LE PETIT VERT

ISSN 0760-9825

BULLETIN DE LA RÉGIONALE LORRAINE DE L'A.P.M.E.P.

N° 107 | SEPTEMBRE 2011

Préparation des JN de Metz 2012 : séance de travail à N.D. du Trupt

http://apmeplorraine.free.fr

" LE PETIT VERT " est le bulletin de la régionale Lorraine A.P.M.E.P.
Né en 1985, il complète les publications nationales que sont le bulletin (le 'Gros' Vert), PLOT et le BGV. Il paraît quatre fois dans l'année (mars, juin, septembre et décembre).
Son but est d'une part d'informer les adhérents lorrains sur l'action de la Régionale et sur la "vie mathématique" locale, et d'autre part de permettre les échanges entre les adhérents.
On y trouve un éditorial (généralement rédigé par un membre du Comité) et diverses annonces, les rubriques "problèmes", "dans la classe", "vu sur la toile", "maths et médias", "c'était il y a 25 ans", et parfois une "étude mathématique". Il est alimenté par les contributions des uns et des autres ; chacun d'entre vous est vivement sollicité pour y écrire un article, et cet article sera le bienvenu : les propositions sont à envoyer à jacverdier@orange.fr .

Le Comité de rédaction est composé de Geneviève BOUVART, François DROUIN, Françoise JEAN, Jacques VERDIER et Gilles WAEHREN.

La maquette et la mise en page sont réalisées par Christophe Walentin.

C'ÉTAIT IL Y A 25 ANS…

Dans le Petit Vert n°7 (septembre 1986), sept pages étaient consacrées à l'épreuve de math du BEPC qui avait provoqué une polémique. En voici quelques extraits :

Suite aux réactions – parfois virulentes – provoquées par l'épreuve de mathématiques au BEPC, et interpellant l'APMEP, le Comité du 21 juin a rajouté ce point à son ordre du jour et a décidé la constitution d'un groupe de travail qui s'est réuni à Charmes le 28 juin.
Nous avons envoyé, sous forme d'un « MEMORANDUM », à Monsieur le Recteur, à Madame l'Inspectrice Pédagogique Régionale, et à la Commission Nationale 1er cycle, les conclusions de nos travaux et discussions (…)

Voici le dernier paragraphe de ce Mémorandum :

5. NOS PROPOSITIONS POUR L'AVENIR
- Comme nous l'avons dit au début, nous sommes tout à fait favorables à l'évolution que nous avons pu noter dans le contenu du sujet.
- Nous avons une proposition à faire pour éviter l'énorme distorsion entre ce qu'enseignent les professeurs et ce qui est demandé à l'examen :
Assez tôt dans l'année (avant Noël), une dizaine de sujets seraient proposés, mis au point et testés par une commission ad hoc. Deux de ces sujets, tirés au sort, seraient mis sous scellés et réservés à l'examen ; les huit autres seraient diffusés dans tous les établissements, afin que les professeurs et les élèves sachent ce qui peut leur être demandé (notre proposition n'est pas utopique : c'est ce qui a été fait cette année pour l'examen d'entrée à l'Ecole Normale). Pour éviter de retomber dans l'ornière du « sujet-type », les 10 sujets proposés devraient être le plus différents possible les uns des autres.

L'intégralité du Petit Vert n°7 est téléchargeable sur notre site.

SOMMAIRE

édito

Une espèce en voie de disparition…

Cette année, 950 postes étaient offerts au Capes de mathématiques. Des 574 postes qui ont été pourvus, il faut retirer les postes de ceux qui ont également été reçus à l'Agrégation de mathématiques. Dans la presse régionale, les reçus au baccalauréat avec la mention « Très Bien » ont eu l'occasion de préciser leur projet professionnel. Je n'en ai vu aucun évoquant les métiers de l'enseignement. Il est vrai qu'une mention « Très Bien » n'est pas nécessaire pour devenir enseignant, il suffit d'avoir validé un Master, un certificat de compétences dans une langue étrangère, un certificat de compétences informatiques et, j'oubliais, d'avoir réussi le concours (le permis de conduire n'est pas exigé, il est pourtant bien utile lorsqu'on est nommé en zone rurale sur plusieurs établissements).

Qui va assurer les enseignements de mathématiques dans les établissements scolaires ? Il semble que le nombre des inscrits en première année de Master Maths « parcours enseignant » reste inférieur au nombre de postes ouverts au concours. Ne comptons pas trop sur eux pour combler le manque.

L'enseignant de mathématiques ne ferait-il pas partie d'une espèce en voie de disparition ? La diminution des heures de mathématiques permet de réduire ses moments d'intervention et de cacher quelque peu la pénurie. Lorsqu'une espèce est en voie de disparition, il arrive qu'on la déclare « espèce protégée ». Devra-t-on en arriver là ?

L'espèce doit alors augmenter son « taux de fécondité ». Une campagne de publicité dans les médias ne suffira pas, il faut prendre soin des jeunes individus, ne pas les mettre en situation en leur faisant croire qu'enseigner ne s'apprend qu'avec l'expérience du terrain. Il faudra être attentif à ce qu'ils ne se contentent pas de survivre pendant leur année de « non encore titulaire ». Dans l'opération « MATHC2+ », des entreprises privées sont sollicitées pour le financement des stages de mathématiques

retour sommaire

destinés à encourager les vocations scientifiques ; il est dommage que le principal employeur des futurs enseignants de mathématiques n'ait pas trouvé le(s) moyen(s) de s'y impliquer davantage financièrement.

L'espèce doit alors également garantir l'amélioration des compétences des individus plus âgés. La formation continue est moribonde, il n'y a plus d'argent pour les frais de déplacement de ceux qui ressentent le besoin bien naturel de se former. Reste-t-il de l'argent public pour la recherche pédagogique ?

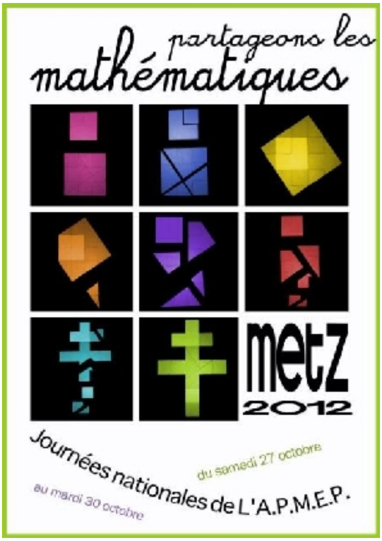
Le constat semble amer, mais parmi cette « espèce menacée », des ilots d'optimisme existent, même localement : plus de deux cents participants à notre journée de mars, une participation au rallye « troisième seconde » qui augmente d'année en année, des échanges de compétences entre participants d'un goûter, la lecture de documents papier ou informatiques écrits par nos adhérents, une équipe qui se met en place pour l'organisation des journées nationales de Metz en 2012.
En cette rentrée scolaire, continuons à montrer autour de nous ce que fait notre association, continuons à partager en toute convivialité ce que nous savons faire, ce que nous aimons faire, ce que nous avons envie de faire, mais aussi nos questionnements, nos prises de positions, nos craintes et nos espoirs. Je suis ravi de faire partie d'une espèce aussi pleine de vie…

François DROUIN

retour sommaire

VIE DE L'ASSOCIATION

Journées nationales APMEP Metz 2012
« Partageons les mathématiques »
C'est parti !



Une trentaine d'adhérents de la Régionale (dont une majorité de membres du Comité) se sont réunis les 30 et 31 août dernier à Notre-Dame du Trupt (près du Donon) pour un séminaire de réflexion et de préparation de ces Journées, où il faudra accueillir près de 800 participants.

Un premier groupe a travaillé sur les ateliers et les conférences. Dix conférences en tout sont prévues, dont neuf sont déjà quasi confirmées. En ce qui concerne les ateliers, le groupe a réfléchi sur ce qu'on attendait d'un atelier, et sur les critères qui permettraient de les classer dans le BGV de présentation.

Un second groupe a travaillé sur le site des journées (site qui servira à la présentation des Journées, à l'enregistrement des ateliers, aux inscriptions et au paiement en ligne), en essayant d'anticiper tous les problèmes techniques et informatiques qui pourraient surgir.

Un troisième groupe a abordé les problèmes financiers : ouverture d'un compte spécifique, paiement en ligne. Le budget prévisionnel des Journées est évalué à 102 350 €.

Un groupe a planché sur l'accueil des participants : en gare (y compris Lorraine-TGV) et à l'Arsenal, parking, bagages, pot d'accueil, secrétariat, etc. Sans oublier les pauses-café tout au long des Journées (gestion par des associations d'étudiants).

Un autre sur les exposants : recherches de standistes, devis, installation, commission de sécurité… et sur la tenue du stand de l'Apmep (important pour nous : la vente de nos brochures nationales et régionales).

retour sommaire

Les « loisirs » des participants ont été abordés : spectacles pour se détendre un peu en fin de journées laborieuses, visites de Metz en soirée, visites pour les conjoints non-matheux pendant les séances de travail, visites pour tous le dernier après-midi. Les idées ont fusé… les problèmes de logistique ont été abordés (en particulier le choix de l'autocariste). Sans oublier les enfants des congressistes, qui seront pris en charge par une association, sur place, pendant toute la durée des « travaux ».
Ont été également abordés la vente de produits régionaux aux participants, par des producteurs locaux (qu'il faudra contacter) : gâteaux et confiseries, vins, mirabelles, émaux, etc.

L'hébergement des participants n'a pas été oublié : en lien avec l'Office de Tourisme, négociation du prix des hôtels. Les repas de midi seront pris au RU du Saulcy.

Un dernier groupe a réfléchi sur le « banquet » : on envisagerait une soirée moins classique, meilleur marché et pouvant réunir un très grand nombre de personnes.

Enfin, il faudra penser à la rédaction du BGV de présentation (contenu, maquette…) et à celle du « livret du congressiste » qui donnera aux participants toutes les informations utiles pour leur séjour à Metz.

Bref, toute une organisation et une logistique à mettre en place, et surtout à « penser » à l'avance. Tous ceux qui pensent avoir une compétence dans l'un ou l'autre domaine sont les bienvenus ; qu'ils n'hésitent pas à nous contacter.
Nous ferons appel à vous dans les mois qui viennent avec des demandes plus ciblées. Merci d'avance pour votre contribution à la préparation et à la bonne marche de ces Journées.

Notre photo : le repas de midi lors du séminaire.

JOURNÉE RÉGIONALE : 14 mars 2012

La Journée régionale des mathématiques aura lieu le mercredi 14 mars prochain, à l'INRIA (sur le campus scientifique de Vandœuvre) le matin et au lycée Jacques Callot l'après midi.

APPEL À ATELIERS

Un des temps forts, gage de réussite de cette journée, est la présentation d'ATELIERS. Le but de ces ateliers est de permettre de partager, d'échanger, de transmettre, de susciter la curiosité, d'ouvrir des pistes, de débattre… sur des sujets en rapport avec les mathématiques et leur enseignement.

Ces ateliers doivent être **variés et nombreux** : il serait bon qu'il y en ait une vingtaine, et nous avons déjà quelques pistes. Nous lançons donc un appel auprès de tous les collègues qui voudraient en animer un. Ces ateliers se dérouleront l'après-midi, durant 1 h 30, et pourront rassembler chacun de 20 à 30 participants.

Envoyez vos propositions le plus rapidement possible à la présidente de la régionale : Céline Coursimault (jbcc@pt.lu), avec copie à jacverdier@orange.fr.

Nous comptons sur vous !

✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓
✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓✓
✓✓✓✓✓

Je n'ai jamais compris que dans l'enseignement français il y ait d'un côté les matheux, et de l'autre les littéraires. C'est une division qui me semble absurde car tout est lié. Beaucoup de mathématiciens sont aussi philosophes. Qu'on écrive une formule mathématique, un quatrain, ou qu'on rédige une dissertation, on a toujours besoin de logique. C'est étrange qu'en France, on ait une telle terreur des mathématiques car pour moi, les maths, c'est la vie, c'est la logique de la vie.

Marjane Satrapi

ÉTUDES MATHÉMATIQUES

Histoire de logarithmes : comment s'est construite une notion difficile à enseigner.

(1ère partie)

Anne Gaydon, Lycée Saint Joseph (Épinal)
Gilles Waehren, Lycée Mangin (Sarrebourg)

Résumé :

Remonter dans l'histoire des logarithmes nous a paru une façon d'appréhender les difficultés des élèves à les assimiler, mais aussi de retourner aux fondements qui ont pu les rendre incontournables. Pour des élèves non scientifiques, notamment dans les sections tertiaires, cette notion vient s'ajouter à celle de racine carrée, souvent mal digérée en raison de ses propriétés pas toujours intuitives. Comme pour la racine carrée, le logarithme d'un nombre se construit (on se référera aux recherches entreprises dans les Petits Verts 102 et 103). Cette construction est un moyen de donner vie à ce concept, d'autant que les premiers calculs de logarithmes ont souvent reposé sur des notions simples. On assistera, dans un premier temps, à l'éclosion d'une correspondance nécessaire entre suites géométriques et suites arithmétiques, puis au développement de calculs élaborés, afin de déterminer le logarithme de tous les nombres (dans le prochaine Petit Vert, n° 108). La première partie sera donc consacrée aux premières recherches d'exposants, particulièrement dans les problèmes d'arithmétique marchande de la Renaissance.

0. Pré-histoire

On trouvera des éléments très fournis sur la genèse des logarithmes dans les références sitographiques et bibliographiques.

Les Sumériens se préoccupent déjà, au dix-huitième siècle avant notre ère, de retrouver la puissance à laquelle élever un nombre pour en obtenir un autre. Ainsi, a-t-on exhumé, parmi les tablettes d'argile consacrées aux mathématiques, en plus d'une pléthore de tables de calculs, des tables de puissances pour 9, 16, 100 ou même de 225. D'autres tablettes comportent des questions du genre : « Combien de temps pour doubler un capital placé à 20 % ? » ...

Des méthodes sont proposées : « 1 grain a fait augmenter 1 grain, soit 2 grains le 1er jour, 4 grains le 2ème jour, 8 grains le 3ème... ». Si nécessaire, on recourt à une interpolation linéaire...

Dans l'Arénaire, Archimède se pose la question du nombre de grains de sable qui se trouveraient contenus dans une sphère de la grandeur de notre "Univers". Sa solution repose sur la méthode suivante : « Dans la suite des nombres proportionnels 1, a^1, a^2, a^3,… , a^{n-1}, a^n,… , a^m, a^{m+1},… , a^{m+n} ,... où le rang de chaque nombre est égal à son exposant augmenté de 1, la distance du produit $a^n \times a^m = a^{m+n}$ à a^m est mesurée par n+1 nombres et sa distance à l'unité par m+n+1 nombres. » À la suite des puissances de a, il associe ainsi la suite des entiers naturels.
Le lien entre suite géométrique et suite arithmétique est établi...

1. Arithmétique marchande

Les travaux de l'Antiquité connaîtront peu de prolongements jusqu'au 15ème siècle, y compris dans les mathématiques arabes. Le développement de l'astronomie, de la navigation, mais aussi du commerce, va imposer l'utilisation de méthodes de calculs plus évoluées que les méthodes de bases des abacistes (qui ne survivront d'ailleurs pas à ces nombreux changements). Dans le cadre d'une réflexion sur l'enseignement des logarithmes aux sections tertiaires, nous nous sommes plus particulièrement attachés aux prémices des logarithmes en lien avec les problèmes d'intérêts au cours de la Renaissance.

Si les travaux entrepris à cette époque témoignent d'une curiosité et d'une inventivité palpitantes, la rigueur des méthodes laisse souvent à désirer ; mais cette étude n'a pas manqué de nous interroger sur notre compréhension des nombres.

1.1 Pacioli

C'est l'un des premiers noms que l'on retiendra de cette période. Luca Bartolomes Pacioli, dit Luca di Borgo (1445, Toscane – 1517, Rome) est un moine mathématicien, considéré par les experts comme le père de la Comptabilité en partie double. Le problème qu'il cherche à résoudre n'est pas si simple pour son époque : « A voler sapere ogni quantità a tanto per 100 l'anno, in quanti anni sarà tornata doppia tra utile e capitale... ». Ce qui donne, en français dans le texte : « Si vous voulez savoir, pour un taux d'intérêt annuel fixé en pourcentage, dans combien d'années vous reviendra le double du capital initial,... ».

La méthode de calcul est la suivante : « ...tieni per regola 72, a mente, il quale sempre partirai per l'interesse, e quello che ne viene, in tanti anni sarà raddoppiato. », soit : « ...alors gardez à l'esprit le chiffre 72 et divisez le par le taux d'intérêt, ce qui vous donne en combien d'années il sera doublé. »

Sur un exemple : « Esempio : Quando l'interesse è a 6 per 100 l'anno, dico che si parta 72 per 6; ne vien 12, e in 12 anni sarà raddoppiato il capitale. », donc : « Quand l'intérêt est de 6 pour 100 par an, j'affirme qu'en divisant 72 par 6, il vient 12 donc le capital sera doublé en 12 années. ».

retour sommaire

Cette explication est extraite de « Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita » (Venise 1494)

Pour résumer en mathématiques contemporaines, on pourrait écrire : « Pour un taux d'intérêt T (en %), le nombre d'années nécessaires pour doubler le capital est : $\frac{72}{T}$ ». L'élève de Terminale auquel on aurait posé la question, aurait obtenu, après quelques calculs : $\frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{T}{100}\right)}$ … et aurait conclu que la méthode de Pacioli est certainement plus rapide !

Dans le tableau ci-après, on a comparé, selon le montant du taux d'intérêt, les résultats donnés par la formule de Terminale (validée) et ceux donnés par la division de Pacioli.

Taux T	Durée	72/T	Erreur absolue	Erreur relative
1	69,66	72,00	2,34	3,36 %
2	35,00	36,00	1,00	2,85 %
3	23,45	24,00	0,55	2,35 %
4	17,67	18,00	0,33	1,85 %
5	14,21	14,40	0,19	1,36 %
6	11,90	12,00	0,10	0,88 %
7	10,24	10,29	0,04	0,40 %
8	9,01	9,00	0,01	0,07 %
9	8,04	8,00	0,04	0,54 %
10	7,27	7,20	0,07	1,00 %
11	6,64	6,55	0,10	1,45 %
12	6,12	6,00	0,12	1,90 %
13	5,67	5,54	0,13	2,34 %

À un ou deux ans près, le principe de Pacioli est relativement efficace et probablement tout à fait satisfaisant pour un comptable. Il n'y a apparemment pas de trace de construction de ce résultat : peut-être la recette a été tenue secrète, peut-être n'y avait-il pas de place dans la marge pour la donner... En tout cas, on peut penser que c'est la conséquence d'une suite de tâtonnements. Par ailleurs, le choix du nombre 72 en interrogera peut-être plus d'un, là où un calcul de

retour sommaire

logarithme aurait donné 69, comme on va l'établir. Mais 69 n'a que quatre diviseurs, alors que 72 en compte 12 dont 6 entre 1 et 10, ce qui est bien commode.
Étudions la validité du résultat de Pacioli :

$(1+t)^x=2 \quad \Leftrightarrow \quad x=\dfrac{\ln(2)}{\ln(1+t)}$ avec $t=\dfrac{T}{100}$

or : $\ln(1+t)=t-\dfrac{t^2}{2}+\varepsilon(t)$

donc : $x\approx\dfrac{\ln(2)}{t-\dfrac{t^2}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x\approx\dfrac{\ln(2)}{t}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{t}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad x\approx\dfrac{\ln(2)}{t}\times\left(1+\dfrac{t}{2}\right)$

enfin : $x\approx\dfrac{100\ln(2)}{T}\times\left(1+\dfrac{T}{200}\right)$,

et comme : $\dfrac{T}{200}$ est petit devant 1, $1+\dfrac{T}{200}$ est proche de 1.

Ainsi : $x\approx\dfrac{69}{T}$. Et puis c'est tout !

On retiendra aussi que, dans cette période, l'Église interdisait l'usure. Le prêt à intérêts composés était donc frappé d'un anathème difficile à éviter. Les moines mathématiciens n'osaient-ils alors pas aller plus loin dans leurs recherches, dans la crainte du péché ?

1.2 Trenchant

Jean Trenchant, professeur à Lyon, essaie d'aller un peu plus loin. Il propose à l'usage des marchands et de ses élèves « L'arithmétique départie en trois livres », publiée en 1558. Le troisième livre (vers la page 300) est consacré aux calculs avec les intérêts (simples et composés).

Les premiers problèmes d'intérêts simples sont relativement accessibles et proposent des situations d'arithmétique qu'on a pu pratiquer encore au 20ème siècle. Le problème n° 9 retient notre attention : « Quelqu'un a pris 564 L à intérêt à chef de terme, à raison de 10 pour 100 par an. Combien de temps les lui faudrait-il garder, pour rendre tant en principal qu'intérêt la somme de 856 L ? » . Pour simplifier : « On place 564 livres à 10 %. Combien de temps faut-il pour obtenir 856 livres ? »

Trenchant propose de procéder de la sorte : « Continue une progression "soûsesquidixiême", c'est comme 10 à 11, commençant à 564, jusques au terme qu'il viendra 856 ». Cela revient à écrire les termes de la suite géométrique de premier terme 564 et de raison 1,1 … plus facile à dire qu'à faire : « si 564 font

856, combien feront 1000 ? ». Sans machine à calculer, il est plus commode de commencer avec 1 000 comme premier terme, voire 100 000 ! On trouve ainsi, dans son ouvrage, la table suivante :

0	10000
1	11000
2	12100
3	13310
4	14641
5	16051

Et son exploitation dans la résolution du problème : « […] à 856, appose 5 nulles, proviendra 85 600 000, que partiras par [564]. [...] trouveras $151773\frac{1}{3}$. »

Mais : $\dfrac{\ln\left(\dfrac{856}{564}\right)}{\ln(1,1)} \approx 4,38$ … donc : « la progression [montre] qu'il faut 5 ans incomplets. Ou si tu es curieux trouveras 4 ans incomplets et $\dfrac{759190}{2064381}$ d'an. » Cela laisse songeur.

Trenchant indique consécutivement deux façons pour parvenir à un tel résultat : la première par interpolation linéaire, la seconde utilise les moyennes géométriques.

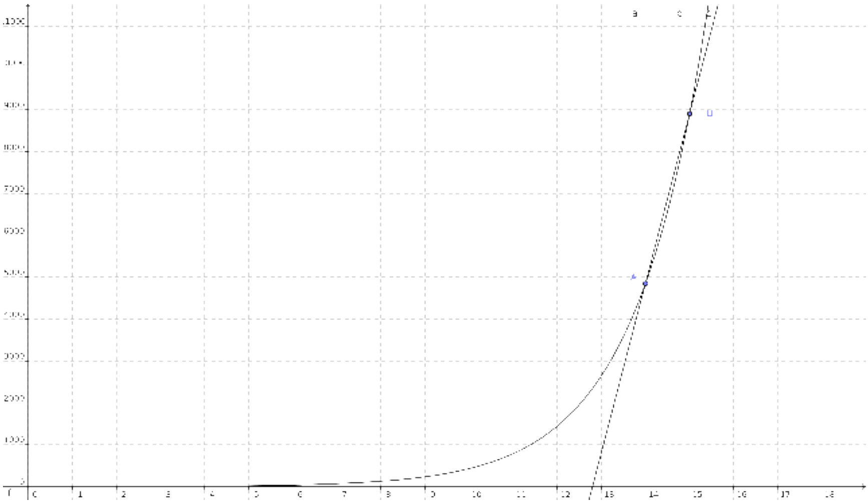
1.2.1. La méthode linéaire

« Il est souvent besoin de calculer pour plusieurs années les intérêts et intérêts d'intérêts à raison du denier douze, c'est de 12 faire 13, ou $8\frac{1}{3}$ pour 100. Pourquoi faire, faut préparer une table comme s'ensuit ». S'ensuivent les termes de la suite géométrique de premier terme 10 000 000 et de raison $1+\dfrac{8}{300}$. Le choix de 10 000 000 est courant au 16$^{\text{ème}}$ siècle. Il est souvent jugé comme suffisant pour la précision des calculs astronomiques, qui se font alors encore avec des nombres entiers (Stévin publie son traité sur les « décimaux » en 1586).

10000000	22264916	49420698
10833333	24120326	53539090
11736111	26130353	58000680
12714120	28307882	62834070
13773630	30572872	68070243
14921433	33120611	73742763
16164886	35880662	79887993
17511959	38870717	86545326
18971289	42109944	93757437
20552230	45619106	

« la différence d'un terme à l'autre prise servira pour calculer les parties de l'an s'il y en a. Car pour les parties de l'an, faut prendre telles parties d'icelle différence et les ajouter avec le terme de l'an, ou ans complets : et sur cela faire sa multiplication et division. »

Exemple : « Pour les 14 ans, je prends le 14 terme 3052872 [erreur de calcul], puis ayant pris la différence d'icelui 14 terme au 15, qui est 2547739 j'en prends pour 6 mois la $\frac{1}{2}$, fait 1273869, pour 1 mois la $\frac{1}{12}$, ou la $\frac{1}{6}$ de ce dernier provenu, fait 212311, pour 15 jours la moitié de cet autre dernier provenu » ...



(graphique 1)

Autrement dit, si la somme désirée n'est pas capitalisée sur un nombre entier d'années, on découpe la somme capitalisée sur l'année en cours en parts égales. Les croissances exponentielles, c'est bien quand les exposants sont entiers (voir tableau) ! Par contre, quand il faut passer aux fractions, on utilise une interpolation linéaire, c'est plus simple ! De plus, sur la durée d'une année, la différence ne semble pas très importante comme l'illustre le graphique ci-dessus. On trouve là une méthode qui n'aurait pas déplu à certains de nos élèves.

1.2.2. La méthode géométrique

Trenchant montre rapidement que l'interpolation linéaire ne convient pas : « Touchant le calcul des parties de l'an, qu'avons montré faire par le moyen de la différence de deux termes prochains, vient quelque peu trop : car quand 100 gagnent 8 ⅓ par an, il ne vient pas justement $4\frac{1}{6}$ pour six mois ». Ce qui est une règle élémentaire sur les taux d'intérêts.
« mais si tu es curieux de savoir faire exactement : prends le milieu proportionnel d'entre deux termes. Soit entre 10 000 000 et 10 833 333 [...], auras 10 408 329, ce terme représente le principal et intérêt de 6 mois. Mêmement entre 10 000 000 et icelui 10 408 329, viendra 10 202 121 pour le terme de trois mois. » La moyenne géométrique de 10 000 000 et 10 833 333 est 10 408 329 : le taux moyen semestriel pour un taux annuel de 8 ⅓ % est 4,08329 % (environ) et non 4,166667 %.
Les calculs peuvent alors se poursuivre afin de découper l'année en autant de tranches que nécessaire. Ainsi, pour un mois, on procédera ainsi : « 10 000 000 et 10 202 121 prendras le premier des deux milieux proportionnaux fait 10 066 924, c'est le terme qui dénote le principal et intérêts du premier mois. »

Ce découpage a bien sûr l'avantage de donner des résultats précis avec une méthode mathématiquement correcte. Cependant, on devra, pour certains problèmes, se contenter d'un encadrement de la valeur exacte.

1.2.3. Un peu de digression : le "Grand Parti"

Problème n°14 : « En l'an 1555, le Roy Henry pour ses affaires de guerre, prenait argent des banquiers à raison de 4 pour 100 par foire : c'est la meilleure condition pour eux, que 16 pour 100 par an. », Il s'agit d'Henri II en guerre contre Charles Quint. Il y a quatre foires par an, à Lyon.
« En ce même an, avant la foire de la Toussaint, il reçut aussi par la main de certains banquiers la somme de 3 954 641 écus et plus, qu'ils appelaient le grand parti : en condition qu'il payerait à raison de 5 pour 100 par foire, jusques à 41 foire ou payement qu'il demeurait quitte de tout. »

En clair : Henri reçoit 4 millions d'écus (en fait 2 millions seulement) en prêt au taux de 4 % trimestriel et rembourse 5 % ... de la somme initiale.

On peut alors donner un aperçu de l'échéancier :

Échéance	Intérêt	Remboursement	Trimestre	Dette
0				2028366.66
1	81134,66	20283,6636	101418,33	2008083
2	80323,32	21095,01	101418,33	1986988
...	…	…	…	...
40	7781,51	93636,81	101418,33	100901.07
41	4036,04	97382,28	101418,33	3518,78

La formule des annuités donne, pour un trimestre : $\dfrac{2028366,66\times 0,04}{1-1,04^{-41}}\approx 101453,58$ contre 101 418,33... on n'est pas à 35 écus près quand on en emprunte 2 millions !
Trenchant compare ce système de remboursement un peu particulier avec le système habituel. Il calcule alors que l'écu de différence entre 100 écus à 4 % et 100 écus à 5 % rapporte $99\dfrac{8265338}{10000000}$ au banquier contre 100. Il utilise pour cela la suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme 10^7 et calcule la somme des 41 premiers termes...
Sa conclusion est que les conseillers du roi qui ont inventé ce principe « ne l'ont trouvée qu'a tâtons et à peu près avec un labeur inestimable ».

Malgré cela, les banquiers veulent tous contribuer à l'emprunt, la dette est ré-échelonnée au bout d'un an, le roi ne rembourse plus au bout de la 10ème échéance. Les plus grandes familles d'Europe feront faillite dans cette opération.

1.3. Le tonneau de Chuquet

Nicolas Chuquet (1450 (?) - 1488) écrit « Le triparty en la science des nombres » vers la fin de sa vie. Cette grande œuvre ne sera publiée qu'après sa mort, qui, comme sa naissance, n'a pas de date très précise.

Le livre regorge de problèmes d'arithmétique marchande, et contient, entre autres, celui dit des « tonneaux de Chuquet ». Il s'énonce ainsi : « C'est un vaisseau contenant 9 mesures ½ , lequel a une broche de telle grandeur que par icelle la première mesure se vide en 1 heure, la seconde mesure se vide en 2 heures, la troisième en 4 heures, la quatrième en 8 et ainsi de suite en doublant toujours les heures ». Un tonneau contient 9 litres et demi. Son "robinet" permet au liquide

de s'écouler de la façon suivante : le premier litre en 1 heure, le deuxième en 2 h, le troisième en 4 h...
Question : « On demande en combien d'heures les 9 mesures ½ sont vidées ».

Chuquet propose la solution suivante : « Faire la proportion 1, 2, 4, 8, ..., 256, 512 comme pour 10 mesures. Entre les nombres 256 pour 9 mesures et 512 pour 10, se trouve un nombre proportionnel qui est $\sqrt{131072}$ » $\sqrt{131072}$ est la moyenne géométrique de 256 et 512.

« [ce nombre] doublé monte à $\sqrt{524288}$, duquel double, il faut enlever 1 [...] et en tant d'heures seront vidées les 9 mesures ½ » soit un peu plus de 723 heures (!).

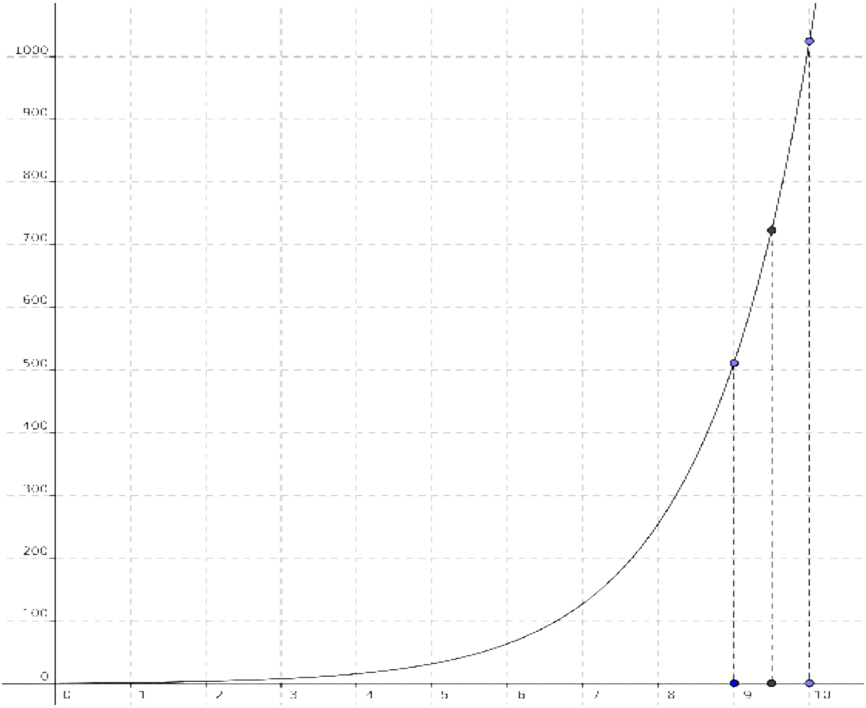
Le procédé peut laisser assez perplexe. En effet, le raisonnement de Chuquet est le suivant.
Les neufs premières mesures se vident en :
$1 + 2 + 4 + \ldots + 256 = 2 \times 2^8 - 1 = 511$ heures.
La dixième se vide en 512 h.

Donc le temps qu'il faut pour que se vide la moitié de la dixième mesure est la moyenne géométrique de 256 et 512 soit $\sqrt{256\times512}=\sqrt{131072}$.

Et comme on vient de bien expliquer comment on détermine le temps d'écoulement des neuf premières mesures, on effectue le même calcul pour les 9 ½, à savoir :
$$2\sqrt{131072}-1=\sqrt{524288}-1=\sqrt{2^{19}}-1=2^{9\frac{1}{2}}-1$$

Autrement dit, selon Chuquet : $2^0+2^1+2^2+\ldots+2^8+2^{8\frac{1}{2}}=2^{9\frac{1}{2}}-1$.

Le résultat de Chuquet est correct en ce sens que la fonction $S: x\rightarrow 2^x-1$ donne effectivement le temps écoulé en fonction du volume ... écoulé.



(graphique 2)

Le problème des tonneaux de Chuquet est plus mathématique qu'il n'en a l'air. Son habillage « utilitaire » ne saurait cacher une question plus profonde. Même s'il n'est pas à proprement parler une recherche de logarithme, il traduit bien la nécessité de pouvoir utiliser, là encore, des exposants non entiers. L'extrapolation qu'il ose ici n'est que le reflet du difficile passage du discret au continu.

Il faudra attendre le 17ème siècle pour parvenir à des développements plus satisfaisants.

Suite de l'article dans le prochain Petit Vert...

MATH & MEDIA

Merci à tous nos lecteurs qui alimentent cette rubrique. Qu'ils continuent à le faire, en nous envoyant si possible les originaux, et aussi les commentaires ou activités possibles en classe que cela leur suggère.

Envois par la poste à Jacques VERDIER (18 rue du Pont de Pierre, 54130 SAINT-MAX) ou par courrier électronique : jacverdier@orange.fr .

Les archives de cette rubrique sont disponibles sur notre site à l'adresse :

http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=math_et_media

2011, année exceptionnelle ?

D'après un message qui circule sur le net :

Pour les Chinois, 2011 est une année de Feng Shui et de la Chance.
Le mois de juillet cette année a eu 5 vendredis, 5 samedis et 5 dimanches. Cela n'arrive qu'une fois tous les 623 ans. Les Chinois appellent ce phénomène « les sacs d'argent ».
Cette année est l'année de l'argent, le mois d'octobre aura 5 samedis, 5 dimanches, 5 lundis ! Cela n'arrive qu'une fois tous les 823 ans !
Ces années sont connues comme celles du gain !

C'est évidemment totalement faux : il suffit de prendre un calendrier pour s'apercevoir que dans tout mois de 31 jours les 3 premiers jours sont les mêmes que les 3 derniers (par exemple samedi-dimanche-lundi pour le mois d'octobre 2011, qui comportera donc 5 samedis, 5 dimanches et 5 lundis). Et il ne faudra pas longtemps pour que cela se reproduise : ce sera le cas en décembre 2012, en mars 2014, en août 2015 …

Suite du message circulant sur le net :

Cette année est un peu particulière, nous aurons 4 dates inaccoutumées : 1/1/11, 11/1/11, 1/11/11, 11/11/11
Et ce n'est pas tout :
Prenez les deux ultimes chiffres de l'année de votre naissance et l'âge que vous aurez cette année et la somme sera pour tous 111 ! Ex. 61 + 50 = 111.

Note de la claviste : Pour le fils de Seb qui a 7 ans (il est né en 2004), ça ne fonctionne pas : il a trouvé 11 ! Et pour mon arrière-grand-mère, qui est née en 1897 et vient d'avoir 114 ans, ça ne fonctionne pas non plus : elle a trouvé 211 ! J'aimerais bien connaître quelles sont les années de naissance qui donnent effectivement 111 comme résultat.

Note de la rédaction : si vous pouviez trouver de belles propriétés de l'année 2012, envoyez-les nous… elles pourraient nous servir lors des J.N. Elles auront lieu en octobre, mois aussi « exceptionnel » puisqu'il comportera 3 lundis, 3 mardis et 3 mercredis ! Soit dit en passant, c'était déjà le cas en 2007, en 2001, en 1990, en 1984… et ce sera le cas en 2018, en 2029… Nous vous laissons rechercher la « loi » permettant de calculer la suite.

Pas de miracle avec cette nouvelle suite bureautique :

(Paru dans le Nouvel Observateur)

Les parents de l'adolescente présente sur la publicité vont se réjouir : au lieu de 8 bonnes notes en mathématiques, elle va peut être en avoir 16 ou 24 (ou 12 ou 18...). Le nombre des bonnes notes se trouvera peut être multiplié par 2, par 3 (ou par 1,5 ou 2,25).

Or en fin d'année, les parents constatent qu'elle n'a eu que 4 bonnes notes. Publicité mensongère ? Non, son nombre de bonnes notes a été multiplié par 0,5 (ou 1/2).

Contrairement à ce qui se passe dans la Bible avec la multiplication des pains et des poissons, une multiplication n'« agrandit » pas toujours. Cet obstacle est maintenant à franchir par les élèves de C.M.2 (qui ont depuis 2008 la multiplication des décimaux à leur programme), mais reste peut être encore présent chez les lecteurs de cette publicité… (voire chez les concepteurs).

DANS NOS CLASSES

Ecritures fractionnaires

François DROUIN
(IUFM de Lorraine, site de Metz)

Il y a deux ans, un de nos stagiaires P.L.C.2 s'est retrouvé quelque peu étonné par des calculs faits par une de ses élèves de seconde arrivée récemment d'Ukraine. J'ai reproduit ci-dessous un de ses calculs extrait d'un contrôle de début d'année particulièrement réussi par cette élève :

$$\left(4-\frac{3}{12}\right)\times 20=\left(3\frac{12}{12}-\frac{3}{12}\right)\times 20=3\frac{9}{12}\times 20=\frac{45\cdot\cancel{20}^{5}}{\cancel{12}_{3}\cdot 1}=\frac{225}{3}=75$$

J'aime beaucoup comment la soustraction est effectuée : j'y retrouve la méthode par emprunt que nous expliquions à l'époque à nos P.E.1 et P.E.2, expliquée actuellement à nos étudiants de Master 2 et mise en œuvre par nous tous lors d'une soustraction de durées comme 3h 15 min – 2h 50 min.

L'élève emprunte une unité et au lieu de travailler avec 4, travaille avec $3\frac{12}{12}$. Elle peut ainsi effectuer la soustraction demandée.

Je savais que l'écriture $1\frac{1}{4}$ était préférée à $\frac{5}{4}$ dans le monde anglo-saxon et j'ai effectué quelques recherches dans ce dont je disposais à la maison.

En Angleterre

Voici quelques extraits de REVISE MATHEMATICS A REVISION COURS FOR GCSE « Duncan Graham and Christine Graham » (Letts Educational 1992).

Question **:** Evaluate $2\frac{5}{8} \times \frac{5}{7}$

Answer :

Change $2\frac{5}{8}$ to an improper fraction	$= \frac{21}{8} \times \frac{5}{7}$
Divide 7 and 21 by 7	$= \frac{3}{8} \times \frac{5}{1}$
Multiply top and bottom	$= \frac{15}{8}$
Change to a mixed number	$= 1\frac{7}{8}$

Un « nombre impropre » est évoqué. Suite à la multiplication du numérateur et du dénominateur, un « nombre mélangé » est évoqué.

En Allemagne

Voici quelques extraits de « SPIELE RÄTSEL Zahlen » (Jochim Lichtenberger). Je ne retrouve pas l'éditeur qui est peut être « Cornelsen », ni l'année de parution, qui est dans les années 80 …

Verwandle $1\frac{2}{7}$ und $2\frac{2}{3}$ in unechte Brüche	Verwandle $\frac{7}{3}$ und $\frac{9}{5}$ in gemischte Brüche.

$1\frac{2}{7} = \frac{9}{7}$ $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$	$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ $\frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$

Nous trouvons les notions de « fraction incorrecte » et de « fraction mélangée » bien proches de ce qui était repéré dans le manuel anglais.

Mes sources datant des années 80, j'ai demandé à un collègue allemand, enseignant de mathématiques dans le Bade Wurtemberg, comment certains calculs fractionnaires étaient faits en 2011. Il me dit que les écritures $\frac{7}{4}$ et $1\frac{3}{4}$ sont toutes deux utilisées lors des calculs, il semble bien que le second type d'écriture reste privilégié dans l'exemple qu'il m'a fourni.

$12\frac{3}{4} - 4\frac{1}{2} = 12\frac{3}{4} - 4\frac{2}{4} = 8\frac{1}{4}$ ou $\frac{51}{4} - \frac{18}{4} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$.

retour sommaire

En France naguère

J'ai fouillé dans des vieux manuels de mathématique achetés dans des brocantes. Voici quelques extraits de « Leçons d'arithmétique », page 78, par « P.L. CIRODDE » LIBRAIRIE de L. HACHETTE et Cie – 1868

> *Lorsqu'il y a des entiers joints aux fractions que l'on veut soustraire, on prend d'abord la différence des deux fractions, puis celle des nombres entiers, et ensuite on ajoute ces deux différences.*
> *Mais si la fraction à soustraire surpasse l'autre, on ajoute à celle-ci une unité ; ce qui revient à augmenter son numérateur du dénominateur commun : la soustraction est alors possible, et comme, en opérant ainsi, on a augmenté le reste d'une unité, il faut, pour lui restituer sa valeur, ajouter cette unité au nombre entier à soustraire.*

Visualisons ces dires par un exemple : $3\frac{2}{7} - 1\frac{3}{7} = 2\frac{9}{7} - 1\frac{3}{7} = 1\frac{6}{7}$

Nous retrouvons ce qui a été fait par l'élève de seconde de notre stagiaire P.L.C.2.

Voici un autre extrait de « solutions des exercices et problèmes du cours supérieur d'arithmétique » édité par Alfred MAME & fils à TOURS et POUSSIELGUE Frères à PARIS (Pas d'année d'édition trouvée dans le livre à ma disposition, mais il date sans nul doute de la fin du dix-neuvième siècle…).

> 612. Un métier fait 12 m de toile en 2 heures ½ ; un autre en fait 15 m ¾ en 3 heures ¼. Quel est celui des deux métiers qui fait le plus d'ouvrage, et dans combien de temps aura-t-il fait 2 m 2/5 de plus que l'autre ?

Solution proposée

Le premier métier fait par heure $12 : 2\frac{1}{2} = \frac{24}{5}$ de mètre.

Le deuxième fait par heure $15\frac{3}{4} : 3\frac{1}{4}$ ou $\frac{63}{13}$ de mètre.

Le deuxième métier fait par heure $\frac{63}{13} - \frac{24}{5}$ ou $\frac{3}{65}$ de mètre de plus que le premier.

retour sommaire

Pour faire 2 m $\frac{2}{5}$ ou $\frac{12}{5}$ de plus que le premier, il lui faudra $\frac{12}{5} : \frac{3}{65}$ ou 52 heures.

562. Par quelle fraction faut-il multiplier 9 ¾ pour obtenir 15 3/5 ?

Solution proposée

Le facteur cherché est $15\frac{3}{5} : 9\frac{3}{4} = \frac{78}{5} \times \frac{4}{39} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$

Voici un dernier extrait de « Arithmétique » de E. Mosnat et G. Tallent (ALCIDE PIQUART Editeur).

Différence de nombres fractionnaires
Règle : Pour trouver la différence de deux nombres fractionnaires, on retranche séparément les entiers et les fractions, et, si cette soustraction est impossible, on diminue le premier entier de 1, qu'on ajoute à la première fraction.

L'exemple est mis dans le manuel avant l'énoncé de la règle :

Soit à retrancher $2\frac{4}{9}$ de $8\frac{1}{6}$. On peut écrire :

$$\left(8+\frac{1}{6}\right)-\left(2+\frac{4}{9}\right) = 7+\frac{7}{6}-2-\frac{4}{9}$$

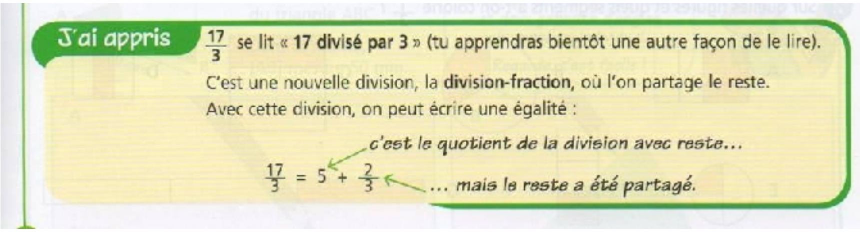
$$= 5+\frac{21}{18}-\frac{8}{18}$$

$$= 5+\frac{13}{18}$$

Remarque : Les auteurs estiment que les lecteurs du manuel savent reconnaître rapidement (mentalement ?) si la soustraction « $\frac{1}{6}-\frac{4}{9}$ » est possible.

Et actuellement en France

Dès le cycle 3, les élèves sont confrontés à deux images mentales des écritures fractionnaires : trois quarts d'heures, c'est trois fois un quart d'heure, mais c'est aussi le quotient de trois heures par quatre. Dans l'ouvrage « J'apprends les maths C.M.1 » (RETZ 2010), les auteurs donnent un sens de quotient aux premières rencontres avec des écritures fractionnaires :



J'ai appris

$\frac{17}{3}$ se lit « **17 divisé par 3** » (tu apprendras bientôt une autre façon de le lire).

C'est une nouvelle division, la **division-fraction**, où l'on partage le reste.

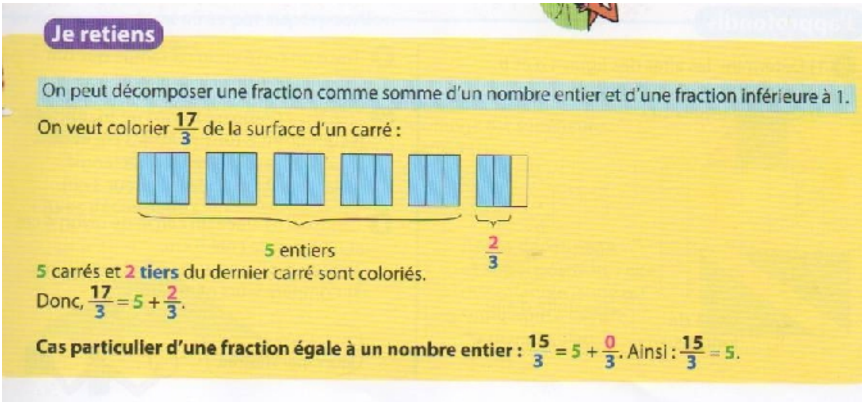
Avec cette division, on peut écrire une égalité :

$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$

c'est le quotient de la division avec reste…

… mais le reste a été partagé.

Plus classiquement, les auteurs de « Petit Phare C.M.2 » (Hachette EDUCATION 2010) abordent ce type d'écriture une année plus tard et après avoir étudié « l'encadrement d'une fraction par deux entiers consécutifs » :



Je retiens

On peut décomposer une fraction comme somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.

On veut colorier $\frac{17}{3}$ de la surface d'un carré :

5 entiers

$\frac{2}{3}$

5 carrés et 2 **tiers** du dernier carré sont coloriés.

Donc, $\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$.

Cas particulier d'une fraction égale à un nombre entier : $\frac{15}{3} = 5 + \frac{0}{3}$. Ainsi : $\frac{15}{3} = 5$.

En conclusion

Ce type d'écriture étant travaillé au cycle 3, je me demande s'il ne serait pas intéressant au moins dans des résultats de revenir à l'écriture dite « anglo-saxonne ».

$\frac{15}{7}$ ne signifie pas grand chose pour l'élève. Ne pourrions-nous pas l'encourager à écrire $2\frac{1}{7}$ dans son résultat ? Nous incitons les élèves à écrire les fractions sous forme simplifiée, voire irréductible ; ne pourrions-nous pas également les inciter à utiliser cet autre type d'écriture simplifiée ? N'enseignant plus dans le second degré, je ne fais que poser la question, les remarques des lecteurs seront les bienvenues.

DANS NOS CLASSES

2012 : l'année du changement en LP

Jean-Michel BERTOLASO,
L.P. de Montigny

L'épreuve ponctuelle du Bac Pro en mathématiques a vécu sa dernière session en juin 2011. Cette année scolaire 2011/2012 sera celle de sa disparition puisque les élèves qui arriveront en terminale lors de cette rentrée, entameront la dernière et troisième année du cycle Bac Pro rénové en 3 ans.

Désormais, le professeur devra organiser, dans sa ou ses classes de terminale, deux épreuves de quarante-cinq minutes en CCF (Contrôle en Cours de Formation), les corriger et donc évaluer ses élèves pour l'obtention du diplôme Bac Pro.

Le CCF de mathématiques en Lycée Professionnel n'est pas une nouveauté de cette rentrée scolaire : le professeur de mathématiques le pratique déjà dans le cycle CAP depuis la rentrée 2003 et a déjà proposé deux épreuves de trente minutes chacune, l'une en seconde Bac Pro, l'autre en première Bac Pro pour la Certification Intermédiaire, depuis la mise en place de la réforme du Bac Pro 3 ans lors de la rentrée 2009. Cette certification permet aux élèves de Bac Pro 3 ans de pouvoir valider un diplôme de niveau V (CAP ou BEP suivant la filière suivie) dans le cours de son cycle d'études Bac Pro.

Toutes ces épreuves de CCF ont changé la donne au niveau des conditions d'exercice du métier de professeur de mathématiques et sciences en lycée professionnel. Cette année scolaire, si un professeur est en charge d'au moins trois niveaux différents de formation, il lui faudra organiser sans arrêt des épreuves d'examen et slalomer dans un calendrier scolaire déjà éclaté par les périodes de formation en entreprise.

Les épreuves de CCF de mathématiques que le professeur doit organiser de leur conception à leur réalisation, en cycle Bac Pro, doivent réserver une part obligatoire aux TIC. De plus le sujet doit contenir des « appels prof » pour que « l'élève-candidat » puisse montrer comment il utilise ce moyen mais aussi pour que le professeur puisse le « décoincer » si la difficulté n'est pas surmontée. Ces conditions de passation entraînent automatiquement une organisation de la classe qui puisse permettre au professeur d'évaluer l'élève de façon différenciée. Au delà de sept à huit élèves passant l'épreuve, cette tâche de passation est difficile : il faut « occuper » le reste de la classe à d'autres activités dans la même salle de classe ou ailleurs si possible (chez un autre collègue, le CDI ...)

retour sommaire

Cette nouvelle gymnastique du métier pourrait être intéressante : elle pourrait permettre une pédagogie différenciée, et d'être plus proche de l'élève et de ses difficultés. Mais le contexte conjoncturel, où l'on compte plus de restrictions que d'aménagements, n'est pas si favorable : postes menacés, temps réduit pour la formation initiale et la formation continue, etc.

Un point positif cependant : ce type d'épreuve permet de justifier les besoins importants en équipement informatique réservé aux mathématiques ou en calculatrices graphiques pour notre enseignement. Cet équipement arrive-t-il au bon moment de façon généralisée, c'est une autre histoire...

En tous cas, voilà des changements qui vont alimenter les travaux de la commission LP de l'APMEP (qui interpelle, entre autres, l'Inspection Générale).

Pour enrichir la réflexion de cette commission, il est nécessaire que de nombreux PLP maths-sciences rejoignent notre association. Nous comptons sur vous !

Problème du trimestre n°107

(problème proposé par Jacques Verdier)

Par combien de zéros se termine factorielle 2012 ? Ça pourrait servir pour nos Journées nationales : la réponse est 501.

Dans le Petit Vert n°55, on a déjà traité ce problème du nombre de zéros terminant *n*! C'est d'ailleurs un joli petit problème d'algorithmique à la portée des élèves de terminale.

Voir http://apmeplorraine.free.fr/modules/probleme/PB55.pdf

Par curiosité, j'ai alors cherché le nombre de zéros des factorielles des puissances de 10 :

1000! se termine par 249 zéros,

10000! se termine par 2499 zéros,

100000! se termine par 24999 zéros…

Le problème est le suivant : y a-t-il une règle permettant de déterminer, en fonction de n, le nombre de zéros terminant 10^n! ?

Envoyez le plus rapidement possible vos solutions et/ou **toute proposition de nouveau problème** à Loïc TERRIER, 21 rue Amédée Lasolgne, 57130 ARS-SUR-MOSELLE, de préférence par mail : loic.terrier@free.fr

VU SUR LA TOILE

Créations communes

Cette rubrique ne sera pas une tribune sur le libre. On ne polémiquera pas sur la nécessité d'un droit d'auteur ou sur l'importance du partage. J'ai essayé de dénicher quelques sites de mutualisation de documents mathématiques et je crois que d'autres sont encore en train d'éclore.

Parmi les premiers et encore promis à un bel avenir, le projet Sésamath (http://www.sesamath.net/) est certes incontournable, mais n'est bien sûr pas le seul. Il héberge, entre autres, le site Mutuamath (http://mutuamath.sesamath.net/).

« e-cureuil » propose des animations Geogebra pour illustrer son cours : http://www.e-cureuil.fr/php5/ecureuil.php.

Pour les utilisateurs de TBI, on signalera « Mutualisation TBI 36 » qui propose des activités pour « Promothean » créées par les professeurs de l'académie d'Orléans-Tours : http://mutualisationtbi36.tice.ac-orleans-tours.fr/eva/ .

Les aficionados de LaTeX ne manqueront probablement pas le très bon Latekexos. Pour les autres, cela pourrait être une raison de s'y mettre : http://latekexos.org/

Les sites académiques proposent, pour une bonne partie d'entre eux, des espaces d'échange de documents ; comme, par exemple, celui de Lille : http://maths-sciences.discipline.ac-lille.fr/maths/espace-de-mutualisation/activites-2008

La généralisation des E.N.T. (espaces numériques de travail) dans les établissements pourrait être un moyen de mettre en commun des documents, au sein d'une même équipe pédagogique. En attendant, les collègues de « Mathazay » ont déjà réalisé ce rêve : http://mathazay.free.fr/ .

Le site de notre Régionale propose aussi à ses adhérents, notamment du primaire, de consulter les travaux d'autres collègues : http://apmeplorraine.free.fr/index.php?module=espaces&section=ecole, et même, dans une certaine mesure, d'en déposer.

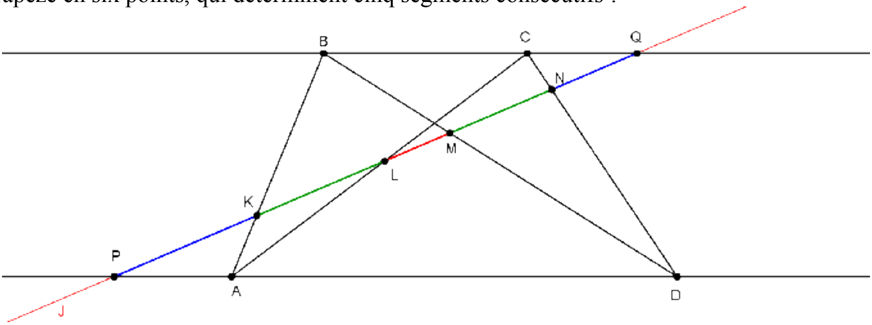
La plupart de ces sites nécessite une inscription (gratuite !) pour ajouter des fichiers, voire pour les consulter. Bien sûr - et c'est un reproche qui fut fait à Sésamath à ses débuts - la qualité du contenu n'est pas toujours certifiée. Cependant, je pense que tout un chacun peut adapter ou enrichir le travail d'un collègue et en faire profiter tout le monde.

gilles.waehren@wanadoo.fr

retour sommaire

Solution du problème n° 106

Une droite (J) coupe les côtés latéraux, les diagonales et les prolongements des bases d'un trapèze en six points, qui déterminent cinq segments consécutifs :



1°) Démontrer que si les segments extrêmes (le premier et le cinquième) sont égaux, alors le second et le quatrième le sont aussi.
2°) A quelle condition, relative aux longueurs des deux bases, les cinq segments peuvent-ils égaux ?

Nous avons reçu seulement deux solutions pour ce problème, l'une de Jacques Verdier, l'autre de Jacques Choné : l'été pluvieux n'aura pas été propice aux recherches mathématiques...

1°)
Solution de J. Verdier ; il n'utilise que des triangles semblables :
Posons $AD = a$, $BC = b$, $PA = x$ et $CQ = y$.
Alors, en observant des paires de triangles semblables, on montre que :

$$\frac{PK}{QK} = \frac{x}{y+b},\ \frac{PN}{NQ} = \frac{x+a}{y},\ \frac{PL}{LQ} = \frac{x}{y} \text{ et } \frac{PM}{MQ} = \frac{x+a}{y+b}.$$

Si $PK = NQ$, alors $PN = KQ$, et le produit des deux premiers rapports vaut 1.

Or ce produit vaut également $\frac{x(x+a)}{y(y+b)}$, qui est égal à $\frac{PL}{LQ} \times \frac{PM}{MQ}$, d'où $\frac{PL}{LQ} \times \frac{PM}{MQ} = 1$.

On en déduit que $\frac{PL}{PQ} = \frac{MQ}{PQ}$, d'où $PL = MQ$ et enfin $KL = MN$. Et la première propriété est démontrée.

Solution de J. Choné ; il se place dans un repère d'origine P, dont l'unité est la hauteur du trapèze :
Soient a, b, c et d les abscisses respectives des points A, B, C et D, et x celle du point Q. Il détermine alors les ordonnées des quatre points K, L, M et N :

$$k = \frac{a}{x-d+a},\quad l = \frac{a}{a-c+a},\quad m = \frac{b}{x-d+b} \quad et \quad n = \frac{b}{x-c+b}.$$

retour sommaire

Pour que l'hypothèse du 1°) de l'énoncé soit satisfaite, il faut et il suffit que x soit une solution (supérieure à c) de l'équation $k = 1 - n$, c-à-d. de $x^2-(c+d)x-ab+cd=0$.

On obtient alors $x=\frac{1}{2}(c+d+\sqrt{(c-d)^2+4ab})$.

Et en utilisant un logiciel de calcul formel, on vérifie que l'on obtient bien $(l\text{-}k)\text{-}(n\text{-}m) = 0$.

2°)

Solution de J. Verdier :

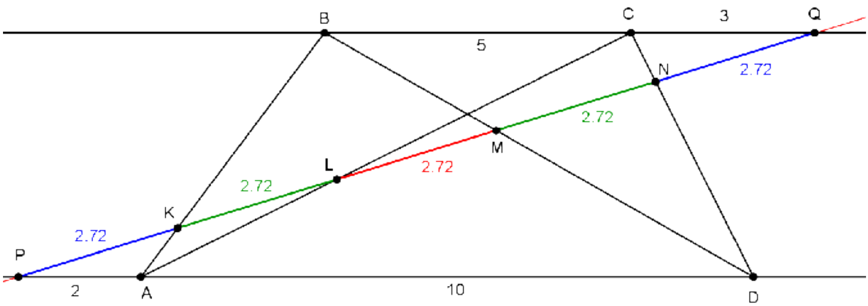
En posant $PK = KL = LM = MN = NQ = u$, et en observant également des paires de triangles semblables (PAK et QBK, etc.), on obtient : $\frac{u}{x}=\frac{4u}{b+y}$, $\frac{u}{y}=\frac{4u}{a+x}$, $\frac{2u}{x}=\frac{3u}{y}$ et $\frac{3u}{x+a}=\frac{2u}{y+b}$. Les trois premières équations donnent $\begin{cases}4x=b+y\\4y=a+x\\2y=3x\end{cases}$

d'où l'on tire successivement $y=\frac{3}{2}x$, $a = 5x$ et $b=\frac{5}{2}x$ (la quatrième équation est une conséquence des trois autres).

Le problème n'est donc possible que si $a = 2b$. Étant donné a quelconque, on prend alors $b=\frac{a}{2}$, $x=\frac{a}{5}$ et $y=\frac{3a}{10}$ pour avoir les cinq segments égaux.

Jacques Choné, quant à lui, montre que les 5 segments sont égaux si et seulement si $k=\frac{1}{5}$ et $m-l=\frac{1}{5}$; et il laisse au logiciel (Maple en l'occurrence) le soin de résoudre ce système pour arriver à la même conclusion : les 5 segments ne peuvent être égaux que si la grande base est le double de la petite.

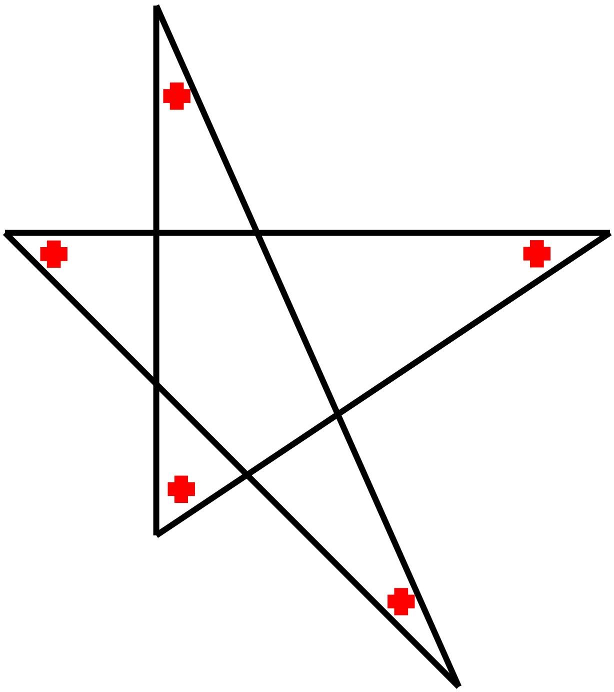
Ci-dessous, un exemple vérifiant cette condition (figure réalisée avec GeoGebra),



retour sommaire

DÉFI COLLEGE n°107

Quelle est la somme des angles de l'étoile à cinq branches ?



DÉFI LYCEE n°107

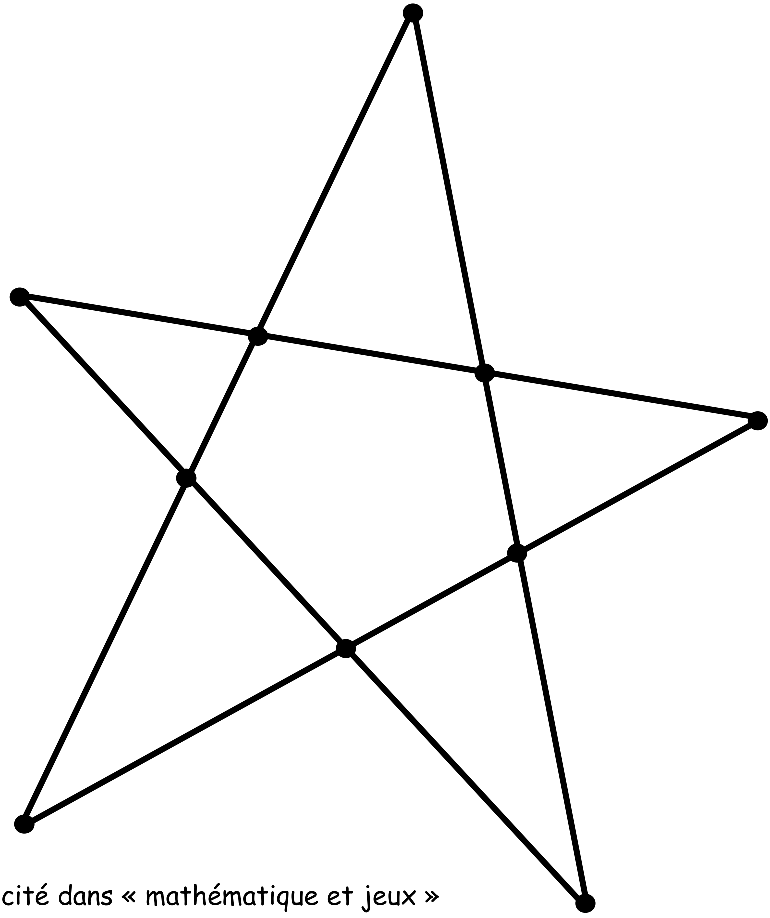
n est un nombre premier différent de 2 et de 3.
Montrer que $n^2 - 1$ est multiple de 24.

Chaque trimestre le Petit Vert vous proposera un « DÉFI » destiné à vos élèves de collèges et/ou de lycée. Envoyez toute solution originale de vos élèves, ainsi que toute nouvelle proposition de défi, à Michel RUIBA, 31 rue Auguste Prost, 57000-METZ, michel.ruiba@ecopains.net.

retour sommaire

Le jeu de LAM

Placer un pion sur neuf des dix points de l'étoile.
Les pions se déplacent en ligne droite sur l'étoile en sautant au dessus d'un autre pion jusqu'à une case vide. Le pion au dessus duquel nous sommes passés est éliminé.
Le but du jeu est de ne laisser qu'un pion sur l'étoile.



Jeu cité dans « mathématique et jeux »
(François BOULE) CEDIC