Par Fathi DRISSI,
collège Jean Burger Moyeuvre-Grande

ARCHITECTURE MUSULMANE MÉDIÉVALE : LES TUILES GIRIH

À l'école primaire, le premier contact avec les angles se fait à travers les figures de base (quadrilatères usuels, triangles, etc.). L'angle droit apparait avant que la notion d'angle soit définie : dans un carré, dans un rectangle, tous les angles sont superposables, et on dit que les angles en question sont des angles droits.

Extrait du document d'accompagnement « liaison école-collège »
« *Le travail sur les angles reste très limité au cycle III. Seul un travail de comparaison à partir de gabarit est proposé, ainsi qu'une première approche de leur mesure avec l'angle droit comme unité : le demi-angle droit, le quart d'angle droit sont utilisés. Mais la question générale de la mesure des angles et l'apprentissage de l'utilisation du rapporteur relèvent du collège : le degré comme unité d'angle comme la mesure de l'angle droit (90°) sont des connaissances du programme de sixième.* »

Comme on le voit, les angles à l'école primaire sont d'abord objets de manipulations et d'observations, et reconnus en tant que secteurs angulaires (gabarits). Les pavages "Girih" offrent des situations pédagogiques très riches assurant une continuité de ces apprentissages et permettant de relier différents domaines du programme de mathématiques. Ils sont aussi un contexte particulièrement intéressant pour étudier l'angle comme fraction de l'angle plein, premier apprentissage vers la mesure des angles et la construction du rapporteur.

L'exploration des polygones "Girih" permet de se poser deux grandes questions génératrices et motivant un ensemble d'études et de recherches géométriques, les suivantes :

1. Qu'est-ce qui, dans les polygones "Girih", permet une telle variété de dallages ?
2. De quelles informations a-t-on besoin pour construire ces polygones ?

Voici quelques activités d'étude et de recherche expérimentées en classe de sixième. Elles ont été présentées en 2015 lors d'un atelier de la journée de l'A.P.M.E.P Lorraine et lors des Journées Nationales A.P.M.E.P. de Laon.

<u>Manipulation des polygones "Girih" et réalisation de dallages</u>

Pour cette séquence, les élèves sont répartis en groupes de quatre de niveau hétérogène et disposent d'une relative autonomie. Des tuiles plastifiées et des documents qui précisent les tâches à effectuer leurs sont fournis.
Les activités qui suivent ont été menées pendant deux séances d'une heure.

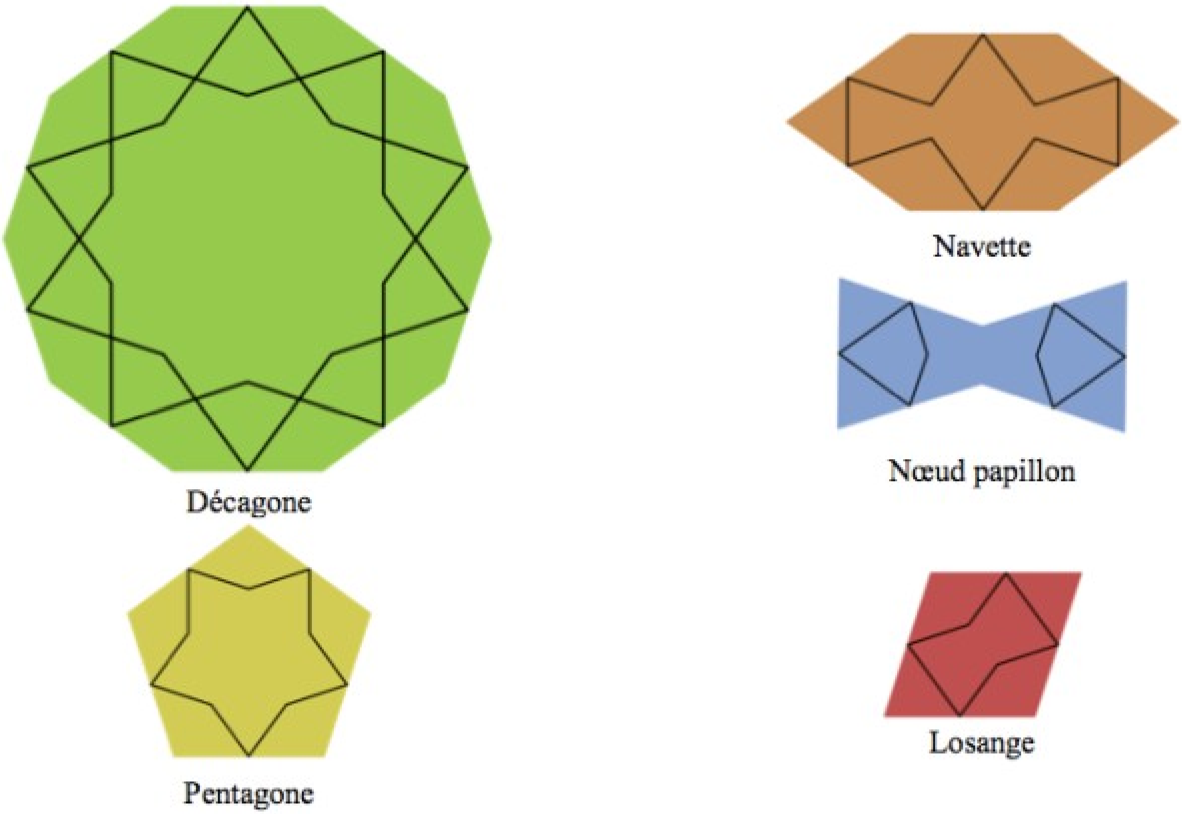
Phase 1 : Présentation de quelques décors et la découverte du système "Girih" par Peter J. Lu.

Le physicien Peter J. Lu, passionné d'histoire de l'art, a découvert en 2007 que certains décors géométriques de l'architecture arabo-musulmane médiévale, que l'on croyait jusqu'alors conçus en tant que réseaux de lignes en zigzag et dessinés directement à la règle et au compas, n'étaient en réalité que des pavages réalisés à l'aide de cinq polygones décorés de quelques lignes, qu'on appelle polygones ou tuiles "Girih". Le mot *Girih* signifie "tuile" en Persan.

Voici quelques décors.



Voici les cinq polygones Girih.



Phase 2 : Constitution de différents dallages, libres puis imposés par l'enseignant

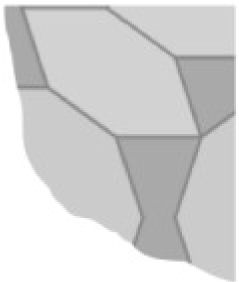
<u>Activité 1</u>

Jouer et manipuler ces tuiles en réalisant différents dallages.
Les élèves étant familiarisés avec la notion de pavage, cette activité avait pour objectif de leur faire manipuler les tuiles et de se rendre compte que la combinaison de celles-ci permet de créer une grande variété de dallages et d'assurer aux lignes qui les décorent de se prolonger.

<u>Activité 2</u>

Peter aimerait compléter l'assemblage de tuiles "Girih", relevé sur un morceau de parchemin d'origine, qui permet d'obtenir le décor de la photo ci-dessous. L'observation de la photo a permis à Peter de savoir que ce décor possède des axes de symétrie et de trouver l'assemblage qui permet de l'obtenir. Il doit maintenant réaliser un plan du décor.

Photo du décor



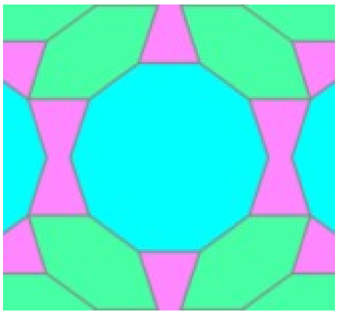
Morceau du parchemin

Consigne

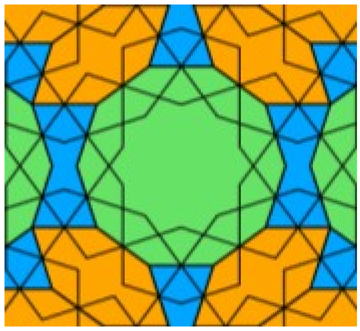
À votre tour de trouver cet assemblage en utilisant les tuiles qui sont à votre disposition, puis aidez Peter dans son travail en réalisant le plan du décor. *Chaque élève du groupe devra dessiner le plan trouvé sur son cahier.*

Solution

Le plan du décor



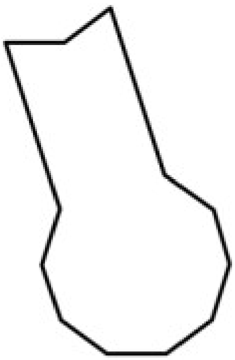
L'assemblage



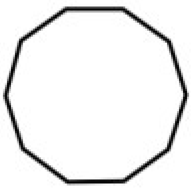
Malgré l'orientation du décor sur la photo, les élèves n'ont pas eu de problème à retrouver les axes de symétrie et de constater que l'étoile à dix branches au centre est obtenue à l'aide des lignes décoratives du décagone. Ce qui leur a permis de reconstituer facilement l'assemblage. Quant à la réalisation du plan, les élèves ont naturellement utilisé les tuiles comme gabarit en suivant le contour.

Activité 3

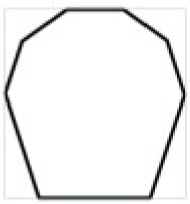
Avec certaines tuiles "Girih", réalise les figures suivantes :



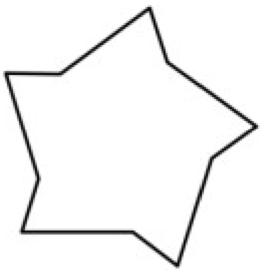
Puzzle 1



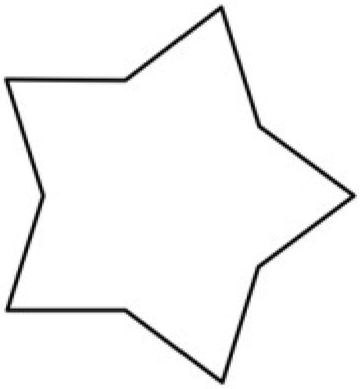
Puzzle 2



Puzzle 3



Puzzle 4

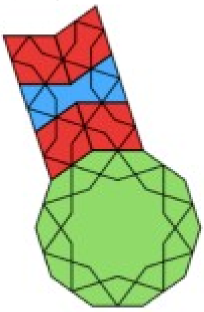


Puzzle 5

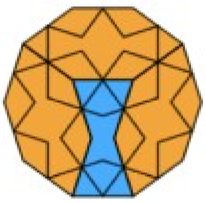
Les élèves avaient pour consigne de dessiner les solutions trouvées sur leurs feuilles. Ce travail a permis aux élèves de réinvestir des notions (polygones et angle) et des techniques (reproduire un angle en utilisant un gabarit) étudiées à l'école primaire et de comprendre que pour reproduire des figures polygonales, il suffit d'utiliser ses angles et ses côtés (les angles donnent la forme de la figure et les côtés sa dimension).
Le puzzle 5 étant un agrandissement de l'étoile à cinq branches formée par rotation du losange autour d'un de ses sommets, a permis aux élèves de constater que la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur des segments qui le déterminent.

Des feuilles de pièces prêtes à imprimer et des dessins des polygones à recouvrir pourront être demandées à francois.drouin2@wanadoo.fr.

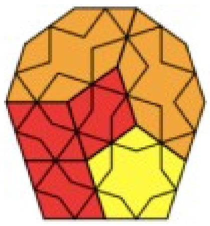
Des solutions



Puzzle 1

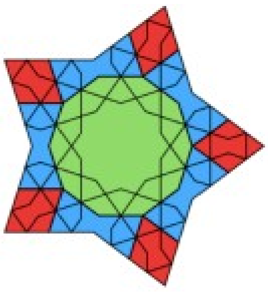


Puzzle 2



Puzzle 3

Puzzle 4



Puzzle 5

Pour terminer la séquence, les deux questions d'étude présentées au début de cet article ont été posées à la classe entière et ont motivé l'exploration des polygones "Girih". Ces questions ont été naturellement acceptées par les élèves à ce moment de l'étude et ont permis d'organiser le chapitre sur les angles autour des trois questions suivantes :

1 - Quand parle-t-on d'angle ?
2 - Quand utilise-t-on des angles ?
3 - Qu'a-t-on besoin de savoir faire avec les angles ?

A) <u>Exploration et étude des polygones "Girih"</u>

Pour cette séquence, les élèves ont été répartis en groupe de trois, de niveau hétérogène. Chaque activité s'est déroulée en trois temps :

Un premier temps de recherche individuelle ;
Un second de recherche collective au sein du groupe (confrontation d'idées, échanges argumenté, formalisation) ;
Un troisième de restitution et de validation en classe entière.

<u>Phase 1</u>

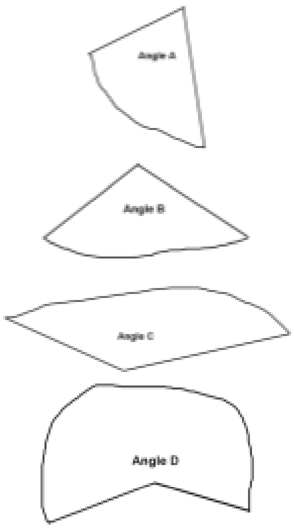
On invite d'abord les élèves à observer les cinq polygones, de façon à leur faire constater que tous leurs côtés sont de même longueur et qu'ils ont au moins deux axes de symétrie.
On leur propose ensuite de relever les angles des tuiles en vue de construire des gabarits d'angles.

Tâches à effectuer

1 - Pour chaque tuile :
Tracer en rouge les axes de symétrie ;
Trouver les angles qui ont la même mesure (ils se superposent) puis déterminer le nombre de gabarits à fabriquer.
2 - Relever les angles de chacune des tuiles puis construire des gabarits d'angles.
3 - Classer ensuite ces gabarits par superposition et mettre les angles qui se superposent dans une même enveloppe.

<u>Bilan du classement</u>

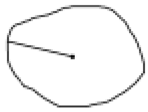
Quatre angles différents sont obtenus.



Situation 1

En prenant des angles dans vos enveloppes, recouvrir l'angle plein ci-contre.

Est-ce possible avec des angles d'une même enveloppe ?

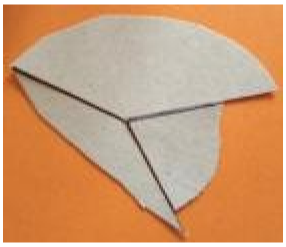


Bilan

2×B + C = Angle plein

D + C = Angle plein

5×A= Angle plein. L'angle C représente 1/5 de l'angle plein



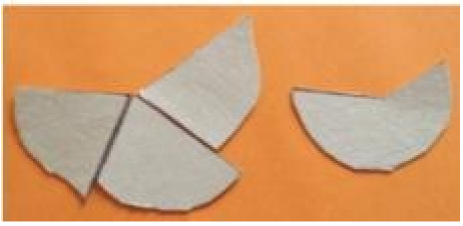
2×C + A = Angle plein

Situation 2

On choisit l'angle A comme unité pour mesurer les angles. Déterminer la mesure des angles C et D.

Bilan

C=2×A

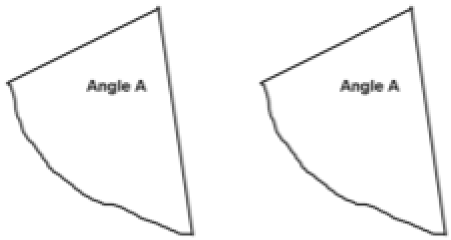


D=3×A

Questions

1) Sachant que l'angle A représente de l'angle plein, quelle fraction de l'angle plein représente chacun des angles C et D ?
   C représente de l'angle plein.
   D représente de l'angle plein.
2) Peut-on déterminer cette fraction pour l'angle B ? Pourquoi ?
   Un angle A n'est pas suffisant mais deux de ces angles recouvrent plus que l'angle B. Il faut donc partager l'angle A pour pouvoir mesurer l'angle B.

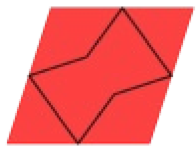
Un angle peut être partagé en deux angles égaux en le repliant sur lui-même.



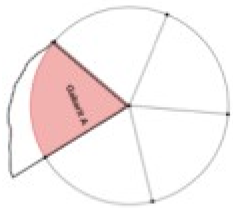
La partie de la droite de pliage à l’intérieur de l’angle est la **bissectrice** de cet angle : c’est son axe de symétrie.

Le mot **bissectrice** vient du mot latin ***bi-secare***, elle permet en effet d'obtenir deux angles superposables.

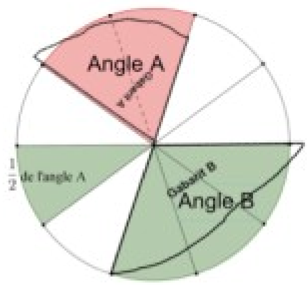
Situation 3
En utilisant ce que tu sais à propos des losanges et sans plier la feuille, trace la bissectrice de l’angle A.



Situation 4
En utilisant ce que tu sais à propos des triangles isocèles et sans plier la feuille, trace la bissectrice de l’angle A.



<u>Bilan</u>
L’angle B est égal à 1,5 fois l’angle A.
L’angle B représente de l’angle A.

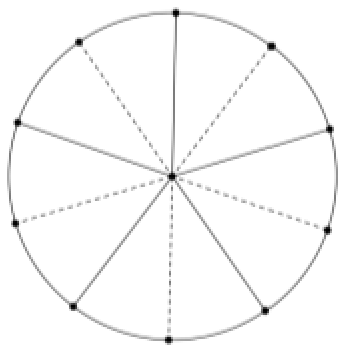


<u>Remarque</u> : La bissectrice d’un angle permet son partage en 2, 4, 8, 16… parties égales.

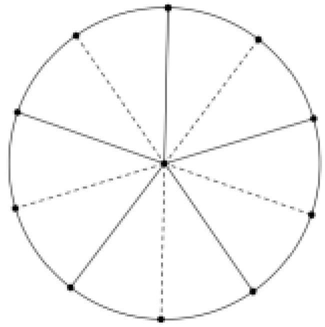
Situation 5

Le disque ci-contre est partagé en dix parties superposables.
En utilisant ce que tu sais maintenant à propos des angles, partage ce disque en vingt parts égales.

En choisissant un vingtième de l’angle plein comme unité pour mesurer les angles, donne la mesure des angles A, B, C et D.



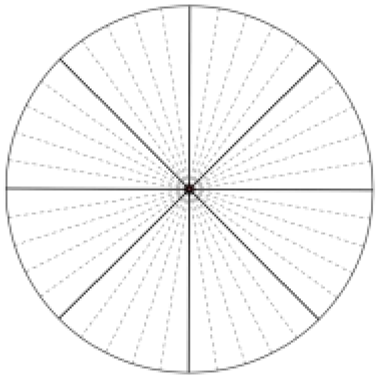
Situation 6

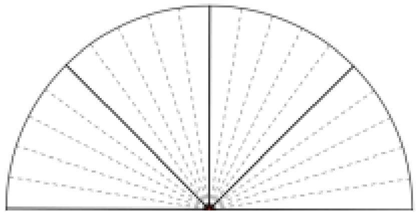


Voici un 2ème disque partagé en dix parties superposables.
Partage ce disque en quarante parts égales.

En choisissant un quarantième de l'angle plein comme unité pour mesurer les angles, donne la mesure des angles A, B, C et D.

Bilan
Un instrument pratique : première ébauche du rapporteur.





Chacun des angles intérieurs des tuiles Girih a pour mesure l'une des quatre fractions décimales suivantes de l'angle plein : 2/10, 3/10, 4/10, ou 6/10.
En choisissant un dixième de l'angle plein comme unité pour mesurer les angles, chacun des angles intérieurs des tuiles Girih a pour mesure 2, 3, 4 ou 6 unités.

La variété des dallages possibles avec ces tuiles vient un peu de cette simplicité, car plusieurs combinaisons de ces valeurs (et donc des angles qui leur sont associés) donnent une somme de 10.

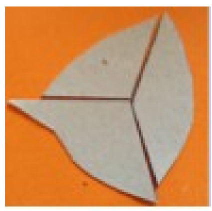
Situation 7
L'angle C mesure 4 unités et l'angle D mesure 6 unités.
On a 4+6=10.
Trouver toutes les combinaisons possibles des valeurs 2, 3, 4 et 6 qui donnent une somme de 10.

D + C = Angle plein

Réponses :

2×3+4=10

2×3+2×2=10
Car C=2×A



$5 \times 2 = 10$

$2 \times 4 + 2 = 10$

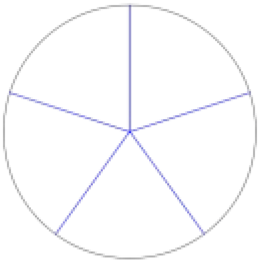
$6 + 4 = 10$

Exercices d’applications

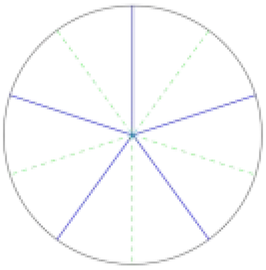
- Construire des angles, des triangles, des quadrilatères
- Mesurer des angles
- Reproduction des tuiles à l’aide de reports d’angles et de longueurs à une échelle simple (1/1, 2/1, 1/2, 4/1…)
- Mesure des angles formés par deux lignes décoratives

Situation 8

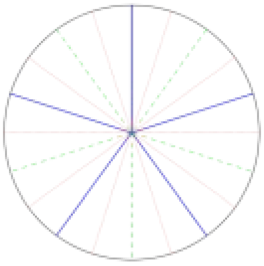
1) Complète les pointillés



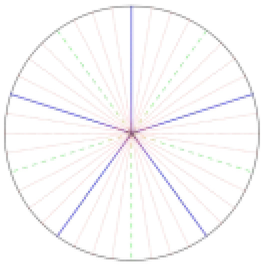
Le disque est découpé en ……………………………



Le disque est découpé en ……………………………



Le disque est découpé en ……………………………



Le disque est découpé en ……………………………

2) Remarque les coïncidences et complète :

$1 = \frac{5}{5} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $\qquad \frac{1}{5} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $\qquad \frac{3}{10} = \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$ $\qquad \frac{16}{40} = \frac{8}{\dots} = \frac{\dots}{5}$ $\qquad \frac{12}{20} = \frac{\dots}{5}$

Complète la règle suivante :

On obtient une fraction égale en ……………………………… ou en ……………………………. son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

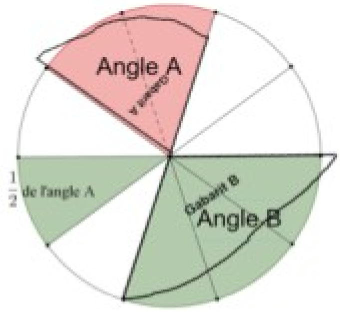
3) Complète à l’aide des graduations ci-dessus :

$\frac{3}{5} = \frac{\dots}{10} = \dots,\dots$ $\qquad 1{,}2 = \frac{\dots}{10} = \frac{\dots}{5}$ $\qquad \frac{1}{2} = \dots,\dots$ $\qquad \frac{3}{4} = \frac{\dots}{40} = \dots,\dots$ $\qquad 1{,}4 = 1 + \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Complète la phrase suivante :

Tout nombre décimal peut s'écrire sous forme de ....

Situation 9



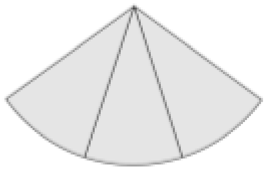
Rappel

L'angle B représente de l'angle A.

Quelle fraction de l'angle B représente l'angle A ?

....

On choisit l'angle B comme unité.
L'angle est B est partagé en
....

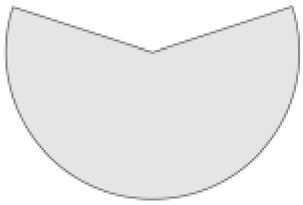


Angle B

Complète : $D = \ldots \times B$

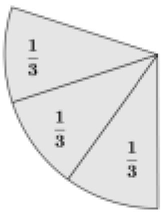
Partage l'angle D ci-contre en 3.
Complète :

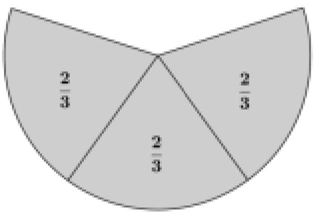
$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \ldots \times \frac{1}{3} = \frac{\ldots}{\ldots}$$



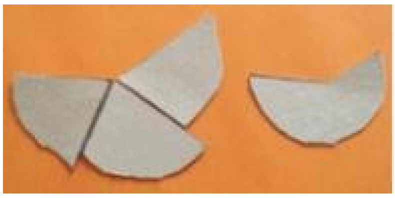
Angle D

Bilan





Il revient au même de prendre le tiers de 2 et de prendre deux fois le tiers de l'unité.
Ces résultats peuvent être exploités pour établir que 2/3 est le nombre, qui multiplié par 3, donne 2.



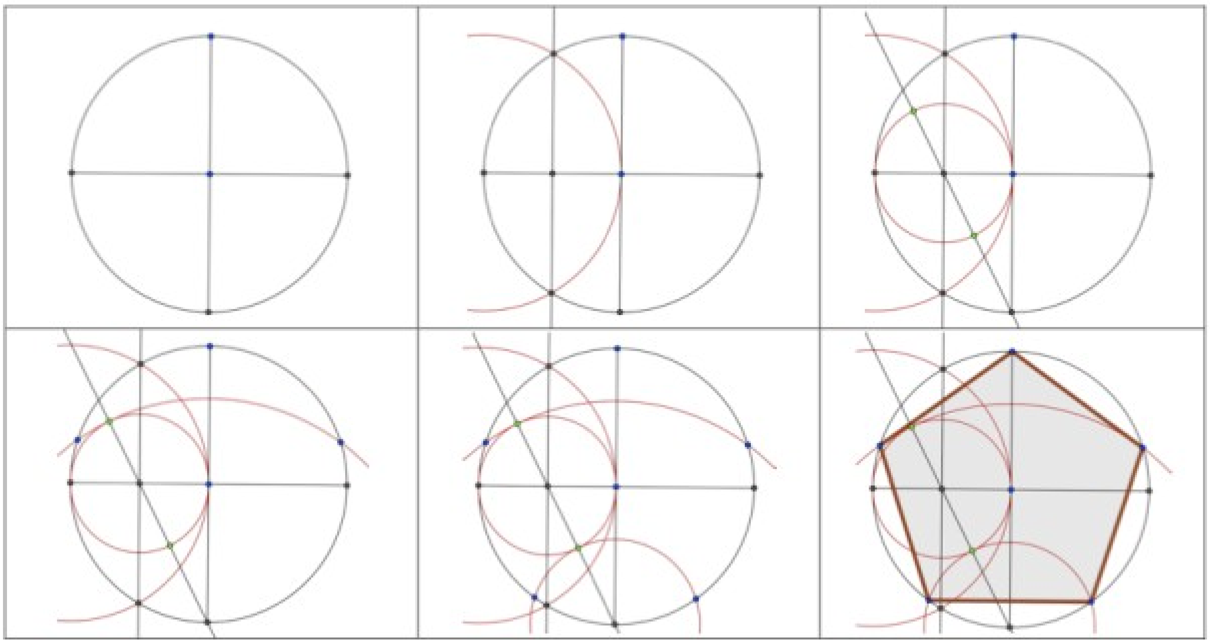
$A = \frac{2}{3} B$
D = 3A
D = 2B

Construction des tuiles à la règle et au compas

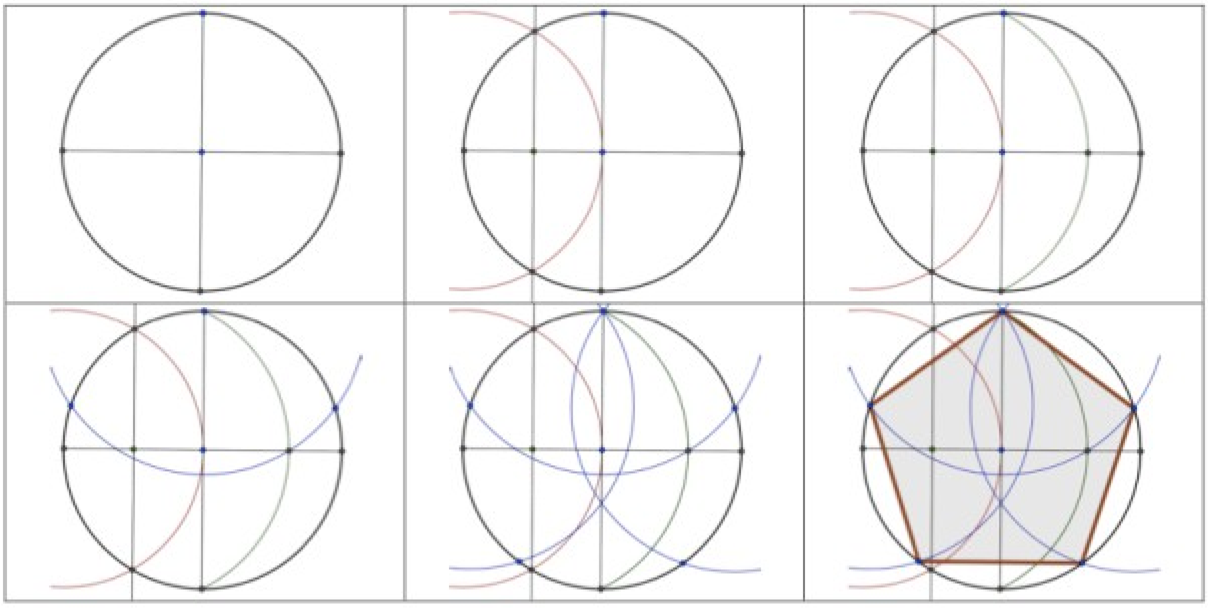
On peut proposer aux élèves de construire les tuiles à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Certaines tuiles peuvent être obtenues à partir du pentagone.

Le pentagone

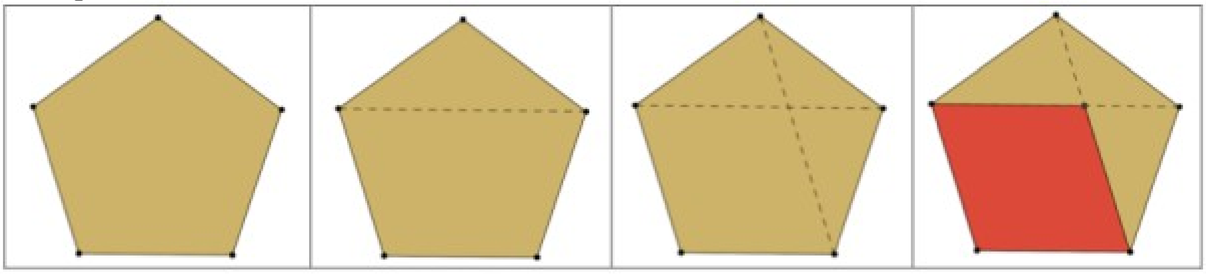


ou

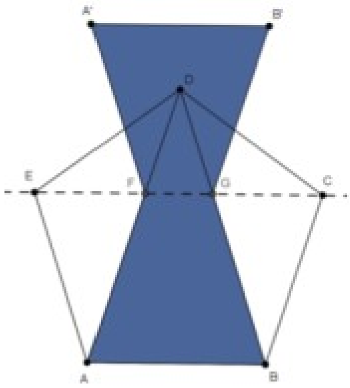
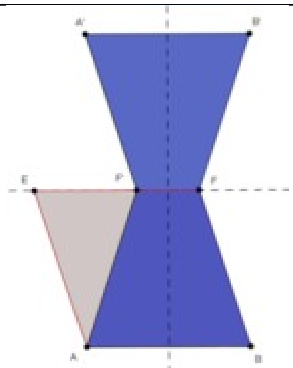


On peut aussi utiliser l'outil "Polygone régulier" du logiciel GeoGebra et trouver là l'occasion d'évoquer d'autres polygones réguliers que l'hexagone.

Le losange



Le nœud papillon

À partir du pentagone 1 - Construis un pentagone ABCDE (voir construction d’un pentagone). 2 - Trace la droite (EC). 3 - Trace les segments [AD] et [BD]. Ils coupent la droite (EC) en F et G. 4 - Construis A’ et B’ les symétriques respectifs des points A et B par rapport à la droite (EC). 5 - Trace l’hexagone ABGB’A’F.	
À partir du losange 1 - Construis un pentagone ABCDE (voir construction d’un pentagone). 2 - Trace la médiatrice de [AB]. 3 - Construis F’ le symétrique de F par rapport à cette médiatrice. 4 - Construis A et B’ les symétriques respectifs des points A et B par rapport à la droite (EF). 5 - Trace l’hexagone ABFB’A’F’.	

La navette