DANS NOS CLASSES

La bibliothèque de Babel

Par Renaud Dehaye,
ESPE-IUFM de Lorraine

Cet article est un compte rendu d’un atelier d’une heure réalisé dans le cadre du stage Maths C2+ de l’académie de Nancy-Metz. Ce stage de trois jours au mois de juin est proposé chaque année à une quinzaine d'élèves de seconde de l'académie et leur permet de découvrir le métier de chercheur en mathématiques.

A l’occasion de la visite de l’Institut Elie Cartan, et plus particulièrement de sa bibliothèque, une activité a été proposée aux quatorze élèves de seconde autour de la nouvelle « La bibliothèque de Babel » de Jorge Luis Borges.
Après une lecture commentée d’un extrait de la nouvelle (voir document distribué aux élèves en annexe), deux questions ont été posées aux élèves :

- Combien y a-t-il de livres dans la bibliothèque de Babel ?
- Dessiner la bibliothèque de Babel.

La question du nombre de livres

Les ingrédients nécessaires pour répondre à cette question sont les suivants :

- Chacun des murs de chaque hexagone porte cinq étagères ; chaque étagère comprend trente-deux livres, tous de même format ; chaque livre a quatre-cent-dix pages ; chaque page, quarante lignes, et chaque ligne, environ quatre-vingts caractères noirs. […]

- Il y a cinq cents ans, [un] penseur observa que tous les livres, quelques divers qu'ils soient, comportent des éléments égaux : l'espace, le point, la virgule, les vingt-deux lettres de l'alphabet. Il fit également état d'un fait que tous les voyageurs ont confirmé : il n'y a pas, dans la vaste Bibliothèque, deux livres identiques. De ces prémisses incontroversables il déduisit que la Bibliothèque est totale, et que ces étagères consignent toutes les combinaisons possibles des vingt et quelques symboles orthographiques (nombre, quoique très vaste, non infini), c'est-à-dire tout ce qu'il est possible d'exprimer, dans toutes les langues. […]

retour sommaire

Rapidement, la plupart des élèves se sont lancés dans le calcul du nombre de caractères dans un livre : $410 \times 40 \times 80 = 1\ 312\ 000$
Quelques uns sont partis dans le calcul du nombre de livres par salle hexagonale (il y a quatre murs occupés par cinq étagères de trente-deux livres soit $4 \times 5 \times 32 = 640$ livres) mais ils se sont vite rendus compte qu'ils étaient dans une impasse – on ne connaît pas le nombre de salles !
Les deux nombres à prendre en considération sont bien, d'une part 1 312 000 et d'autre part, 25, le nombre de caractères utilisables, y compris l'espace.

Trois calculs ont alors été proposés pour le nombre total de livres : $25 \times 1\ 312\ 000$, ou $25^{1\ 312\ 000}$ ou $1\ 312\ 000^{25}$ sans consensus dans les groupes, les adeptes du deuxième calcul (le bon!) n'étant pas encore en mesure de l'imposer.

Un détour par un problème plus simple (combien peut-on écrire de pages de 100 caractères avec les lettres a,b,c ?) a permis de rallier l'ensemble des élèves au nombre $25^{1\ 312\ 000}$.

La question s'est alors transformée en la suivante :
Qu'est-ce que le nombre $25^{1\ 312\ 000}$? Peut-on le calculer ? Combien a-t-il de chiffres ?

« Mais, Monsieur, pourquoi la calculatrice écrit Ma Error … ? »

Les élèves se sont alors lancés dans de nouveaux calculs, essayant de réduire la taille de l'exposant ou tentant de se ramener aux puissances de dix.
Voici quelques conjectures formalisées suite aux propositions des élèves :

Conjecture 1 :	Conjecture 2 :	Conjecture 3 :
$a \times 25^n = 2a \times 25^{\frac{n}{2}}$	$a^n = \left(\frac{a}{p}\right)^{n/p}$	$(2{,}5a)^n = a^{2{,}5n}$

Conjectures assez vite abandonnées à partir d'un contre-exemple, les contraintes horaires n'ayant pas permis un moment collectif sur ces formules. C'était l'heure du repas !

Il pourrait être intéressant de connaître la taille du nombre $25^{1\ 312\ 000}$

retour sommaire

On pourrait écrire :

$$25^{1\ 312\ 000} = \left(\frac{100}{4}\right)^{1\ 312\ 000} = \left(\frac{10^2}{2^2}\right)^{1\ 312\ 000} = \frac{10^{2\ 624\ 000}}{2^{2\ 624\ 000}}$$

On cherche alors une puissance de 10 assez proche d'une puissance de 2 : on peut choisir $2^{10} \simeq 10^3$ d'où $25^{1\ 312\ 000} \simeq \frac{10^{2\ 624\ 000}}{10^{787\ 200}} \simeq 10^{1\ 836\ 800}$.

Ce qui donne une « idée » de la taille du nombre total de livres.
Une élève a proposé d'utiliser $2^3 \simeq 10$ ce qui conduit au calcul :

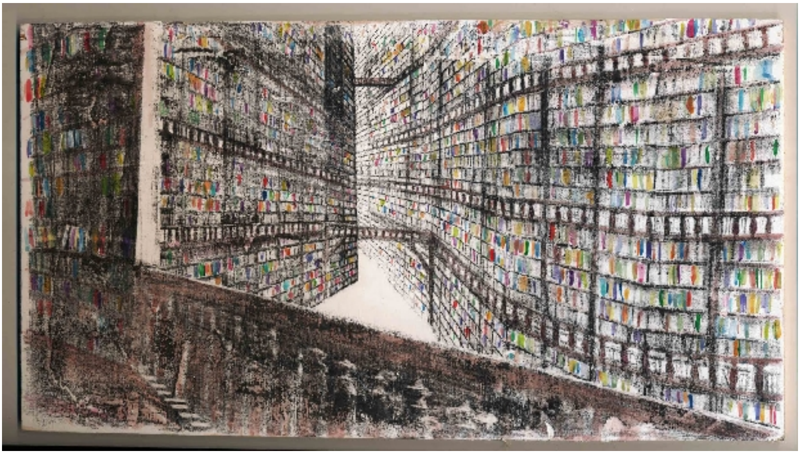
$$25^{1\ 312\ 000} \simeq \frac{10^{2\ 624\ 000}}{10^{874\ 666,66...}} \simeq 10^{1\ 749\ 333,33...}$$

On obtient alors l'encadrement

$$10^{1\ 749\ 333,33...} < 25^{1\ 312\ 000} < 10^{1\ 836\ 800}$$

Cet encadrement utilise des puissances d'exposant non entier et n'est pas accessible à des élèves de seconde.
Quoiqu'il en soit, ce nombre dépasse largement tous les nombres astronomiques connus : il y a environ 10^{80} atomes dans l'univers observable.
Le diamètre de l'univers observable est d'environ 10^{27} mètres (correspondant à 100 milliards d'année-lumière).

Pour en savoir plus sur les stages MathC2+ :
http://www.animath.fr/spip.php?rubrique263



(Image tirée de http://sophieracine.blogspot.fr/2011/09/bibliotheque.html)

Annexe page suivante...

retour sommaire

ANNEXE

La bibliothèque de Babel. Fictions. J.L. Borges. Extraits.

L'univers (que d'autres appellent la Bibliothèque) se compose d'un nombre indéfini, et peut-être infini, de galeries hexagonales, avec au centre de vastes puits d'aération bordés par des balustrades très basses. De chacun de ces hexagones on aperçoit les étages inférieurs et supérieurs, interminablement. La distribution des galeries est invariable. Vingt longues étagères, à raison de cinq par coté, couvrent tous les murs moins deux ; leur hauteur, qui est celle des étages eux-mêmes, ne dépasse guère la taille d'un bibliothécaire normalement constitué. Chacun des pans libres donne sur un couloir étroit, lequel débouche sur une autre galerie, identique à la première et à toute. […]

A proximité passe l'escalier en colimaçon, qui s'abîme et s'élève à perte de vue. Dans le couloir, il y a une glace, qui double fidèlement les apparences. […]

Des sortes de fruits sphériques appelés lampes assurent l'éclairage. Au nombre de deux par hexagone et placés transversalement, ces globes émettent une lumière insuffisante, incessante. […]

Qu'il me suffise, pour le moment, de redire la sentence classique : la Bibliothèque est une sphère dont le centre véritable est un hexagone quelconque, et dont la circonférence est inaccessible.

Chacun des murs de chaque hexagone porte cinq étagères ; chaque étagère comprend trente-deux livres, tous de même format ; chaque livre a quatre-cent-dix pages ; chaque page, quarante lignes, et chaque ligne, environ quatre-vingts caractères noirs. […]

Il y a cinq cents ans, [un] penseur observa que tous les livres, quelques divers qu'ils soient, comportent des éléments égaux : l'espace, le point, la virgule, les vingt-deux lettres de l'alphabet. Il fit également état d'un fait que tous les voyageurs ont confirmé : il n'y a pas, dans la vaste Bibliothèque, deux livres identiques. De ces prémisses incontroversables il déduisit que la Bibliothèque est totale, et que ces étagères consignent toutes les combinaisons possibles des vingt et quelques symboles orthographiques (nombre, quoique très vaste, non infini), c'est-à-dire tout ce qu'il est possible d'exprimer, dans toutes les langues. [...]