à dessin.
Le cas le plus classique est celui de fils tendus entre des clous régulièrement espacés sur deux droites perpendiculaires.
L'enveloppe $\mathscr{E}$ est bien visible … mais difficile à identifier précisément ! arc de cercle ? parabole ? Hyperbole ? Autre ?



2. Un traitement mathématique

2.1. Une représentation de $\mathscr{F}$

A priori, $\mathscr{F}$ est un ensemble de courbes planes du plan $P=(O,x,y)$:

$$\mathscr{F} = \{C_t\,;\, t\in I\}$$

où I est un intervalle réel et, pour chaque valeur de $t\in I$, C_t est une courbe plane.
Une équation implicite permet de résumer la situation :

$$\mathscr{F} = \{M(x;y)\in P\,;\, \exists\, t\in I\,, f(x,y,t)=0\}$$

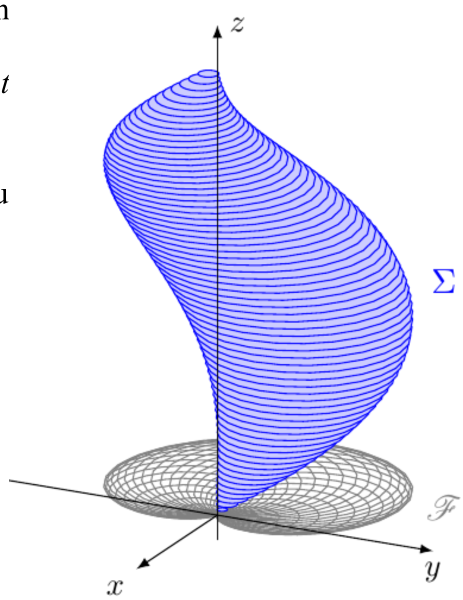
Cela remplit une partie du plan et l'enveloppe est en quelque sorte la frontière de cette partie "noircie" par les points de $\mathscr{F}$.
Si on reprend l'exemple du §[1.2] avec Γ le cercle de centre $(-1;0)$ et de rayon 1, M_t le point d'affixe $(-1+e^{it})$ et $I=[0;2\pi]$, l'écriture de l'équation cartésienne du cercle C_t de diamètre $[OM_t]$ donne

$$f(x,y,t)=x^2-(\cos(t)-1)\,x+y^2-\sin(t)\,y$$

Retour au sommaire

2.2. Une autre façon de voir

Si on considère dans l'espace la nappe définie $\Sigma=\{(x,y,t)\,;\,t\in I\,;\,f(x,y,t)=0\}$, il est clair que $\mathscr{F}$ est la projection sur le plan de base P de Σ ... un peu comme son ombre obtenue par un éclairage vertical.
On dit aussi que $\mathscr{F}$ est le *contour apparent projeté suivant* Oz de Σ , l'œil étant placé à l'infini.



La figure ci-contre a été obtenue à partir de l'exemple du §[1.2].
Dans le plan $(z=t)$ on trace le cercle de centre
$(\frac{\cos(t)-1}{2};\frac{\sin(t)}{2};t)$

et de rayon $|\sin(\frac{t}{2})|$.

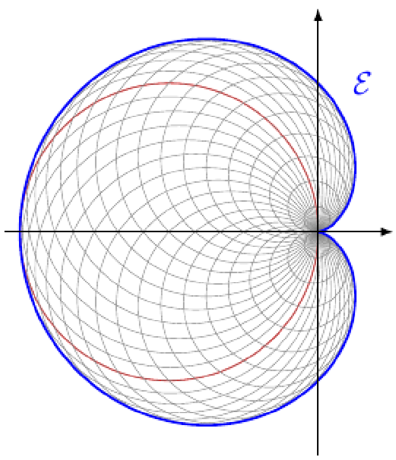
2.3. La méthode

Les points de la nappe Σ situés sur le contour apparent suivant (Oz) sont ceux où le plan tangent à Σ est "vertical", c'est à dire contient la direction (Oz) .
Le plan tangent à Σ en (x,y,t) ayant pour vecteur normal $(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,t),\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,t),\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t))$, le point conviendra si et seulement si $\frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)=0$

L'enveloppe $\mathscr{E}$ de $\mathscr{F}$ étant la projection dans le plan de base de ces points, on en déduit que pour obtenir l'équation cartésienne de l'enveloppe il suffit d'éliminer le paramètre t dans le système d'équations $\begin{cases} f(x,y,t)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,y,t)=0 \end{cases}$

On peut aussi exprimer x et y en fonction de t pour obtenir une équation paramétrique de l'enveloppe.

L'exemple du §[1.2] nous conduit ainsi à résoudre le système
$$\begin{cases} x^2-(\cos(t)-1)x+y^2-\sin(t)y=0 \\ \sin(t)x-\cos(t)y=0 \end{cases}$$
Cela donne $\begin{cases} \cos(t)x+\sin(t)=x^2+y^2+x \\ -\sin(t)x+\cos(t)y=0 \end{cases}$



En sommant les carrés de ces deux équations, le paramètre t s'élimine.

En paramétrant ensuite en polaire $\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$

on obtient $\rho=1-\cos(\theta)$, ce qui est bien l'équation d'une *cardioïde*.

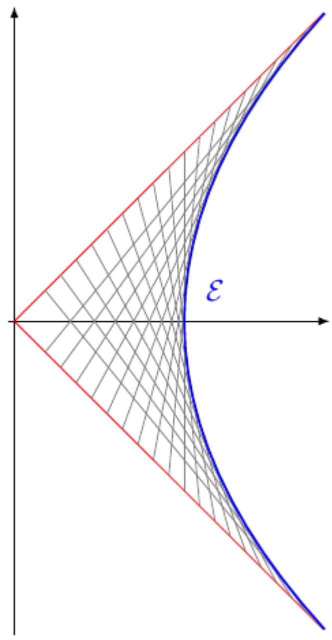
3. Quelques exemples d'enveloppes de droites

Passons ici en revue une série de classiques dans lesquels $\mathscr{F}$ est une famille de droites.

Retour au sommaire

3.1. Le tableau de fils du §[1.3]

Afin de faciliter les calculs par la suite, nous allons planter les clous du tableau de fil sur les droites $(y=x)$ et $(y=-x)$, qui sont bien perpendiculaires et donc ne changent rien au problème. De plus, nous supposerons que le dernier clou est planté à l'abscisse 10 alors que le plus proche de l'intersection est à l'abscisse 1. Les autres étant régulièrement espacés entre ces deux-là.



La famille $\mathscr{F}$ est composé des droites reliant le point (t,t) au point $(11-t,t-11)$ pour t variant de 1 à 10.
Ainsi

$$\mathscr{F}=\{D_t : 11x+(11-2t)y=2t(11-t)\,;\, t\in[1,10]\}$$

et

$$f(x,y,t)=11x+(11-2t)y-2t(11-t)$$

La recherche de l'enveloppe conduit donc au système

$$\begin{cases}11x+(11-2t)y=2t(11-t)\\ -2y=2(11-2t)\end{cases}$$

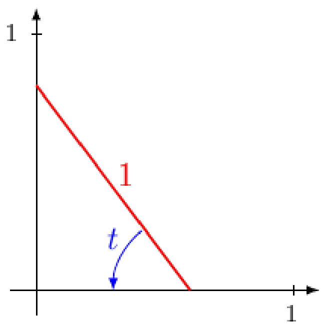
La seconde équation nous donne aisément t en fonction de y

$$\mathscr{E} : y^2=22x-121$$

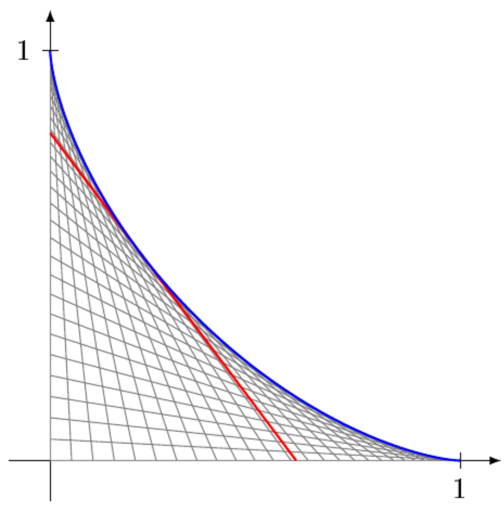
et en reportant dans la première on obtient

ce qui est une portion de la parabole de sommet $\left(\frac{11}{2},0\right)$, de direction (O$y$) et de foyer (11,0).

3.2. L'échelle qui glisse



Quelle est la courbe enveloppée par une échelle glissant le long d'un mur tandis que son pied glisse sur le sol en s'éloignant du mur ?
Cela revient à considérer tous les segments de longueur donnée dont une extrémité est sur le demi-axe des abscisses positives et l'autre sur celui des ordonnées positives.
Sans restreindre le problème, considérons que l'échelle est de longueur 1 et prenons pour paramètre t l'angle qu'elle fait avec le sol, variant dans $[0,\frac{\pi}{2}]$.



Ce paramétrage nous donne

$$\mathscr{F}=\{D_t : \sin(t)\,x+\cos(t)\,y=\cos(t)\sin(t)\,;\, t\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$$

et les coordonnées des points de l'enveloppe doivent satisfaire au système

$$\begin{cases}\sin(t)x+\cos(t)y &= \cos(t)\sin(t)\\ \cos(t)x-\sin(t)y &= \cos^2(t)-\sin^2(t)\end{cases}$$

La résolution paramétrée en t conduit à

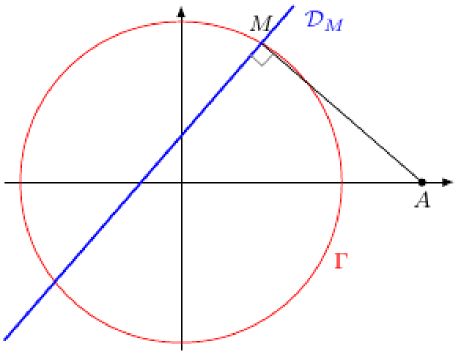
$$\begin{cases}x &= \cos^3 t\\ y &= \sin^3 t\end{cases}\quad t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

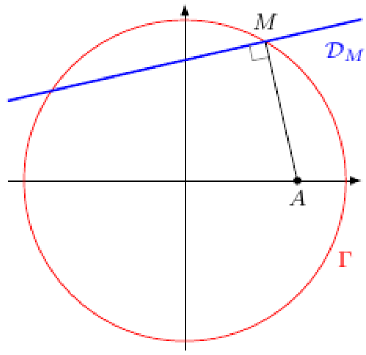
ce qui est un quart d'*astroïde*.

Retour au sommaire

3.3. Enveloppe orthogonale d'un cercle

Nous considérons ici un cercle Γ , un point A ne lui appartenant pas et prenons la famille de droites $\mathscr{F} = \{ D_M \; ; \; M \in D_M \; ; \; D_M \perp (AM) \; ; \; M \text{ décrivant } \Gamma \}$





Prenons pour Γ le cercle de centre O et rayon 1, et pour A le point d'affixe a réel positif. Le point M décrivant Γ a pour affixe e^{it} avec t parcourant l'intervalle $[0, 2\pi]$. La droite D_M a alors pour équation

$$(a - \cos(t))(x - \cos(t)) - \sin(t)(y - \sin(t)) = 0$$

Cela mène au système suivant pour les coordonnées de points de l'enveloppe :

$$\begin{cases} (a - \cos(t))x - \sin(t)y - a\cos(t) + 1 = 0 \\ \sin(t)x - \cos(t)y + a\sin(t) = 0 \end{cases}$$

ce qui peut aussi s'écrire en un système en $(\cos(t), \sin(t))$:

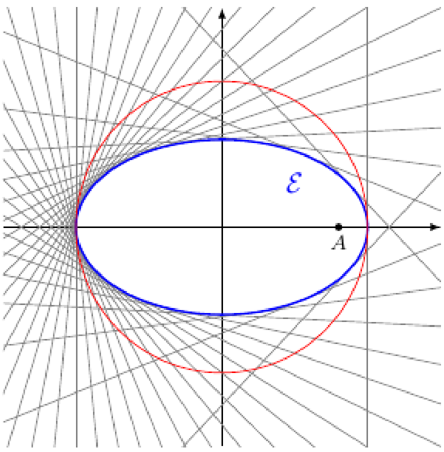
$$\begin{cases} \cos(t)(a+x) + \sin(t)y &= ax+1 \\ \cos(t)y - \sin(t)(a+x) &= 0 \end{cases}$$

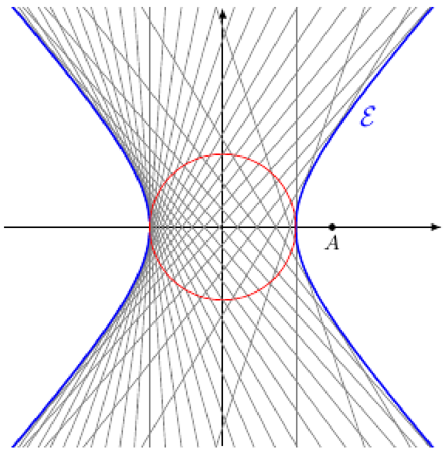
qui nous donne :

$$\begin{cases} \cos(t) &= \dfrac{(ax+1)(a+x)}{(a+x)^2 + y^2} \\ \sin(t) &= \dfrac{(ax+1)y}{(a+x)^2 + y^2} \end{cases}$$

et t s'élimine en sommant les carrés pour aboutir à l'équation cartésienne de l'enveloppe de $\mathscr{F}$:

$$x^2 + \frac{y^2}{1 - a^2} = 1$$



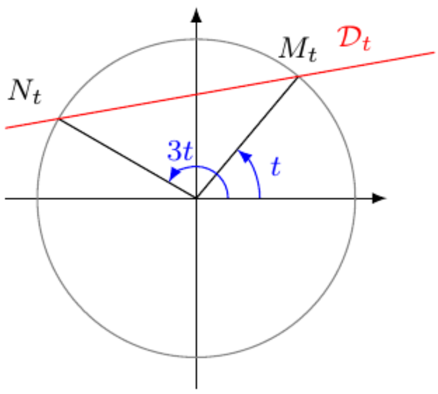


C'est une conique de centre O , dont A est un foyer et $(1, 0)$ le sommet associé, *hyperbole* si $a > 1$ et *ellipse* lorsque $a < 1$.

…/…

Retour au sommaire

3.4. Enveloppons les tables de multiplication



Prenons k un entier au moins égal à 2 et sur le cercle trigonométrique, relions le point d'argument t au point d'argument kt , modulo 2π évidemment. Sur le dessin j'ai pris $k=3$.
Considérons la famille $\mathscr{F}_k$ réunissant ces droites pour t variant de 0 à 2π :

$$\mathscr{F}_k=\{(M_tN_t)\ ;\ M_t(e^{it})\ ;\ N_t(e^{ikt})\ ;$$

c'est à dire :

$$\mathscr{F}_k=\{D_t:(\sin(kt)-\sin(t))(x-\cos(t))-(\cos(kt)-\cos$$

La recherche de l'enveloppe se traduit par le système

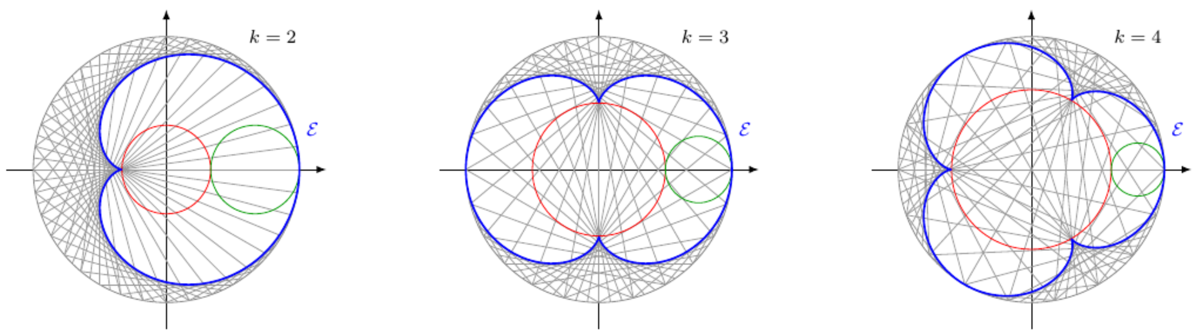
$$\begin{cases}(\sin(kt)-\sin(t))x-(\cos(kt)-\cos(t))\,y=\sin((k-1)t)\\(k\cos(kt)-\cos(t))\,x+(k\sin(kt)-\sin(t))\,y=(k-1)\cos((k-1)t)\end{cases}$$

ce qui donne, après quelques manipulations trigonométriques fastidieuses

$$\begin{cases}(k+1)x & = & k\cos(t)+\cos(kt)\\(k+1)y & = & k\sin(t)+\sin(kt)\end{cases}\quad t\in[0;2\pi]$$

On reconnait là (il faut quand même avoir l'œil !) l'équation paramétrique d'une *épicycloïde* d'ordre $(k-1)$ d'un cercle de rayon $\dfrac{1}{k+1}$ (en vert) roulant sans glisser sur un cercle fixe de rayon $\dfrac{k-1}{k+1}$ (en rouge).

Voici quelques exemples dans lesquels on retrouve la *cardioïde* (pour $k=2$) et la *néphroïde* (pour $k=3$).

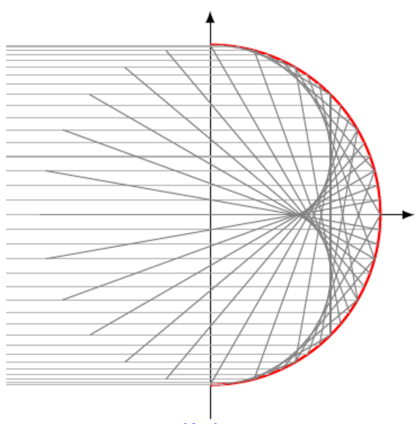


(voir le site de Mickaël Launay https://www.youtube.com/watch?v=-X49VQgi86E **)**

3.5. Soyons caustique

En physique, une *caustique* (par réflexion) est la courbe matérialisée par les rayons réfléchis dans un miroir, pour autant qu'elle existe. Dans le cas d'une parabole et de rayons arrivant parallèlement à l'axe, la caustique est réduite à un point : le foyer. C'est d'ailleurs probablement de là que vient la dénomination puisque qu'à l'origine "caustique" désigne une matière brûlante ou corrosive.

De notre point de vue, la caustique est l'enveloppe des rayons réfléchis par le miroir.
Nous allons déjà nous intéresser ici à un cas particulier de réflexion sur un miroir concave circulaire avec une source placée à l'infini.
La caustique est alors ce que vous observez sur le fond d'une casserole placée au soleil.

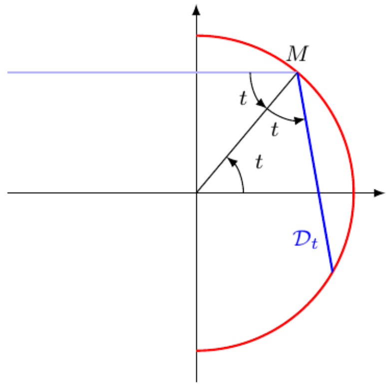


Retour au sommaire

Prenons un miroir de rayon 1 et considérons le rayon venant le frapper au point $M_t(e^{it})$, avec $t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

La droite D_t qui nous intéresse est celle passant par M_t , dirigée par le vecteur d'affixe (e^{i2t}) .
Son équation est donc

$$\sin(2t)(x-\cos(t))-\cos(2t)(y-\sin(t))=0$$



et $\mathcal{F}$ est caractérisé par

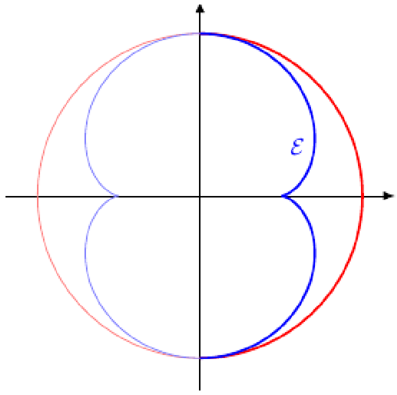
$$f(x,y,t)=\sin(2t)\,x-\cos(2t)\,y-\sin(t)\quad t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

La résolution du système

$$\begin{cases}\sin(2t)x-\cos(2t)y=\sin(t)\\ 2\cos(2t)x+2\sin(2t)y=\cos(t)\end{cases}$$

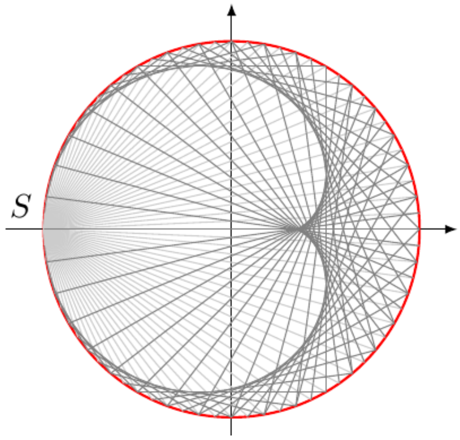
conduit à

$$\begin{cases}2x &= \frac{1}{2}(3\cos(t)-\cos(3t))\\ 2y &= \frac{1}{2}(3\sin(t)-\sin(3t))\end{cases}\quad t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$



c'est à dire la moitié d'une *néphroïde* engendrée par un cercle de rayon $\frac{1}{4}$ roulant sur un cercle de rayon $\frac{1}{2}$.

Intéressons-nous maintenant au cas où la source de lumière S est placée sur la circonférence du miroir.
La figure ci-dessous nous laisse imaginer le résultat.

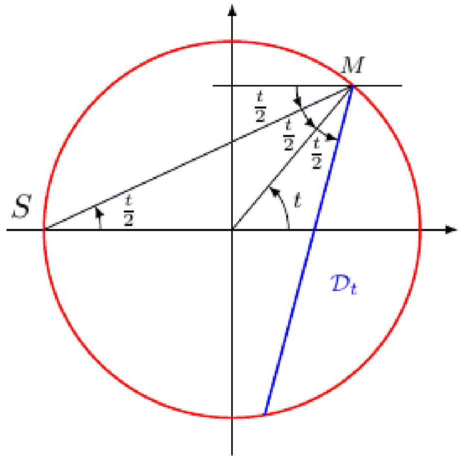


D_t est maintenant dirigée par le vecteur d'affixe $(e^{i3t/2})$
et $\mathcal{F}$ est caractérisé par

$$f(x,y,t)=\sin(\frac{3t}{2})\,x-\cos(\frac{3t}{2})\,y-\sin(\frac{t}{2})\quad t\in[0,2\pi]$$

Le système à résoudre est

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{3t}{2}\right)x-\cos\left(\frac{3t}{2}\right)y=\sin\left(\frac{t}{2}\right)\\ 3\cos\left(\frac{3t}{2}\right)x+3\sin\left(\frac{3t}{2}\right)y=\cos\left(\frac{t}{2}\right)\end{cases}$$



et fournit $\begin{cases}x &= \frac{1}{3}(2\cos(t)-\cos(2t))\\ y &= \frac{1}{3}(2\sin(t)-\sin(2t))\end{cases}$

On retrouve bien la *cardioïde* engendrée par un cercle de rayon $\frac{1}{3}$ roulant sur un cercle de même rayon.

Retour au sommaire

4. Quelques exemples plus courbes

Nous avons déjà vu dans le §[1.2] et analysé dans le §[2.3] un cas où $\mathscr{F}$ n'est pas constitué de droites. Voyons-en d'autres.

4.1. Une parabole pour guide

Considérons la parabole $P:(y=kx^2)$ et considérons pour $\mathscr{F}$ la famille de cercles centrés sur cette parabole et passant par son sommet $(0,0)$.
La fonction associée est

$$f(x)=x^2-2tx+y^2-2kt^2y \quad t\in\mathbb{R}$$

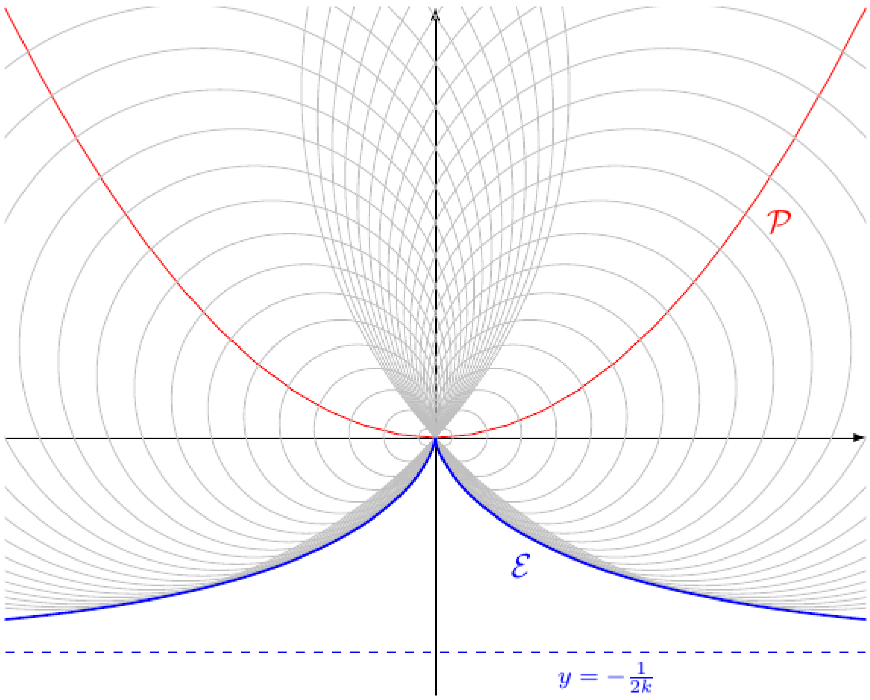
Les coordonnées des points de l'enveloppe doivent vérifier le système

$$\begin{cases} x^2-2tx+y^2-2kt^{2y}=0 \\ -2x-4kty=0 \end{cases}$$

qui donne, en éliminant le paramètre t entre ces équations :

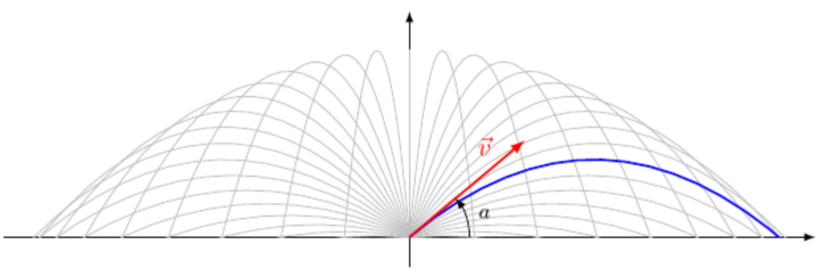
$$y(x^2+y^2)=-\frac{1}{2k}x^2$$

ce qui est l'équation d'une *cissoïde de Dioclés*, alias *cissoïde droite*.



4.2. La parabole de tir

Intéressons-nous ici à l'enveloppe des trajectoires paraboliques d'un objet lancé à une vitesse donnée d'un point fixé, sous un angle variable.
Pour l'exemple je prendrai une vitesse initiale $v=5\,m\,s^{-1}$ et une accélération de la pesanteur $g=10\,m\,s^{-2}$.



Retour au sommaire

Pour $a\in[0,\pi]$, la trajectoire du tir sous un angle a est

$$\begin{cases} x(t) &= 5\cos(a)t \\ y(t) &= -5t^2+5\sin(a)t \end{cases}$$

pour un temps t variant de 0 à $\sin(a)$, instant où le projectile retouche le sol.
La famille $\mathscr{F}$ est caractérisée par la fonction

$$f(x,y,a)=2x^2-5x\sin(2a)+10y\cos^2(a)=2x^2-5x\sin(2a)+5y(1+\cos(2a))\ a\in[0,\pi]$$

et les points de l'enveloppe doivent satisfaire au système

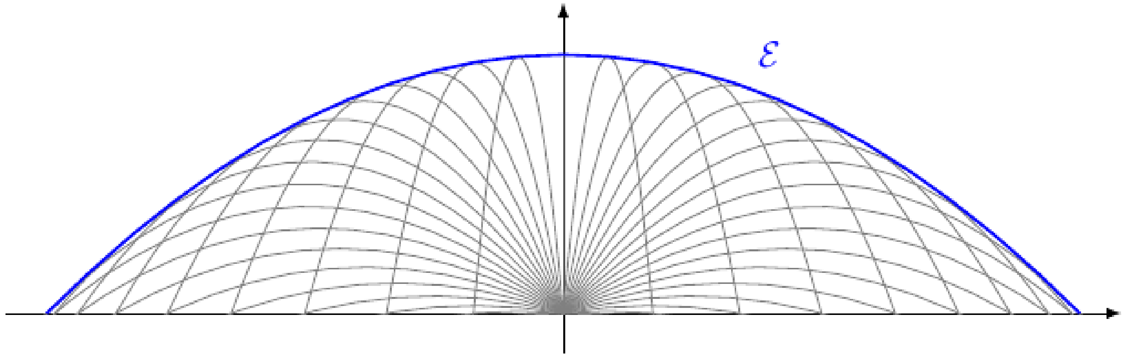
$$\begin{cases} 2x^2-5x\sin(2a)+5y(1+\cos(2a))=0 \\ x\cos(2a)+y\sin(2a)=0 \end{cases}$$

qui s'écrit aussi
$$\begin{cases} -y\cos(2a)+x\sin(2a)=\dfrac{2}{5}x^2+y \\ x\cos(2a)+y\sin(2a)=0 \end{cases}$$

En sommant les carrés de ces deux équations, le paramètre a disparait pour donner l'équation fonctionnelle de l'enveloppe

$$\mathscr{E}\ :\ y=\frac{-1}{5}x^2+\frac{5}{4}\qquad x\in[\frac{-5}{2};\frac{5}{2}]$$

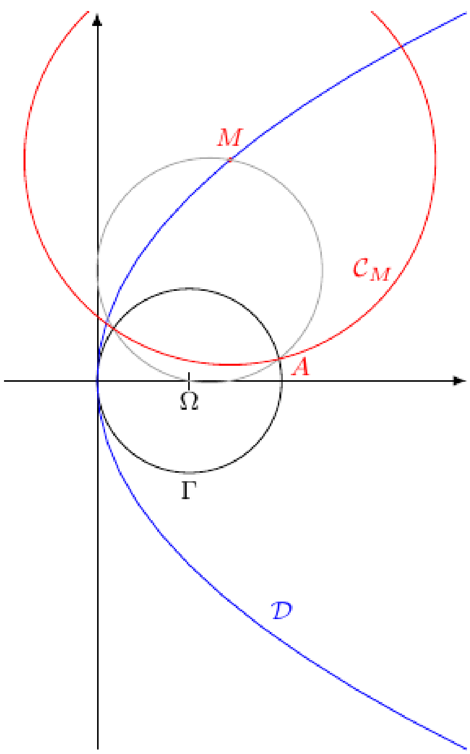
ce qui est une *parabole*.



Cette *parabole de tir* délimite la zone de dangerosité en dehors de laquelle le projectile ne peut vous atteindre, quel que soit l'angle de tir.

4.3. LES COURBES ANALLAGMATIQUES

Ce terme a été défini à la section [5] du document sur l'inversion géométrique. Par exemple ce sont les courbes globalement invariantes par l'inversion par rapport au cercle Γ de centre $\Omega(1,0)$ et de rayon 1. Nous avions signalé qu'en prenant une courbe dite *déférente* D une anallagmatique pouvait être obtenue en considérant l'enveloppe des cercles C_M centrés sur un point M parcourant D et orthogonaux au cercle d'inversion Γ .



Prenons l'exemple de la parabole $P:(4x=y^2)$ et le point $M(t^2,2t)$ parcourant P .
Le cercle de diamètre $[\Omega M]$ a pour équation

$$x^2-(t^2+1)x+y^2-2ty+t^2=0$$

Son intersection A avec le cercle Γ oit aussi vérifier

$$x^2-2x+y^2=0\ \text{[eq 1]}$$

ce qui conduit, en soustrayant, à

$$(t^2-1)x+2ty-t^2=0\ \text{[eq 2]}$$

Retour au sommaire

Le carré du rayon du cercle C_M est donc, en développant et tenant compte du fait que (x_A, y_A) satisfait aux équations [eq 1] et [eq 2] :

$$MA^2 = (x_A - t^2)^2 + (y_A - 2t)^2 = t^4 + 2t^2$$

Cela nous permet d'obtenir l'équation de C_M :

$$(x - t^2) + (y - 2t)^2 = t^4 + 2t^2$$

et la famille $\mathscr{F}$ est ici caractérisée par

$$f(x, y, t) = x^2 - 2t^2 x + y^2 - 4ty + 2t^2 \qquad t \in \mathbb{R}$$

et son enveloppe est donnée par le système

$$\begin{cases} x^2 - 2t^2 x + y^2 - 4ty + 2t^2 = 0 \\ -4tx - 4y + 4t = 0 \end{cases}$$

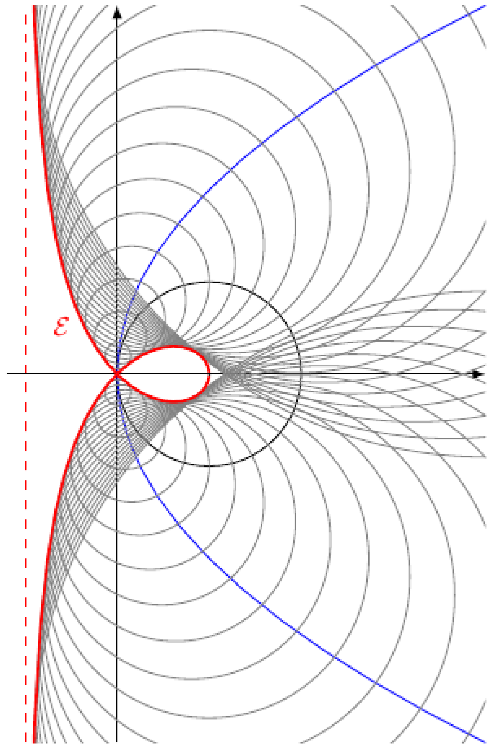
La seconde nous permet d'obtenir y en fonction de x et en reportant dans la première on obtient

$$\begin{cases} x^2(1+t^2) = t^2 \\ y = t(1-x) \end{cases}$$ et en paramétrant $t = \tan(\theta)$:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \epsilon \sin(\theta) \\ y = \tan(\theta)(1 - \epsilon \sin(\theta)) \end{array} \right. \quad \theta \in \left]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\ \epsilon = \pm 1$$

$$\begin{cases} x = \varepsilon \sin(\theta) \\ y = \tan(\theta)(1 - \varepsilon \sin(\theta)) \end{cases} \quad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\quad \varepsilon = \pm 1$$

ce qui est une *strophoïde droite*, alias *strophoïde de Newton*.



5. Une autre approche

5.1. Avec des équations paramétrées

Supposons que les courbes C_t de la famille $\mathscr{F}$ soient données de façon paramétrée plutôt que cartésienne, sous la forme

$$\forall t \in I, \ C_t = \{(x(u,t); y(u,t)) \ u \in J\}$$

De la même façon qu'au §[2.2], cela définit une nappe tridimensionnelle Σ .
Au point $M(x(u,t); y(u,t), t)$, le plan tangent à Σ est dirigé par les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ce plan contient la direction (Oz) lorsque $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{k} = 0$, c'est à dire $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 0$

L'enveloppe $\mathscr{E}$ est donc caractérisée par le système :

$$\begin{cases} x = x(u,t) \\ y = y(u,t) \\ \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 0 \end{cases} \qquad t \in \mathrm{I}$$

Retour au sommaire

5.2. Parallèle à une courbe

Pour une courbe donnée Γ, on définit la parallèle à Γ distante de R comme étant l'enveloppe des cercles de rayon R centrés sur Γ.
Prenons l'exemple de la parabole P d'équation $x=y^2$ cherchons sa parallèle distante de 2.
Pour un point $M(t^2;t)$ de P, le cercle C_t centré sur M et de rayon 2 est paramétré par

$$\begin{cases} x(u,t) &= t^2+2\cos(u) \\ y(u,t) &= t+2\sin(u) \end{cases} \qquad u\in[0;2\pi]$$

et les points de l'enveloppe $\mathscr{E}$ doivent en plus obéir à la contrainte

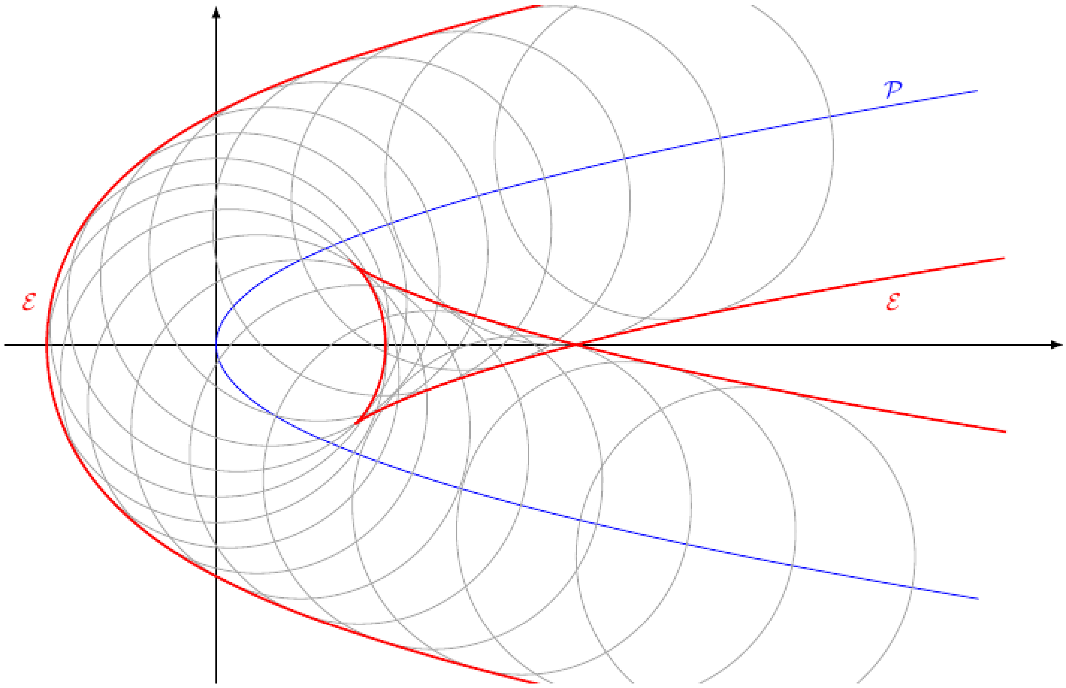
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}=0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin(u)+2t\cos(u)=0$$

ce qui conduit à

$$\cos(u)=\frac{\epsilon}{\sqrt{1+4t^2}} \quad \sin(u)=\frac{-2\epsilon t}{\sqrt{1+4t^2}} \quad \epsilon=\pm1$$

et finalement aux deux courbes formant la parallèle à P distante de 2 :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2+\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} \\ y(t) &= t-\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(t) &= t^2-\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}} \\ y(t) &= t+\frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{cases}$$



Ce ne sont pas des courbes répertoriées ... mais c'est joli !

5.3. Enveloppe des normales

Ici nous considérons un point M parcourant une courbe Γ et la famille des normales à Γ en M. L'enveloppe de cette famille est la *développée* de Γ.
Prenons l'exemple de l'ellipse Γ de centre O dont les demi-axes valent 5 et 3.

Son paramétrage est $\begin{cases} x(t) &= 5\cos(t) \\ y &= 3\sin(t) \end{cases} \quad t\in[0;2\pi]$,

Retour au sommaire

sa tangente en $M(t)$ est dirigée par $\begin{pmatrix} -5\sin t(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix}$ et sa normale par $\begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}$

et donc la droite normale en $M(t)$ s'écrit sous forme paramétrique

$$\mathrm{D}_t : \begin{cases} x(u,t) = 5\cos(t) + u\times 3\cos(t) = (5+3u)\cos(t) \\ y(u,t) = 3\sin(t) + u\times 5\sin(t) = (3+5u)\sin(t) \end{cases} \quad u\in\mathbb{R}$$

ce qui nous donne comme contrainte pour l'enveloppe

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = 25\sin^2(t) + 9\cos^2(t) + 15u = 0$$

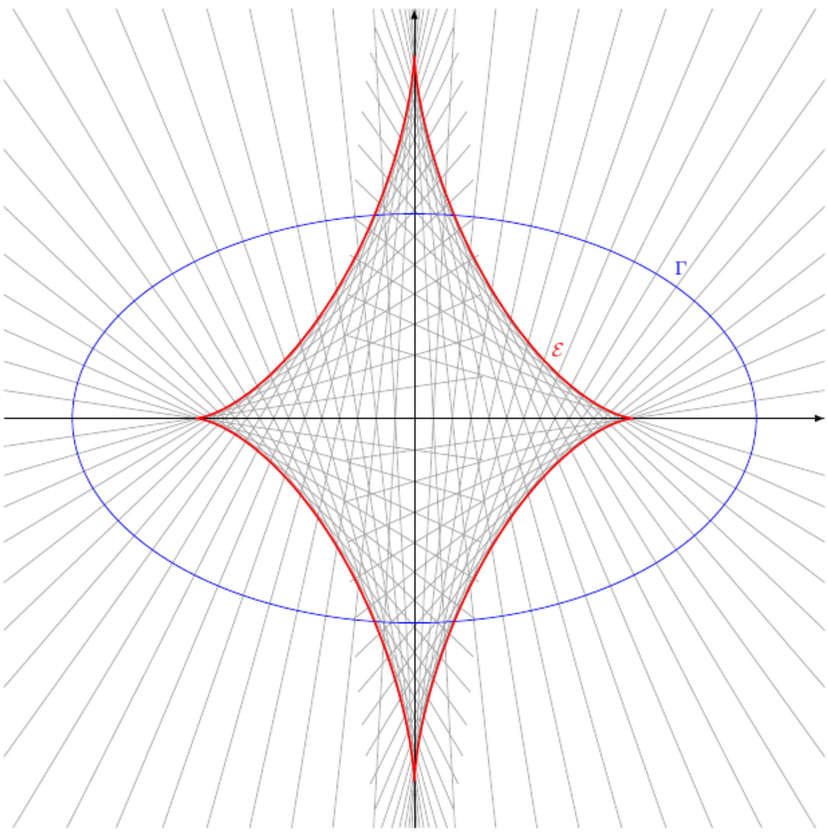
d'où nous déduisons

$$\begin{cases} 5+3u = \dfrac{16}{5}\cos^2 t \\ 3+5u = -\dfrac{16}{3}\sin^2 t \end{cases}$$

pour aboutir à l'équation de l'enveloppe :

$$\mathrm{E} : \begin{cases} x(t) = \dfrac{16}{5}\cos^3 t \\ y(t) = -\dfrac{16}{3}\sin^3 t \end{cases}$$

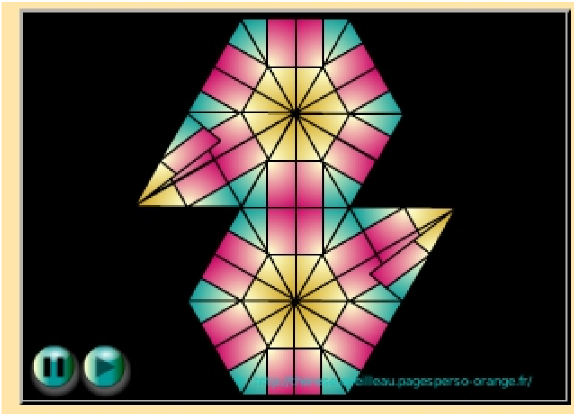
ce qui est un cas particulier de *courbe de Lamé*, affinité d'une astroïde.



Retour au sommaire

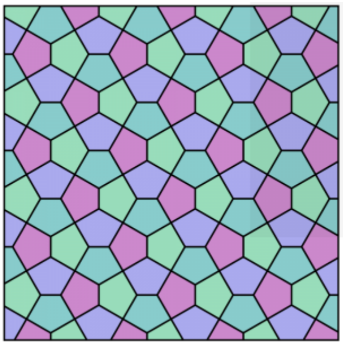
VU SUR LA TOILE

PAVONS



Le retour de certaines transformations dans les programmes de collège va être l'occasion de remettre au gout du jour les pavages. Leur étude et leur réalisation ne sont pas sans lien avec les mécanismes de l'algorithmique. On pourra vouloir en reproduire certains aux instruments ou demander à l'ordinateur d'en réaliser d'autres. Cela reste toujours une façon de montrer que les mathématiques peuvent générer de l'esthétique à partir de concepts simples.
Cela faisait quelques temps que je n'avais pas rappelé de visiter le site de Thérèse Éveilleau. En plus d'un petit rappel théorique, on trouvera l'animation ci-contre ainsi que des photos nous rappelant la présence des pavages dans notre environnement : http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/jeux_mat/textes/pavage_17_types.htm

Entre autres pages régulièrement enrichies, on consultera celles du site « Images des mathématiques » qui nous apprennent à réaliser des pavages parfois assez complexes :
http://images.math.cnrs.fr/Pavages.html

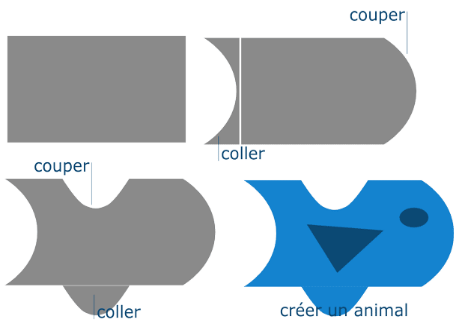


Étienne Ghys nous fait découvrir l'« Énigme des pentagones », l'aventure d'une conjecture mathématique qui a encore de beaux jours devant elle :
http://images.math.cnrs.fr/L-enigme-des-pentagones.html

Le pavage du Caire ci-contre est l'un des éléments de cette conjecture. ProfDeMat est le blog d'un collègue qui enseigne en classe de maternelle et qui fait faire des maths à ses jeunes élèves à l'aide de pavages et de mosaïques :
http://profdemat.over-blog.com/article-pavages-libres-86535931.html

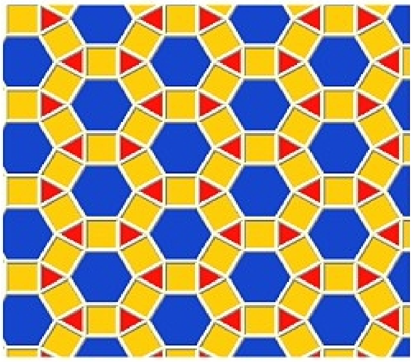
Une école primaire en Suisse expose sur la toile quelques réalisations d'élèves : http://es-beausobre.ch/enseign/pavages/text.html

Pour tous les âges, la « Cabane des idées » nous apprend à réaliser des pavages animaliers (image ci-contre) :
http://www.cabaneaidees.com/2014/06/pavage-animalier/

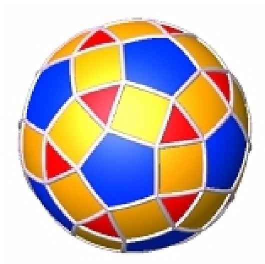


Retour au sommaire

Je me permets de reparler d'un personnage qui me tient à cœur : le Père Sébastien TRUCHET dont les pavages très rudimentaires ont fait l'objet de quelques lignes dans cette rubrique pour le thème de l'algorithmique. Un site lui est entièrement consacré ici :
http://jean-luc.bregeon.pagesperso-orange.fr/Page%200-27.html



Pour ceux qui cherchent la difficulté, les pavages d'Archimède seront-ils plus faciles à réaliser avec un ordinateur ou sur papier ?
http://www.mathcurve.com/polyedres/archimedien/archimedien.shtml



Note d'humour ou présence quotidienne de cette technique ancestrale :
http://www.archiproducts.com/fr/220/revetements-de-sol-exterieurs-paves-autobloquants-pour-exterieur.html

gilles.waehren@wanadoo.fr

ANNONCE

À lire, un excellent complément à la rubrique « Pavons » de Gilles de ce Petit Vert :
http://accromath.uqam.ca/accro/wp-content/uploads/2013/04/Vol_5_1.pdf
(à éviter si vous avez des cours à préparer ou des copies à corriger pour le lendemain !!!).
L'ensemble de la collection est sur http://accromath.uqam.ca/

MATHS ET PHILO

HUME : LE SOLEIL NE SE LÈVERA PAS DEMAIN

Par Didier LAMBOIS

Philosophe écossais, né et mort à Édimbourg (1711-1776), David Hume publie dès 1739-1740 le *Traité de la nature humaine* qui est aujourd'hui considéré comme son chef-d'œuvre mais qui passa inaperçu à l'époque ; ce livre fut très vite suivi d'*Essais de morale et de politique* (1741) et, sept ans après, de l'*Enquête sur l'entendement humain*. Mais David Hume essuie plusieurs échecs dans sa carrière universitaire et il ne devra sa célébrité, de son vivant, qu'à son travail d'historien (*Histoire de la Grande-Bretagne* (1754-1762)). Il sera ensuite nommé secrétaire d'ambassade à Paris, où il fréquentera les encyclopédistes et nouera une amitié orageuse avec Jean-Jacques Rousseau (1712-1778). La notoriété philosophique définitive ne viendra qu'à la publication des *Prolégomènes à toute métaphysique future* (1783) de Kant (1724-1804) qui affirme que c'est la lecture de Hume qui l'a tiré de son « sommeil dogmatique ». Efforçons-nous de comprendre pourquoi en nous référant aux textes de Hume :

Tous les objets sur lesquels s'exerce la raison humaine ou qui sollicitent nos recherches se répartissent naturellement en deux genres : les relations d'idées et les choses de fait. Au premier genre appartiennent les propositions de la géométrie, de l'algèbre et de l'arithmétique, et, en un mot, toutes les affirmations qui sont intuitivement ou démonstrativement certaines. Cette proposition : le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, exprime une relation entre ces éléments géométriques. Cette autre : trois fois cinq égalent la moitié de trente, exprime une relation entre ces nombres. On peut découvrir les propositions de ce genre par la simple activité de la pensée sans tenir compte de ce qui peut exister dans l'univers. N'y eût-il jamais eu dans la nature de cercle ou de triangle, les propositions démontrées par Euclide n'en garderaient pas moins pour toujours leur certitude et leur évidence.

Les choses de fait, qui constituent la seconde classe d'objets sur lesquels s'exerce la raison humaine, ne donnent point lieu au même genre de certitude ; et quelque évidente que soit pour nous leur vérité, cette évidence n'est pas de même nature que la précédente. Le contraire d'une chose de fait ne laisse point d'être possible, puisqu'il ne peut impliquer contradiction, et qu'il est conçu par l'esprit avec la même facilité et la même distinction que s'il était aussi conforme qu'il se pût à la réalité. Une proposition comme celle-ci : le soleil ne se lèvera pas demain, n'est pas moins intelligible et n'implique pas davantage contradiction que cette autre affirmation : il se lèvera. C'est donc en vain que nous tenterions d'en démontrer la fausseté. Si elle était fausse démonstrativement, elle impliquerait contradiction, et jamais l'esprit ne pourrait la concevoir distinctement.

Enquête sur l'entendement humain (1748), quatrième section

Nous devons donc distinguer les relations qui dépendent uniquement de la comparaison entre les idées et les relations qui dépendent des faits, c'est-à-dire du monde dont nous faisons l'expérience et que nous voulons connaitre. Pour les premières il n'y a pas de problème : nous pouvons parvenir à la certitude, leur négation implique la contradiction. Les secondes ne dépendent pas du principe de non-contradiction et ne viennent selon Hume que de notre expérience. Dans son Traité de la nature humaine il montre ainsi que le principe de causalité ne peut être déduit a priori. Affirmer que « tout phénomène a une cause » n'a aucune validité a priori ; l'idée d'une relation nécessaire de cause à effet ne vient en réalité que de l'expérience répétée d'une conjonction constante entre deux objets contigus dans

Retour au sommaire

l'espace et le temps, conjonction constante en vertu de laquelle nous appelons l'objet antécédent la cause et l'objet suivant la conséquence. C'est uniquement l'habitude de la succession qui nous amène à lui attribuer un caractère de nécessité : nous transformons ce qui est un simple post hoc en propter hoc[2]. Même si l'expérience passée a constamment montré une succession déterminée rien ne nous autorise, sur un plan logique, à conclure que l'antécédent produira nécessairement l'effet.

La petite fable de la dinde inductiviste, inventée par Bertrand Russell et rapportée par Chalmers, illustre bien la fragilité de l'induction : « *Dès le matin de son arrivée dans la ferme pour dindes, une dinde s'aperçut qu'on la nourrissait à 9 heures du matin. Toutefois, en bonne inductiviste, elle ne s'empressa pas d'en conclure quoi que ce soit. Elle attendit d'avoir observé de nombreuses fois qu'elle était nourrie à 9 heures du matin, et elle recueillit ces observations dans des circonstances fort différentes, les mercredis et jeudis, les jours chauds et les jours froids, les jours de pluie et les jours sans pluie. Chaque jour, elle ajoutait un autre énoncé d'observation à sa liste. Sa conscience inductiviste fut enfin satisfaite et elle recourut à une inférence inductive pour conclure : « Je suis toujours nourrie à 9 heures du matin. » Hélas, cette conclusion se révéla fausse d'une manière indubitable quand, une veille de Noël, au lieu de la nourrir, on lui trancha le cou* » (Chalmers, Qu'est-ce que la science ? p. 40).

En jetant le doute sur l'idée de causalité et sur la possibilité de conclure en généralisant (donc sur l'idée de loi), Hume ébranle l'édifice du savoir ; c'est ce qui conduira Kant à s'interroger sur le pouvoir véritable de notre raison et à rédiger la Critique de la Raison Pure, pour sauver ce qui pouvait l'être… C'est aussi ce qui conduira Popper (voir article du Petit Vert n°114 de juin 2013) à chercher une autre définition de la scientificité. Avec Hume la connaissance et la métaphysique perdent l'assurance tranquille qu'avait voulu établir Descartes (1596-1650). Une autre philosophie est née : la philosophie critique[3].

Induction et induction mathématique

Si le problème soulevé par Hume (problème de l'induction) remet en cause la possibilité de généraliser, sommes-nous condamnés pour autant à ne jamais pouvoir étendre nos connaissances ? Dans son livre La Science et l'Hypothèse (1902), Henri Poincaré (1854-1912) montre que les mathématiques échappent à cette impasse. Loin de se réduire au syllogisme « qui ne nous apprend rien de nouveau », le raisonnement mathématique peut généraliser, donc être fécond, tout en restant rigoureux.

« Quelle est la nature du raisonnement mathématique ? Est-il réellement déductif comme on le croit d'ordinaire ?

[2] *Post hoc*, après cela. *Propter hoc*, à cause de cela. Le sophisme *post hoc ergo propter hoc*, après cela donc à cause de cela, est fondé sur la notion erronée que parce qu'un évènement arrive après un autre, le premier est la cause du second. Le raisonnement post hoc est la base de beaucoup de superstitions et de croyances erronées. Je prends de l'aspirine et mon mal de tête disparait, donc… Je mets mon grigri autour de mon cou et j'améliore mes performances, donc…

[3] Étymologiquement, est critique ce qui se rapporte à une crise *(krisis),* ce qui est difficile, ce qui pose problème. On peut aussi expliquer l'étymologie de ce mot à partir du verbe grec *krinein,* trier, passer au crible ; le terme désigne alors l'opération par laquelle on cherche à séparer ce qui est vrai de ce qui est faux. On appelle esprit critique celui qui n'accepte aucune assertion sans s'interroger d'abord sur sa valeur, soit du point de vue de son contenu (critique interne), ou de son origine (critique externe). La philosophie critique n'a plus pour objet de connaitre mais de s'interroger sur la connaissance.

Retour au sommaire

Une analyse approfondie nous montre qu'il n'en est rien, qu'il participe **dans une certaine mesure** de la nature du raisonnement inductif et c'est par là qu'il est fécond. Il n'en *conserve pas moins son caractère de rigueur absolue* » (La Science et l'Hypothèse, Introduction).

Selon Poincaré cette généralisation est particulièrement manifeste dans le raisonnement par récurrence que certains nomment « induction mathématique ». Raisonnement inductif et raisonnement par récurrence semblent pouvoir être comparés puisqu'ils « vont dans le même sens, c'est-à-dire du particulier au général » mais pourtant « ils reposent sur des fondements différents ». C'est pourquoi Poincaré avait pris soin de préciser : « dans une certaine mesure ». Quelques pages plus loin il ajoute :

« On ne saurait méconnaitre qu'il y a (dans le raisonnement par récurrence) une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction appliquée aux sciences physiques est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement... »

Nous voilà donc revenus au constat initial que faisait Hume. Il faut rigoureusement distinguer les objets que la pensée découvre sans sortir d'elle-même, qui ne sont que des **relations d'idées**, et les **faits** que nous ne pouvons établir de la même manière. Si nous sommes convaincus que le soleil se lèvera demain c'est simplement par habitude et parce que nous croyons en un ordre immuable de l'univers. Il en va tout autrement lorsque nous montrons l'hérédité des propriétés d'un nombre. Pour éviter toute confusion, mieux vaudrait ne jamais utiliser l'expression « induction mathématique » lorsque nous parlons de raisonnement par récurrence. Une loi physique, induite à partir de l'expérience, ne pourra jamais être de même nature qu'une propriété mathématique, déduite par raisonnement.

LA PHRASE DU TRIMESTRE

La vie est complexe car elle comporte une partie réelle et une partie imaginaire.

Sophus Lie (1842-1899) mathématicien norvégien

https://fr.wikipedia.org/wiki/Sophus_Lie

Retour au sommaire

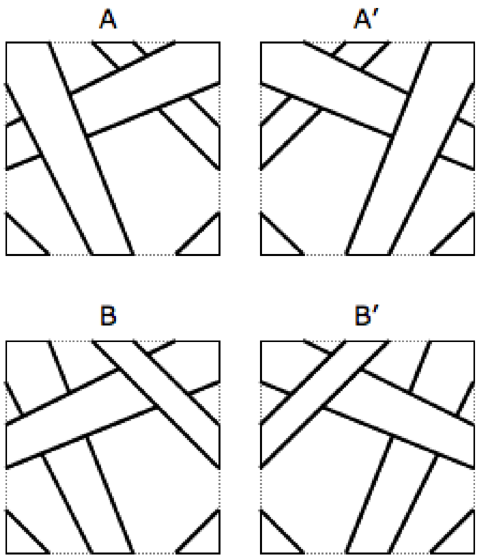
MATHS ET ARTS

ESCHER, ENTRE LÀ EN COULEURS, C'EST CODÉ…

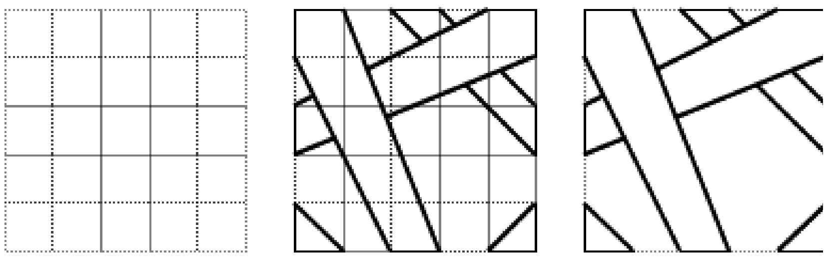
par François DROUIN

Je passe en permanence d'un côté à l'autre de la frontière qui sépare les mathématiques de l'art (Escher 1963)

Les motifs utilisés dans les activités et les reproductions d'œuvres les utilisant sont extraits de l'ouvrage « ESCHER visions. Visions de la symétrie. Les cahiers, les dessins périodiques et les œuvres corrélatives de M.C. Escher » (Doris Schattenschneider SEUIL 1992).



En 1943, Escher reprend les planches en noir et blanc imaginées en 1938 et imagine une nouvelle série de quatre carrés permettant la visualisation de « rubans » entremêlés qu'il colorie ensuite



Le motif a été créé à partir d'un réseau quadrillé 5×5. Ci-contre, voici une visualisation pour le motif A.

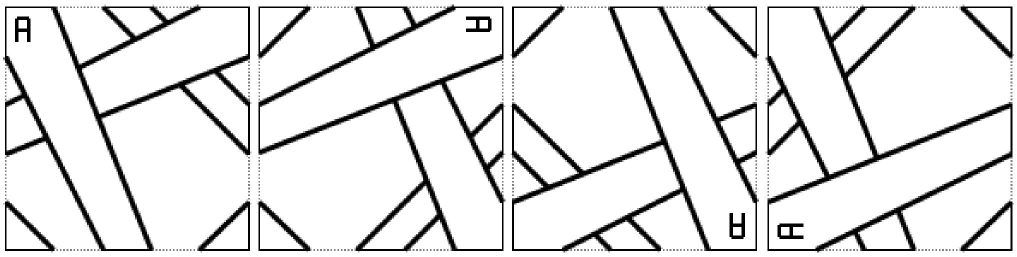
Les pièces ont été imaginées par Escher à partir de quadrillages 5×5, ce qui en facilite le tracé avec des instruments de dessin, avec un logiciel de géométrie ou avec la partie dessin d'une suite bureautique.

Les dessins des planches carrées gravées (nommées ici A, A', B, B') seront utilisés pour visualiser des « rubans » s'entremêlant l'un sur l'autre. Comme Escher l'a fait, il restera à colorier les « lignes » qui s'entrecroisent.

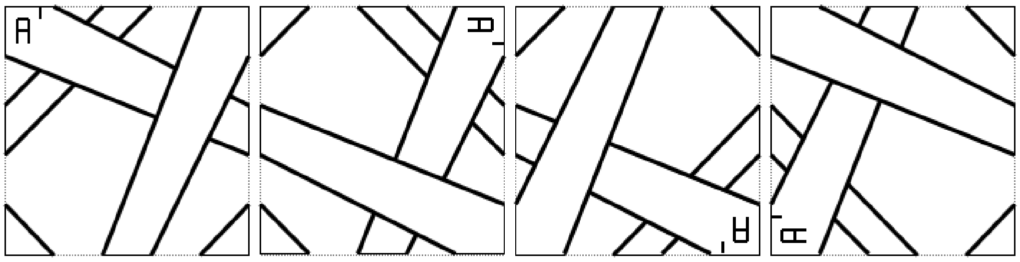
Retour au sommaire

Codages des positions des quatre pièces

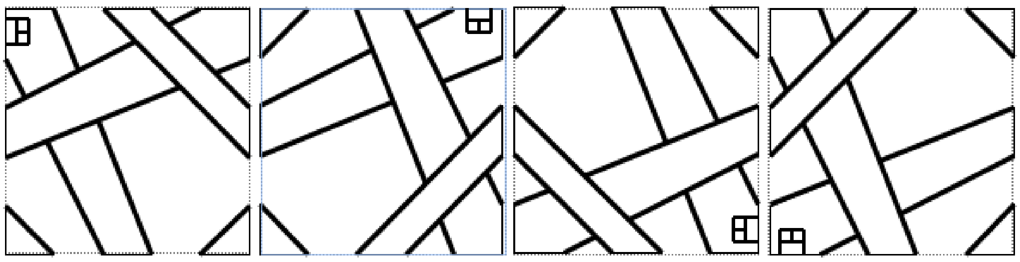
Le sens des aiguilles d'une montre est celui qui sera systématiquement utilisé.



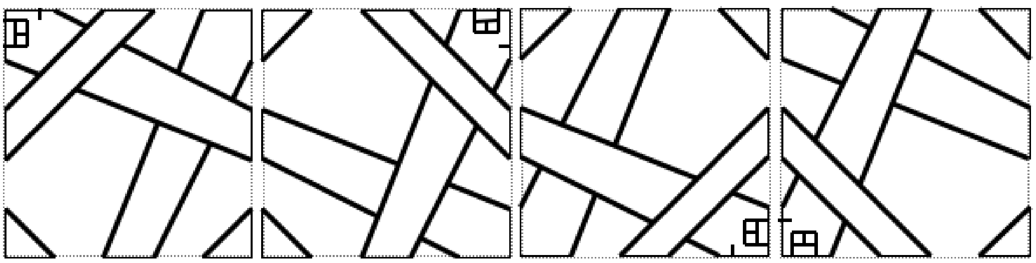
Des quarts de tour dans le sens des aiguilles d'une montre font pivoter la pièce A. Ses différentes positions seront notées A_1, A_2, A_3 et A_4 (un nouveau quart de tour rétablit la position A_1).



Des quarts de tour dans le sens des aiguilles d'une montre font pivoter la pièce A'. Nous noterons A'_1, A'_2, A'_3 et A'_4 ses différentes positions (un nouveau quart de tour rétablit la position A'_1).



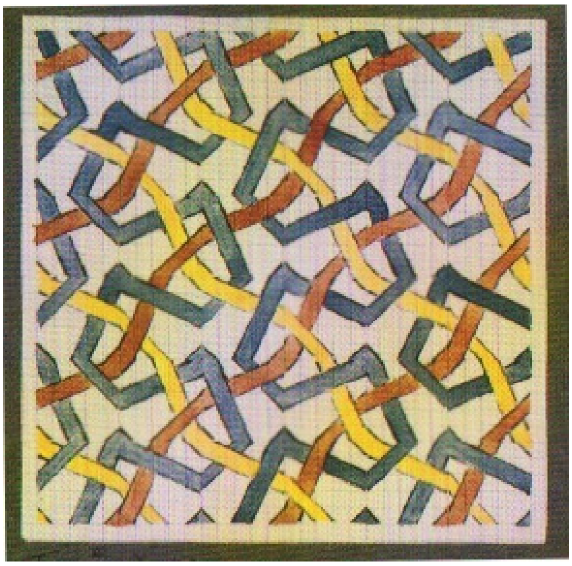
Des quarts de tour dans le sens des aiguilles d'une montre font pivoter la pièce B. Nous noterons B_1, B_2, B_3 et B_4 ses différentes positions (un nouveau quart de tour rétablit la position B_1).

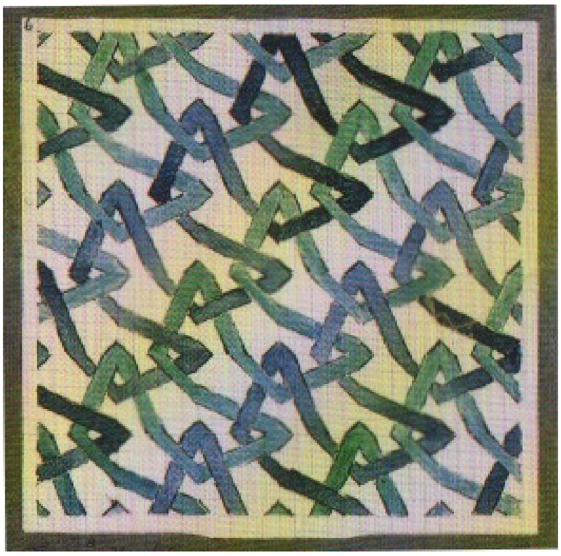


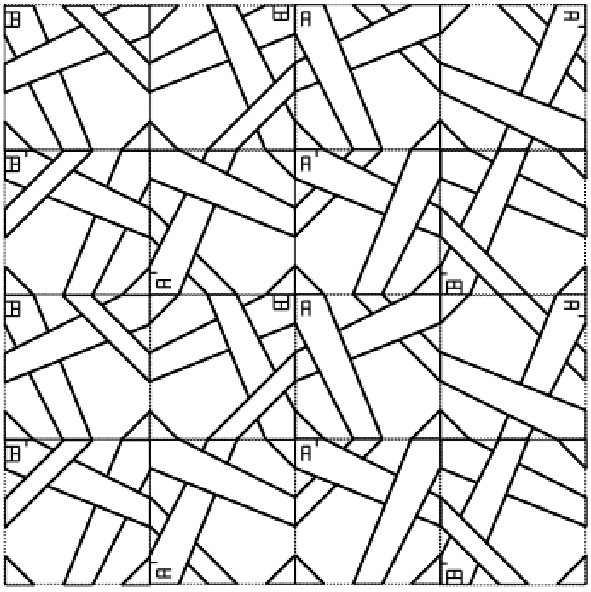
Des quarts de tour dans le sens des aiguilles d'une montre font pivoter la pièce B'. Nous noterons B'_1, B'_2, B'_3 et B'_4 ses différentes positions (un nouveau quart de tour rétablit la position B'_1).

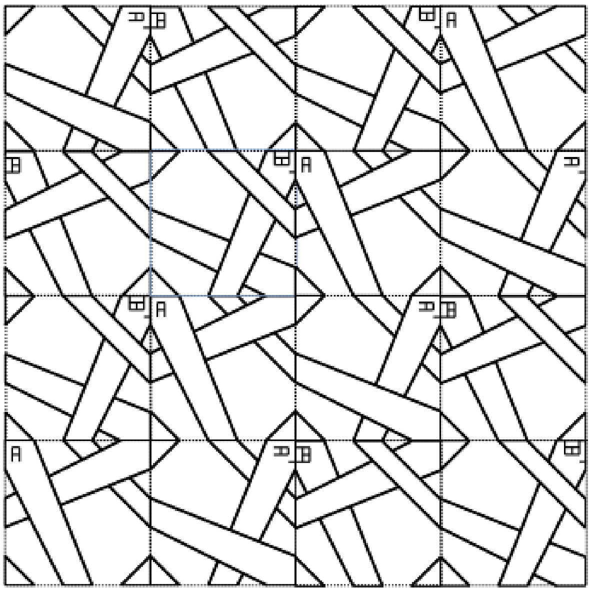
Retour au sommaire

Voici deux exemples extraits du livre de Doris Schattenschneider.









Les régularités créées par les motifs ont été reproduites ci-dessus en manipulant les pièces mises en annexe.
Les positions des pièces formant le motif sont codées dans des tableaux.

B_1	B_2	A_1	A_2
B'_1	A'_4	A'_1	B'_4
B_1	B_2	A_1	A_2
B'_1	A'_4	A'_1	B'_4

A'_2	B_1	B'_2	A_1
B_1	B'_2	A_1	A'_2
B'_2	A_1	A'_2	B_1
A_1	A'_2	B_1	B'_2

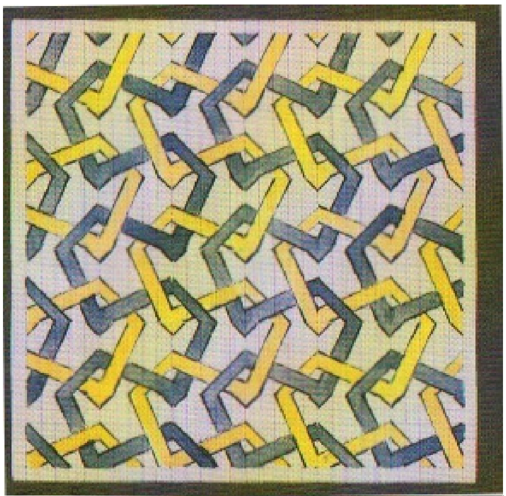
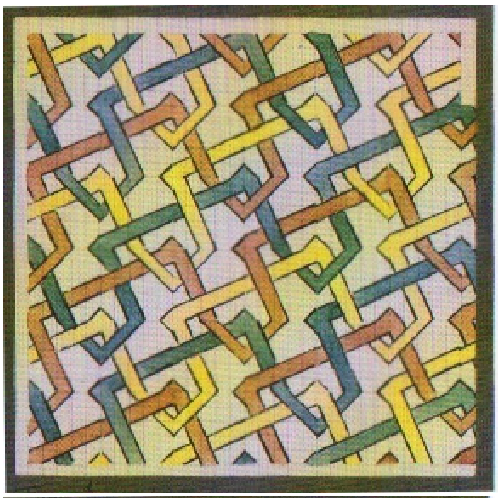
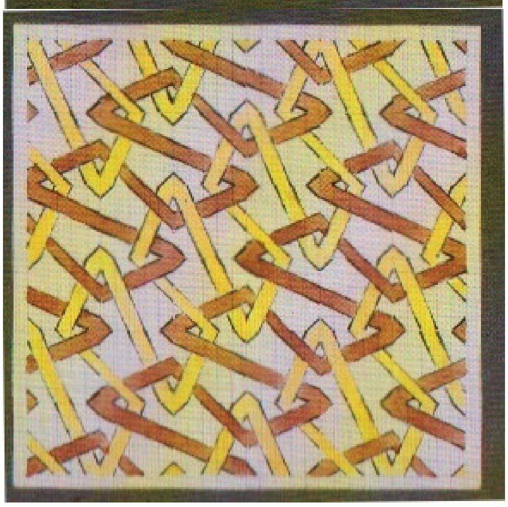
Retour au sommaire

Dans les deux cas, le placement de huit carrés aurait pu suffire pour coder le motif reproduit.

B_1	B_2	A_1	A_2
B'_1	A'_4	A'_1	B'_4
B_1	B_2	A_1	A_2
B'_1	A'_4	A'_1	B'_4

A'_2	B_1		
B_1	B'_2		
B'_2	A_1	A'_2	B_1
A_1	A'_2	B_1	B'_2
		B'_2	A_1
		A_1	A'_2

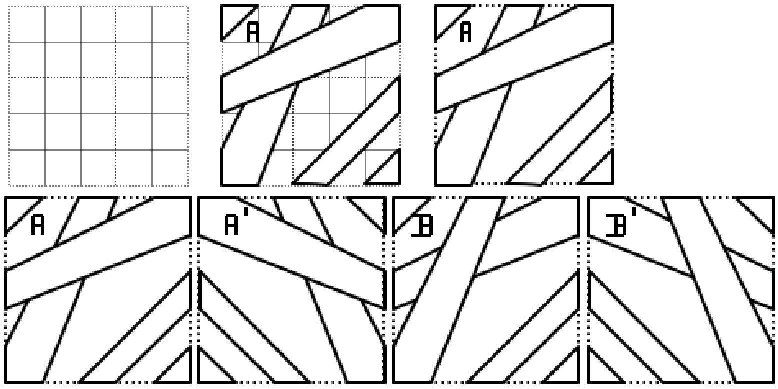
Quatre autres propositions d'Escher à reproduire avec les pièces mises en annexe et à coder comme ci-dessus


Le livre de Doris Schattenschneider ne fournit que six assemblages. En trouverons-nous d'autres ?

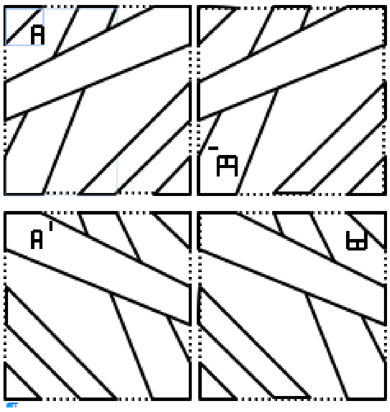
Retour au sommaire

Création de nouveaux carrés pour d'autres assemblages



Voici une proposition de nouvelle pièce A et ses variantes A', B et B'.

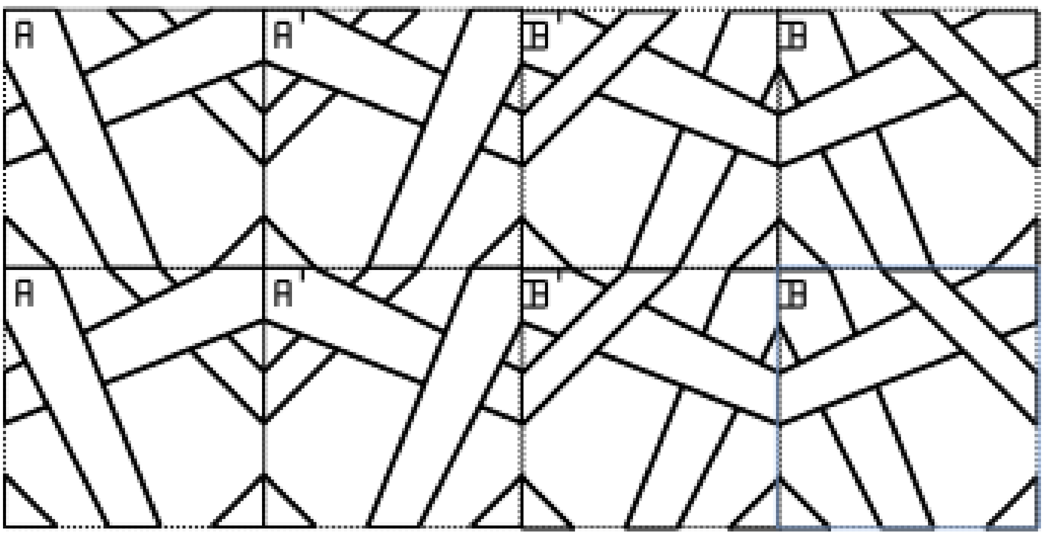
La pièce semble respecter les contraintes que s'est imposées Escher : le motif a été créé en utilisant les quatre « coins » et les « milieux » des côtés de carré à partir d'un réseau quadrillé 5×5. Des morceaux de « ruban » se croisent.



En conservant les notations des différents positions des motifs, nous remarquons que les dessins A1 et B'3 sont identiques, tout comme les dessins A'1 et B2.

Les quatre dessins issus de la proposition d'Escher sont différents. Nous pouvons en déduire que l'artiste s'est imposé cette contrainte : ne pas obtenir de dessin identique après avoir fait pivoter les pièces.

Avec les contraintes qu'il s'était donné, Escher n'avait peut-être pas beaucoup de choix pour la création de ses motifs…



Annexe : Des pièces à photocopier en plusieurs exemplaires puis découper

Retour au sommaire

Codages et décodages

La partie précédente posait la question de l'existence et la réalisation d'autres assemblages visualisant des formes entremêlées.
En utilisant le même codage des positions des pièces, voici huit propositions à décoder et à réaliser avec les quatre pièces imaginées par Escher.

A_1	B'_3	A_1	B'_3
A_1	B'_3	A_1	B'_3
B_1	B'_3	A_1	B'_3
A_1	B'_3	A_1	B'_3

A_1	B_1	A_1	B_1
A_1	B_1	A_1	B_1
A_1	B_1	A_1	B_1
A_1	B_1	A_1	A_1

B_1	A_1	B_1	A_1
B'_1	A'_1	B'_1	A'_1
B_1	A_1	B_1	A_1
B'_1	A'_1	B'_1	A'_1

B'_2	A_4	B'_2	A_4
A'_4	B_2	A'_4	B_2
B'_2	A_4	B'_2	A_4
A'_4	B_2	A'_4	B_2

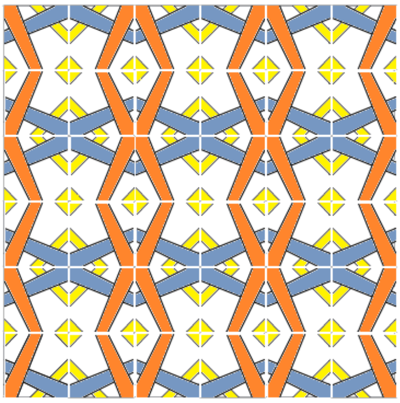
B_4	B'_3	A_1	B_4
A'_4	A_1	B'_3	A_4
B_4	B'_3	A_1	B_4
A'_4	A_1	B'_3	A_4

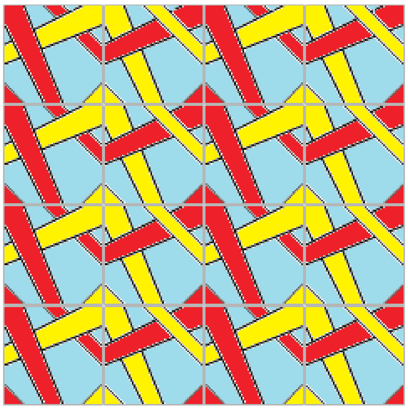
B'_1	A_1	B'_1	A_1
B_2	A'_4	B_2	A'_4
A'_1	B_1	A'_1	B_1
A_2	B'_4	A_2	B'_4

B'_1	A_1	B'_1	A_1
B'_2	A_4	B'_2	A_4
B_3	A'_3	B_3	A'_3
A_4	B'_2	A_4	B'_2

B'_1	A_3	B'_1	A_3
B_2	B'_2	B_2	B'_2
A'_1	B_3	A'_1	B_3
A_2	A'_2	A_2	A'_2

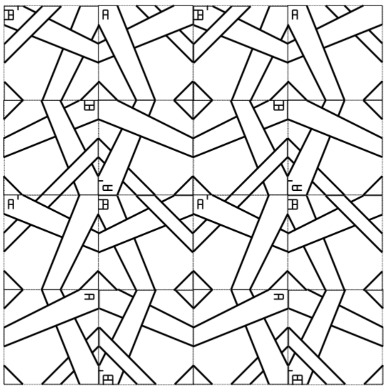
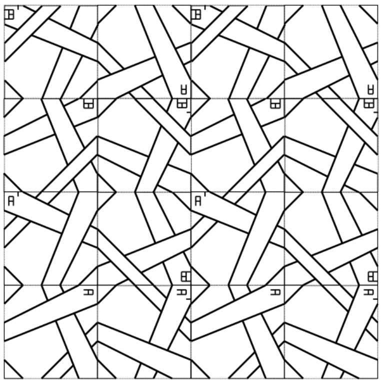
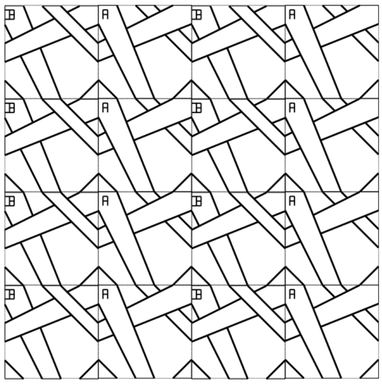
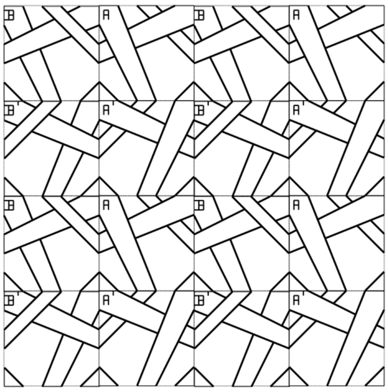
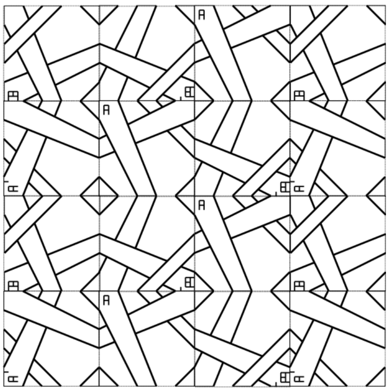
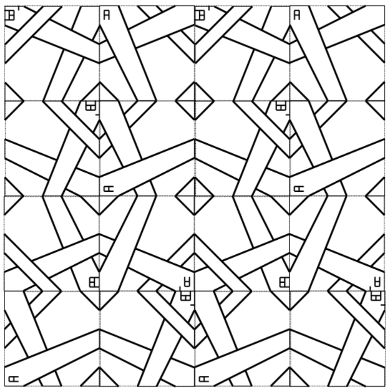
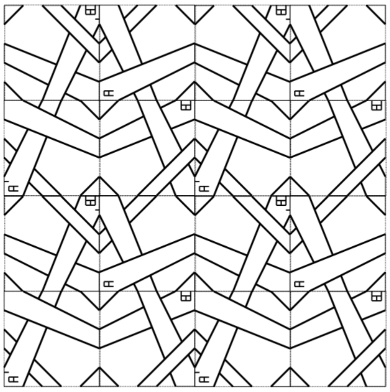
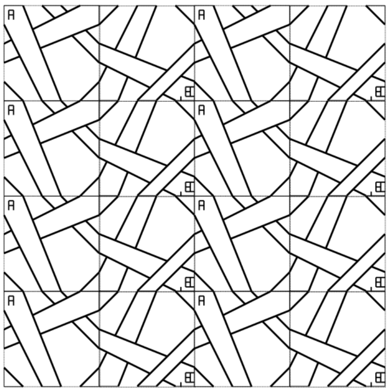
https://scratch.mit.edu/projects/96145110/
Fathi Drissi a créé un programme permettant la manipulation des quatre carrés.
Voici deux exemples réalisés avec Scratch et colorisés avec Paint. Le premier motif est un de ceux créés par les élèves du lycée Camille Claudel de Troyes (il n'y a pas d'entrelacs), le deuxième est une des huit propositions précédentes et utilise les quatre carrés imaginés par Escher.





Retour au sommaire

Vous saurez retrouver les assemblages codés page précédente parmi les dessins ci-dessous.

Escher a privilégié les « rubans » entremêlés, d'autres formes apparaissent dans ces propositions.

N'hésitez pas à envoyer vos créations à l'adresse contact@apmeplorraine.fr

MATHS ET ARTS

SEBASTIAN ERRAS

Par François Drouin

Londres, c'est le pied !

« Alors que l'on s'extasie toujours sur ce qui se trouve face à nous, un photographe nous fait découvrir que beaucoup de jolies choses sont en réalité directement sous nos pieds », note le **London Evening Standart**. Après avoir immortalisé les carrelages, planchers et mosaïques de Venise, Paris et Barcelone, l'Allemand Sebastian Erras *« nous régale avec un voyage parmi les plus beaux sols londoniens ».* Tate Modern, V&A Museum, mais aussi grands magasins : l'artiste dresse une carte photographique, touristique et pleine de couleurs des sols foulés chaque jour de l'autre côté de la Manche.

Courrier International n°1346 du 18 au 24 aout 2016.

Avec des élèves

L'analyse puis la reproduction des motifs repérés par l'artiste peut être demandée. Ci-dessous vous trouverez des liens vers ce qui a attiré le regard de l'artiste à Paris et Londres. Le moteur de recherche de votre ordinateur vous aidera à retrouver des photos prises à Barcelone et Venise.

Une autre piste de travail est de faire réaliser par les élèves des photos « comme Sebastian Erras » (penser à accorder les couleurs de la paire de chaussures avec celles du motif photographié…), puis leur faire reproduire les figures géométriques en utilisant tous les outils mis à disposition.

Voici ci-contre un premier exemple reprenant un carrelage étudié dans notre brochure « Des Mathématiques dans de bien belles choses ».

Vous réussirez ensuite à prendre un peu de temps pour raconter votre expérience aux lecteurs du Petit Vert.

Éléments de sitographie

https://www.instagram.com/parisianfloors/ et http://www.standard.co.uk/lifestyle/design/have-a-thing-for-floors-this-instagrammer-has-captured-some-of-the-most-beautiful-in-london-a3295171.html pour retrouver des photos prises à Paris et à Londres

http://www.sebastianerras.com/ pour accéder au site de l'artiste et

http://www.sebastianerras.com/about.html pour en savoir un peu plus sur lui.

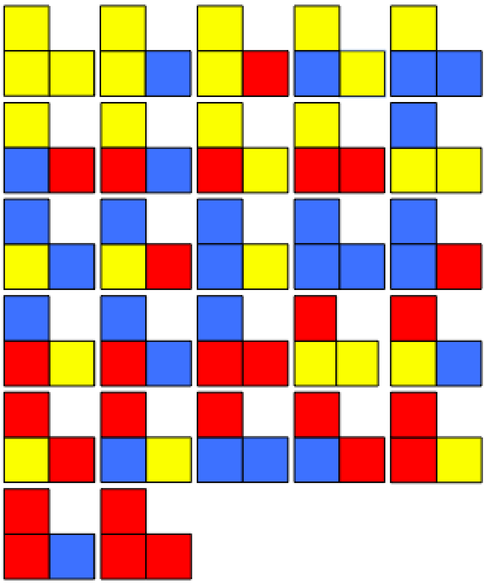
MATHS & JEUX

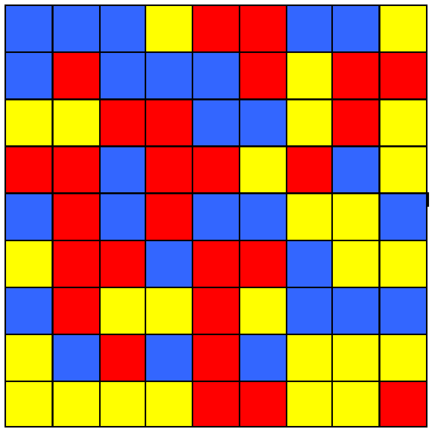
François DROUIN

LES TRIMINOS DE PIERRE DORIDANT

(Retour sur le problème présenté dans le Petit Vert précédent)

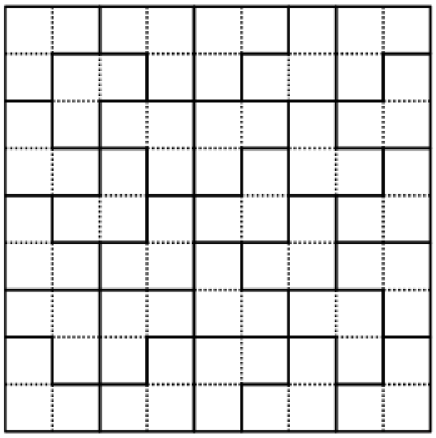
Les vingt-sept pièces recouvrent le carré dessiné ci-dessous.



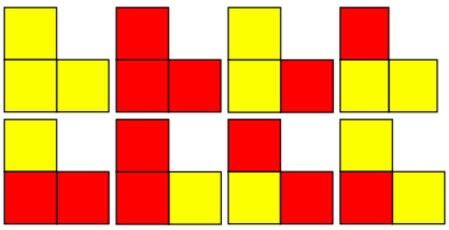


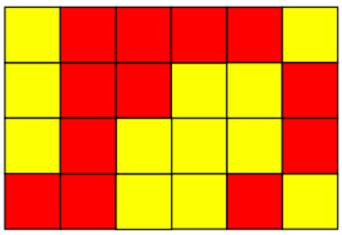
Les lecteurs du Petit Vert ont sans doute trouvé difficile la recherche du recouvrement demandé.

Celui-ci pourra être retrouvé à l'aide du dessin-ci contre.



Avec des élèves, il faudra sans doute se contenter la recherche de recouvrements de polygones avec les pièces ne comportant qu'une ou deux couleurs.





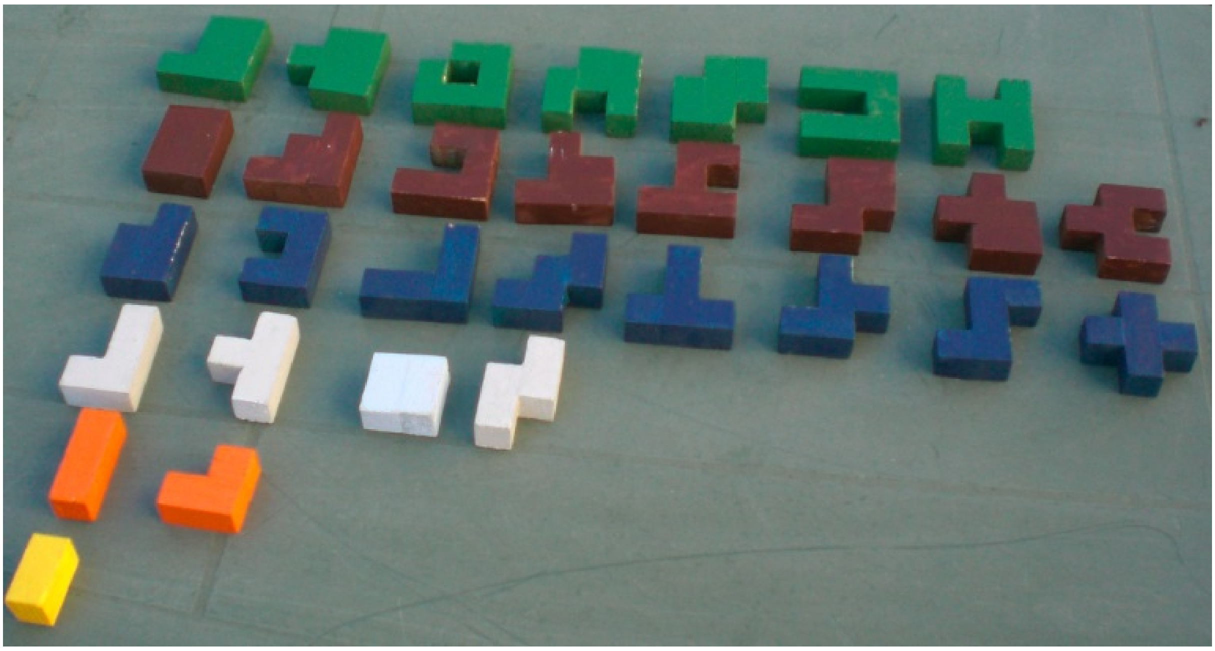
Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27

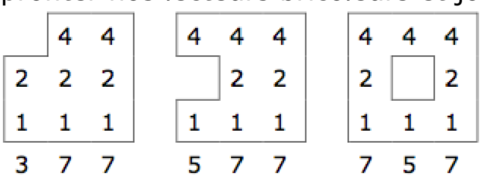
Par François DROUIN

Il y a quelques années, Claude Pagano - grand amateur de polycubes - m'avait confié l'ensemble des pièces visibles sur la photo ci-dessous.

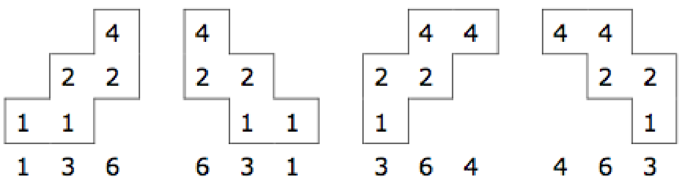


Ce sont les assemblages de 2, 3, 4, 5, 6 et 7 cubes pouvant être utilisés pour la réalisation d'un cube 3×3×3. Vous pourrez vérifier que la collection est complète.
La consigne jointe à l'envoi était : « *On en prend un de chaque couleur et on essaie de réaliser un cube 3^3. Il y a, je crois, matière à un papier pour le Petit Vert, nous en reparlerons en avril* ».

Les années ont passé, Claude Pagano n'est plus parmi nous, le Petit Vert n'est plus imprimé sur papier, mais j'ai maintenant un peu de temps pour informatiser ses propositions et en faire profiter nos lecteurs bricoleurs et joueurs.



L'envoi contenait également un codage original. Trois puissances de 2 sont utilisées, d'autres nombres auraient pu être choisis à condition qu'ils garantissent l'unicité de la décomposition additive des chiffres du codage pour permettre le décodage.



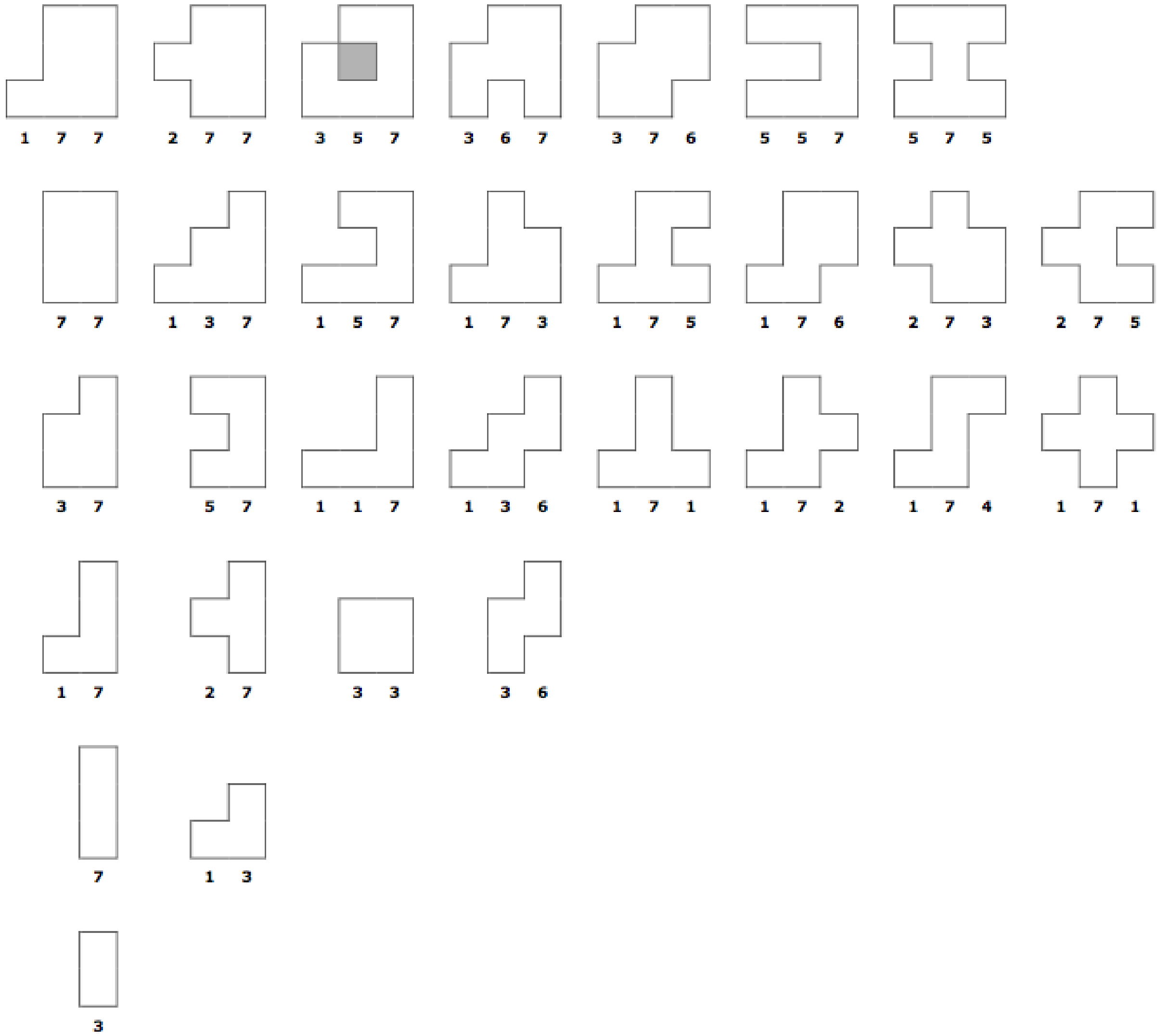
Chaque position de la pièce fournit un codage de la pièce.

Retour au sommaire

Quelques questions

Quel est le nombre maximum de codages d'une pièce ? Quel est le nombre minimal de codages d'une pièce ? Existe-il une pièce possédant trois codages différents ?

Toutes les pièces sont des prismes. Les réponses aux questions précédentes font intervenir les éléments de symétrie de leurs bases.



Voici le codage des pièces telles qu'elles sont disposées sur la photo en début d'article.

Pour un cube 3×3×3

Prendre une pièce de chaque couleur et réaliser un cube 3×3×3 ne présente a priori pas de grande difficulté mais fournit de bons moments de plaisir dans la recherche. Voici les codages des pièces utilisées pour quatre exemples.

357 333 313 113 111 11	727 363 271 71 7 3
766 764 332 322 32 11	11 766 32 764 322 332

En prenant une pièce de chaque couleur, la réalisation d'un tel cube est-elle toujours possible ? Vous saurez vous convaincre de l'impossibilité de l'assemblage des pièces « 727, 77, 272, 33, 7, 3 » : le nombre important des éléments de symétrie de leurs bases limite leur nombre de positions possibles. Cependant, un cube est réalisable avec des pièces ayant des bases symétriques : « 673, 77, 471, 33, 7, 3 » et « 717, 731, 75, 72, 31, 3 » en sont deux exemples.

MATHS ET MÉDIAS

LOTO IRLANDAIS

Le 20 octobre dernier, Daniel nous faisait parvenir une publicité concernant le Loto irlandais :

"Vous avez découvert les 6 BONS NUMEROS ? Félicitations ! 44% plus facile de GAGNER qu'au loto français. Moins de numéros = Plus facile à gagner ! En effet, il est beaucoup plus facile de gagner des gros lots au loto irlandais car il se joue avec 47 numéros seulement alors que le loto français se joue avec 49 numéros. Ainsi il y est 44% plus facile de gagner !*"

L'astérisque renvoie à une note : "**Selon une comparaison statistique entre les chances de gagner le gros lot au loto irlandais 6/47 et celles de gagner le gros lot au loto français 5/49**."

Question : d'où vient ce 44 % ???

Quelques informations au préalable...

Loto irlandais : il faut cocher 6 numéros sur 47 ; la probabilité de gagner le gros lot est 1 / 10 737 573. Voir par exemple http://www.lotto.net/fr/loto-irlandais

Loto français (FDJ) : depuis octobre 2008, le Loto consiste à choisir 5 numéros de parmi 49 et 1 numéro "Chance" parmi 10.

Règlement sur http://www.lesbonsnumeros.com/loto/informations/regles-du-jeu.htm

La probabilité de gagner le « gros lot » est 1 / 19 068 840 (5 bons numéros sur 49 + 1 "numéro chance" sur 10).
Si on n'a pas coché le bon "numéro chance", la probabilité de gagner (soit 5 bons numéros sur 49) est 1 / 2 118 760.
Détails sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Loto#Depuis_2008_:_nouvelle_version.

Il semblerait que la publicité ci-dessus fasse l'impasse sur l'obligation de cocher ce "numéro chance", puis qu'elle avance pour argument « *il est beaucoup plus facile de gagner des gros lots au loto irlandais car il se joue avec 47 numéros seulement alors que le loto français se joue avec 49 numéros* ».

Ci-après, quelques hypothèses qui permettent d'expliquer ce « 44 % ».

Retour au sommaire

N.d.l.r. Les propositions de réponse de Sébastien - ci-dessous - ont été écrites « sur le tas » pendant les journées de Lyon, et les calculs faits « à la main », car il ne disposait pas de calculette : voir ces calculs sur la photo ci-après.

Voyant le message de Daniel ma première réaction fût « Bon sang, 44 % plus facile de gagner en plus, il doit y avoir un loup ! »

Première idée : ni une, ni deux, je me jette sur le renvoi de la publicité en me disant qu'ils ont dû grossièrement comparer les 6/47 et les 5/49. Première désillusion : aucune chance d'avoir une différence de 44 % entre ces deux quotients trop proches (respectivement 0,128 et 0,102 environ).

Seconde idée (*N.d.l.r.* : *à lire en annexe, car Sébastien ne savait pas alors que le Loto français avait été modifié en 2008*) : je me dis ensuite qu'ils s'étaient forcément trompés, car en France il faut bien évidemment 6 bons numéros pour toucher le gros lot. Las, c'est encore pire : $6/49 \approx 0{,}122$.

Renseignements pris sur le site de la FDJ, ça a effectivement changé : depuis 2008 on doit trouver 5 numéros parmi 49 et un numéro chance parmi 10 pour gagner le gros lot.
Lors d'un échange avec Gilles pendant la conférence d'ouverture des journées de Lyon, je lui indique ce changement en lui disant que, théoriquement, ce changement a sans doute été fait pour qu'on gagne moins souvent. Comme il me répond que choisir un numéro parmi 10 donnera sans doute moins de grilles que parmi les 44 restants après le choix des 5 premiers je me relance dans quelques calculs sur ma petite feuille pour comparer les deux versions du loto français.

$$10 \times \binom{49}{5} \;/\; \binom{49}{6} \;=\; \frac{10 \times 49! \times 6! \times 43!}{5! \times 44! \times 49!} \;=\; \frac{66}{44}$$

Le nombres de grilles a donc bien augmenté en remplaçant le 6ème nombre parmi les nombres restants des 49 par un seul nombre parmi 10 : ils sont malins à la FDJ, car ce n'est pas l'impression première qu'on peut avoir.

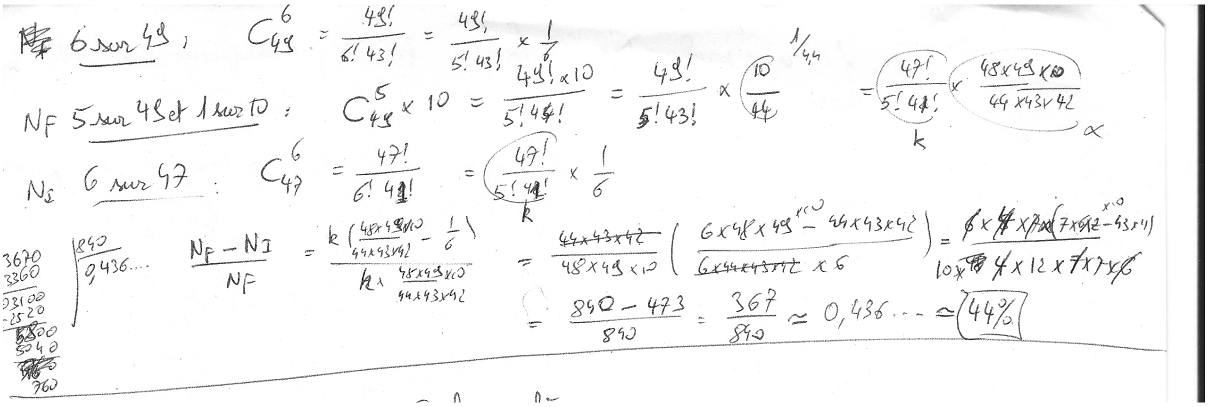
*** *Intermède*. Deux idées, en passant pour prolonger :
- À partir de combien de nombres parmi 49 remplacés par des nombres parmi 10 les chances de gagner augmentent-elles ? Ça devrait arriver car tous les 6 entre 1 et 10 donnent moins de 10^6 = 1 000 000 de grilles.
- Peut-on prendre moins que 10 tout en diminuant toujours les chances de gagner par rapport aux 6 nombres parmi 49 ? *Fin de l'intermède* ***

Voyant que le nombre de grilles est maintenant plus grand avec ce nouveau mode de fonctionnement du Loto, je me dis que peut-être on a des chances d'atteindre la proportion des 44 % entre les deux.

$$10 \binom{49}{5} = \frac{10 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 19\,068\,840$$

C'est reparti pour des calculs de proportions car 19 068 840 par rapport aux 10 737 573 du loto irlandais, ça semble prometteur pour "chopper" le 44 % (*rappel : en faisant les calculs à la main, car il n'avait toujours pas de calculette sur lui*).

Retour au sommaire



Pour vérifier tout cela, je pose :
N_F : nombres de grilles pour le loto français actuel,
N_I : nombres de grilles pour le loto irlandais.

J'ai calculé la proportion de la différence du nombre de grilles entre les deux lotos et le nombre de grilles du loto français (toujours en simplifiant sur mon brouillon pour faire les calculs à la main) :

$$\frac{N_F - N_I}{N_F} = \frac{19\,068\,840 - 10\,737\,573}{19\,068\,840} = \frac{8\,331\,267}{19\,068\,840} \approx 0{,}436...$$

Il y aurait donc environ 44 % de grilles possibles en moins pour le loto irlandais par rapport au loto français.

Voilà donc éclairci le mystère du 44 %. Par contre ça n'a absolument rien à voir, ni avec l'explication écrite dans la publicité, ni avec les fractions qu'ils donnent (les deux n'ayant, en plus, rien à voir entre eux).

Quant à la note « *Selon une comparaison statistique entre les chances de gagner le gros lot au loto irlandais 6/47 et celles de gagner le gros lot au loto français 5/49* », on aimerait avoir des informations sur ces soi-disant statistiques...

ANNEXE (calculs avec le Loto FDJ d'avant 2008)

Nombre de grilles de 6 nombres à choisir parmi 47 : $\binom{47}{6} = \frac{47!}{6! \times 41!} = 10\,737\,573$

Nombre de grilles de 6 nombres à choisir parmi 49 : $\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \times 43!} = 13\,983\,816$

La différence entre le nombre de grilles possibles n'étant visiblement pas de 44 % dans un sens comme dans l'autre, on teste la différence entre les deux probabilités de gagner : $P_{IRL} - P_{FR} \approx 2 \times 10^{-8}$.

Par rapport à P_{FR} on a $2 \times 10^{-8}/P_{FR} \approx 0{,}30$ et par rapport à P_{IRL} on a $2 \times 10^{-8}/P_{IRL} \approx 0{,}23$, encore raté !

Pas plus de résultats en prenant 5 numéros sur 49 pour le loto français... : $\binom{49}{5} = \frac{49!}{5! \times 44!} = 1\,906\,884$ ... moins de chance de gagner en Irlande : ça ne conviendra pas.

Retour au sommaire

MATHS ET MÉDIAS

LE POIDS DES CARTABLES, LE CHOC DES FRACTIONS !

Cartables trop lourds : quelles solutions ?

Comment expliquer qu'en 2016, le problème des cartables trop lourds subsiste ? France 2 fait le point au journal de 20 heures le 4 septembre dernier :
http://www.francetvinfo.fr/societe/education/cartables-trop-lourds-quelles-solutions_1809697.html

Selon une circulaire de l'Education nationale, le poids du cartable (euh … la masse, non ?) ne doit pas excéder 10 % du poids de l'élève. Jules pèse 42 kg et son cartable 14 kg. Son sac pèse bien 33 % de son propre poids mais …

(sans commentaire)

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale A.P.M.E.P. Lorraine.
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il parait quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre). Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur les activités de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges "mathématiques" entre les adhérents.
Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à jacverdier@orange.fr .

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève Bouvart, François Drouin, Rachel François, Françoise Jean, Michel Ruiba, Walter Nurdin, Jacques Verdier et Gilles Waehren.

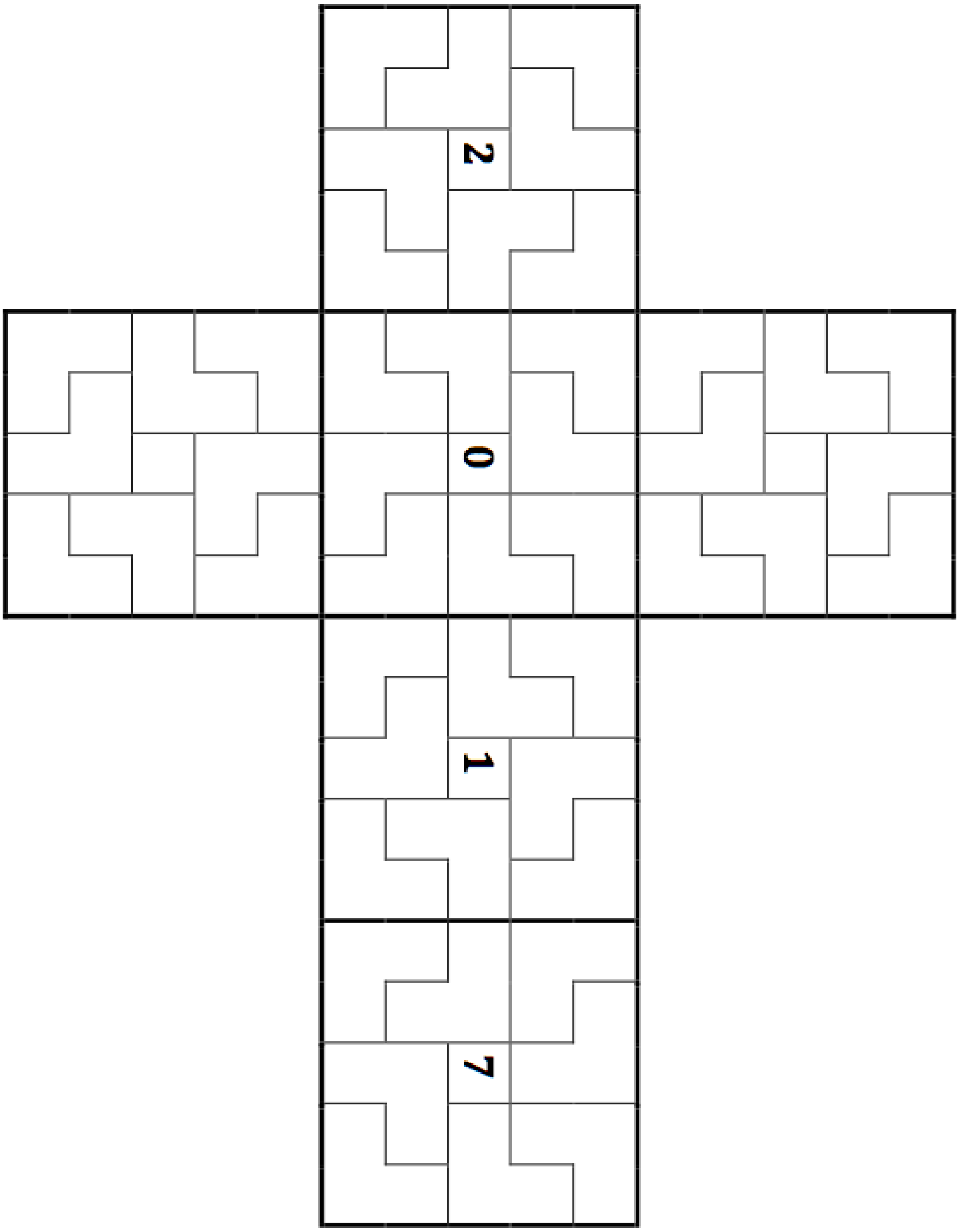
La maquette et la mise en page sont réalisées par Geneviève Bouvart et Michel Ruiba.

Retour au sommaire

MATHS ET JEUX

UN PATRON A COLORIER POUR L'AN 2017

Avec le minimum de couleurs possibles, colorie le cube dont voici un patron. Deux zones voisines ne peuvent pas être de la même couleur.
En observant le patron, apparaissent des petits carrés au centre des faces contenant pour quatre d'entre eux les chiffres 2, 0, 1, 7 du nombre 2017. Pourrais-tu de plus obtenir ce minimum en coloriant les six petits carrés d'une même couleur?



Retour au sommaire

MATHS ET HISTOIRE

2017

Nous sommes en 2017 selon le calendrier chrétien, 1438 selon le calendrier musulman, 5777 selon le calendrier hébraïque, 1395 selon le calendrier persan, 2560 selon le calendrier bouddhiste et le calendrier thaï, ...

Notre calendrier (grégorien) est conçu de façon que la durée de l'année soit la plus proche possible de l'année tropique, soit 365,242201 jours environ. Il est donc nécessaire d'ajouter un jour supplémentaire tous les quatre ans environ[4] : ce sont les années bissextiles, comme l'année 2016 qui vient de se terminer. Ce calendrier "solaire" n'a aucun rapport avec les phases de la lune.

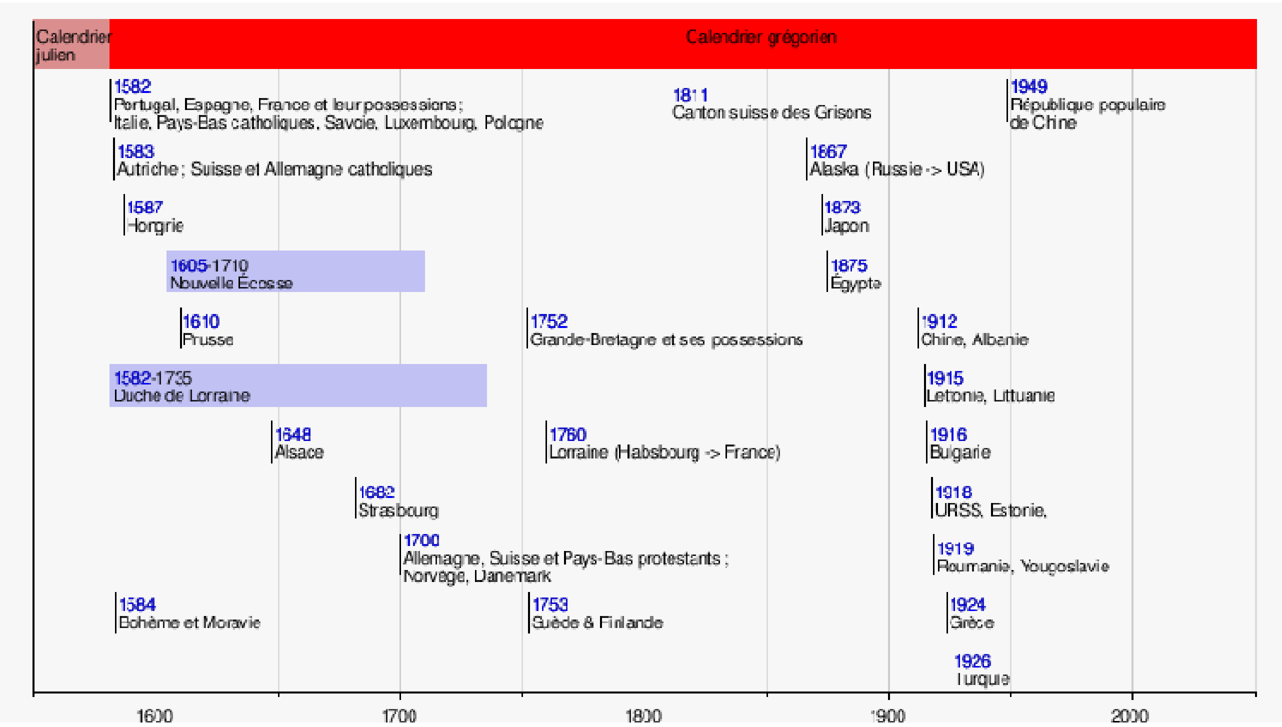
Les calendriers lunaires (tel le calendrier musulman) sont basés sur les phases de la lune. La durée moyenne d'un mois doit s'approcher de celle d'une lunaison, soit environ 29,53 jours.

Le calendrier musulman fait alterner des mois de trente et de vingt-neuf jours ; une année lunaire ordinaire de 12 mois compte donc 354 jours. Mais la durée d'une lunaison étant un peu supérieure à 29,5 jours, il est nécessaire d'intercaler un jour supplémentaire environ tous les 30 mois ; les années de 355 jours sont dites « années abondantes »

Il existe également des calendriers luni-solaires (tel le calendrier chinois). Les mois sont lunaires (le premier jour de chaque mois correspondant à la pleine lune). Mais comme l'année solaire dépasse l'année lunaire d'environ 10 jours on ajoute, pour éviter un « décalage » des saisons, sept fois un mois supplémentaire par cycle de 19 ans, afin que ce calendrier soit le plus proche possible d'un calendrier solaire.

Par curiosité, on pourra également regarder comment « fonctionnait » le calendrier Maya ou le calendrier Tzolk'in… il y a de quoi y perdre son latin !
https://fr.wikipedia.org/wiki/Calendrier_maya, https://fr.wikipedia.org/wiki/Calendrier_Tzolk'in.

Dates de passage du calendrier julien au calendrier grégorien



La France, l'Espagne, le Portugal (entre autres) ont adopté le calendrier grégorien en 1582. La Grande-Bretagne en 1752, l'URSS en 1918, la Turquie en 1926 et la Chine en 1949. *(image Wikipedia)*

4 Une année est bissextile si elle est divisible par 4 et non divisible par 100, ou si l'année est divisible par 400. Par exemple 2000 était bissextile mais 2100 ne le sera pas.

Retour au sommaire

MATHS ET HISTOIRE

DEVENIR PROF DE MATHS DANS LES ANNÉES 60

Après avoir obtenu son baccalauréat, le lycéen lorrain avait alors le choix entre deux options : soit faire ses études de mathématiques à la Faculté des sciences afin de préparer le concours du CAPES, soit poursuivre ses études au lycée Poincaré en mathématiques supérieures (hypotaupe) puis en mathématiques spéciales (taupe) afin d'intégrer, par concours, l'École normale supérieure (rue d'Ulm, à Paris).
Je parlerai ici essentiellement de la première option.
Les bacheliers des trois[5] départements de l'Académie de Nancy (Meurthe-et-Moselle, Meuse et Vosges) poursuivaient donc leur cursus à la Faculté des sciences de Nancy, à l'Institut mathématiques et physique situé Porte de la Craffe, en vieille ville, devenu plus tard le collège de la Craffe.

La première année, propédeutique, permettait d'obtenir le Certificat d'études supérieures préparatoires[6] : on y enseignait les « rudiments » nécessaires à la poursuite des études scientifiques (mathématiques, physique-chimie et sciences naturelles).

Les deux années suivantes permettaient d'obtenir une licence. On y passait des « certificats » de mathématiques (deux niveaux), de probabilité-statistique, de mécanique, et un certificat de physique (à choisir parmi les certificats de la licence de physique : optique, électricité, thermodynamique, électromagnétisme…). Ce dernier certificat était parfois la « terreur » des étudiants matheux. Heureusement il fut remplacé, en 1966, par un certificat de « Physique fondamentale », beaucoup plus généraliste et moins pointu dans chacun des domaines que je viens de citer.

Muni de sa licence (au bout de trois ans de faculté pour les meilleurs, plus pour les autres…), on pouvait alors de présenter au concours du CAPES mathématique.

Cependant, comme beaucoup d'étudiants en sciences ne se dirigeaient pas vers l'enseignement, le Ministère de l'éducation nationale a créé en 1963, pour pallier cette crise de recrutement, les Instituts de préparation aux enseignements du second degré[7]. Les étudiants qui avaient obtenu leur année de propédeutique pouvaient poursuivre leurs études en étant payés (environ 1170 F par mois en 1967, soit l'équivalent de 1400 €). En contre partie, ces étudiants devaient d'une part s'engager à exercer comme professeurs de mathématiques durant une durée de dix ans (sinon ils devaient rembourser les sommes qu'ils avaient perçues), et d'autre part à réussir leur année de licence en deux ans et là aussi rembourser sinon. Mais ces derniers demandaient généralement un poste de maitre auxiliaire pour l'année supplémentaire nécessaire à l'obtention de leur licence, ce qui leur évitait le remboursement.

L'autre (gros) avantage de ces IPES : les candidats étaient dispensés de l'écrit du CAPES, et ne concouraient qu'à l'oral.

La vie étudiante à cette époque.

Il y avait à Nancy deux restaurants universitaires. Celui de l'A.G. (situé rue Gustave Simon, où était également le siège de l'UNEF), a été démoli il y a quelques années pour permettre l'extension du musée des beaux-arts (seul son fronton a été conservé). L'autre était celui du GEC (Groupement des étudiants catholique, situé cours Léopold) où les étudiants aimaient se retrouver dans un cadre sympathique : bar avec piano, petites salles avec tableau pour travailler les cours, etc.). Peu après 1960, de nouveaux restaurants ont vu le jour (Cours

[5] Les étudiants de la Moselle dépendaient alors de l'Académie de Strasbourg : l'Académie de Nancy-Metz ne date que de 1972. Voir http://www.ac-nancy-metz.fr/historique-de-l-academie-28719.kjsp?RF=RHISTORIQUEACA

[6] Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Certificat_d'%C3%A9tudes_sup%C3%A9rieures_pr%C3%A9paratoires

[7] https://fr.wikipedia.org/wiki/Institut_de_pr%C3%A9paration_aux_enseignements_de_second_degr%C3%A9

Retour au sommaire

Léopold, Montbois). Les déplacements entre les divers sites se faisaient généralement à pied (les distances n'étaient pas énormes) ou en vélo[8] ; très rares étaient les étudiants qui avaient une voiture.

Ce n'est que vers 1966 que la Faculté des sciences commence à sortir de terre à Vandœuvre, d'abord pour le premier cycle, et quelques années plus tard pour le second cycle.
Il me faut rappeler qu'à cette époque, les lycées allaient de la classe de sixième jusqu'à la classe de terminale ; il y avait même des classes de « petit lycée » de la onzième à la septième dans certains établissements comme le lycée Poincaré. Et ces établissements n'étaient pas mixtes : les filles étaient au lycée Jeanne d'Arc (puis, plus tard, au lycée Chopin également).
Et ce n'est qu'en 1975 que la loi Haby a créé la séparation entre lycées et collèges. On trouvera de plus amples explications dans le petit encadré ci-dessous, ainsi que dans les deux sites référencés en bas de cette page[9].

Une petite explication sur les systèmes d'éducation en France à cette époque s'impose. Il y avait alors deux ordres d'enseignement : l'enseignement primaire, pour la majorité, et l'enseignement secondaire pour ceux qui étaient destinés au baccalauréat (les enfants des classes « supérieures »). L'enseignement secondaire commençait au lycée à l'âge de 6 ans (classe de 11 e) et s'y terminait en classe de terminale (Philosophie ou Mathématiques, puis plus tard Sciences expérimentales). Les classes de la 11e à la 7e formaient ce qu'on appelait le « Petit Lycée » : elles existaient encore quand je suis entré à Poincaré. Quelques chiffres : il y avait seulement 15 000 bacheliers par an avant la guerre de 1939, contre près de 600 000 en 2013 ! 40 fois plus…

L'école primaire commençait au CP, et était obligatoire jusqu'à 14 ans où l'on passait le « certificat d'études primaires ». Les meilleurs élèves pouvaient poursuivre des études dans les « Cours complémentaires » (intégrés aux écoles primaires) ou les « Écoles primaires supérieures », dont les enseignants relevaient du primaire.

On pouvait cependant passer, vers 11 ans, de l'enseignement primaire à l'enseignement secondaire (en 6e au lycée) en passant un examen.

Plus tard, avec la loi Haby de 1975, l'école primaire se termina pour tous au CM2 après 5 années d'études ; le collège « unique » suivait avec 4 années, de la 6e à la 3e (mais avec des filières très différenciés) ; et enfin le lycée de la 2nde à la terminale, qui pouvait se poursuivre par des classes « supérieures » après le baccalauréat.

Dans les années 50, très rares étaient les enfants qui avaient commencé leur scolarité au « petit lycée ». Ceux dont les parents voulaient qu'ils intègrent le lycée en sixième devaient passer un examen d'entrée[10].

Voici deux témoignages de professeurs qui on fait un parcours différent.

Robert : Il est entré (sur concours) en seconde à l'École normale d'instituteurs de Nancy (rue Marcelle Dorr[11]). Il a pu faire Math.-élém. au lycée puis, après le bac, faire sa quatrième année

---

[8] Voire en tramway, dont il ne restait plus que trois lignes.

[9] https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_Haby
http://www.ladocumentationfrancaise.fr/dossiers/college-unique/reformes.shtml

[10] https://fr.wikipedia.org/wiki/Petit_lyc%C3%A9e. Voir aussi ce que pensait de cet examen Gabriel Hun, proviseur du lycée Fabert de Metz de 1945 à 1956 : http://www.samuelhuet.com/paid/44-polemos/233-g-hun.html

[11] Les bâtiments, qui ont longtemps accueilli l'IUFM, ont été réhabilités, accueilleront bientôt le « Centre des mémoires » (archives départementales de Meurthe-et-Moselle, voir : http://www.meurthe-et-moselle.fr/fr/culture-archives-lecture/centre-des-memoires.html L'école normale de filles était, elle située à Maxéville, locaux désormais utilisés par l'ÉSPÉ de Lorraine

Retour au sommaire

d'École normale en préparation à MPC pour devenir professeur de collège, La réussite à MPC lui a donné les IPES et c'est ainsi qu'il est devenu professeur de mathématiques !

François : « J'ai fait mes années élémentaires dans une classe unique de garçons dans mon village (pas de maternelle, rentrée à l'âge de 5 ans), pour ensuite de septembre 1962 jusqu'en juin 1966 aller au CEG[12] (collège d'enseignement général) de mon chef lieu de canton (classes mixtes) puis intégrer au lycée de Beauregard[13] récemment ouvert à Nancy.

Bac obtenu en 1969, l'année suivant celui qui n'a comporté que des épreuves orales et il me semble, un taux de réussite exceptionnel pour l'époque[14]. J'ai commencé ma carrière en 1975 dans un CES[15] avec comme collègues des instituteurs qui enseignaient en section 3. Les rares certifiés avaient les "bonnes classes", les nombreux MA les autres. La réforme Haby est vite arrivée, les PEGC[16] également ».

L'institut de mathématiques et physique, devenu collège plus tard(Porte de la Craffe)

L'entrée du GEC, cours Léopold

La façade de l'ancienne A.G. rue Gustave Simon

[12] https://fr.wikipedia.org/wiki/Coll%C3%A8ge_d'enseignement_g%C3%A9n%C3%A9ral

[13] Actuellement lycée Georges de la Tour. Les classes étaient mixtes (mais les internats séparés!). On devait y porter des blouses alternativement blanches et grises pour les garçons, roses et bleues pour les filles. A la rentrée 1968, le port des blouses obligatoires a été aboli (mais pas la non-mixité de l'internat !).

[14] 81% de réussite en 1968, contre 62% en1967 et 67% en 1969.

[15] https://fr.wikipedia.org/wiki/Coll%C3%A8ge_d'enseignement_secondaire

[16] https://fr.wikipedia.org/wiki/Professeur_d'enseignement_g%C3%A9n%C3%A9ral_de_coll%C3%A8ge

Retour au sommaire

MATH & MEDIAS

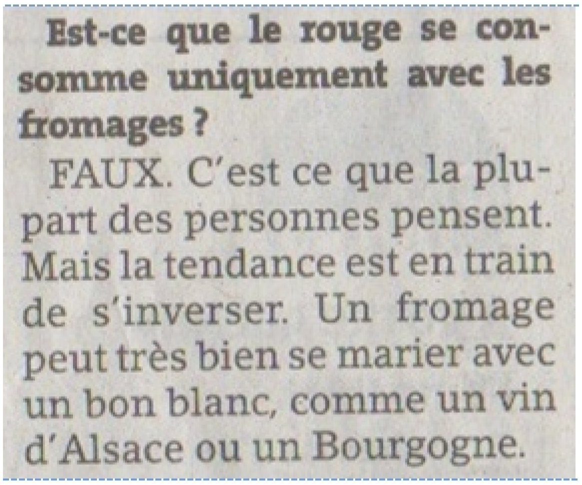
Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi - et surtout - les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.

Envois par la poste à Jacques VERDIER (7 rue des Bouvreuils, 54710 FLEVILLE) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr .

Les archives de cette rubrique seront bientôt disponibles sur notre nouveau site à l'adresse : www.apmeplorraine.fr

À BOIRE (ET À CROIRE) AVEC MODÉRATION

Voici un court extrait de l'Est Républicain daté du 5 octobre 2016.



Est-ce que le rouge se consomme uniquement avec les fromages ?

FAUX. C'est ce que la plupart des personnes pensent. Mais la tendance est en train de s'inverser. Un fromage peut très bien se marier avec un bon blanc, comme un vin d'Alsace ou un Bourgogne.

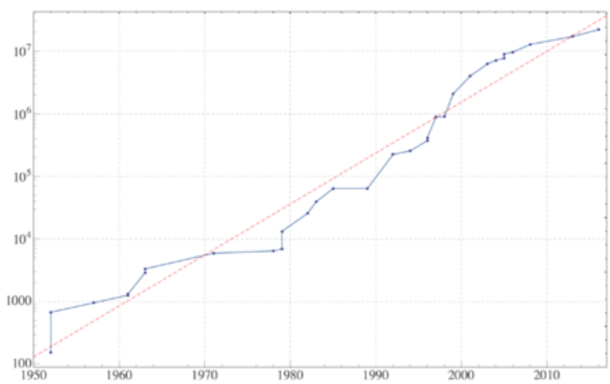
Réponse de deux lecteurs du Petit Vert :

FAUX, mais pas pour la raison évoquée dans le journal. Il semblerait que le journaliste ait confondu avec la phrase « Est-ce que les fromages se consomment uniquement avec du vin rouge ? », ce qui n'est pas équivalent...
Si l'affirmation était vraie, bien des viticulteurs auraient du souci à se faire…

Parlez-en aux participants du banquet de la Régionale Lorraine lors des Journées Nationales de Lyon : un Chénas (Beaujolais **rouge**) ou/et un coteaux du lyonnais blanc étaient proposés au choix avec le gâteau de potimarron au magret fumé et œuf poché en entrée, puis avec la nage de saumon, petits légumes aux herbes.

LE PLUS GRAND NOMBRE PREMIER ... CONNU

Depuis janvier 2016, le **plus grand nombre premier connu** est $2^{74\,207\,281} - 1$, un nombre comportant 22 338 618 chiffres. Il a été trouvé par le Great Internet Mersenne Prime Search (GIMPS).

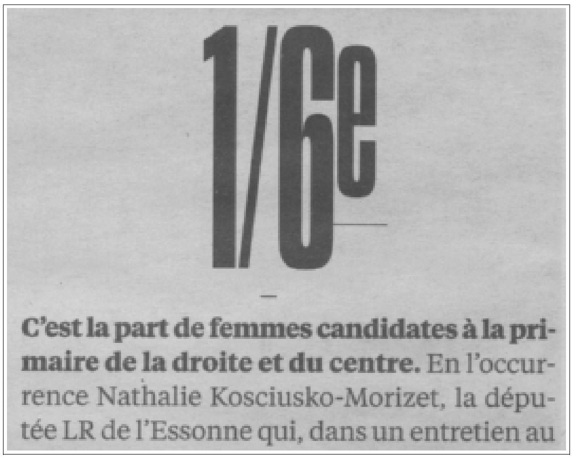


Graphique du nombre de chiffres du plus grand nombre premier connu par année, depuis l'ordinateur électronique. Notez que l'échelle verticale est logarithmique. La ligne rouge est la courbe exponentielle avec le meilleur ajustement : y = exp(0,187394 t – 360,527), où t est en années. Source : Wikipedia.

Retour au sommaire

MATHS & MÉDIAS

1/6^{e}



1/6e

C'est la part de femmes candidates à la primaire de la droite et du centre. En l'occurrence Nathalie Kosciusko-Morizet, la députée LR de l'Essonne qui, dans un entretien au

Cet extrait (paru dans Libération du 15/11/2016) nous a été confié par un lecteur de ce quotidien et a circulé au sein du comité de rédaction du Petit Vert « élargi ».

Voici une synthèse de nos échanges.

Nous suivons l'actualité et nous savons qu'il y a une candidate femme **sur** sept personnes, cela ne fait pas 1/6 mais 1/7.

Le « **sur** » venant d'être employé dans la phrase précédente va en écho avec une habitude de lecture des écritures fractionnaires dans la langue de tous les jours. Le numérateur est **au-dessus** du dénominateur et nous aurions tendance à dire 11 sur 25 pour 11/25 alors qu'une lecture privilégiant le sens mathématique nous encouragerait à dire 11 vingt-cinquièmes (cette lecture devient moins agréable pour la lecture d'écritures fractionnaires comme 23/2016).

Il semble y avoir confusion entre « 1 pour 6 » (1 femme pour 6 hommes) ou « 1 contre 6 » (1 femme contre 6 hommes) et l'écriture « 1/6 ». Il suffirait sans doute d'écrire "1 femme et 6 hommes candidats, cela fait 1/7 ». Pour le (la ?) journaliste, « / » n'est peut être pas un trait de fraction, ou il s'agit alors d'une étourderie de sa part.

Cette erreur se rencontre fréquemment en série STMG[17] lors de l'apprentissage de la notion de proportion. Il y a souvent confusion entre effectif (qui comporte une unité : 7 personnes) et proportion (qui n'a plus d'unité). Le « e » de « 1/6^{e} » peut être révélateur de ce besoin d'unité. Nos élèves commettent fréquemment cette erreur de 1/6 au lieu de 1/7 car ils pensent que si la personne est comptée au numérateur il n'y a pas lieu d'en tenir compte une deuxième fois au dénominateur.

Par ailleurs, doit-on écrire « 1/6 » ou « 1/6^{e} » ? « 1 sur 6 » est devenu « 1 sixième » et la journaliste l'a écrit comme nous écririons « 3^{e} » pour « troisième ».

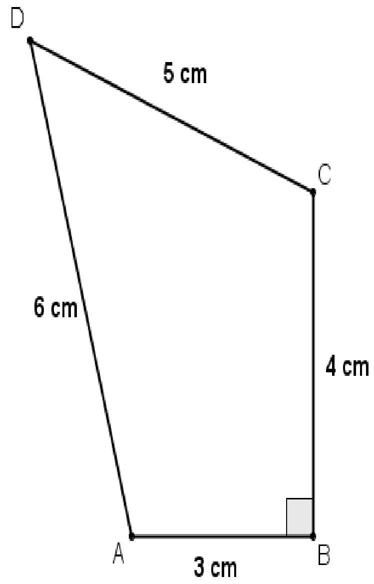
Certains élèves de sixième peinent à faire la différence entre 3/4 et 3,4 : ils ne perçoivent « , » et « / » que comme des séparateurs.

Ces quelques lignes évoquent les complications rencontrées quand les symboles mathématiques sont détournés de leur vraie signification et nous incitent à expliciter encore plus aux élèves les spécificités du langage utilisé en mathématiques à l'occasion d'activités qui donnent du sens à ces symboles.

17 S.T.M.G. : Baccalauréat sciences et technologies du management et de la gestion

UN PREMIER DÉFI POUR VOS ÉLÈVES (n° 128-a)

Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?



UN SECOND DÉFI POUR VOS ÉLÈVES (n° 128-b)

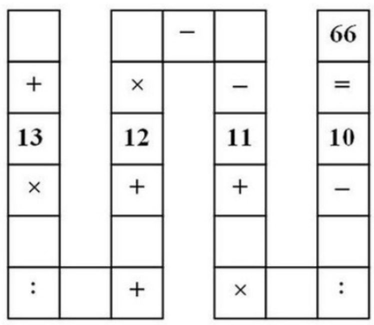
Avec les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, chacun n'étant utilisé qu'une seule fois, on forme des nombres de un, deux ou trois chiffres. Par exemple : 136, 40, 8, 95, 27.
On calcule la somme de ces nombres ; avec l'exemple précédent, on obtient ce total : 136+40+8+95+27=306.
N.B. : deux combinaisons comme 136+40+8+95+27 et 27+8+136+95+40+95, qui ne diffèrent que dans l'ordre des opérations, seront considérées comme une seule et même combinaison.

Le défi est le suivant : obtenir, si c'est possible, **un total égal à 2017**, ou s'en approcher le plus possible.

Bon courage !

SOLUTION DÉFI n°127-a : LE SERPENT VIETNAMIEN

Le but était de remplir les cases vides de la grille ci-contre avec les entiers de 1 à 9 (à n'utiliser qu'une fois chacun), de façon à obtenir - en suivant l'ordre des opérations sur le serpent - le résultat final de 66.

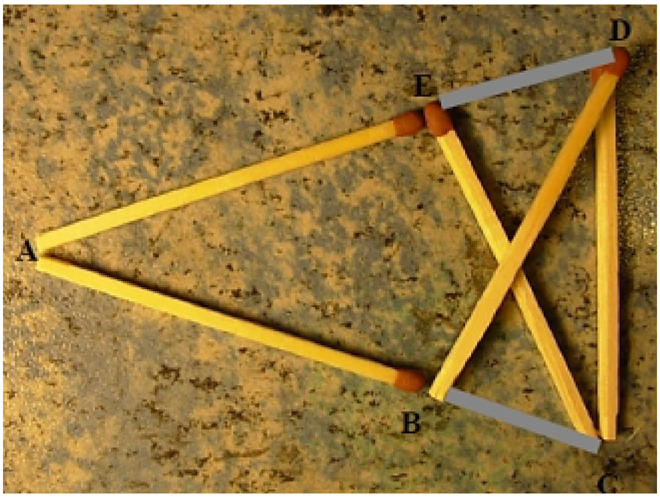


Source : http://www.ouest-france.fr/leditiondusoir/data/493/reader/reader.html?t=1432311451485#!preferred/1/package/493/pub/494/page/20

Parmi les 362 880 dispositions possibles des neuf premiers entiers dans les cases vides, il y en avait quelques unes qui respectaient les priorités des opérations. Par exemple :

6 + (**13**x9/3) + 5 + **12**x2 -1 -**11** + (7x8/4) – **10** = 66
ou 5 + (**13**x9/3) + 6 + **12**x2 -1 -**11** + (7x8/4) – **10** = 66, etc. :
on peut échanger le 5 et le 6, ainsi que le 7 et le 8.

SOLUTION DU DÉFI n°127-b
« DES MATHÉMATIQUES QUI VONT METTRE LE FEU »



Les cinq allumettes ont la même longueur. Leurs points de contact sont nommés A, B, C, D et E (voir photo). A, B et C sont alignés, il en est de même pour A, E et D.

Le défi : déterminer l'angle $\widehat{BAE}$.

L'auteur de la réponse ci-dessous, plutôt que rédiger la solution, a préféré écrire le cheminement de sa pensée.

Les mesures des angles sont exprimées en degrés.

Soit x la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$. Le triangle ABD est isocèle, j'en déduis que l'angle $\widehat{ABD}$ est égal à 180 – 2x.

Si je prouve que BC = ED ou AC = AD, je prouverai que le triangle ACD est isocèle. Je pourrai en déduire que l'angle $\widehat{ACD}$ est égal à 90 - x/2. Le triangle BCD sera isocèle en D, je pourrai alors écrire que les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CBD}$ sont égaux à 90 - x/2.

Les angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{ABD}$ seront supplémentaires donc (180 – 2x) + (90– x/2) = 180. La résolution de cette équation m'amènera à x = 36.

Il me reste donc à prouver que le triangle ACD est isocèle.

Les triangles ABD et AEC sont isocèles et ont tous deux un angle de base égal à x. Ces triangles ont donc des angles égaux 2 à 2, ils sont donc semblables (ou de même forme, comme il est dit quelquefois). De plus, leurs « côtés égaux » sont égaux, j'en déduis que ces deux triangles sont égaux et donc AC = AD. L'étude de ce sous-problème valide la partie algébrique précédente : **l'angle** $\widehat{BAE}$ **mesure 36°.**

N.d.l.r. Merci à Walter pour ce problème faisant changer de registre en cours de route. Il doit se régaler en l'utilisant en formation....

En complément : la figure formée est un "triangle d'or". Voir :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_d%27or_(g%C3%A9om%C3%A9trie)

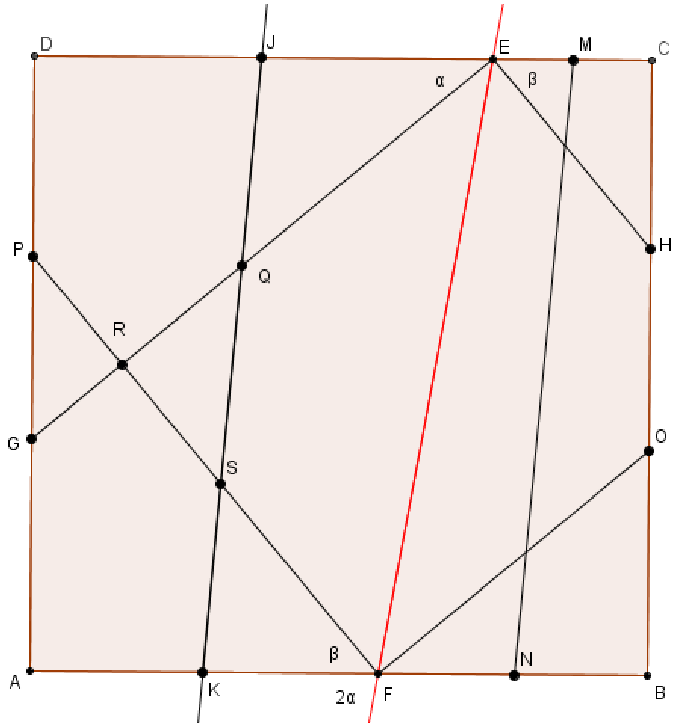
Et pour occuper le professeur de mathématiques pendant les longues soirées d'hiver, cette petite énigme proposée par Noël Lambert :

Mon année de naissance est un nombre premier jumeau. Si je multiplie la somme des chiffres de mon année de naissance par leur produit, j'obtiens la factorielle d'un nombre parfait.

Retour au sommaire

SOLUTION DU DÉFI n°126-a (paru dans le PV 126)

Dans le Petit Vert de juin dernier, nous vous proposions un pliage (origami) d'un carré de papier, et nous vous demandions d'une part si les droites (CD) et (EF) obtenues étaient toujours parallèles et d'autre part si les quatre plis formaient toujours un rectangle (voir figure ci-dessous). La réponse était **OUI**. En voici la preuve.



Remarque préliminaire : le pli obtenu en superposant les deux côtés d'un angle donne la bissectrice de cet angle. Cette propriété est à la base de la démonstration qui suit.

Les points E et F sont quelconques, respectivement sur [CD] et [AB].
La superposition par pliage de (CB) sur (EF) donne la bissectrice (MN) de l'angle formé par ces deux droites. Il en est de même pour le pliage de (AD) sur (EF) qui donne (KJ).

(DC) étant parallèle à (AB), les angles DEF et EFB sont égaux : il en est de même pour leurs moitiés. Cela implique que (JK) et (MN) sont parallèles.

Le pliage de (EF) sur (EC) donne la droite (EH), celui de (EF) sur (ED) donne la droite (FG), celui de (FE) sur (FB) donne la droite (FO) et celui de (FE) sur (FA) donne la droite (FP).

Au point E, les angles DEG et GEF sont donc égaux (soit α leur valeur), de même les angles FEH et HEC sont égaux (soit β leur valeur).
L'angle E est plat, et vaut $\alpha+\alpha+\beta+\beta = 2(\alpha+\beta)$. Par conséquent, l'angle GEH, qui vaut $\alpha+\beta$, vaut la moitié d'un angle plat : c'est un angle droit. Cela prouve que (EG) et (EH) sont perpendiculaires.
Même raisonnement pour les angles en F.
En conséquence, les droites (EG), (EH), (FP) et (FO) forment bien un rectangle. Ce qu'il fallait démonter.
N.B. Suivant la position de E et F au départ, certains points peuvent « sortir du carré ». C'est le cas sur la figure ci-dessus pour l'intersection de (FO) et (EH).

Retour au sommaire

LE PROBLÈME DU TRIMESTRE (N°128)

Sur l'algorithme d'Euclide « étendu »

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD de deux entiers (ou plus généralement de deux éléments d'un anneau … euclidien, par exemple celui des polynômes à coefficients dans un corps commutatif ; restons en à l'ensemble des entiers pour ce problème),

Algorithme *pour le calcul du pgcd de deux entiers a et b, avec b non nul (prouver qu'il s'arrête bien n'est pas l'objet de ce problème).*
On écrit successivement les divisions euclidiennes (les termes r_k en fin d'égalité désignent les restes et les terme q_k les quotients) :

$$a=q_1 b+r_1 \quad , \quad b=q_2 r_1+r_2 \quad , \quad r_1=q_3 r_2+r_3 \quad , \ldots \quad r_{k-2}=q_k r_{k-1}+r_k \quad \ldots \quad r_{n-1}=q_{n+1} r_n+0 \quad ,$$

où r_n *désigne le dernier reste non nul. On a alors* $pgcd(a,b)=r_n$.
Lorsqu'on « étend » l'algorithme d'Euclide pour le calcul de deux entiers a et b, on peut alors de déterminer deux entiers u et v tels que au+bv = pgcd(a,b). (L'identité de Bézout exprime l'existence d'un tel couple).

On peut « remonter » l'algorithme

On écrit ainsi $pgcd(a,b)=r_n=r_{n-2}-q_n r_{n-1}$

$$pgcd(a,b)=r_{n-2}-q_n(r_{n-3}-q_{n-1}r_{n-2})=r_{n-2}(1+q_n q_{n-1})+r_{n-3}(-q_n)=r_{n-2}(1+q_n q_{n-1})+r_{n-3}(-q_n)$$

…

$$pgcd(a,b)=u_n a+v_n b$$

On peut « descendre » l'algorithme

On écrit $r_1=a-b*q_1$

$$r_2=b-q_2 r_1=b-q_2(a-q1*b)=a*(-q_2)+b(1+q_1*q_2)$$

…

$$r_k=r_{k-2}-q_k r_{k-1}=a*\alpha_{k-2}+b*\beta_{k-2}-q_k(a*\alpha_{k-1}+b*\beta_{k-1})=a*(\alpha_{k-2}-q_k\alpha_{k-1})+b*(\beta_{k-2}-q_k\beta_{k-1})$$

…

$$r_n=r_{k-2}-q_n r_{n-1}=a*\alpha_{n-2}+b*\beta_{n-2}-q_n(a*\alpha_{n-1}+b*\beta_{n-1})=a*(\alpha_{n-2}-q_k\alpha_{n-1})+b*(\beta_{n-2}-q_k\beta_{n-1})$$

$$r_n=a*\alpha_n+b*\beta_n=pgcd(a,b)$$

Ces deux algorithmes fournissent alors deux couples (u_n,v_n) *et* (α_n,β_n) *satisfaisant l'identité de Bézout.*

Question : Ces deux couples sont-ils égaux ?

Le responsable de la rubrique est André STEF. Lui envoyer vos solutions à ce problème (nous espérons en avoir une grande quantité), ainsi que toute proposition de nouveau problème : Andre.Stef@univ-lorraine.fr .

retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME n°126

Énoncé du problème de devises

Lorsque l'on convertit une somme d'une devise en une autre, on applique un taux de conversion puis on arrondit le résultat au centième, au moins dans dans le cas du franc et de l'euro et sans prétendre à la généralité mondiale.

En 1998 a été fixé le taux de conversion franc/euro. Un euro correspond (ou correspondait) à 6,55957 francs.
Ainsi la conversion de 100 francs est de 15,24 €.
Si on pouvait convertir 15,24 € en francs on obtiendrait 99,97 francs.

Question 1. Quel est l'écart maximum (a) absolu en francs, (b) en pourcentage, lors d'une conversion d'un montant de francs en euros puis reconverti ensuite en francs ?

Question 2. Quel est l'écart maximum en euros lors d'une conversion d'un montant d'euros en francs puis reconverti ensuite en euros ?

Question 3. Les comptes bancaires ont été convertis en euros au 1^er^ janvier 2001, mais la devise utilisée en France est restée le franc sur l'année 2001 (l'euro est devenu la devise officielle le 1^er^ janvier 2002). Ainsi toute opération d'un client effectuée en francs était convertie en euros sur le compte bancaire.
Le 1^er^ janvier 2001, un client souhaite retirer 3000 francs à un distributeur de sa banque (sans frais, et ce montant lui est permis par le contrat de sa carte).Le distributeur fournit des billets de 100 francs. A-t-il intérêt à procéder à un retrait unique de 3000 francs ou à plusieurs retraits pour un montant total de 3000 francs ? (si plusieurs retraits, il conviendra de préciser les montants).

Solution

Aucun lecteur du Petit Vert n'a envoyé de solution. Voici donc des éléments de solution proposés par André Stef.

Remarque préliminaire sur les arrondis : l'arrondi à l'entier le plus proche d'un réel x, qu'on notera $arr_0(x)$, vérifie $arr_0(x) = E(x+0,5)$, où E désigne la fonction partie entière.

L'arrondi « au centième » d'un réel x est alors $arr_2(x)=\frac{1}{10^2}E(10^2x+0,5)$. Il conviendrait d'utiliser ici une telle fonction arr_2, mais nous pouvons tout aussi bien ici, pour parler de valeurs monétaires, travailler en centimes de francs ou d'euros et utiliser la fonction arr_0.

On posera pour la suite $\gamma = 6,55957$(taux de conversion).

retour au sommaire

Question 1. Si x désigne un montant exprimé en centimes de francs, sa conversion y en centimes d'euros vérifie $y = arr_0(x/\gamma)$, puis la conversion de ce montant en centimes de francs z vérifie $z = arr_0(\gamma y)$. On étudie dans cette question $|z-x|$.

On a, par propriété de la fonction partie entière, les doubles inégalités suivantes :

$$x/\gamma - 0{,}5 < y \leq x/\gamma + 0{,}5 ;$$
$$y\gamma - 0{,}5 < z \leq y\gamma + 0{,}5.$$

On en déduit $x - 0{,}5(\gamma+1) < z \leq x + 0{,}5(\gamma+1)$.

En remarquant que $3 < 0{,}5(\gamma + 1) < 4$ et que x et y sont entiers, on déduit que $x - 3 \leq z \leq x + 3$ et donc que $|(z-x)| \leq 3$.

La remarque de l'énoncé concernant le montant de 100 € permet de conclure que l'écart maximal serait de 3 centimes de francs (imaginer ce qu'une automatisation des opérations boursières sur des ordinateurs auraient pu provoquer dans les bourses européennes quelques minutes après l'introduction de l'euro, si cette double conversion n'avait pas été interdite dans les textes créant l'euro !)

Question 2. De manière analogue au traitement de la question 1, partant d'un montant y en centimes d'euros, converti en une somme z en centimes de francs puis en une somme t en centimes d'euros, on a $y-0{,}5(\gamma^{-1}+1) < t \leq x+0{,}5(\gamma^{-1}+1)$, avec $0 < 0{,}5(\gamma^{-1}+1) < 1$.

y et t étant entiers, on peut conclure que $y = t$. Il n' y aurait pas eu de modification du montant après cette double conversion euros-francs-euros.

On voit bien que la différence de situation entre les questions 1 et 2 provient du fait que $\gamma > 1$.

Question 3. Comme signalé en énoncé, si on retirait 100 francs, le compte était alors débité de 15,24 €. Le retrait de 200 francs amenait un débit de 30,49 € (donc supérieur strictement à 2x15,24 €). On peut alors constater (à la « main », sur tableur ou autre) que le retrait de n billets de 100 francs (pour n entier naturel quelconque supérieur à 2 et inférieur à 30, c'est également vrai pour tout entier naturel supérieur à 2 mais cela dépasse le cadre d'une étude exhaustive) entraine à chaque fois un débit strictement supérieur à $15{,}24n$ exprimés en euros. Il convenait donc durant l'année 2001 d'effectuer des retraits de 100 francs, afin de faire des économies… de quelques centimes d'euros.

Billet de 100 francs Cézanne 1997-1998

retour au sommaire

SOLUTION DU PROBLÈME PRÉCÉDENT (n°127)

Problème proposé par Jacques Choné

On effectue une suite de lancers d'une pièce équilibrée. Déterminer l'espérance du temps d'attente de la première fois où l'on obtient trois résultats consécutifs identiques (i.e. soit PPP, soit FFF).

Solution (d'après Jacques CHONÉ) : aucune solution n'a été envoyée, voici donc des éléments de solution.

Soit X la variable aléatoire égale au rang où l'on obtient pour la première fois trois résultats consécutifs identiques. Le support de X (ensemble des valeurs qu'elle peut prendre) est l'ensemble des entiers au moins égaux à 3. On a, par exemple,

$$P(X=3)=P(PPP\cup FFF)=\frac{1}{4} \qquad P(X=4)=P(FPPP\cup PFFF)=\frac{1}{8}$$

Pour n entier naturel non nul, soit v_n le nombre de mots sur l'alphabet $\{F,P\}$ de longueur n finissant par F et ne comportant aucun sous-mot du type PPP ou FFF. On notera V_n l'ensemble de ces mots.

Pour des raisons de symétrie, on a, pour $n\geq 4$, $P(X=n)=\dfrac{2v_{n-3}}{2^n}=\dfrac{v_{n-3}}{2^{n-1}}$.

Montrons par récurrence que pour tout n entier naturel non nul, on a $v_n=F_{n+1}$, où $(F_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite de Fibonacci définie par $F_0=1$, $F_1=1$ et, pour tout entier naturel n, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$.
On a : $v_1=1=F_2$, $v_2=2=F_3$.

Soit n un entier au moins égal à 3. Supposons que $v_{n-1}=F_n$ et $v_{n-2}=F_{n-1}$.
V_n est la réunion disjointe de V'_n , l'ensemble des éléments de V_n finissant par FF et de V''_n , l'ensemble des éléments de V_n finissant par PF.

Le terme figurant juste avant FF dans un mot de V'_n est nécessairement P ; comme P et F jouent des rôles symétriques dans la partie avant FF, on en déduit que le nombre d'élément de V'_n est v_{n-2}.

Comme P et F jouent des rôles symétriques dans les n-1 premiers termes d'un mot de V''_n , le nombre d'éléments de cet ensemble est v_{n-1}.
On en déduit que $v_n=v_{n-1}+v_{n-2}=F_n+F_{n-1}=F_{n+1}$. Ce qui termine la récurrence.

On a donc, pour $n\geq 4$, $P(X=n)=\dfrac{F_{n-2}}{2^{n-1}}$, formule également vraie pour $n=3$.

La série génératrice de X, de rayon de convergence $R=\dfrac{4}{1+\sqrt{5}}>1$, vérifie donc

$$g(x)=2\sum_{n\geq 3}F_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{x^2}{2}\sum_{n\geq 0}F_n\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{x^2}{2}\,\frac{x/2}{1-(x/2)-(x/2)^2}=\frac{x^3}{4-2x-x^2}$$

car la fonction génératrice S des nombres de Fibonacci vérifie $S(x)=\dfrac{x}{1-x-x^2}$

L'espérance demandée est alors : $\boldsymbol{E(X)=g'(1)=7}$.

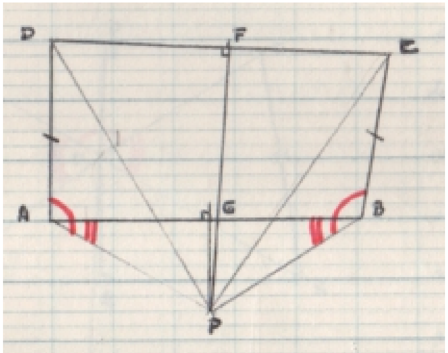
retour au sommaire

LE SOPHISME DU TRIMESTRE (N°128)

La définition du dictionnaire Robert est la suivante : « *Argument, raisonnement faux malgré une apparence de vérité* ». Pour étudier ces sophismes, il est recommandé de faire les figures « à main levée », même si elles ne sont pas tout a fait exactes. L'usage de logiciels de géométrie dynamique est absolument proscrit. Le Petit Vert vous proposera régulièrement des sophismes, comme celui qui suit. Envoyez toute nouvelle proposition à jacverdier@orange.fr.

Un angle droit est égal à un angle obtus

Soit un quadrilatère ABCD, ayant un angle droit BAD, deux côtés égaux [AD] et [BC], et un angle obtus ABC (voir figure).



Traçons les médiatrices de [DC] et de [AB]. Elles se coupent en P, car (AB) et (DC) ne sont pas parallèles.

D'une part on a [PA]=[PB] car P et sur la médiatrice de [AB] et [PD]=[PC] car P est sur la médiatrice de [DC]. D'autre part, [AD]=[BC] par hypothèse.

Les triangles PAD et PBC sont donc égaux (3e cas d'égalité des triangles).

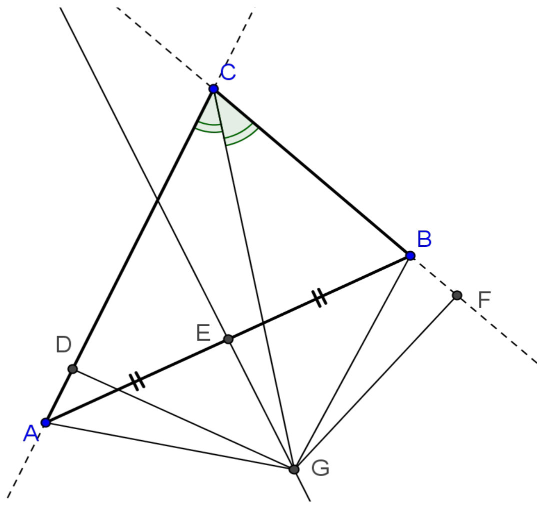
D'où l'on tire que $\widehat{PAD}=\widehat{PBC}$. Les angles $\widehat{PAG}$ et $\widehat{PBG}$ sont également égaux. D'où, par différence de ces angles, $\widehat{GAD}$ et $\widehat{GBC}$ sont égaux.

Et comme $\widehat{GAD}$ est un angle droit, $\widehat{GBC}$ l'est également.

La proposition est démontrée.

Ce sophisme a été publié dans l'ouvrage de W.W.R Ball, « Mathematical recreations and essays », publié à Londres en 1931.

SOLUTION DU SOPHISME PRÉCÉDENT (n°127)



Dans le dernier Petit Vert, nous démontrions que **tout triangle est isocèle** !

Bien entendu, la figure qui servait de support à notre démonstration était incorrecte...
Les triangles GDA et GFB sont bien égaux (jusque là il n'y a aucune erreur dans le raisonnement). Mais les points D et F ne peuvent pas être tous les deux à l'extérieur du triangle (ni tous les deux sur les segments [AC] et [BC]).
L'un des deux est nécessairement sur l'un de ces deux segments, et l'autre sur son prolongement à l'extérieur du triangle.
Sur la figure ci-contre, qui - elle - est exacte, on a CA = CD + DA alors que CB = CF - FB.
L'erreur est très facile à déceler par un élève de collège, à partir du moment où il réalise correctement la figure correspondant à l'énoncé.
Ce sophisme est extrait d'un ouvrage de W. W. R. Ball, « Mathematical recreations and essays », publié à Londres chez McMillan en 1931.

retour au sommaire