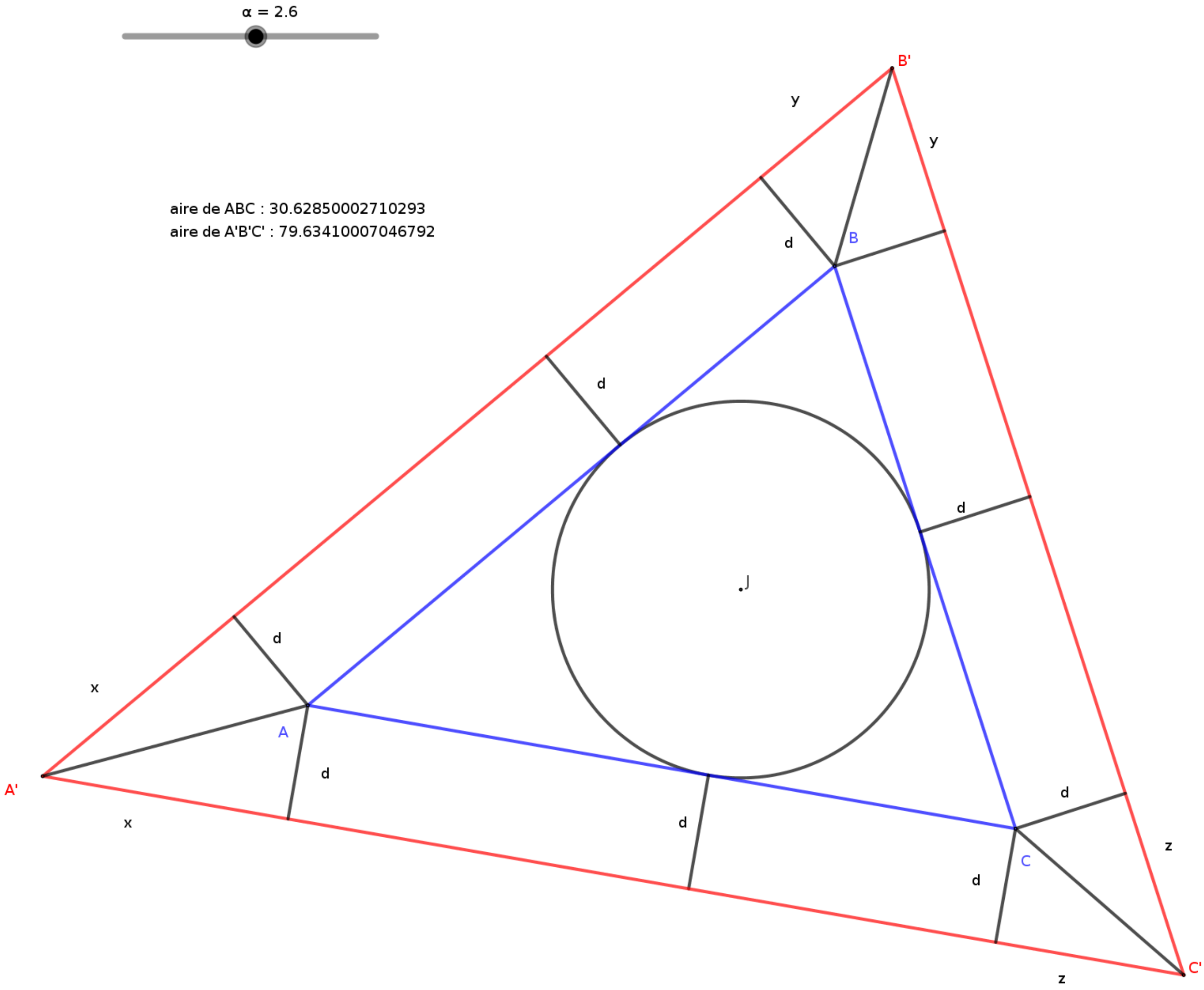
Solution Problème 142

Analyse de la figure

Elle est ici réalisée sur GeoGebra pour $\alpha=2,6$



On veut exprimer d en fonction de α

On appelle k le rapport d'agrandissement de A'B'C' par rapport à ABC. On a $k=\sqrt{\alpha}$
Les segments de longueurs d sont perpendiculaires aux côtés parallèles des deux triangles.
Les longueurs x, y et z vérifient :

$$\begin{cases} \mathrm{AB}+x+y &= \mathrm{A'B'} \\ \mathrm{BC}+y+z &= \mathrm{B'C'} \\ \mathrm{CA}+z+x &= \mathrm{C'A'} \end{cases}$$

On sait que $A'B'=kAB$, $A'C'=kAC$ et $B'C'=kBC$ donc :

$$\begin{cases} x+y &= (k-1)\,\mathrm{AB} \\ y+z &= (k-1)\,\mathrm{BC} \\ z+x &= (k-1)\,\mathrm{AC} \end{cases}$$

La résolution de ce système d'inconnues x, y et z donne :

$$\begin{cases} x &= \dfrac{(k-1)(\mathrm{AB}+\mathrm{AC}-\mathrm{BC})}{2} \\ y &= \dfrac{(k-1)(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}-\mathrm{AC})}{2} \\ z &= \dfrac{(k-1)(\mathrm{AC}+\mathrm{BC}-\mathrm{AB})}{2} \end{cases}$$

On appelle S l'aire de ABC.
L'aire de A'B'C' est, d'une part, égale à $k^2\mathrm{S}$ et, d'autre part, égale à la somme des aires :

- de ABC
- des rectangles de dimensions d et les côtés de ABC
- des triangles rectangles de côtés d et x, y et z.

On obtient donc :

$$k^2\mathrm{S}=\mathrm{S}+d(\mathrm{AB}+\mathrm{AC}+\mathrm{BC})+d(x+y+z)$$

On note p, le demi-périmètre de ABC. On a alors :

$$k^2\mathrm{S}=\mathrm{S}+2dp+d(k-1)\left(\frac{\mathrm{AB}+\mathrm{AC}+\mathrm{BC}}{2}\right)\Leftrightarrow k^2\mathrm{S}=\mathrm{S}+2dp+dp(k-1)$$

soit : $k^2\mathrm{S}-\mathrm{S}=dp(k+1)$

d'où : $d=\dfrac{(k^2-1)\mathrm{S}}{(k+1)p}$ donc : $d=(k-1)\dfrac{\mathrm{S}}{p}$

Il se trouve que $\dfrac{\mathrm{S}}{p}$ est le rayon r du cercle inscrit dans ABC (merci Wikipédia!).

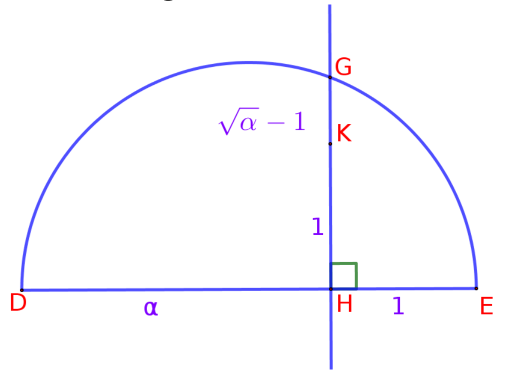
Donc : $d=(k-1)r$ soit : $d=(\sqrt{\alpha}-1)r$

Synthèse

Il s'agit principalement de construire, à la règle et au compas, la longueur d.

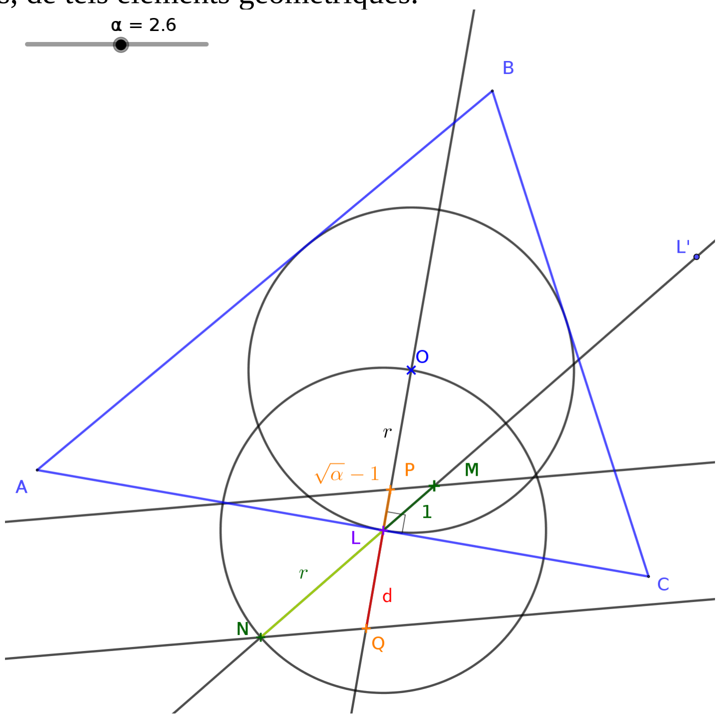
On va utiliser les méthodes proposées par Descartes dans sa « Géomètrie » pour construire un segment de longueur $\sqrt{\alpha}$ puis un segment de longueur $(\sqrt{\alpha}+1)\times r$, perpendiculaire à un côté du triangle.

On se donne un segment [DH] de longueur α.



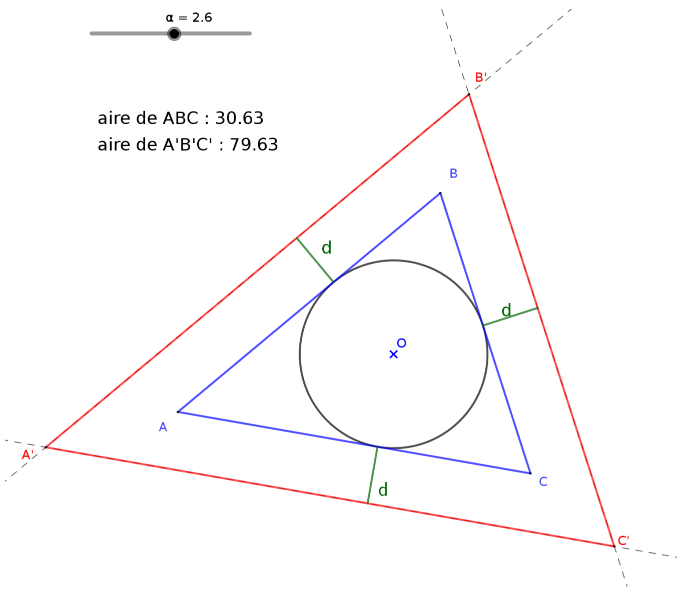
On construit sur la droite support de [DH], un segment HE de longueur 1 ($E \in (DH)$ et $E \notin [HD)$).
On construit un demi-cercle de diamètre [DE] puis la perpendiculaire à (DE) en H.
Cette droite coupe le demi-cercle en G. Les égalités de rapport dans les triangles semblables permettent de prouver que $GH = \sqrt{\alpha}$.
Le cercle de centre H est de rayon 1 coupe [GH] en K. On a donc : $GK = \sqrt{\alpha} - 1$

Passons à la construction du segment de longueur d .
Pour ce faire, on commence par construire le cercle inscrit à ABC. Comme pour un certain nombre des constructions qui suivront, on supposera que le lecteur connaît les programmes de construction, à la règle et au compas, de tels éléments géométriques.



O est le centre du cercle inscrit à ABC. L est le point de tangence entre cercle et la droite (AC) (obtenu en traçant la perpendiculaire à (AC) passant par O, vue comme la médiatrice d'un segment contenu dans (AC)…).
On trace une droite (LL') quelconque, ne passant pas par O. Le cercle de centre L et de rayon r (passant par O, donc) coupe (LL') en N (entre autres).
On reporte la longueur $\sqrt{\alpha} - 1$ sur le segment [LO] (au compas bien sûr) et on obtient P.
Enfin, on place le point M à une distance 1 de L, comme sur la figure.
La parallèle à (MP) passant par N coupe (LO) en Q de sorte que $LQ = d$ (Cette parallèle est construite à la règle et au compas suivant un protocole vu en cycle 4 pour la construction d'un parallélogramme).
La configuration des points L, M, N, P et Q est une configuration de Thalès qui permet de prouver que $LQ = (\sqrt{\alpha} - 1) \times r$. On pourra consulter l'explication de Descartes, donnée pour l'autre configuration qu'on aurait aussi pu être en œuvre ici, mais écartée pour des raisons de lisibilité.
On peut alors tracer la parallèle à (AC) passant par Q.

On obtient les deux autres parallèles en traçant les perpendiculaires à (AB) et (BC) passant par O puis en reportant (au compas) la longueur d . Les points d'intersection de ces trois parallèles aux côtés de ABC sont les sommets A', B' et C' du triangle cherché.



Le lecteur s’assurera, avec les calculs de la partie analyse, que le triangle obtenu vérifie bien la relation : $Aire(A'B'C') = \alpha \times Aire(\mathrm{ABC})$.
Le logiciel GeoGebra m’a permis de faire les figures de cette solution et de m’assurer, en faisant varier le curseur α que le rapport des aires des deux triangles était bien égal à α .