TOUS LES DÉFIS DU PETIT VERT

DÉFI n°78

On dispose d'une nouvelle calculatrice assez curieuse : il n'y a que deux touches.
La touche **X** qui multiplie par 2 le nombre à l'écran et la touche **Y** qui ajoute 3 au nombre affiché. De plus quand on allume la calculatrice, elle affiche toujours un 5. (Ainsi si on appuie successivement sur les touches X puis Y puis Y puis X, on obtient à l'affichage, successivement, les nombres 10, 13, 16 puis 32).
Trouvez comment on peut obtenir 100 à l'affichage.

DÉFI n°94

La question subsidiaire du rallye 2008 était la suivante :

Partager le nombre 28 en une somme d'entiers positifs telle que le produit de ces entiers soit le plus grand possible.
Exemples pour mieux comprendre :
Premier partage : 28 = 14 + 14. Le produit vaut 14×14 = 196.
Deuxième partage : 28 = 10 + 10 + 8. Le produit vaut 10×10×8 = 800, c'est nettement mieux !

SOLUTION

Les deux meilleurs « partages » sont les suivants.
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 4 = 28
3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 28
qui aboutissent tous deux au produit maximal 26 244.

Pour le professeur : sur ce sujet, voir l'étude mathématique « Qui peut le plus » publiée dans le Petit Vert n°94 (juin 2018) pages 22-24.

DÉFI N°102

Dans le Petit Vert n° 101, nous vous proposions de trouver 2010 uniquement avec des 2, sans utiliser la puissance 2. Par exemple : 2×2×2×2×(2×2×2×2×2×2×2-2)-2-2-2 = 2010. [15 chiffres 2 ; 39 touches en tout].

Avec une calculatrice « bas de gamme », on peut obtenir 2010 en utilisant la touche = en cours de calcul, comme ceci par exemple : **222 + 22 + 2 + 2 + 2 x 2 + 2 = x 2 x 2 + 2 =**

(la touche = peut être remplacée par ENTER). On a utilisé 29 touches en tout.

Si l'on voulait écrire cette même expression en langage « mathématiquement correct », on obtiendrait : ((222 + 22 + 2 + 2 + 2) x 2 + 2) x 2 x 2 + 2 =
[27 touches en tout, à cause des parenthèses que l'on doit refermer].

Le défi est le suivant : trouver la séquence de touches la plus courte possible pour obtenir un résultat de 2010.

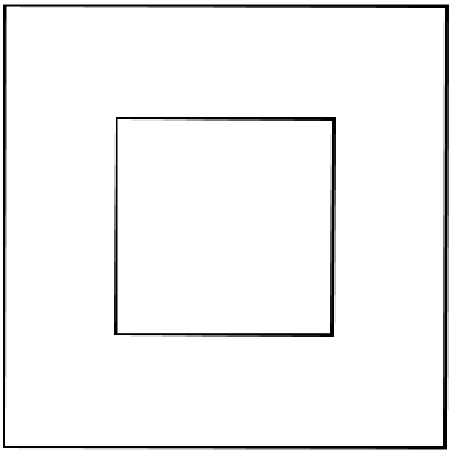
Éléments de solution

Voici les meilleures combinaisons que nous avons pu trouver (avec une calculatrice « bas de gamme ») :

- la combinaison 222222 / 222 + 2 × 2 = × 2 = donne 2010 et comporte **18** touches ;
- la combinaison 222222 / 222 + 2 + 2 = × 2 = donne 2010 et comporte aussi **18** touches.

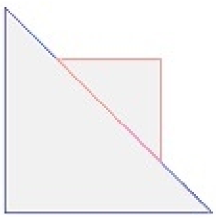
DÉFI N°103

Voici la vue de face, qui est aussi la vue du dessus, d'un solide.

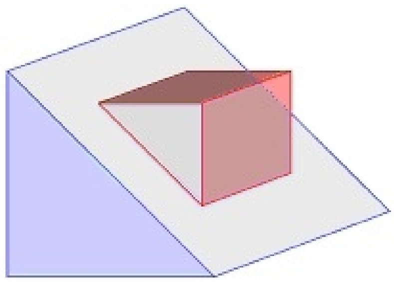


Dessine une vue de côté de ce solide ou encore mieux, une perspective cavalière.

LA SOLUTION



vue de droite



perspective cavalière

* * * * *

DÉFI COLLÈGE N°104

Jean-Abdel et Nora-Line, deux amis qui ne se sont pas vus depuis très longtemps, se rencontrent par hasard dans la rue. Jean-Abdel annonce à Nora-Line qu'il a désormais trois filles.

Curieuse, elle lui demande leurs âges. Le jeune homme lui répond ainsi :
« **Si on multiplie leurs trois âges, on obtient 36 ».**
Nora-Line, perplexe, lui rétorque :
« **Je ne peux pas déterminer leurs âges avec si peu d'informations … »**

Alors le père de famille lui dit :
« La somme de leurs âges est égale au numéro de la maison en face de nous ».

Après un court instant de réflexion, la jeune femme regarde son ami et déclare :
« Non, je ne peux toujours pas déterminer leurs âges ».

Enfin, l'homme regarde malicieusement son amie et lui souffle :
« L'ainée est blonde … »

Le visage de Nora-Line s'éclaire alors et elle s'écrie :
« Ça y est ! Maintenant je sais !!! »

Et toi, peux-tu retrouver l'âge des filles de Jean-Abdel ?

LA SOLUTION

Les filles ont respectivement 2 ans, 2 ans (des jumelles !) et 9 ans (l'ainée).

En effet, pour la première information, il y a de nombreuses possibilités de triplets d'entiers dont le produit est égal à 36.
Mais si on calcule la somme des éléments de ces triplets, il y en a deux, et seulement deux, qui donnent la même somme : (1 ; 6 ; 6) et (2 ; 2 ; 9).
La solution est donc un de ces deux-là (sinon la jeune femme aurait pu déterminer leurs âges).
La dernière information nous précise qu'il y a une ainée : il ne reste plus que (2 ; 2 ; 9).

* * * * *

DÉFI LYCÉE N°104

Au petit village de Villebach, le défilé de la Saint-Nicolas est long de 400 mètres.
En tête défilent les « poussins » du club de foot, puis viennent les majorettes et les chars, et la fanfare clôt le cortège.
Peu après le départ, l'entraineur – qui ouvre le défilé en tête de ses poussins – se souvient tout à coup qu'il a prêté son sifflet à la joueuse de tuba, qui est au dernier rang de la fanfare.
Il part en courant (à 12 km/h) vers l'arrière, récupère son sifflet, et revient à sa place (en courant toujours à la même vitesse) au bout de 5 minutes.
A quelle vitesse avance le défilé ?

LA SOLUTION

On prendra comme unités les km et les heures. On se place à l'instant t = 0 où l'entraineur part en courant, avec pour origine des distances d = 0 correspondant à l'arrière du défilé. L'avant du défilé est alors à d = 0,400.
On peut représenter graphiquement l'avance de l'arrière du défilé par la droite d'équation $d = v.t$, et l'avant par la droite $d = v.t + 0{,}4 = v.t + 2/5$.
Le parcours de l'entraineur sera représenté d'abord par la droite $d = -12t + 2/5$, jusqu'à son intersection avec « l'arrière », au point de coordonnées $t_1=\frac{2}{5(v+12)}; d_1=\frac{2v}{5(v+12)}$.
Puis il repart, représenté par la droite d'équation $d = 12t + b$, passant par le point précédent, d'où $b=\frac{2(v-12)}{5(v+12)}$.

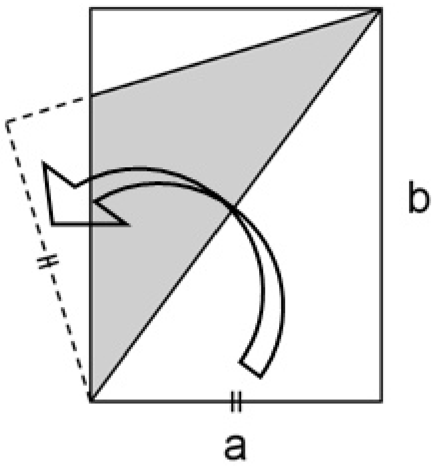
Cette droite recoupe la droite $d = v.t + 2/5$ au point d'abscisse $t_2=\frac{48}{5(12-v)(12+v)}$

L'énoncé précisant que t_2 = 5, on trouve alors $v=\frac{12\sqrt{5}}{5}$, soit environ 5,36.

C'est la vitesse d'avancement du défilé (en km/h).

* * * * *

DÉFI COLLÈGE/LYCÉE N°105

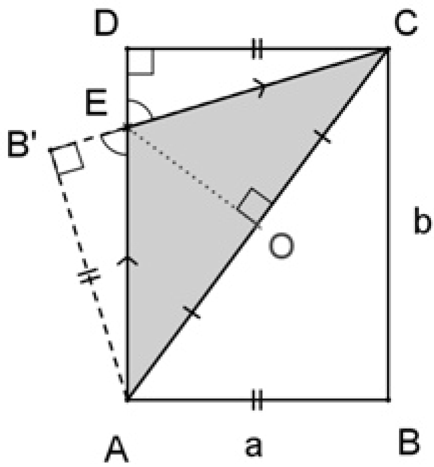


Une feuille de papier rectangulaire a pour dimensions **a** et **b**.

On la plie selon une diagonale.

Quelle est l'aire du triangle grisé ?

LA SOLUTION



Les angles EDC et EB'A sont égaux à 90°.
Les angles DEC et AEB' sont égaux,
ainsi que les angles DCE et B'EA.
D'où EC = EA,
et par suite le triangle AEC est isocèle en E.

Soit O le milieu de [AC].

L'aire du triangle AEC (grisé) est $\frac{AC \times OE}{2}$

Considérons les triangles COE et AB'C, rectangles respectivement en O et B'.

$$\tan(OCE) = \frac{OE}{OC} = \frac{a}{b} \quad \text{d'où} \quad OE = \frac{a \times OC}{b} = \frac{a \times AC}{2b}$$

L'aire du triangle est donc $\frac{AC^2 \times AC}{4b} = \frac{a(a^2+b^2)}{4b}$

* * * * *

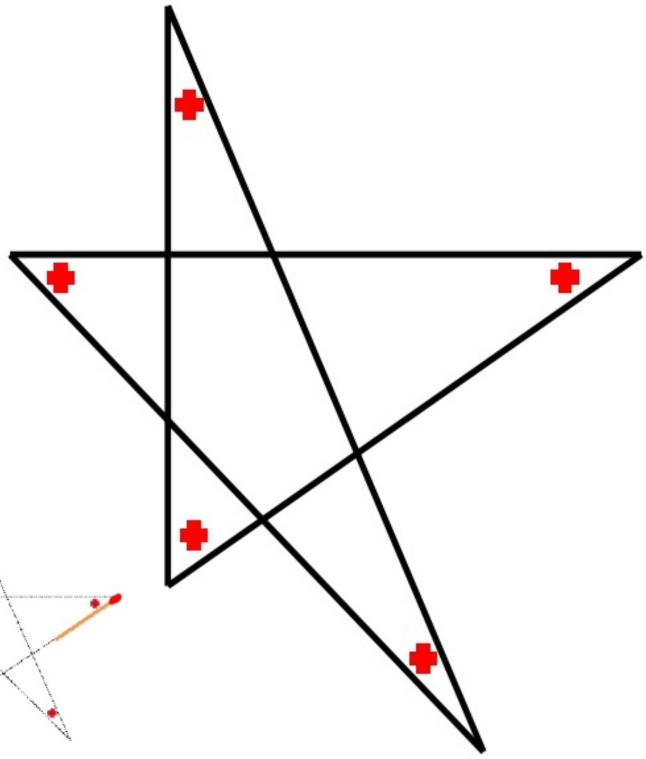
DÉFI COLLÈGE N°106

Voici un jeu très simple à réaliser. Il se joue à deux adversaires. Au départ, on a un tas de cailloux. Chaque joueur divise un des tas présents en deux ou en trois, à sa guise. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.
Aide le premier joueur à élaborer une stratégie gagnante.

N.B. Aucune solution de ce défi n'a été publiée

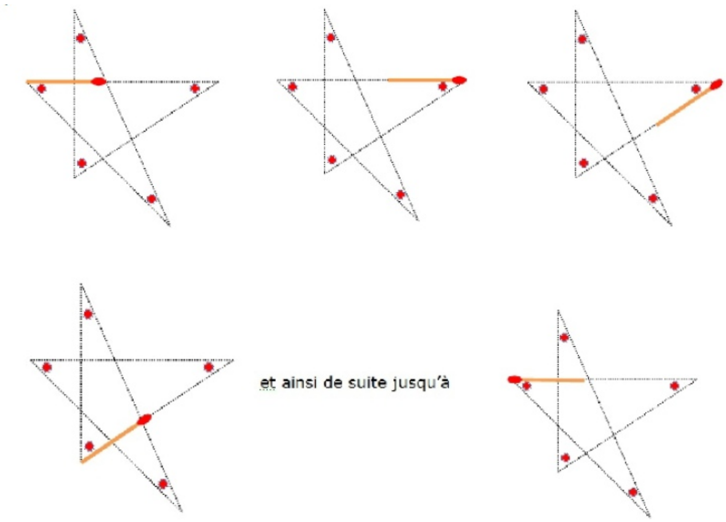
DÉFI COLLÈGE N°107

Quelle est la somme des angles d'une étoile à cinq branches ?



UNE SOLUTION

François nous propose une « preuve sans mots » :
Je prends une allumette, je la fais glisser sur un des segments de l'étoile. Arrivé à l'extrémité du segment, je la fais pivoter pour la faire glisser sur un autre segment. Je continue ma promenade sur l'étoile et je reviens sur le segment de départ :



Finalement, l'allumette a pivoté d'un demi-tour. La somme de angles de l'étoile est donc égale à 180°.

* * * * *

DÉFI LYCÉE N°107

n est un nombre premier différent de 2 et de 3.
Prouver que $n^2 - 1$ est multiple de 24.

LA SOLUTION

Tout nombre n peut s'écrire sous la forme $n = 3k$, $n = 3k+1$ ou $n = 3k+2$.
Dans le premier cas, ce ne peut être un nombre premier.
Si $n = 3k+1$, alors $n^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3k(k + 2)$: c'est un multiple de 3.
Si $n = 3k+2$, alors $n^2 - 1 = 9k^2 + 12k = 3k(k + 4)$: c'est un multiple de 3.
Donc n est multiple de 3.
Par ailleurs, tout nombre n *s'écrit* $n = 4q$, $n= 4q+1$, $n = 4q+2$ ou $n = 4q+3$.
Seule la seconde et la quatrième forme peuvent correspondre à un nombre premier.
En développant de la même manière que précédemment, on montre que $n^2 - 1$ est multiple de 8.

n étant à la fois multiple de 3 et de 8 (premiers entre eux), il est donc multiple de 24.

Une solution plus rapide pour les élèves qui ont vu les congruences :

Puisque *n* est premier supérieur ou égal à 5, *n* est congru à 1 ou 2 modulo 3 ; d'où $n^2 - 1$ est congru à 0 modulo 3 (on calcule $n^2 - 1$ modulo 3 dans les deux cas).
Par ailleurs, comme *n* est un nombre premier, il ne peut pas être congru à 0, 2, 4 ou 6 modulo 8 (sinon il serait pair). Ainsi, *n* est congru à 1 ou 3 ou 5 ou 7 modulo 8 ; et dans tous ces cas on trouve $n^2 - 1$ congru à 0 modulo 8.

* * * * *

DÉFI COLLÈGE N° 108

Les représentations graphiques ci-dessous, utilisées par la revue Challenge du 17 au 23 novembre 2001, sont elles mathématiquement correctes ?

LA SOLUTION

Concernant les deux premiers carrés, le tracé des médianes du carré rouge permet de constater visuellement ou par découpage que l'aire du carré rouge est égale à quatre fois l'aire du carré beige.

Concernant les deux derniers carrés : 30% est égal à 3/7 de 70%, l'aire du carré beige doit donc être égale à 3/7 de l'aire du carré rouge. L'élève de troisième a à sa disposition plusieurs méthodes pour apporter une preuve au fait que cette égalité est vraie, compte tenu des impondérables imprécisions de mesure des dimensions des carrés.

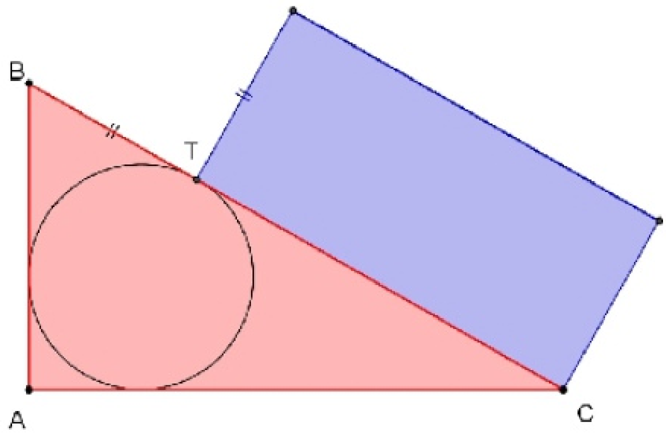
Nous considèrerons donc que les représentations graphiques ci-dessus, utilisées par la revue Challenge du 17 au 23 novembre 2011, sont bien mathématiquement correctes.

* * * * *

DÉFI LYCÉE N° 108

Le cercle inscrit dans le triangle rectangle rose ABC est tangent en T à l'hypoténuse. On construit sur [TC] un rectangle bleu dont l'autre côté est égal à BT.

Quelle est la plus grande des deux aires : la rose ou la bleue ?



LA SOLUTION

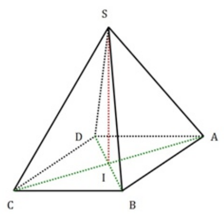
Le triangle rose et le rectangle bleu ont la même aire. Ce théorème a été démontré en 1956 par un certain A. BARLET, de Dublin.

La preuve :
Posons TB = x, TC = y, et OV = OU = OT = r (rayon du cercle inscrit dans le triangle).
Le triangle rectangle a pour côtés AB = $x + r$ et AC = $y + r$;
son aire vaut donc $\frac{1}{2}(x+r)(y+r)$.
Mais on peut décomposer ce rectangle en trois quadrilatères : le carré AUOV, et les « cerfs-volants » OBVT et OUCT, dont les aires respectives sont r^2, $2\times\frac{1}{2}\,r\,x$ et $2\times\frac{1}{2}\,r\,y$.
L'aire du triangle vaut donc également $r^2 + rx + ry$.
D'où : $\frac{1}{2}(x+r)(y+r)=r^2+r\,x+r\,y$.
En multipliant par 2 et en développant, on obtient $xy = r^2 + rx + ry$, le premier membre étant l'aire du rectangle,

La propriété est démontrée : l'aire rose est égale à l'aire bleue.

* * * * *

DÉFI COLLÈGE N°109



Peut-on faire passer une sphère par les cinq sommets d'une pyramide à base carrée ?

LA SOLUTION

La pyramide SABCD est régulière, donc le sommet S est à la verticale de I, point d'intersection des diagonales du carré ABCD. On peut en déduire : que (SI)⊥(AC) et (SI)⊥(BD) ; que SA = SB = SC = SD ; que les triangles SDB et SCA sont isocèles en S ; que la hauteur (SI) est une de leurs médiatrices.

Le cercle circonscrit au triangle SCA décrit une sphère en pivotant autour de (SI). Le centre de cette sphère est le point d'intersection de la médiatrice de [SA] avec l'axe (SI). En faisant pivoter le triangle SAI autour de cet axe, le point A occupera successivement les positions B, C et D. Cette sphère répond donc à la question posée.

Remarques et compléments

Le centre de cette sphère étant le centre du cercle circonscrit au triangle SAC. Il peut donc être soit à l'intérieur de la pyramide, soit à l'extérieur. Si les triangles SAC et SBD sont rectangles, c'est à dire si la hauteur de la pyramide est égale à la moitié de la longueur d'une des diagonales du carré de base, le centre de la sphère sera le centre I du carré ABCD ; et dans ce cas, on peut inscrire une seconde pyramide "tête bêche" pour former un octaèdre régulier.

Un raisonnement semblable à celui fait précédemment montrerait l'existence d'une sphère passant par les sommets d'une pyramide régulière dont la base est un polygone <u>régulier</u> ayant un nombre quelconque de côtés.

*** * * * ***

DÉFI LYCÉE N°109

Un peu d'algorithmique, c'est dans l'air du temps !

En utilisant les dix nombres 10, 9, 8 … 2, 1 dans cet ordre (ou dans l'ordre inverse), et les opérations addition, soustraction et multiplication, essayer d'obtenir 2012, comme par exemple :
109-8×**7+654**×**3-2-1** (les parenthèses ne sont pas autorisées, mais la « concaténation » des chiffres l'est).

Nous attendons de vous un petit programme informatique pour résoudre ce problème. Et tant qu'à faire, qu'il puisse aussi être utilisé pour les prochaines années : 2013, 2014…

LA SOLUTION

Voici un exemple de programme (Python) résolvant ce défi.

```
def test(n, s=""):
    if n==0:
        v=eval(s)
        if v==2012:
            print s,"=", eval(s)
    elif s=="":
        test(n-1, str(n))
    else:
        for Op in ["+","-","*",""]:
            test(n-1, s+Op+str(n))
```

L'exécution de ce programme donne :

10+9*87-65+4*321 = 2012
10*9*8+7+6-5+4*321 = 2012
109-8*7+654*3-2-1 = 2012
Il n'y a donc que trois solutions.

Quelques petites explications : il s'agit ici d'un programme « récursif », qui va tester les 4^9 = 262 144 possibilités : entre chacun des nombres de 10 à 1, on intercale un des symboles "+", "-", "*" ou "" (vide, qui correspond à une concaténation).

Chronologiquement, le programme fera ceci :
> affecter à la chaine « s » la valeur s = "10" (quand n = 10)
> choisir successivement chacun des 4 symboles (par exemple "*") à concaténer à la

chaine s (qui devient alors “10*”)

… puis il continuera, en « rappelant » le programme test avec n-1 (donc 9) et la nouvelle chaine s (par ex. “10*”) et ainsi de suite…

Quand il sera arrivé à la fin (n = 0), il évaluera la chaine obtenue (par exemple “10*9-8765+4+3*2-1” qui vaut -8666) et l’imprimera si et seulement si elle vaut 2012.

On pourrait améliorer ce programme en le rendant utilisable pour une année quelconque :

on définirait une fonction test(n, a, s=""), et on remplacerait à la 3^{e} ligne 2012 par a. L’appel au programme se ferait alors, par exemple, par test(10,2012).

* * * * *

DÉFI COLLÈGE 110

Un berger qui ne compte pas ses moutons

Le jeune Alionel veut devenir berger. Il va trouver monsieur Atanase et lui demande aimablement de le prendre en stage. Ce dernier lui montre un enclos où paissent paisiblement des moutons et lui dit : « *Dans cet enclos, il y a moins de 1 000 bêtes. Si tu permutes le chiffre des dizaines de ce nombre et le chiffre des unités, il y aura 9 têtes de trop ; mais si tu triples le nombre des dizaines, le cheptel augmente de 400 bêtes. Trouve le nombre de moutons qu’il y a dans l’enclos et je t’accepte comme second* ».

Aide l'apprenti berger à se faire embaucher par le pâtre.

LA SOLUTION

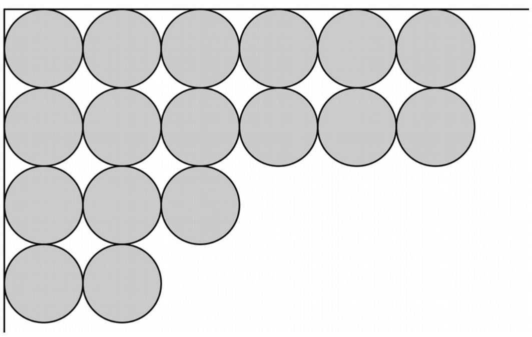
Le nombre de moutons est inférieur à 1 000 donc on peut écrire ce nombre $a\times100 + b\times10 + c$ d'où $a\times100 + b\times10 + c + 9 = a\times100 + \boldsymbol{c}\times10 + \boldsymbol{b}$, par suite on a $9b - 9c = -9$ soit $\boldsymbol{b - c = -1}$.
D'autre part, $a\times100 + b\times10 + c + 400 = 3\times(a\times10 + b)\times10 + c$ d'où $10a + b = 20$.
$a \geq 0$ et $b \geq 0$, il n'y a que 2 possibilités pour le chiffre a : $a = 1$ ou $a = 2$.

- si $a = 1$, alors $b = 10$ ce qui est impossible puisque b est un chiffre.
- si $a = 2$, alors $b = 0$ et comme $b - c = -1$, on a $c = 1$.

Le jeune Alionel peut donner la solution au pâtre Atanase : il y a **201** moutons dans l'enclos.

* * * * *

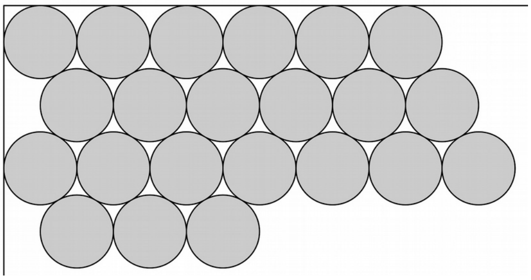
DÉFI LYCÉE 110



On dispose d’une boite à fond carré de 178,75 mm de côté.
On veut y disposer des pièces de 1 centime (dont le diamètre est 16,25 mm), en les posant à plat sur le fond, les unes à côté des autres <u>sans qu’elles se chevauchent</u>.
Il est évident qu’on peut facilement disposer ainsi 121 pièces, en les plaçant comme ci-contre.

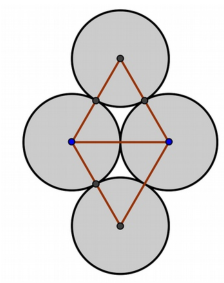
Mais peut-on faire mieux ?

LA SOLUTION



Il est facile de calculer que l'on peut alors placer 6 rangées de 11 pièces (occupant la largeur totale de la boite, 178,75 mm) alternant avec 6 rangées de 10 pièces, soit au total 126 pièces.
C'est 5 pièces de mieux que ce qui était proposé. Mais il reste un « vide » en bas, que l'on ne peut utiliser.

L'idée la meilleure est la suivante : après la 3^{e} rangée (de 11 pièces) , on met à nouveau une rangée de 11 pièces, puis une de 10, etc.
On aura ainsi 4 fois le suite de rangées 11-10-11, soit 128 pièces en tout.



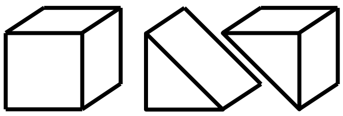
Reste à calculer quelle est la hauteur des 12 rangées. Si r est le rayon de la pièce, le triangle équilatéral a pour hauteur $r\sqrt{3}$. La hauteur totale des trois premières rangées est donc $r+2\times r\sqrt{3}+r=2r(1+\sqrt{3})$.
Pour les 12 rangées, on a donc $8r(1+\sqrt{3})$, soit - puisque le diamètre d'une pièce est 16,25 mm - environ 177,58 mm ; il ne reste que 1,17 mm de « vide » en dessous de la dernière rangée.

On n'a pas trouvé mieux...

* * * * *

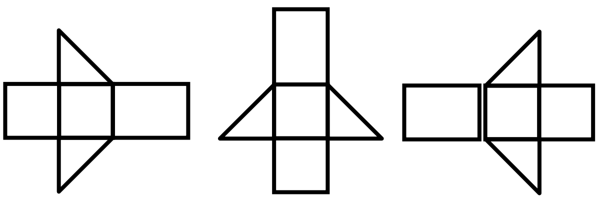
DÉFI COLLÈGE 111

Lors du récent rallye troisième-seconde, nous avions su que le commissaire Albert Girard avait scié un cube pour obtenir deux prismes à bases triangulaires.



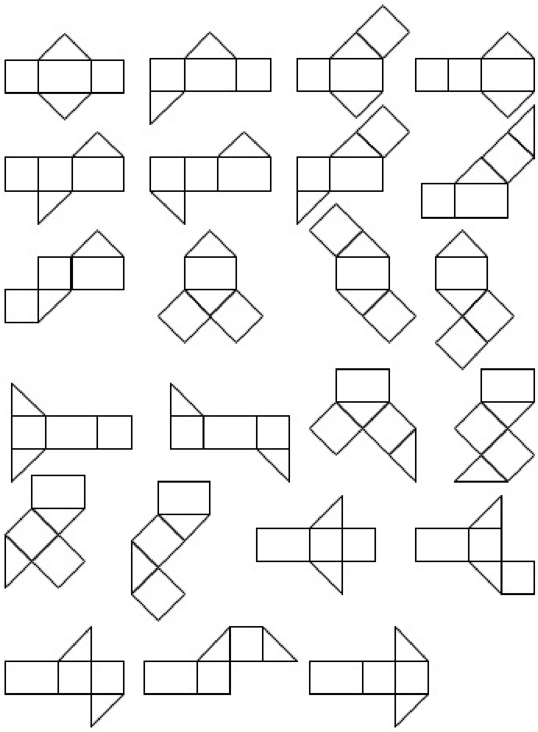
Trouve le plus possible de patrons d'un de ces demi-cubes et dessine les.

Attention, les trois dessins ci-dessous sont les dessins d'un même patron de prisme, ils ne comptent donc que pour un seul !



LA SOLUTION

Voici les 23 patrons trouvés par Gilbert GRIBONVAL, du groupe Jeux de l'APMEP.



* * * * *

DÉFI COLLÈGE 112

1 = 2 ???

Soient a et b deux nombres non nuls et égaux, on a :

$$a = b$$

en multipliant par b chaque membre :

$$a \times b = b \times b$$

$$ab = b^2a$$

en soustrayant a^2 à chaque membre :

$$ab - a^2 = b^2 - a^2$$

en factorisant chaque membre :

$$a(b - a) = (b + a)(b - a)$$

en simplifiant par $(b-a)$ chaque membre :

$$a = b + a$$

et comme a = b (hypothèse de départ)

$$a = a + a$$

soit $a = 2a$

en simplifiant par a (qui n'est pas nul, hypothèse de départ) :

$$1 = 2$$

Et pourtant 1 n'est pas égal à 2, alors où est l'erreur ?

LA SOLUTION

La solution était « presque » évidente : a un moment donné, on a divisé les deux membres de l'égalité par (b - a)... qui est nul, puisque b = a. On a donc divisé par 0, ce qui est impossible.

* * * * *

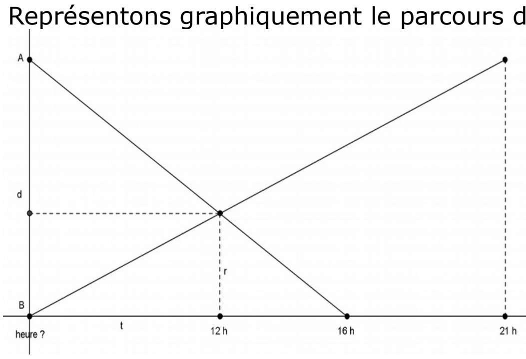
DÉFI LYCÉE 112

A l'heure du lever du soleil, deux vieilles babouchkas russes sont parties à la rencontre l'une de l'autre, l'une partant d'Avgousta et l'autre de Biyouni (sur la même route).
Elles se sont croisées à midi pile, mais ne se sont pas arrêtées, et chacune a continué à marcher à la même vitesse qu'avant. La première est arrivée à Biyouni à 16 heures, la seconde est arrivée à Avgousta à 21 heures.
A quelle heure le soleil s'était-il levé ce jour-là ?

D'après un énoncé proposé par Vladimir Igorevitch Arnold en 2004

SOLUTION

Représentons graphiquement le parcours des deux babouchkas en fonction du temps :



Notons t le temps (en heures) écoulé entre leur départ et midi, d la distance entre les deux villes A et B, et r la distance entre B et le point où elles se sont croisées.

En utilisant Thalès dans les deux triangles correspondant à B d'une part , on a :

$\frac{t}{r}=\frac{t+9}{d}$ d'où l'on tire $\frac{d}{r}=\frac{t+9}{t}$.

En considérant d'autre part les deux triangles correspondant à A on a : $\frac{4}{r}=\frac{t+4}{d}$ d'où l'on tire $\frac{d}{r}=\frac{t+4}{4}$.

De ces deux dernières proportions, on tire $\frac{t+9}{t}=\frac{t+4}{4}$ d'où, en faisant le « produit en croix », $4t+36 = t^2+4t$, soit $t^2 = 36$, soit $t = 6$.

Les deux femmes sont donc parties 6 heures avant leur rencontre, c'est à dire à 6 heures du matin : c'est l'heure du lever de soleil ce jour-là.

* * * * *

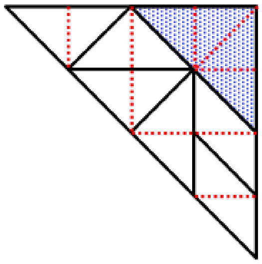
DÉFI COLLÈGE/LYCÉE 113

Extrait d'une publicité trouvée dans un catalogue de produits surgelés.C'est un carré qui est découpé (le fabriquant évoque un Tangram et on peut utiliser le "quadrillage" visible sur les pièces pour s'en persuader) ; on suppose que le partage est équitable pour qu'il n'y ait pas de conflit entre les convives (les parts doivent avoir même « taille »).

Est-il possible de retrouver le découpage proposé par le fabriquant (sachant qu'au départ le « gâteau » est carré) ?

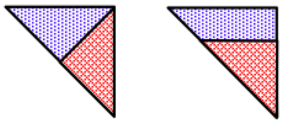
N.d.l.r. Si vos élèves « se lancent »dans les calculs, nous vous conseillons de leur proposer de partir d'un carré de 16 cm de côté.

LA SOLUTION

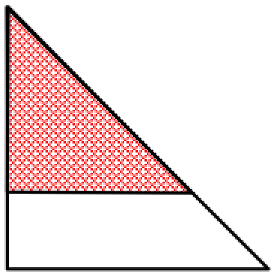


Nous pensions que le gâteau était carré : la légende annonçait « 16 canapés façon Tangram ». Après achat, nous avons dû constater qu'il était rectangulaire (environ 12 cm de long et 10 cm de large)… Mais comme nous avions lancé le défi en proposant de partir d'un carré de 16 cm de côté, nous vous proposons une démarche possible correspondant à ce cas. Elle pourra être adaptée dans le cas d'un gâteau rectangulaire.

Nous pouvons nous convaincre sans peine que les deux parallélogrammes et les quatre triangles rectangles isocèles identiques ont tous une aire égale à la moitié de l'aire du triangle rectangle isocèle « en haut à droite ».

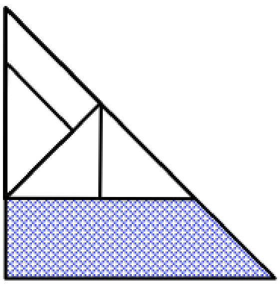


En considérant l'aire du carré découpé égale à 1, l'aire de chaque petit triangle est 1/16, l'aire de chaque parallélogramme est 1/16, l'aire du triangle « en haut à gauche » est 1/8.
Sur la photo, ce triangle est découpé par un segment parallèle à un des côtés de l'angle droit en deux parts « équitables ». Un tel partage est possible en faisant pivoter le triangle rouge.



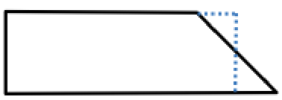
Dans le partage obtenu, le grand triangle a une aire double de celle du grand triangle et est donc un agrandissement échelle $\sqrt{2}$ du triangle rouge.
Ce type de découpage va de nouveau être utilisé pour la deuxième moitié du gâteau.

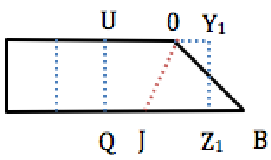
Il reste à découper le triangle rouge en quatre parts équitables et le trapèze rectangle également en quatre parts équitables. *Remarque **:** le trapèze n'est rencontré ni dans l'enseignement primaire, ni dans l'enseignement secondaire…*



Dans la partie supérieure du dessin ci-contre, un découpage en quatre parts « équitables » est proposé.
Il nous reste à découper en quatre parts « équitables » le trapèze rectangle ci-dessous.

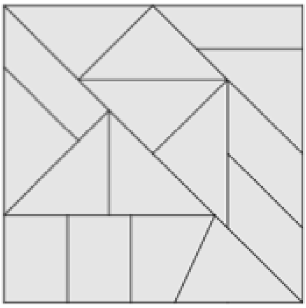
Nous transformons le trapèze rectangle en rectangle de même aire.



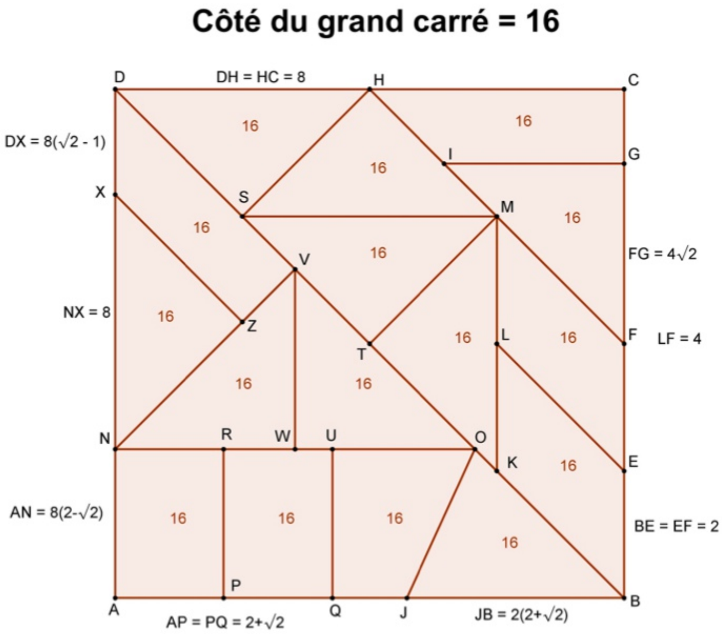


Nous partageons la partie « gauche » du rectangle en deux rectangles de même aire égale à 1/4 de l'aire du rectangle. Il nous reste à partager le trapèze rectangle de la partie droite en deux parts « équitables ».

B est le point de [LK] tel que LB = AJ. [OJ] partage donc le rectangle UY_1Z_1Q en deux parts équitables (OY_1 = QJ). OJB a même aire que OJZ_1Y_1 (et donc que OJQU). Nous avons donc quatre parts équitables dans notre trapèze rectangle.
Voici le découpage final obtenu :



Et, si on est parti d'un carré de 16 cm
de côté, voici les dimensions exactes des diverses parts :

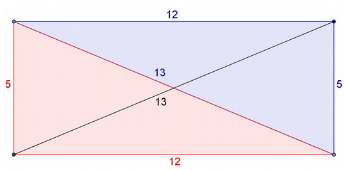


* * * * *

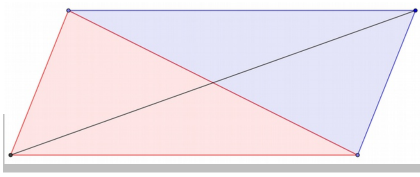
DÉFI COLLÈGE/LYCÉE 114

Cédric Villani, lauréat de la médaille Fields en 2010, a donné en novembre 2012 une conférence devant des lycéens de l'académie de Strasbourg intitulée "De l'araignée aux chauves souris".

Au début de cette conférence, Cédric Villani évoque le théorème de Pythagore et l'applique au rectangle ainsi : la somme des carrés des côtés de ce rectangle est égale à la somme des carrés de ses diagonales ➔

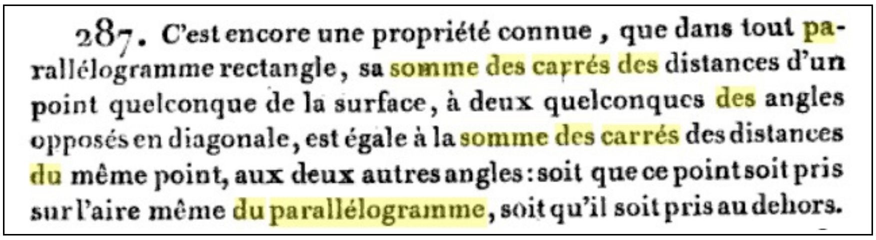


Et il pose la question : cette propriété est-elle vraie pour tout rectangle ?

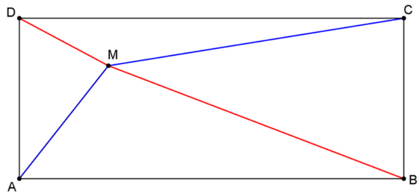


Cédric Villani poursuit en disant que la propriété ci-dessus s'applique aussi au parallélogramme ! Magique ou fantasque ???
Voici donc **un premier défi** à proposer à nos élèves.
La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est-elle toujours égale à la somme des carrés de ses diagonales ? Qu'en penses-tu ?

Un autre théorème, de Lazare Carnot ("Géométrie de position", 1803) :


287. C'est encore une propriété connue, que dans tout parallélogramme rectangle, sa somme des carrés des distances d'un point quelconque de la surface, à deux quelconques des angles opposés en diagonale, est égale à la somme des carrés des distances du même point, aux deux autres angles : soit que ce point soit pris sur l'aire même du parallélogramme, soit qu'il soit pris au dehors.

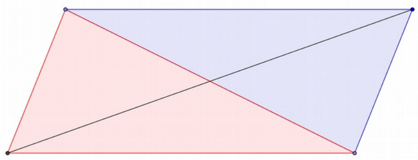
Autrement dit, dans le langage actuel
$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.



<u>Second défi</u> pour les élèves

1 - Démontrer cette propriété.
2 - Est-elle vraie même si le point M est extérieur au rectangle ? Et même en dehors du plan du rectangle ?
3 - Est-elle encore vraie si on remplace le rectangle par un parallélogramme ?

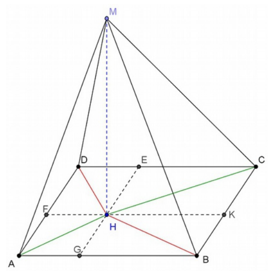
SOLUTION



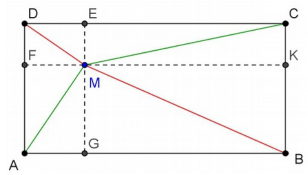
La somme des carrés des côtés d'un rectangle est égale à la somme des carrés de ses diagonales. Mais cette propriété s'applique-t-elle aussi au parallélogramme ?

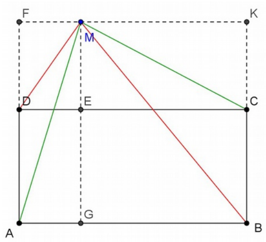
La réponse est OUI. Mais ce n'est pas du tout simple à démontrer ! L'exercice avait été proposé dans le bulletin APMEP n°483, et sa solution est en ligne sur la site de l'APMEP.

Beaucoup plus facile à démontrer était la seconde proposition de ce défi :

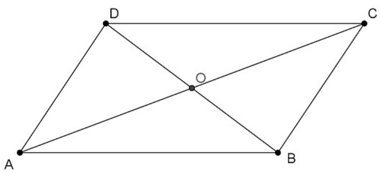


M étant un point quelconque du rectangle ABCD, a-t-on toujours $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$?
La réponse est OUI, c'est une application directe du théorème de Pythagore, en utilisant les projections orthogonales de M sur les côtés.
C'est encore vrai si le point M est extérieur au rectangle, et même en dehors du plan du rectangle (voir figures).



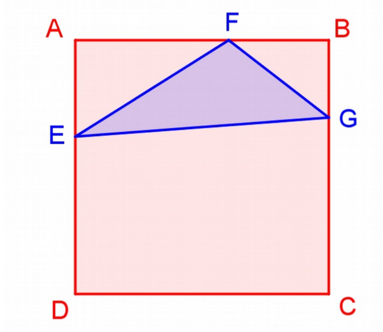


Par contre, cette fois, la propriété n'est plus vraie pour le parallélogramme. Il suffit d'exhiber un contre-exemple : ce n'est pas vrai si M est en O, puisque la « demi-grande » diagonale n'est pas égale à la « demi-petite » diagonale.



* * * * *

DÉFI COLLÈGE 115



On considère un carré ABCD.
Sur trois de ses côtés, on place les points E, F et G, **distincts des sommets A, B, C et D**.

Comment placer les points E, F, et G pour que le triangle EFG soit :

- un triangle rectangle ?
- un triangle isocèle ?
- un triangle rectangle isocèle ?
- un triangle équilatéral ?

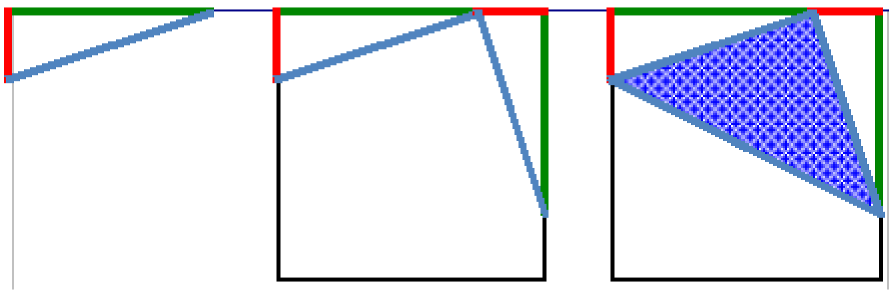
Plus difficile :
La même question, avec une contrainte supplémentaire : E, F et G ne doivent pas non plus être au milieu d'un des côtés du carré.
Quand vous avez trouvé une (ou plusieurs) solution(s), merci de **fournir un « programme de construction »** : soit pour une construction sur papier avec instruments habituels de dessin (en laissant apparents les tracés), soit pour une construction avec un logiciel de géométrie dynamique (en précisant l'ordre des tracés).

ÉLÉMENTS POUR LA SOLUTION

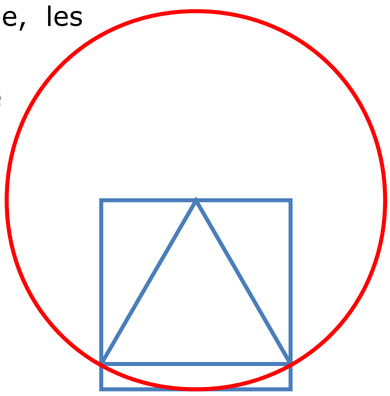
Pour un **triangle rectangle**, on peut placer les points E et G sur deux côtés opposés du carré. Le cercle de diamètre [EG] coupe les côtés du carré en deux points qui pourront être nommés F1 et F2. L'enseignant saura se persuader de l'existence de ces points. Je peux aussi placer les points E et F sur un même côté du carré et tracer la perpendiculaire à (EF) passant par E ou F. Le point G sera alors obtenu.

Pour un **triangle isocèle**, on peut aussi placer les points E et F sur un des côtés du carré, puis tracer la médiatrice du segment [EF]. Le point G sera alors obtenu. Cette construction reste valide si E et F ne sont pas des points du même côté du carré.

Pour obtenir un **triangle rectangle isocèle**, voici une série de trois dessins : Il restera à vous convaincre que le triangle bleu est rectangle et isocèle.



Pour obtenir un triangle rectangle, isocèle ou rectangle isocèle, les milieux des côtés du carré n'ont pas une importance particulière.



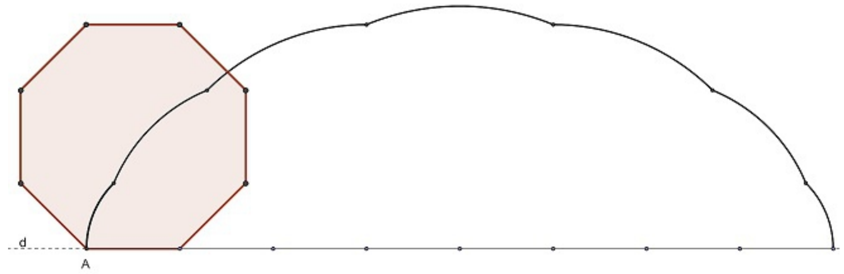
Pour obtenir un triangle équilatéral, utiliser le milieu d'un côté facilite les choses. Le cercle tracé a pour rayon le côté du carré. Le centre du cercle et les deux points d'intersection du cercle avec le carré définissent un triangle. On sait démontrer qu'il est équilatéral.

Pour obtenir un triangle équilatéral sans utiliser le milieu d'un côté du carré, c'est en effet bien difficile pour un élève de collège…

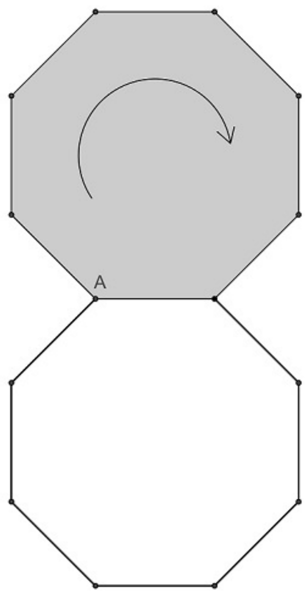
* * * * *

DÉFI LYCÉE 115

Un octogone « roule » sur une droite (d).
On a représenté ci-dessous la trajectoire du sommet A de l'octogone pendant cette « manœuvre », correspondant à un tout complet de l'octogone. Pouvez-vous calculer la longueur de cette trajectoire (on prendra comme unité la longueur du coté de l'octogone) ?

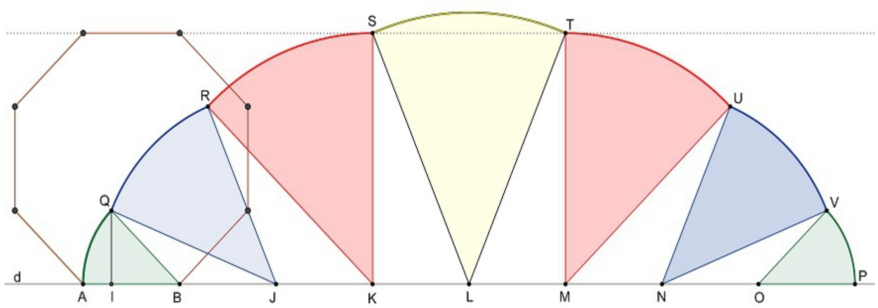


Un peu plus complexe, maintenant : l'octogone gris tourne autour d'un autre octogone qui reste fixe.



Représenter sa trajectoire (correspondant à un tour complet). Quelle est sa longueur ? Quelle est l'aire de la surface située à l'intérieur de cette trajectoire ?

LA SOLUTION



Calcul de la longueur

La trajectoire est formée de 7 arcs de cercle. Les angles au centre font tous 45° (l'angle que fait l'octogone en tournant) : ce sont donc des huitièmes de cercle.
Le premier arc AQ a pour rayon BA = 1,

Le second arc a pour rayon JQ. JQ² = JI² + IQ². Or $IJ=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $IQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'où $JQ=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

Le troisième arc a pour rayon $KS=1+\sqrt{2}$
Le quatrième arc a pour rayon LS. LS² = LK² + KS². D'où $LS=\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$

La longueur d'un arc d'un huitième de cercle de rayon r vaut $\frac{1}{4}\pi r$.

D'où $c_1=c_7=\frac{\pi}{4}$, $c_2=c_6=\frac{\pi}{4}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $c_3=c_5=\frac{\pi}{4}(1+\sqrt{2})$ et $c_4=\frac{\pi}{4}\sqrt{2(2+\sqrt{2})}$.

La longueur total de la courbe est $\boxed{L=\frac{\pi}{4}\left(2\times1+2\times\sqrt{2+\sqrt{2}}+2\times(1+\sqrt{2})+2\times\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\right)}$

Calcul de l'aire

L'aire est formée d'une part des 7 secteurs coloriés, et d'autre part de 6 triangles blancs.

Aire des secteurs

L'aire d'un secteur d'un huitième de cercle vaut $\frac{1}{8}\pi r^2$

Ce qui donne pour les secteurs $\frac{\pi}{8}\left(2\times1+2\times(2+\sqrt{2})+2\times(3+2\sqrt{2})+1\times(4+2\sqrt{2})\right) = \pi(2+\sqrt{2})$

Aire des triangles (chacun apparait 2 fois)

$$2\times\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times1\times(1+\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{1}{2}\times1\times(1+\sqrt{2})\right) = 2(1+\sqrt{2})$$

Aire totale

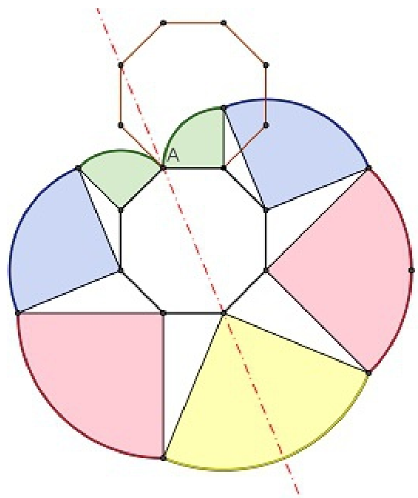
Il ne reste plus qu'à ajouter : $\boxed{A=\pi(2+\sqrt{2})+2+2\sqrt{2}}$

* * * * *

Dans une seconde partie du défi, l'octogone brun tournait autour d'un autre octogone qui restait fixe. On demandait la longueur de cette trajectoire, et l'aire de la surface intérieure à cette trajectoire.

La trajectoire est encore composée de 7 arcs de cercle, mais cette fois ce sont des quarts de cercle : au passage de chaque sommet, l'octogone fait un quart de tour.

Nous vous laissons le soin de faire les calculs !



* * * * *

DÉFI COLLÈGE 116

Au « Vent des Forêts »

L'Est Républicain du 14 Juillet 2013 présentait l'œuvre « Globe » de l'artiste belge Maarten Vanden Eynde. L'artiste est monté sur l'œuvre, ce qui est fortement déconseillé au promeneur…

1. Le journaliste annonce un diamètre de plus de 8 m. La photographie nous permet-elle de confirmer ou d'infirmer cette affirmation ?

2. Considérons que le diamètre de l'œuvre est 8 m. Si l'artiste avait assemblé un volume double de matériaux, quel aurait été le diamètre du « Globe » ?

Remarque : tel le bouvier amassant ses déchets, l'artiste a amassé petit à petit ses ferrailles : la boule est « pleine »…

LA SOLUTION

Il n'est pas irréaliste d'estimer que la taille de l'artiste est d'environ 1,75m. Il reste à mettre en œuvre une situation de proportionnalité :

Taille de l'artiste mesurée sur la photo	Taille réelle présumée de l'artiste
Diamètre du « Globe » mesuré sur la photo	

Si le diamètre du « Globe » est 8 m, son volume est $4/3 \times \pi \times 4^3$.

Si l'artiste amassait un volume double de matériaux, le volume du « Globe » serait $8/3 \times \pi \times 4^3 = 4/3 \times \pi \times r^3$, où r est le rayon du « Globe » hypothétique.

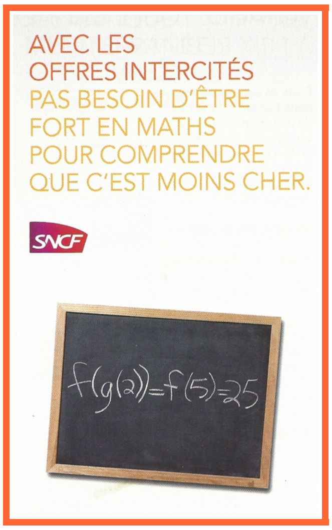
Après simplification, $2 \times 4^3 = r^3$, c'est à dire $r^3 = 128$.

Les élèves de collège n'ayant pas encore rencontré la racine cubique d'un nombre pourront à l'aide d'un tableur, trouver des valeurs approchées à 1 cm près du rayon et du diamètre du « Globe ».

On pourrait poser la même question mais avec 8 fois plus de matériaux, pour laisser entrevoir la racine cubique de 8 aux collégiens, et leur faire percevoir que si on multiplie le diamètre de la sphère par 2, son volume est multiplié par 8 ; et que si on veut doubler le volume, il ne faut pas doubler le diamètre.

* * * * *

DÉFI LYCÉE 116



Ceux qui ont été à Marseille en train ont trouvé ce dépliant publicitaire de la SNCF. Notre défi du mois est le suivant : trouver le plus grand nombre possible de fonctions qui vérifient cette égalité (on se restreindra aux fonctions polynomiales).

LA SOLUTION

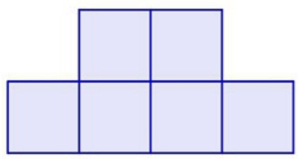
Il y en avait une infinité !!!
Par exemple $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x + 1$.
On pouvait laisser libre cours à son imagination !

Si on voulait se limiter aux fonctions affines, par exemple, $f(x) = ax + b$ et $g(x) = cx + d$ (en éliminant la fonction nulle), une condition nécessaire et suffisante était que $5a + b = 25$ et $2c + d = 5$.

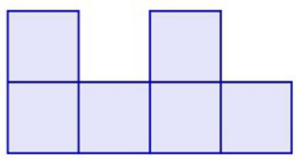
* * * * *

DÉFI COLLÈGE 117

Défi fourni par les collègues du Palais de la Découverte présents aux Journées de Marseille ; leur stand était dans la salle voisine de celle de la régionale Lorraine.
Essayez de construire, avec le moins de cubes possible, une forme géométrique en trois dimensions dont la vue de face est :



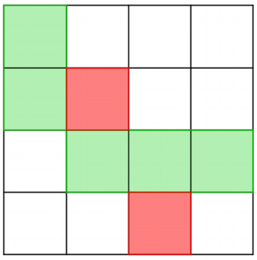
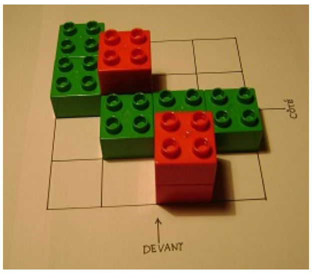
et dont une vue de profil est :

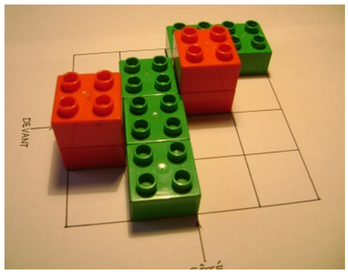


Combien faut-il de cubes au minimum pour la réaliser ?

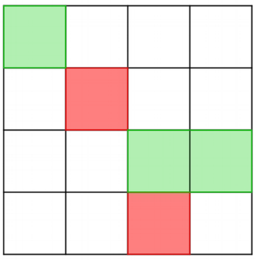
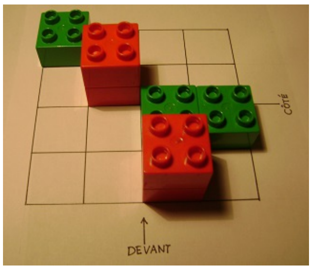
LA SOLUTION

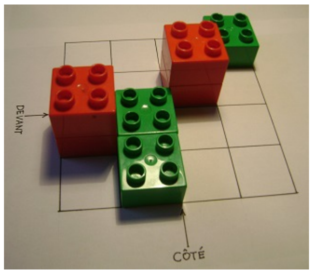
Une solution avec **9** cubes était assez facile à trouver. Nous vous donnons ci-dessous à gauche la vue de dessus, avec les conventions suivantes : ce qui est en vert correspond à un seul cube, et ce qui est en rouge à deux cubes superposés. Les deux images de droite sont une maquette en Lego (ici ce ne sont pas des cubes, mais des briques à base carrées, avec les mêmes conventions de couleurs).

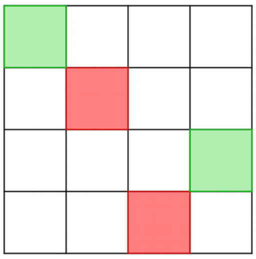
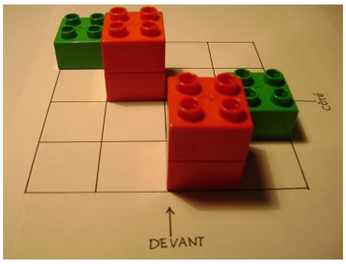


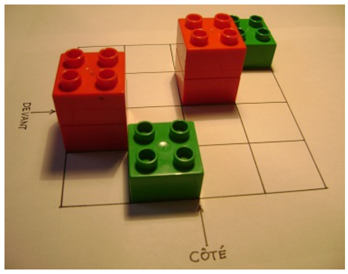
Mais on pouvait également trouver une solution avec seulement **7** cubes, dont certains ne sont contigus que par des arêtes (dans la solution ci-dessus, les cubes étaient contigus par au moins une face).



Mais on pouvait encore faire mieux, **avec seulement 6 cubes**. Cette fois, ils ne sont pas tous contigus (certains rétorqueront qu'il ne s'agit alors pas d'une « forme géométrique », mais derrière ce vocable on peut y mettre ce que l'on veut). Vérifiez, cela donne bien les vues de face et de côté demandées.



Par contre, on peut démontrer qu'il est impossible de trouver une solution avec moins de 6 cubes ... ni avec plus de 20 cubes.

* * * * *

DÉFI LYCÉE 117

Dans un jeu, dix personnes P_1 , ... , P_{10} tirent l'une après l'autre un billet dans un sac opaque qui contient vingt billets de 5 euros et un billet de 500 euros (ces billets sont indiscernables au toucher), et le gardent. Après chaque tirage, la probabilité que le billet de 500 euros soit encore dans le sac diminue ; pour éviter ce désavantage, P_{10} propose à P_1 de lui donner 5 euros pour pouvoir tirer en premier, P_1 tirant alors en dernier.
P_1 doit-il accepter ?

(d'après un énoncé proposé par Rémi Peyre à ses étudiants)

LA SOLUTION

Remarque préalable : l'hypothèse « ces billets sont indiscernables » au toucher est importante ! Si, par exemple, le billet de 500 € était “plus facile à tirer” que les autres (par ex. parce qu'il est plus large), tout ce qui suit serait caduc.

Si P1 tire en premier :
Il a une proba 1/21 de gagner 500 et 20/21 de gagner 5 (la suite du tirage n'a aucune incidence sur son gain).
Espérance de gain $E=\frac{1}{21}\times 500+\frac{20}{21}\times 5=\frac{200}{7}\approx 28{,}57$

Si P1 tire en dernier :
Pour gagner 500, il faut que les neuf joueurs passés avant lui tirent un billet de 5, et que lui tire le billet de 500.
Proba que les neuf premiers joueurs tirent 5 : $\frac{20}{21}\times\frac{19}{20}\times\ldots\times\frac{13}{14}\times\frac{12}{13}=\frac{12}{21}$
Proba que P1 tire le billet de 500 (sachant que les 9 premiers ne l'ont pas tiré) = 1/12 ; proba qu'il tire un billet de 5 = 11/12.
P1 a donc, dans le cas où aucun des neuf premiers n'a tiré le billet de 500, une proba $\frac{12}{21}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{21}$ de gagner 500 et une proba $\frac{12}{21}\times\frac{11}{12}=\frac{11}{21}$ de gagner 5.
Mais si un des neuf premiers a tiré le billet de 500, P1 gagne 5. Cet évènement étant complémentaire de l’évènement « les neuf premiers joueurs tirent 5 », sa probabilité est donc de 9/21.

L'espérance est de gain de P1 est donc $\left(\frac{1}{21}\times 500+\frac{11}{21}\times 5\right)+\frac{9}{21}\times 5=\frac{200}{7}\approx 28{,}57$

La probabilité de gagner est donc la même quelle que soit la stratégie de P1. Il a donc tout intérêt à accepter la proposition de P10 (même si P10 ne lui offre qu’une somme dérisoire).

Et si on voyait les choses autrement ?
En réalité, mais vous ne le savez peut-être pas, les billets sont des petits êtres surnaturels doués d'autonomie. Ce sont eux qui décident (de façon strictement aléatoire) dans quel ordre ils vont être tirés, et ils se débrouillent pour aller dans la main du joueur correspondant. « On » sait donc déjà, avant que les joueurs ne commencent, lequel aura le billet de 500. Il est alors évident que chacun des 10 joueurs a la même probabilité que les autres de « tomber » sur le billet de 500 : $\frac{1}{21}$.
L'espérance de gain de chacun des joueurs est donc $E=\frac{1}{21}\times 500+\frac{20}{21}\times 5=\frac{200}{7}\approx 28{,}57$
On retrouve bien les espérances de gain données dans la solution ci-dessus.

Quelques commentaires de Rémi Peyre à propos de l'encadré précédent.

Oui, en effet, je pense que c'est la meilleure façon de voir les choses. Le point délicat est bien sûr de comprendre *pourquoi* il est effectivement licite de procéder ainsi. Je pense qu'il y a deux choses que j'estimerais important de mentionner :

- Cela ne change rien concernant nos joueurs d'imaginer qu'il y aura 10 personnes fictives qui continueront après eux de tirer les billets jusqu'au dernier, ce qui fait qu'on peut aussi bien imaginer que ce sont les billets qui choisissent chacun son joueur que l'inverse.
- Souligner la symétrie parfaite qui existe dans le problème entre les différents billets : il est bien clair qu'à l'échelle élémentaire, la probabilité que {le joueur n°1 tire le billet A, le joueur n°2 tire le billet B, ..., le joueur n°20 tire le billet T} est la même que la probabilité que {le joueur n°1 tire le billet M, le joueur n°2 tire le billet C, ..., le joueur n°20 tire le billet J}, et de même pour n'importe

quelle permutation. Par conséquent, une fois qu'on ajoute ces possibilités élémentaires, la probabilité que le gros billet se retrouve dans la main du joueur n°1 est la même que celle qu'il se retrouve dans la main du joueur n°10.

* * * * *

DÉFI COLLÈGE 118

Le Diable et le Fainéant

Un Fainéant se désespérait d'être toujours sans le sou. Ne sachant plus à quel saint se vouer, il eût l'idée d'invoquer le Diable. A peine avait-il prononcé son nom qu'il le vit apparaitre. Dominant son effroi, le Fainéant demanda à son visiteur une recette pour faire fortune.

« C'est enfantin, répondit le Diable. Il suffit de traverser plusieurs fois le pont que tu vois là-bas. Après chaque traversée, tu te trouveras avec, dans ta poche, deux fois plus d'argent qu'auparavant.

- Pas possible s'exclama le Fainéant.

- Je m'en porte garant, affirma le Diable. Mais attention ! Il y a une condition : pour me payer de ma peine, tu me donneras 24 euros au terme de chaque traversée miraculeuse. Entendu ?

- Entendu, répondit le Fainéant, enthousiasmé à l'idée de faire si facilement fortune. Commençons sur le champ ! »

Le Fainéant traversa donc le pont une première fois et, ô stupeur, constata qu'il avait dans sa poche le double de la somme qui s'y trouvait auparavant. Ravi, il s'empressa de donner 24 euros au diable et de traverser le pont une seconde fois. Il put s'assurer de nouveau que le diable n'avait pas menti : son argent avait encore doublé. Il remit 24 euros au diable et fit une troisième traversée, au terme de laquelle, l'argent ayant doublé une nouvelle fois, il se retrouva avec exactement… 24 euros en poche, juste de quoi payer son perfide conseiller qui disparut en ricanant.

Combien le Fainéant avait-il d'argent initialement ?

LA SOLUTION

Ce problème a pour origine l'ouvrage « Sur le sentier des mathématiques » (Boris Kordemski, Dunod, 1963). Il a par ailleurs été repris en 1999 dans l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement des professeurs des écoles pour les académies de Dijon et Nancy. Pour rendre le texte plus actuel, nous avions proposé des sommes en euros.

Une première solution

J'appelle s la somme possédée par le fainéant avant sa première traversée du pont.

Après une première traversée, la somme possédée par le fainéant est $2s - 24$

Après une deuxième traversée, la somme possédée par le fainéant est $2\times(2s - 24) - 24$

Après une troisième traversée, la somme possédée par le fainéant est
$2\times(2\times(2s - 24) - 24) - 24$. Il donne 24 € au diable donc $2\times(2\times(2s - 24) - 24) - 24 = 24$

L'équation se réduit à $8s - 144 = 24$.

$s = 21$. J'en conclus que le fainéant possédait 21 € avant son premier passage.

Une deuxième solution

Juste avant la troisième traversée, le fainéant possédait 24 €. Il avait donc reçu 12 € du diable et donné 24 € pour sa seconde traversée. Juste avant la seconde traversée, il avait donc 36 €. Il avait la moitié de cette somme, donc 18 € que le diable a doublé. Juste après la première traversée, il avait 18 € + 24 €, c'est à dire 42 €. Il avait donc 21 € avant de commencer ses traversées.

Et avec un tableur ?

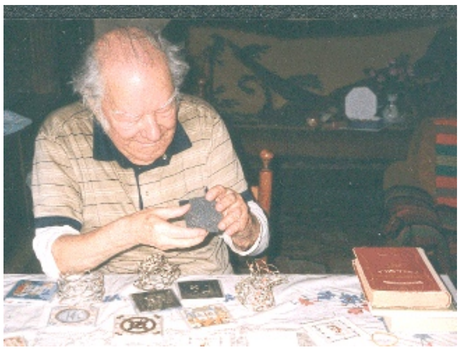
Nous pouvons explorer la situation en fonction de la somme possédée par le fainéant et même

montrer qu’il faut au moins avoir 24 € au départ pour ne pas être lésé :
- avec 24 €, le fainéant restera toujours à 24 € après chaque passage
- avec moins de 24 €, il va se retrouver ruiné (au pire au 5e passage)
- avec plus de 24 €, sa fortune augmente de plus en plus vite (à 1 € près, c’est l’exponentielle 1 – 2 – 4 – 8 – 16 ...) *[voir copie d’écran ci-dessous]*.

	A	B	C
1			
2	Somme initiale	25	Augm/dim
3			
4	1er passage		
5	Somme doublée	50	
6	Remise au diable	24	
7	Reste	26	1
8			
9	2e passage		
10	Somme doublée	52	
11	Remise au diable	24	
12	Reste	28	3
13			
14	3e passage		
15	Somme doublée	56	
16	Remise au diable	24	
17	Reste	32	7
18			
19	4e passage		
20	Somme doublée	64	
21	Remise au diable	24	
22	Reste	40	15
23			
24	5e passage		
25	Somme doublée	80	
26	Remise au diable	24	
27	Reste	56	31
28			
29			

Avec les élèves
La première démarche est sans aucun doute familière à des élèves dès le collège. L’inconnue choisie, il reste à faire vivre le récit de l’énoncé. A la fin de l’histoire, une équation se crée, il reste à la résoudre.
La deuxième démarche évite le calcul algébrique. Un raisonnement est à construire en imaginant une remontée dans le temps pour revenir aux conditions initiales.
L’usage du tableur permet d’explorer la situation et d’imaginer des prolongements possibles en fonction de la somme possédée par le fainéant.

Ces trois démarches méritent de faire partie de la « boite à outils » à disposition des élèves en fin de collège.



Boris Kordemski (1907-1999) et ses puzzles

* * * * *

DÉFI LYCÉE 118

Piles de crêpes

Un cuisinier, qui n'a pas le compas dans l’œil, fait des crêpes et les pose au fur et à mesure sur un plateau. Malheureusement, ses crêpes ne sont pas toutes de la même taille. Une fois qu'il a constitué sa pile de crêpes (ou pourra supposer qu'il y en a n), comment faire pour les ranger dans l'ordre, de façon que la plus grande soit en bas de la pile et la plus petite en haut ?

Pour cela, on dispose uniquement d'une fine spatule, que l'on peut glisser sous une des crêpes, et l'on retourne d'un coup tout le paquet de crêpes qui est posé au-dessus de la spatule.

Le **premier défi** est le suivant : **écrire un algorithme permettant de trier la pile de crêpes**. On notera glisserretourner(k) la procédure qui permet de retourner les k crêpes du haut de la pile.

Le **second défi** est un peu plus complexe : on a constaté que les crêpes réalisées par le cuisinier avaient toutes une face plus grillée que l'autre. On veut, toujours en utilisant la seule procédure glisserretourner(k), faire en sorte que non seulement les crêpes soient rangées en ordre de taille, mais qu'elles aient toutes la face la moins brulée sur le dessus. Écrire l'algorithme correspondant.

N.B. « Travaux pratiques » : on pourra vérifier que l'algorithme « fonctionne bien » en construisant des crêpes dans du carton épais !

UNE SOLUTION

En ce qui concerne le **premier défi**, l'algorithme était simple à trouver.

Pour *k* de *n* à *2* faire :

- chercher l'indice *i* de la plus grande crêpe parmi les *k* premières en partant du haut
- glisserretourner(*i*)

{commentaire : on fait ainsi passer la plus grande des *k* premières crêtes du le dessus}

- glisserretourner(*k*)

{la plus grande des *k* premières crêpes se retrouve ainsi en *k*ème position des la pile}

Fin de la « boucle » faire

Remarque : on effectuera ainsi (2n-2) fois la procédure glisserretourner.

Essayez avec des crêpes (ou des disques de carton), et vous verrez que « ça fonctionne » !

Cela se complique un peu pour le **second défi**.

Pour *k* de *n* à *2* faire :

- chercher l'indice *i* de la plus grande crêpe parmi les *k* premières en partant du haut
- glisserretourner(*i*)

{commentaire : on fait ainsi passer la plus grande des *k* premières crêtes sur le dessus}

- **si** dessus non-brulé **alors** glisserretourner(1)

{la face brulée de la crêpe du dessus sera alors visible, mais le glisserretourner suivant la remettra dans le bon sens}

- glisserretourner(*k*)

{la plus grande des *k* premières crêpes se retrouve ainsi en *k*ème position des la pile}

Fin de la « boucle » faire

Si dessus brulé, **alors** glisserretourner (1)

{commentaire: les n -1 glisserretourner(k) ont bien rangé les crêpes par ordre de taille, mais encore faut-il retourner celle du dessus si sa face brulée est visible}

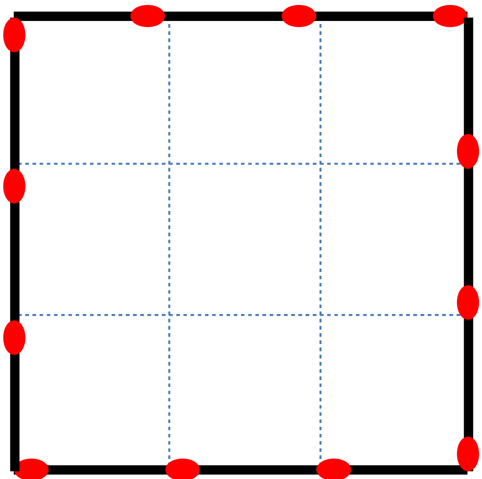
Remarque : on effectuera ainsi (3n-2) fois la procédure glisserretourner dans le pire des cas.

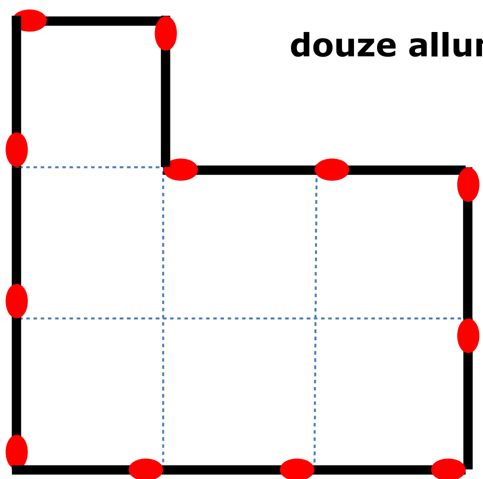
N.B. Ces algorithmes s'inspirent très fortement de ce Martin Quinson avait présenté dans un atelier « Algorithmique sans ordinateur » lors d'une précédente journée régionale.

* * * * *

DÉFI COLLÈGE 119

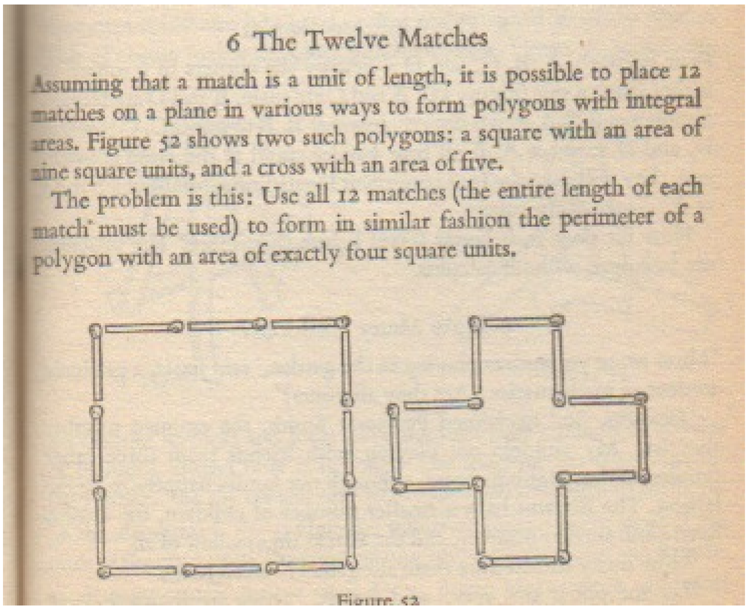
Avec douze allumettes





L’unité de longueur est la longueur d’une allumette.
Il est possible de placer douze allumettes sur un même plan et de former un polygone ayant une aire exprimée avec un nombre entier. Ci-dessus, en voici deux exemples : un de neuf unités d’aire et un de sept unités d’aire.
En utilisant les douze allumettes (sans chevauchement), forme un polygone de six unités d’aire, puis de cinq unités d’aire, de quatre unités d’aire, etc.
Pour chacune des aires entières obtenues, trouve le plus possible de polygones différents.

LA SOLUTION


6 The Twelve Matches

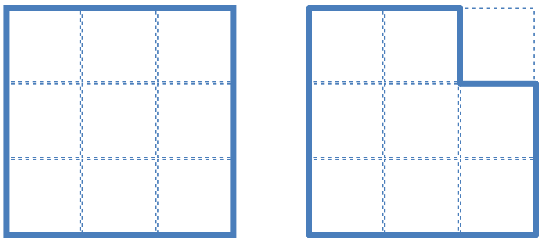
Assuming that a match is a unit of length, it is possible to place 12 matches on a plane in various ways to form polygons with integral areas. Figure 52 shows two such polygons: a square with an area of nine square units, and a cross with an area of five.

The problem is this: Use all 12 matches (the entire length of each match must be used) to form in similar fashion the perimeter of a polygon with an area of exactly four square units.

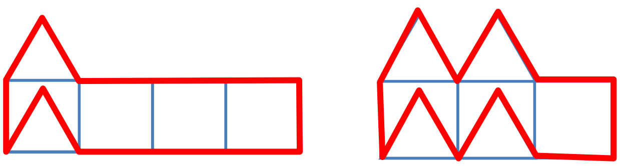
Figure 52

Le problème est inspiré d’une proposition de Martin Gardner dans le livre « Mathematical Puzzles and Diversions » (PENGUIN BOOKS 1959).

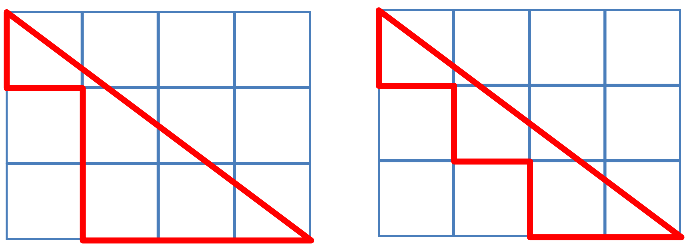
« Rogner » un coin du carré permet de conserver le périmètre et de diminuer l’aire de 1. Des polygones d’aire 8, 7, 6 ou 5 sont ainsi aisément obtenus.



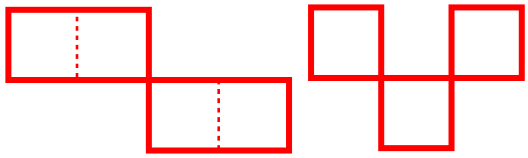
Obtenir un polygone d’aire 4 nécessite une autre stratégie. Un polygone d’aire 3 peut alors être aussi obtenu.



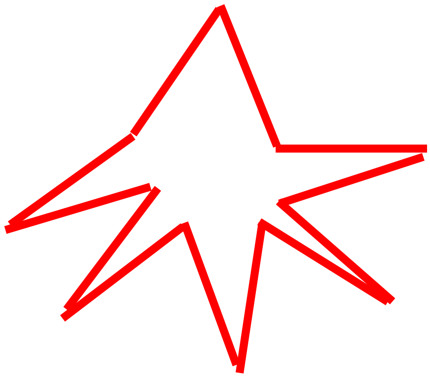
Une autre piste est l’utilisation d’un triangle rectangle 3,4,5. Son aire est 6 ; en l’« écornant », son aire peut être réduite à 4, puis à 3.



Et avec des polygones croisés ? Des polygones d’aire 4 et 3 sont obtenus.



Obtenir un polygone d’aire inférieure à 3 nécessite une nouvelle stratégie.



Avec les douze allumettes, on réalise une ligne brisée fermée. On peut se convaincre que l’aire maximale du polygone formé sera l’aire du dodécagone et qu’au minimum l’aire pourra être égale à 0.

L’aire d’un dodécagone de côté c est égale à environ $11{,}2\ c^2$ (ce résultat pourra être retrouvé par des élèves de troisième). On peut se persuader que la déformation du polygone me permettra d’obtenir toute aire comprise entre 0 et 11 (minimum et maximum inclus).

* * * * *

DÉFI LYCÉE 119

Les boulets de Monaco.

Ces deux photos ont été prises devant le palais princier de Monaco .

Voici quelques questions possibles...

1. Combien y a-t-il de boulets dans la pyramide à base carrée de gauche ?.
2. Combien y a-t-il de boulets dans la « forme » à base rectangulaire de droite ?
3. Donner une formule générale pour la disposition en pyramide de base carrée de côté *n.*
4. Donner une formule générale pour l'autre disposition de « base » rectangulaire *n* et *p* .
5. Si, dans la disposition de droite, on double les valeurs de *n* et *p*, quelle sera la conséquence sur le nombre total de boulets ?
6. Est-il possible de disposer les boulets de la photo de droite pour les ranger en pyramide à base carrée ?
7. Est-il possible de disposer les boulets de la photo de gauche pour les ranger comme dans la photo de droite ?

Cette situation inspirera sans doute d'autres questions à poser à des élèves, selon le niveau de classe, le degré d'initiative laissé aux élèves, les modalités de restitution de la recherche proposées...

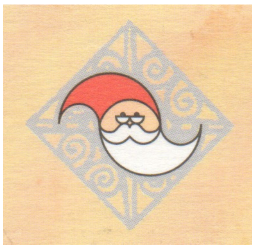
LA SOLUTION

Pour ce premier exemple il est facile de voir que la base est constituée de 8x8 boulets.
Les couches suivantes sont des carrés et donc au total : $8^2+7^2+6^2+...+2^2+1^2$
$= \dfrac{8\times(8+1)\times(2\times 8+1)}{6}$, soit 204 boulets
Si la couche de base contient n^2 boulets on aura au total : $\boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$ boulets, formule qui peut se démontrer par récurrence sur *n*.

Sur ce second exemple on peut deviner que la base est constituée de14x8 boulets.
Chaque couche supplémentaire est un rectangle qui compte un boulet de moins dans la longueur et un de moins dans la largeur. On a donc 13x7 boulets pour la deuxième couche.
Au total, cet amoncèlement contient :
14x8+13x7+...+8x2+7x1= 420 boulets.
Si maintenant on cherche à connaitre le nombre de boulets d'un empilement semblable dont le base est formée d'un rectangle de *n* boulets dans sa longueur et de *p* boulets dans sa largeur il faut que l'on cherche la formule générale :
$np+(n-1)(p-1)+...+(n-(p-2))(p-(p-2))+(n-(p-1))(p-(p-1))$
En développant on peut écrire :
$p\times np-(1+2+3+...+(p-1))n-(1+2+3+...+(p-1))p+1^2+2^2+3^2+...+(p-1)^2$ Comme il a été écrit plus tôt on peut démontrer par récurrence que :
$1^2+2^2+3^2+\dots+(p-1)^2=\dfrac{(p-1)p(2p-1)}{6}$ et bien évidemment que :1+2+3+...+(p-1)= $\dfrac{(p-1)p}{2}$
Ainsi la formule générale devient :
$np^2-\dfrac{(p-1)p}{2}(n+p)+\dfrac{(p-1)p(2p-1)}{6}$ En réduisant au dénominateur 6 les trois expressions et en factorisant par *p* le numérateur il reste à factoriser :
$3np-p^2+3n+1=(p+1)+(1-p)(1+p)=(p+1)(3n+1-p)$
Pour finir, un tel entassement dont la base est une rectangle de dimensions *n*x*p* contient donc :
$\boxed{\dfrac{p(p+1)(3n+1-p)}{6}}$ boulets.

* * * * *

DÉFI COLLÈGE 120



Au dos d'une carte postale achetée au pays du père Noël (Santa Claus Office, 96930 Artic Circle, FINLAND), figure un logo réalisé avec de nombreux demi-cercles.

Redessinez ce logo en utilisant la règle et le compas ou un logiciel de géométrie.

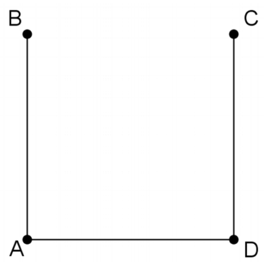
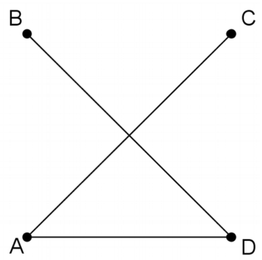
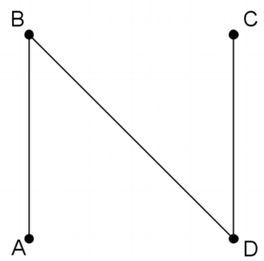
Le Petit Vert se fera un plaisir de montrer vos créations à ses lecteurs. N'hésitez pas à confier vos programmes de construction.

Nous n'avons reçu aucune proposition de solution pour ce défi.

* * * * *

DÉFI LYCÉE 120

Quatre villes (A, B, C et D) sont disposées aux sommets d'un carré.
Pour l'instant, il n'y a aucune route pour les joindre. On voudrait pouvoir visiter successivement ces quatre villes dans un ordre déterminé à l'avance, sans jamais retraverser une ville déjà visitée.
Voici quelques exemples :

		
Si l'on veut réaliser le trajet B→A→D→C, on peut construire les 3 routes ci-dessus (ce qui permet également de faire le trajet C→D→A→B, mais aucun autre trajet n'est possible).	Si l'on veut réaliser le trajet B→D→A→C, on peut construire les 3 routes ci-dessus (ce qui permet également de faire le trajet C→A→D→B, mais aucun autre trajet n'est possible).	Si l'on veut réaliser le trajet A→B→D→C, on peut construire les 3 routes ci-dessus (ce qui permet également de faire le trajet C→D→B→A, mais aucun autre trajet n'est possible).

LA SOLUTION

Ce problème avait déjà donné lieu à un article d'Hélène MARX paru dans Le Petit Vert n°104 de décembre 2010 : « Activité introductive à la notion de fonction en classe de 3ème ».

Nous vous invitons à vous y reporter .

* * * * *

DÉFI COLLÈGE 121

Il fut un temps où de l'argent était fourni pour un bien qui ne serait disponible que des mois plus tard. Il semble qu'actuellement, la jouissance du bien est plus immédiate.

Nos jeunes lecteurs ignorent sans doute ce qu'est une 4CV. Qu'ils demandent à leurs grands-parents ou consultent Wikipedia.

Le défi : **Comment imaginer un découpage en huit parties de même aire de la**

silhouette de la 4CV Renault présentée en 1957 dans l'Est Républicain ? Nous pouvons considérer que les futurs acheteurs étaient attentifs à des mensualisations égales pendant ces huit mois.

En 2015, les utilisateurs de crédit automobile connaissent des situations différentes de ce qui est exposé ici : on leur précise en particulier le taux du crédit accordé.

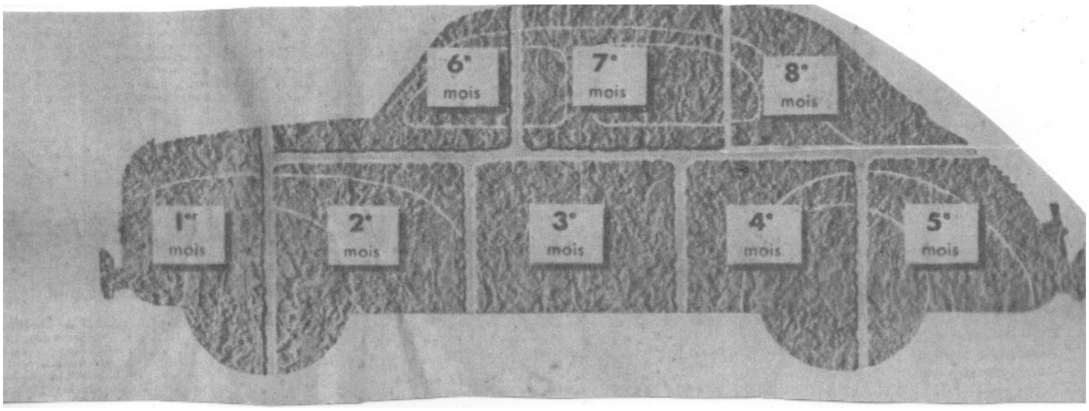
N.B. Un franc de 1957 correspond environ à 0,02 euros actuels. Ce qui met la 4CV à près de 8 000 €.

… Et une photo pour que nos jeunes lecteurs puissent mieux se représenter cette voiture.

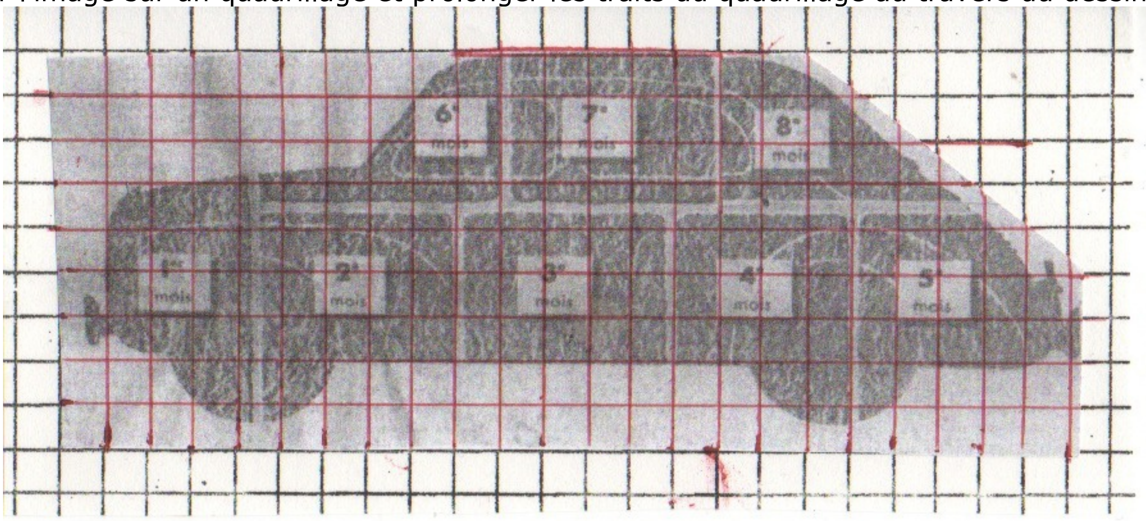
ÉLÉMENTS DE SOLUTION

Une première idée

Rétablir la silhouette générale de la voiture en collant à sa place la partie correspondant au huitième mois.



Coller l'image sur un quadrillage et prolonger les traits du quadrillage au travers du dessin.



Au demi-carreau ou au quart de carreau près, une valeur approchée de l'aire de la silhouette peut être trouvée, rendant possibles les rectifications nécessaires (la part correspondant au sixième mois attire particulièrement le regard et est sans doute celle qui a le plus besoin d'être rectifiée).

GeoGebra pourrait-il faire la même chose sur l'écran d'un ordinateur ?

Autre démarche

Découper minutieusement les 8 morceaux (en supprimant les espaces entre eux) : on constate (c'est visible à l'œil nu) que la plus petite pièce est le n°6 et la plus grande le n°2.

Pour connaitre la « taille » de ces 8 morceaux, pesons-les avec une balance de précision (au mg, merci aux profs de SVT du Lycée Loritz). Les résultats sont dans le tableau ci-dessous (les trois premières colonnes).

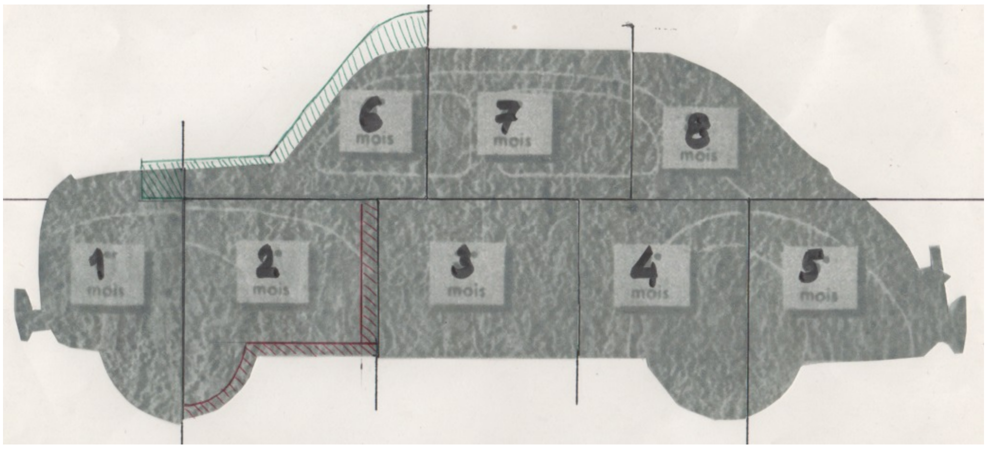
			Coeff. Multiplicateurs	
N° pièce	Masse (mg)	Pourcentage	Aires	Longueurs
N°1	230,2	12,76%	0,9794	0,9897
N°2	264,4	14,66%	0,8527	0,9234
N°3	249,5	13,83%	0,9037	0,9506
N°4	250,0	13,86%	0,9019	0,9497
N°5	250,6	13,89%	0,8997	0,9485
N°6	150,6	8,35%	1,4971	1,2236
N°7	239,9	13,30%	0,9398	0,9694
N°8	168,5	9,34%	1,3381	1,1567
Total	1803,7	100,00%		
Moyenne	225,5	12,50%		

N.B. On a utilisé une feuille au grammage de 110g/m² ; cette donnée permet de retrouver les aires.

Nous avons ensuite « reconstitué » la silhouette de la 4 CV en recollant ces morceaux sur une feuille de papier (les limites sont en noir sur l'image ci-dessous).

Mais comment faire un redécoupage de cette image en 8 morceaux de même aire ?

Prenons par exemple le morceau n°2 (le plus grand) : il faut multiplier son aire par 0,8527 pour qu'elle soit égale à 1/8 (12,5%) du total ; et comme les aires sont proportionnelles aux carrés des longueurs, il faut multiplier celles-ci par √0,8527, soit 0,9234. De même pour le n°6 (le plus petit) : il faudra multiplier ses dimensions par 1,2236. Ces coefficients multiplicateurs sont calculés dans le tableau ci-dessus (colonnes de droite).



Sur l'image ci-contre, nous avons effectué le « recalibrage » de ces deux morceaux, en hachurant en rouge ce qu'il faudrait retrancher au n°2 et en vert ce qu'il faudrait ajouter au n°6. Et nous nous rendons compte que, si on continuait ainsi, les morceaux ne pourraient plus s'agencer pour former la silhouette de la 4CV.

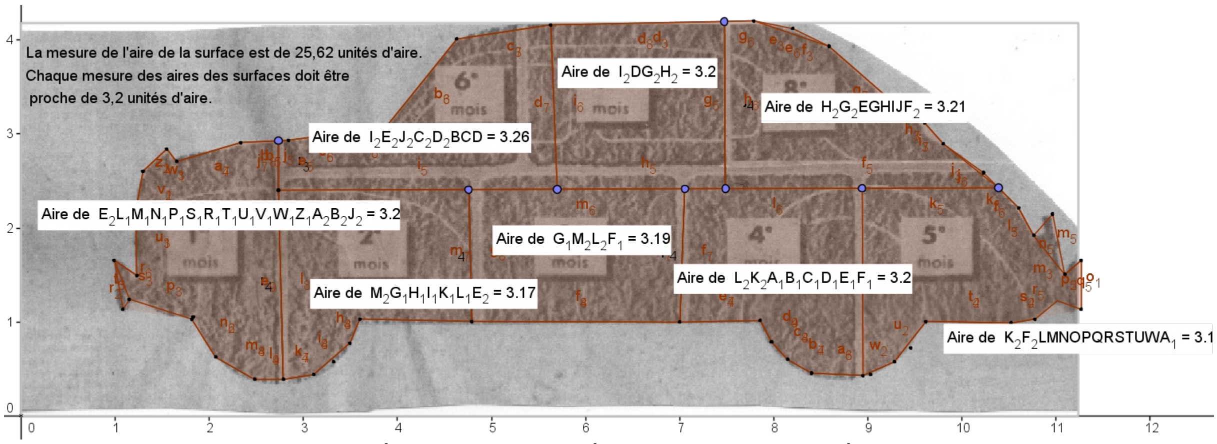
Le défi qui était proposé dans le dernier Petit Vert, « *Comment imaginer un découpage en 8 parties de même aire de cette silhouette ?* » s'avère finalement difficile à relever.

Nous vous proposons une piste : commencer par la partie n°1, et la mettre à l'échelle (en multipliant ses dimensions par 0,9897, c'est-à-dire en la laissant pratiquement telle quelle). Ensuite, déterminer la position de la droite horizontale qui séparera d'une part les morceaux n°2,3,4,5 et d'autre part les morceaux 6,7,8 de sorte que la somme des trois du dessus soit égale aux trois quarts de la somme des quatre du dessous. Retracer la silhouette obtenue (en laissant le n°1 en place), et recalculer au fur et à mesure tous les morceaux de façon qu'ils s'ajustent bien (ce qui modifiera leur forme par rapport à la publicité initiale).

Bon courage !!!

Autre proposition, en utilisant GeoGebra

Nous insérons l'image de la silhouette dans un repère, et nous marquons son contour avec un nombre suffisant de points pour que le polygone qui les joint soit le plus proche possible du contour de la 4CV. En tentant de s'approcher du découpage initial, et en procédant par « tâtonnements », on obtient le découpage suivant.

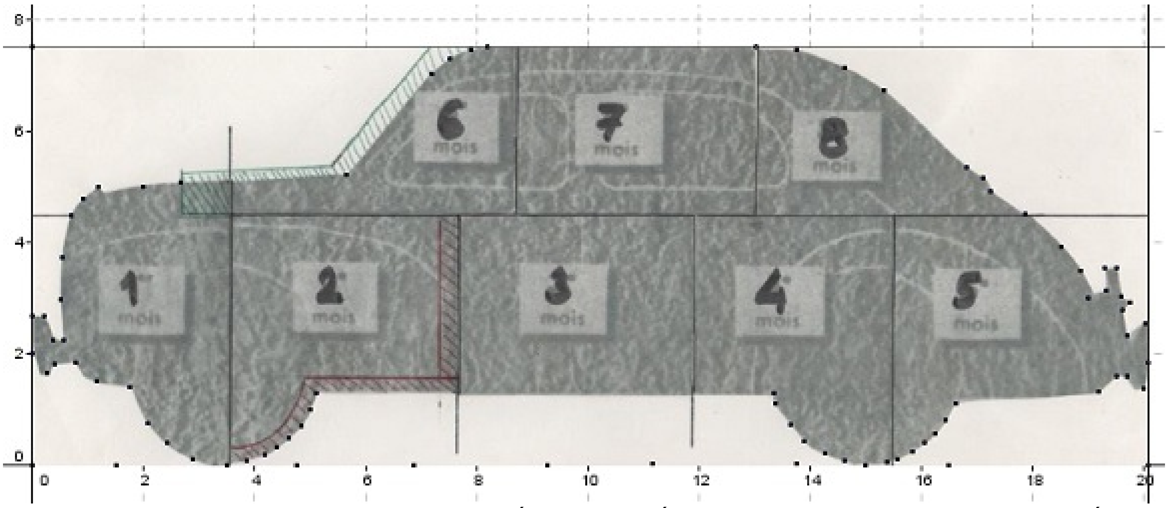


(Pour plus de lisibilité, nous avons effacé les noms des points délimitant le contour)

Une autre vision des choses

Revenons à l'énoncé initial : « *Comment imaginer un découpage en 8 parties de même aire de cette silhouette ?* ». Rien ne nous dit que nous devions prendre comme modèle le découpage proposé par l'Est Républicain. Il y a peut-être plus simple : par exemple partager la 4CV en 8 « tranches verticales » de même aire.

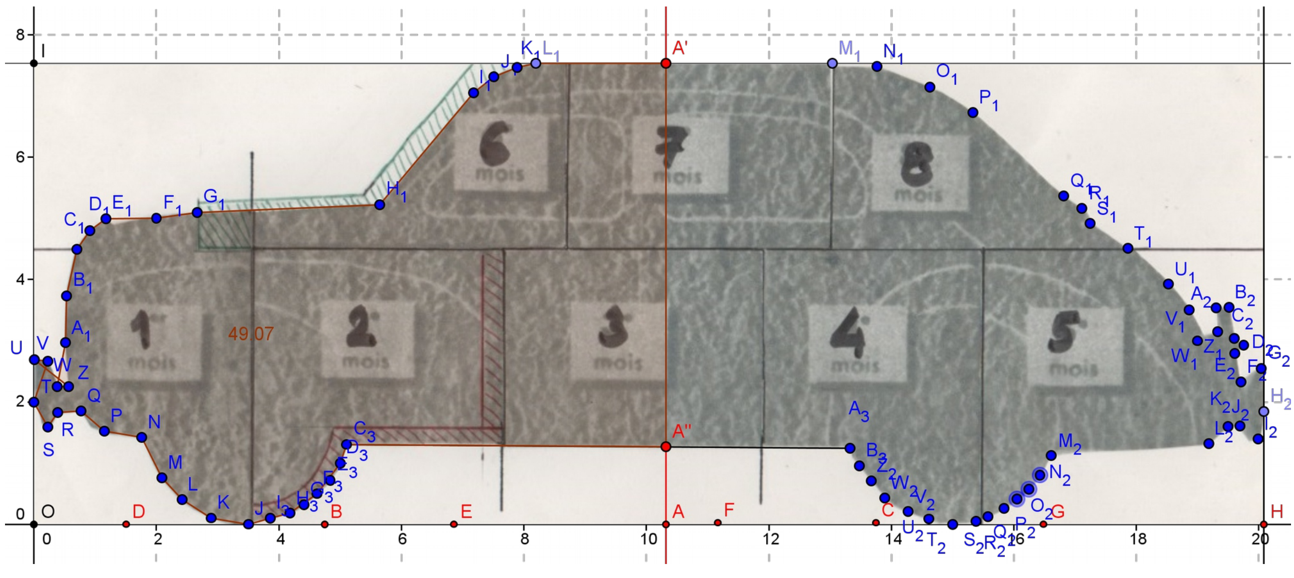
Pour cela, nous allons encore appeler GeoGebra à l'aide : nous joignons tous les points pour former un polygone, dont nous demandons à GeoGebra de calculer l'aire totale.



(Sur cette image, nous n'avons pas nommé les points délimitant le contour, pour plus de lisibilité)

Sur l'axe des abscisses, nous allons placer les points A, B, C, D, E, F, G (pour l'instant positionnés de façon très approximative) qui nous serviront à construire notre découpage en 8 bandes.

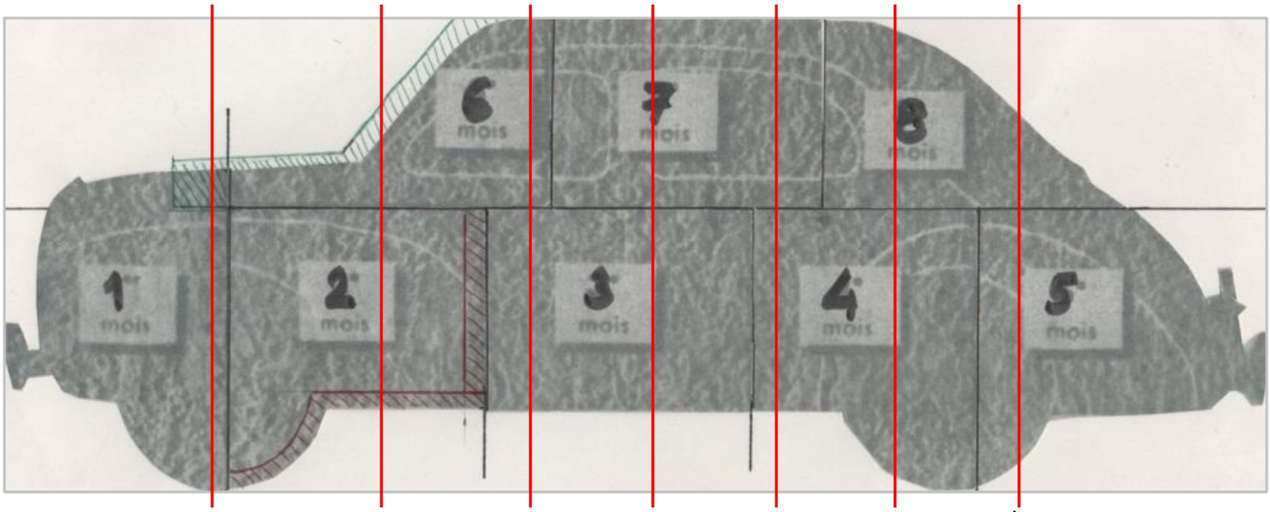
Commençons par le point A : la perpendiculaire en A à l'axe des abscisses coupe la silhouette de la voiture en A' et A", qui nous permettent d'obtenir un nouveau polygone A"C_3D_3...L_1A'. Nous déplaçons alors le point A jusqu'à ce que l'aire de ce polygone soit égale (compte tenu de la précision de GeoGebra) à la moitié de l'aire totale calculée précédemment. Notre 4CV est désormais coupée en deux parties de même aire[1].



Reste à déterminer, de la même façon, la position de B entre O et A, de C entre A et H (on aura ainsi quatre quarts), puis de D entre O et B, etc.

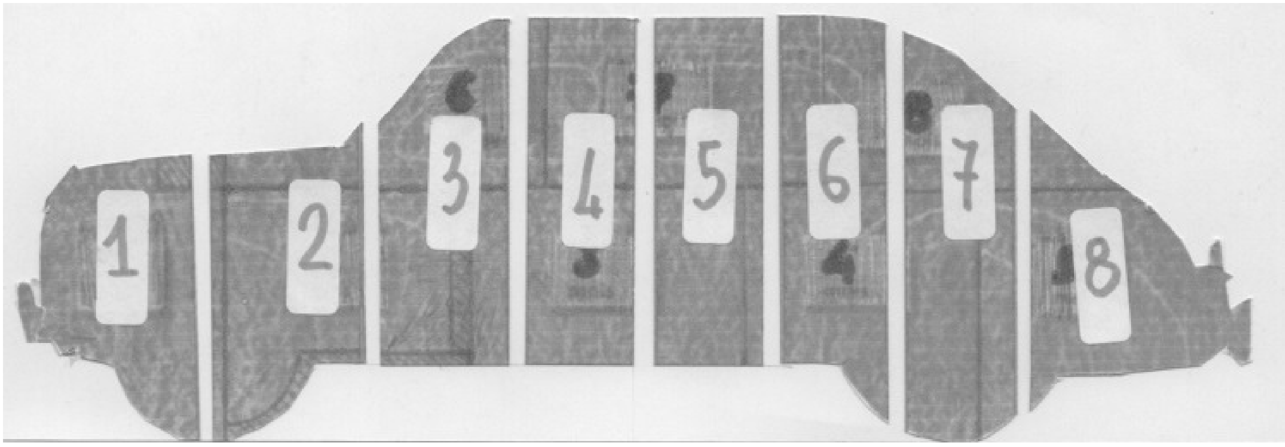
Finalement, après quelques difficultés pour obtenir les points où les verticales cherchées coupent la frontière de la silhouette lorsqu'il y a des « arrondis » comme les roues, voici le résultat :

1 Contrairement à ce que certains insinuent, couper une 4CV en deux ne donne pas deux 2CV !



(*veuillez excuser l'auteur de ces dessins, mais il a pris comme image de fond celle où figuraient les hachures rouges et vertes évoquées plus haut, et n'a pas eu le courage de recommencer son travail*)

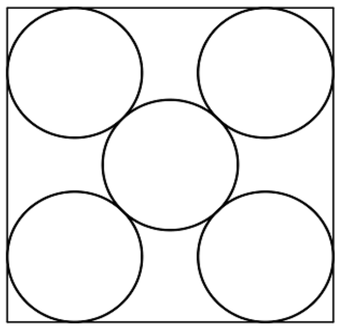
Et voici ce que l'Est Républicain aurait pu proposer, avec les huit parts égales correspondant aux huit mensualités égales.



* * * * *

DÉFI LYCÉE 121

Dans une caisse carrée de 20 cm de côté, on a disposé cinq bouteilles identiques qui rentrent « juste » dans la caisse, comme le montre la figure ci-contre.



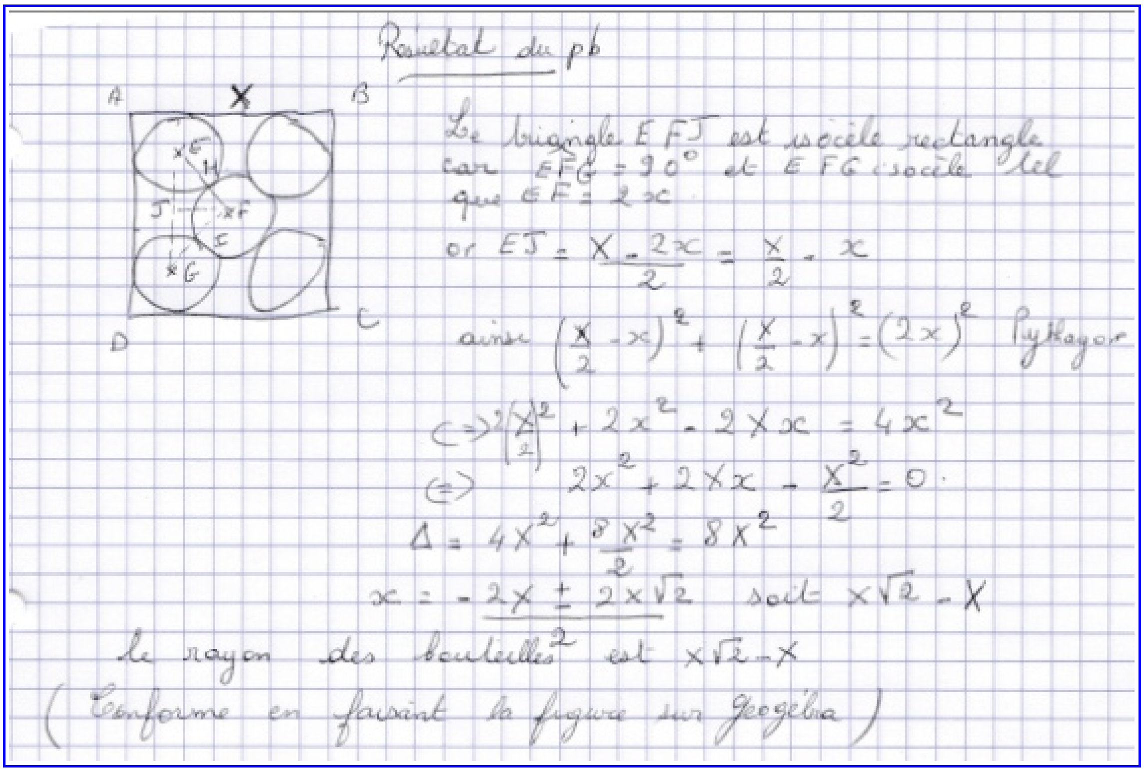
Quel est le diamètre de ces bouteilles ?

Vous pouvez généraliser le problème en prenant un carré de x cm de côté...

Envoyez-nous votre solution rédigée, ainsi que les éventuels fichiers (GeoGebra, etc.) que vous auriez eu besoin d'utiliser.

LA SOLUTION

Une collègue nous a envoyé la solution proposée par un élève de $1^{\text{ère}}$ S.



Résultat du pb

Le triangle EFJ est isocèle rectangle car $\widehat{EFG} = 90°$ et EFG isocèle tel que $EF = 2x$

or $EJ = \frac{X - 2x}{2} = \frac{X}{2} - x$

ainsi $\left(\frac{X}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{X}{2} - x\right)^2 = (2x)^2$ Pythagore

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{X}{2}\right)^2 + 2x^2 - 2Xx = 4x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2Xx - \frac{X^2}{2} = 0.$

$\Delta = 4X^2 + \frac{8X^2}{2} = 8X^2$

$x = \frac{-2X \pm 2X\sqrt{2}}{2}$ soit $X\sqrt{2} - X$

le rayon des bouteilles est $X\sqrt{2} - X$

(conforme en faisant la figure sur geogebra)

L'image scannée envoyée étant peu lisible, nous reproduisons ci-dessous ses calculs.

Les triangle EFJ est isocèle rectangle car l'angle EFG vaut 90° et EFG isocèle tel que EF = 2x.

Or $EJ = \frac{X - 2x}{2} = \frac{X}{2} - x$ *. Ainsi* $\left(\frac{X}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{X}{2} + x\right)^2 = (2x)^2$ *(Pythagore).*

Ce qui équivaut à $2\left(\frac{X}{2}\right)^2 + 2x^2 - 2Xx = 4x^2$ *, soit* $2x^2 + 2Xx - \frac{X^2}{2} = 0$. $\Delta = 4X^2 + \frac{8X^2}{2} = 8X^2$

$x = \frac{-2X \pm 2X\sqrt{2}}{2}$ *soit* $x = X\sqrt{2} - X$ *. Le rayon des bouteilles est* $X\sqrt{2} - X$

(conforme en faisant la figure sur GeoGebra).

N.B. Pour une caisse de 20 cm de côté, cela donne un diamètre d'environ 8,3 cm pour les bouteilles. Ce qui correspond à des bouteilles de champagne (à boire avec modération)...

* * * * *

DÉFI COLLÈGE 122

Voici une image du tableau de Gary Andrew Clarke, intitulé « The four corners ».

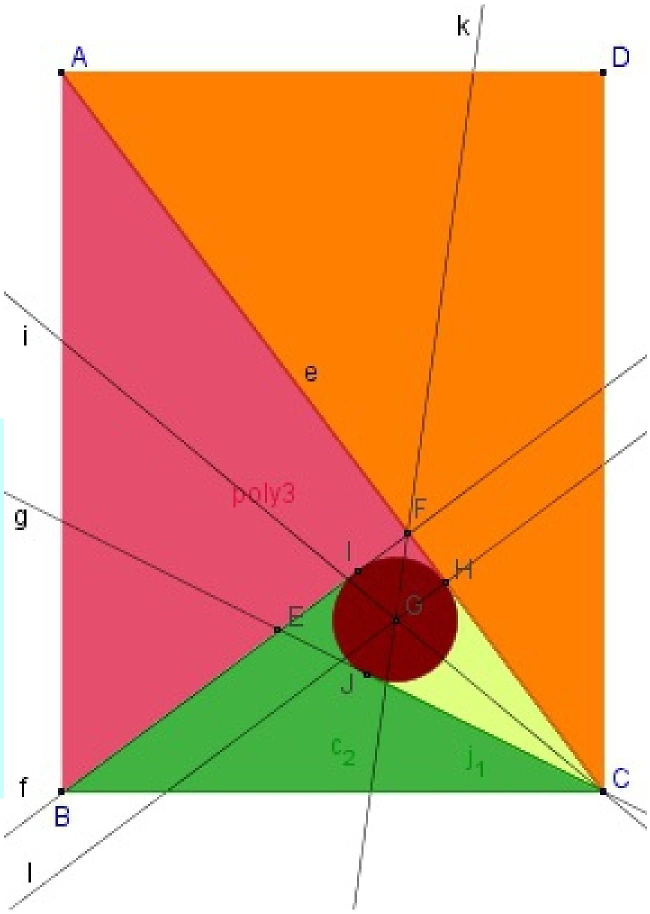
Il s'agit de **reproduire cette image**, soit à l'aide de la règle et du compas, soit à l'aide d'un logiciel de géométrie.
Vous devez décrire votre protocole de construction, en précisant les hypothèses que vous avez faites.
Dans un premier temps, vous pouvez vous contenter des tracés des segments et du cercle.
Dans un second temps, si vous avez utilisé un logiciel, expliquez comment vous procédez pour colorier les cinq formes présentes sur cette image.

UNE SOLUTION

Tout d'abord il y avait un certain nombre d'hypothèses à faire.

- Le rectangle de départ était-il quelconque ? ou un rectangle de proportion 4/3 (option choisie dans la version présentée ci-dessous) ? ou un rectangle d'or (hypothèse qui pouvait être écartée, la proportion 1/1,618 environ ne correspondant pas au tableau) ? …
- Le point F était-il bien le pied de la perpendiculaire menée de B sur [AC] ?
- Le cercle devait être tangent aux droites (BF) et (CF). Mais comment déterminer le point J ? Etait-il vraiment sur la bissectrice de l'angle BCA ?

Un étude minutieuse de la figure originale laisserait à penser, par exemple, que F n'est pas tout à fait le pied de la perpendiculaire issue de B sur (AC)...



En tout état de cause, nous vous proposons la solution de Christelle Kunc (nous en avons reçu d'autres, mais pas à partir des mêmes hypothèses ; mais aucune réalisée par des élèves).

Elle a utilisé GeoGebra, en partant d'un rectangle de proportion 4/3. Voici son protocole de construction (qui permet de réaliser la construction « à l'ancienne », à la règle et au compas).

Points A(-3,5), B(-3,-7), C(6,-7) et D(6,5)
Segment e=[AC] *(longueur 15)*
Droite f perpendiculaire à (AC) issue de B
Droite g bissectrice de l'angle BCA
Point E intersection des droites f et g
Point F intersection des droites e et f
Droite i bissectrice des droites g et e
Droite k bissectrice des droites f et e
Point G intersection des droites i et k *(ce sera le centre du cercle)*
Droite l passant par G et perpendiculaire à e
Point H intersection de E et L
Cercle p de centre G passant par H.

A partir de ce moment, la figure en « noir et blanc » est terminée.
Reste à colorier. Il faudra alors faire preuve d'astuce, GeoGebra ne permettant de colorier que des polygones ou des cercles : or il y a dans cette figure des « triangles curvilignes » (EIJ, IFH, CJH) ...

L'astuce consistera, par exemple, à colorier en vert le quadrilatère BIJC, en rouge le quadrilatère AHIB et en jaune le triangle CHJ. Le disque de centre G sera alors colorié en brun, avec une « densité de couleur » suffisante pour qu'elle « écrase » les parties à cacher des quadrilatères précédents.

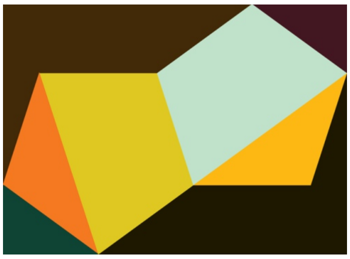
Complément (par François Drouin)

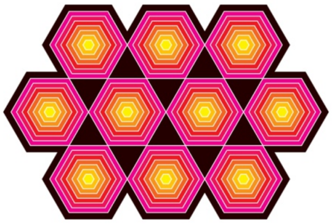
Une promenade parmi des œuvres de Gary Andrew Clarke

Gary Andrew Clarke est un artiste anglais né en 1970. Un de nos adhérents nous a signalé son travail et son site.

L'œuvre de [gauche]() et l'œuvre de [droite]() ne visualisent pas des « Petits L ». Des alignements ont sans doute servi à la construction.

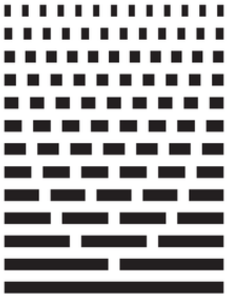
Des [Tangrams]() et une spirale [spirale]() se remarquent dans un sympathique algorithme de construction. Le nombre d'or est présent.





Des [pentagones](), des [hexagones]() et une [famille de polygones réguliers]() ont été utilisés.

Ces deux œuvres pourront être montrées pour visualiser le théorème de Thalès. Par ailleurs, celle de droite visualise des triangles de même aire.



Si la largeur de l'œuvre est prise comme unité de longueur, des fractions de 1 sont visualisées. Par ailleurs, un algorithme est utilisé pour du coloriage de l'œuvre de gauche et des courbes sont visualisées dans celle de droite.

.

La première œuvre peut être mise en relation avec ce qui a été évoqué en particulier dans le Petit Vert n°122 à propos de la somme de carrés de nombres entiers. L'artiste a visualisé $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.
La deuxième œuvre pourra être mise en relation avec des pavages arabo musulmans que nos brochures « Maths et Arts » ont commencé à aborder.
La troisième œuvre est à mettre en relation avec « Arithmetic Composition » de Théo Van Doesburg évoquée et étudiée dans le Petit Vert n°111 (septembre 2012).

Avec des élèves

Ces propositions donneront peut être envie d'introduire certaines de ces œuvres lors d'études de contenus mathématiques. N'hésitez pas à nous faire parvenir ce que vous avez mis en place avec vos élèves (contact@apmeplorraine.fr) et n'oubliez pas de scanner certains de leurs travaux : les relations « Maths et Arts » peuvent enrichir ce qui est enseigné dans les classes.

Par ailleurs, en 2015, les projets de programmes pour le Cycle 4 évoquent « *Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie ».* Le site de Gary Andrew Clarke présente de nombreuses occasions de mettre œuvre ces exemples d'activités et ne nous interdit pas l'usage des instruments traditionnels.

François DROUIN

* * * * *

DÉFI LYCÉE 122

Petit problème de probas

1. On imagine un tournoi par élimination directe entre 3 joueurs A, B et C.

En s'appuyant sur les statistiques des matchs précédents, nous supposerons que :
- Quand A joue contre B, A gagne avec une probabilité de 0,75 ;
- Quand B joue contre C, B gagne avec une probabilité de 0,65 ;
- Quand C joue contre A, C gagne avec une probabilité de 0,55.

(on est dans la situation du paradoxe de Condorcet).
Le tournoi se déroule ainsi : deux des joueurs s'affrontent, et le gagnant joue contre le troisième joueur. Je suis l'organisateur du tournoi, et j'ai donc le choix entre trois possibilités :
- Soit je fais jouer A et B en premier, et le vainqueur rencontrera C ;
- Soit je fais jouer A et C en premier, et le vainqueur rencontrera B ;
- Soit je fais jouer B et C en premier, et le vainqueur rencontrera A.

Mais le joueur C est mon chouchou, et je ne suis pas impartial. Comment vais-je organiser mon tournoi pour favoriser C ?

2. Compliquons un peu…

J'invite un quatrième joueur, D.
Les statistiques concernant A, B et C de la première partie ne sont pas modifiées.
On ajoute les données suivantes : A gagne contre D avec une probabilité de 0,70 ; B gagne contre D avec une probabilité de 0,60 ; D gagne contre C avec une probabilité de 0,50 (ils ont exactement le même niveau).
Le tournoi se jouera alors ainsi :
- Soit A joue contre B et C contre D, et les vainqueurs de ce premier tour s'affronteront ;
- Soit A joue contre C et B contre D, et les vainqueurs de ce premier tour s'affronteront ;
- Soit A joue contre D et B contre C, et les vainqueurs de ce premier tour s'affronteront.

Je suis toujours aussi impartial et je veux encore favoriser C.
Comment vais-je organiser mon tournoi ?

3. Et si on avait 8 joueurs ? 16 joueurs ? 32 …

On procèdera comme habituellement dans les tournois : un joueur sur deux est éliminé à chaque tour.
L'informatique peut-elle nous aider ?

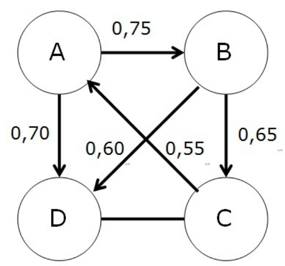
LA SOLUTION

1. Il n'y a même pas besoin de faire de calculs, il est « évident » que C a intérêt à rencontrer A au second tour. Il faut donc faire jouer d'abord A contre B.
Cependant, on pourrait résoudre ce problème en construisant les trois arbres de probabilités correspondant aux trois scénarios possibles. On constaterait sur ces arbres que :
- si le tournoi débute par A contre B, C gagne la finale avec une probabilité de 0,5 ;
- si le tournoi débute par A contre C, C gagne la finale avec une probabilité de 0,1925 ;
- si le tournoi débute par B contre C, C gagne la finale avec une probabilité de 0,1925.

Il faut donc bien commencer par A contre B, qui donne le plus de chances à C.

2. Là encore, il faut que la finale oppose A à C si on veut favoriser C. Il faut donc que A gagne le premier match. Et on aura tout intérêt à commencer encore par les matchs A contre B et C contre D.

Là encore, ou pourrait représenter toutes les possibilités par des arbres, mais la situation se complique... L'utilisation du petit schéma ci-contre, indiquant les probabilités de victoires entre les joueurs, peut aider au raisonnement.



3. Et si on *a*vait 8 joueurs ? 16 joueurs ? 32 ...

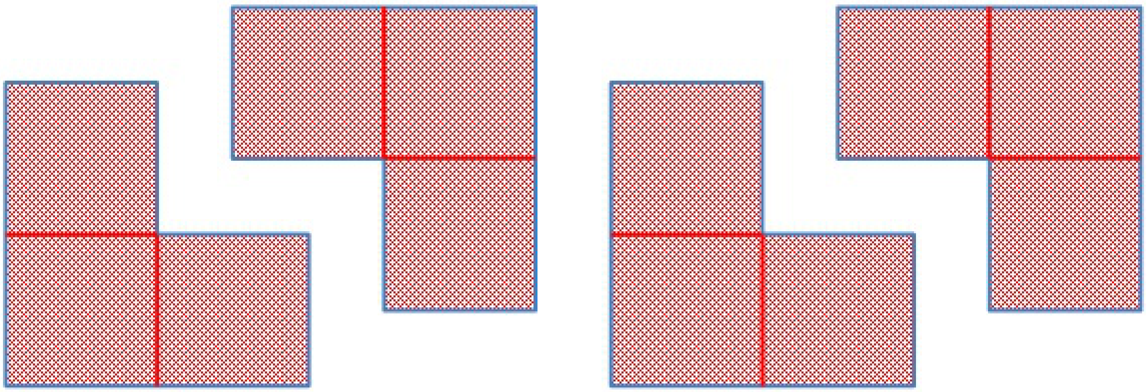
On procèdera comme habituellement dans les tournois : un joueur sur deux est éliminé à chaque tour. L'informatique peut-elle nous aider ? Certainement...
Mais nous sommes à la recherche d'un « programmeur » de bonne volonté qui pourrait nous soumettre un algorithme...

* * * * *

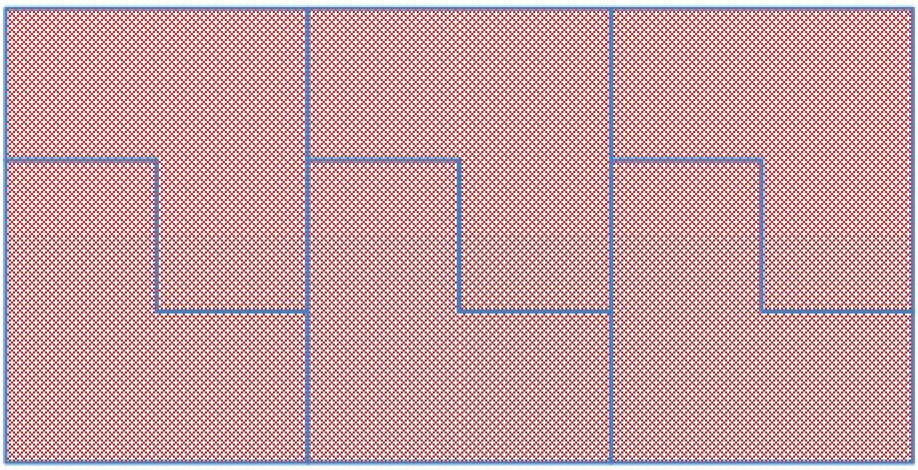
DÉFI COLLÈGE 123

Rectangles et « Petits L »

Tu disposes de nombreux « Petits L » semblables à ceux dessinés ci-dessous.



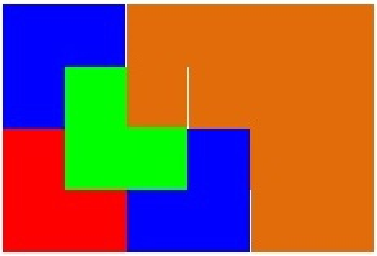
Six « Petits L » permettent la réalisation d'un rectangle dans lequel sont visibles trois rectangles 3x2 formés de deux pièces assemblées (image ci-dessous).



Six « Petits L » permettent la réalisation d'un rectangle dans lequel sont visibles trois rectangles 3x2 formés de deux pièces assemblées (image ci-dessous).

En assemblant des « Petits L », est-il possible de construire un rectangle dans lequel ne sera visible aucun rectangle 3x2 formé de deux pièces assemblées ?

UNE SOLUTION



Un « Petit L » dessiné à l'échelle 2 peut être recouvert par quatre « Petits L » à l'échelle 1. Deux exemplaires de ce recouvrement fournissent un rectangle 6×4 dans lequel n'est visible aucun rectangle 3×2 formé de deux pièces assemblées. Ces rectangles peuvent s'assembler pour former d'autres rectangles qui répondent au défi proposé. Il existe donc une infinité de rectangles qui répondent au défi posé.

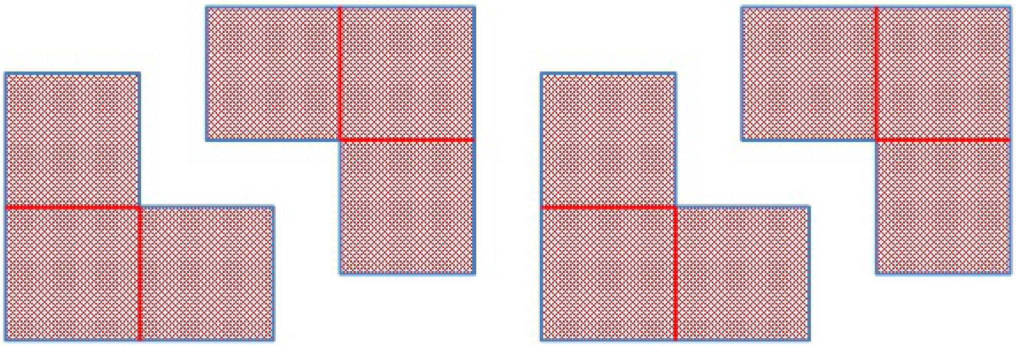
Un nouveau défi apparait alors : prouver qu'il faut au moins huit pièces pour construire un rectangle solution. L'étude systématique des rectangles d'aire inférieure à 24 et pour laquelle une des dimensions est un multiple de 3 pourra convaincre les lecteurs.

* * * * *

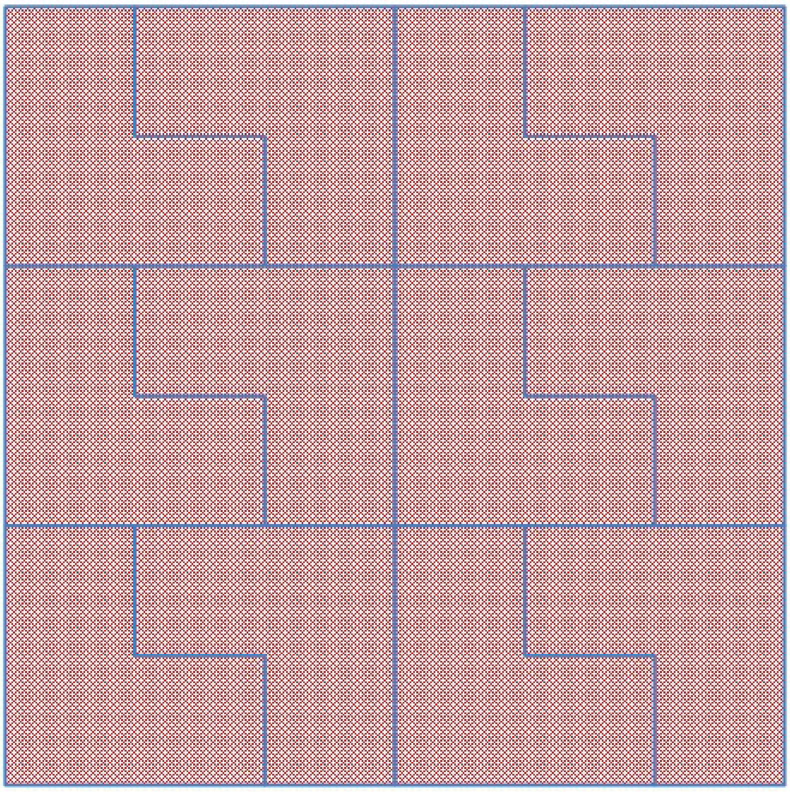
DÉFI LYCÉE 123

Carrés et « Petits L »

Tu disposes de nombreux « Petits L » semblables à ceux dessinés ci-dessous.



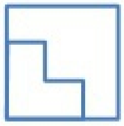
Ce carré 6x6 est aisément recouvert avec douze « Petits L » : comment caractériser les carrés recouvrables par des « Petits L » ?



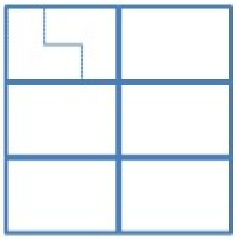
SOLUTION

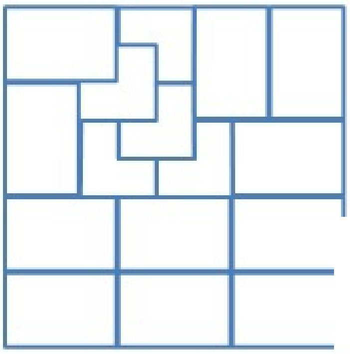
Si n est le côté du carré, son aire est n^2. n^2 doit être un multiple de 3, il faut donc que n soit un multiple de 3 pour espérer le recouvrement du carré par des « Petits L ».

Au vu du cas « $n = 3$ », il est clair que cette condition n'est pas suffisante car le carré 3×3 ci-contre ne peut pas être recouvert par des « Petits L ».



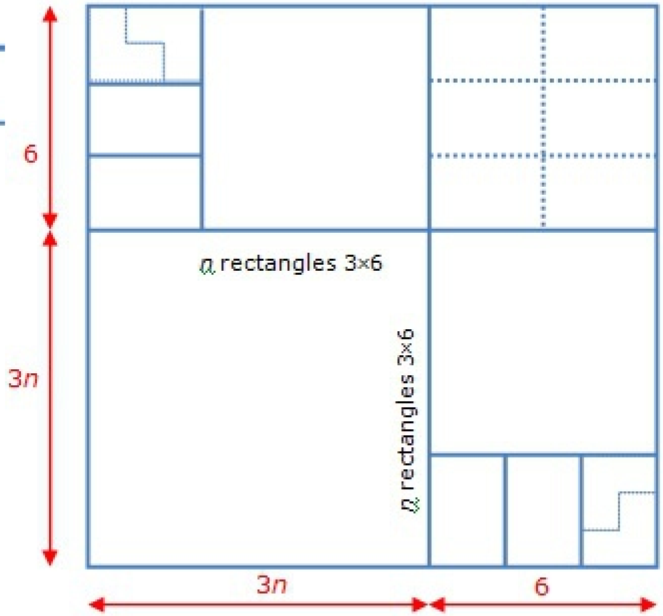
Les carrés 6×6 et 9×9 peuvent être recouverts par des « Petits L ».





Tout côté de carré multiple de 3 plus grand que 9 peut s'écrire sous la forme $c = 3n + 6$.

Le dessin ci-contre montre comment découper le carré pour réussir à le recouvrir.



Puisque les carrés de côté 6 et 9 sont recouvrables, on en déduit la faisabilité pour ceux de côté « 6 + 6 = 12 », « 9 + 6 = 15 » ; puis pour ceux de côté « 12 + 6 = 18 » et « 15 + 6 = 21 », etc.

Tout carré de côté multiple de 3 (autre que 3) fait partie soit de la famille issue du carré de côté 6, soit de la famille issue du carré de côté 9.

Tout carré de côté multiple de 3 (autre que 3) est donc recouvrable par des « Petits L ».

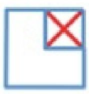
« Avoir un côté multiple de 3 et au moins égal à 6 » caractérise donc les carrés recouvrables par des « Petits L ».

À la page suivante, vous trouverez des compléments à cette solution.

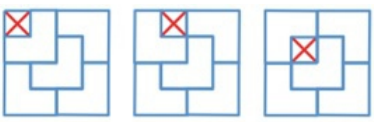
Voir également le problème publié dans le [Petit Vert n°36](:(page 23) et sa solution dans le [Petit Vert n°37]:(page 18).

Compléments au défi lycée n°123

Des carrés « presque recouverts » par des « Petits L »



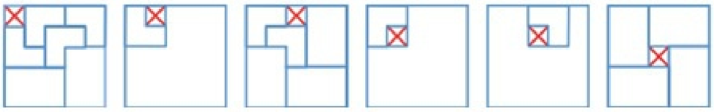
Le carré 2×2 ne peut pas être recouvert par un « Petit L ».
Une case reste libre. 2×2 – 1 = 3.



4×4 – 1 = 15.
Cela donne envie d'utiliser cinq « Petits L » : La case vide aura trois positions possibles, les autres cases peuvent être

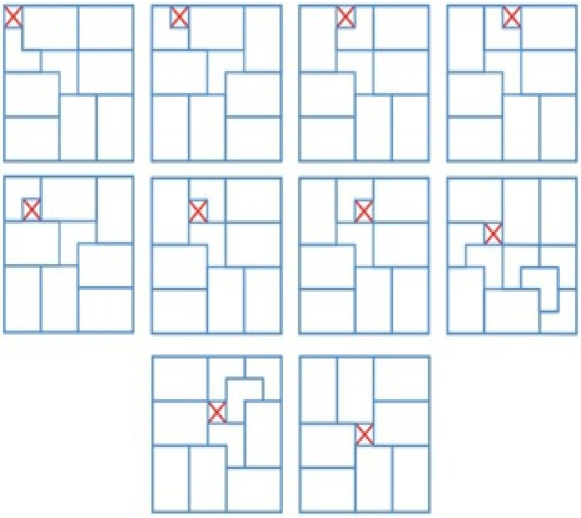
recouvertes par des « Petits L ».
Cette situation peut-elle se généraliser à tous les carrés de côté non multiple de 3 ?

Un entier non multiple de 3 peut s'écrire « $3n + 1$ » ou « $3n + 2$ ». Élevé au carré, il s'écrira « $9n^2 + 6n + 1$ » ou « $9n^2 + 12n + 4$ ». Si une une case reste vide, le nombre de cases à recouvrir sera « $9n^2 + 6n$ » ou « $9n^2 + 12n + 3$ ». Dans les deux cas, un multiple de 3 est obtenu, ce qui laisse espérer un recouvrement par des « Petits L ».

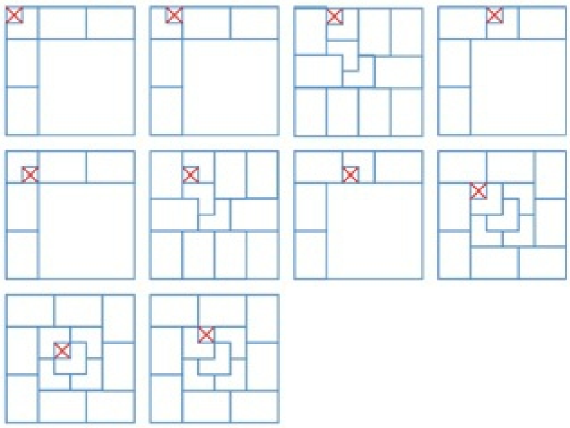


A une symétrie ou une rotation près du carré 5×5, la case laissée vide a six positions possibles. Seules trois d'entre elles amènent à un recouvrement des cases restantes par des « Petits L ».
Il est aisé de se convaincre que les rectangles 3×2 dessinés sont recouvrables par deux « Petits L ».

Il est également aisé de se convaincre que les carrés 6×6 dessinés sont recouvrables par des rectangles 3×2, donc par des « Petits L ».



A une symétrie ou une rotation près du carré 7×7, la case laissée vide a dix positions possibles. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».



A une symétrie ou une rotation près du carré 8×8, dix positions sont possibles pour la case laissée vide. Toutes amènent à un recouvrement possible des cases restantes par des « Petits L ».
La recherche pourrait se poursuivre pour des carrés plus grands et pour éventuellement une généralisation.

* * * * *

Note de la rédaction : à partir du n°124,
on ne distinguera plus les défis « collège » des défis « lycée ».

* * * * *

DÉFI 124-a

Les bruits qui courent

On dit que... les Glaner gagnent 525 € de plus que les Ferren.
On dit que... M. Glaner gagne 20 % de plus que M. Ferren.
On dit que... Mme. Glaner gagne 30 % de plus que Mme. Ferren.
On dit que... les Ferren gagnent 2250 €.
On dit que... M. Ferren gagne 25 % de plus que son épouse.

Qu'en pensez-vous ? Peut on déterminer le salaire de chacun ?

Il s'avère que l'un de ces cinq « bruits qui courent » est faux. Peut-on alors déterminer le salaire de chacun ?

ÉLÉMENTS DE RÉPONSE

Notons A le revenu de Mme. Glaner, B celui de M. Glaner, C celui de Mme. Ferren et D celui de M. Ferren.

On a C+D=2250, d'où C+1,25C=2250, d'où C=1000 ; par conséquent D=1250.
D'où A=1,3C = 1300 et B=1,2D=1500, et par conséquent A+B=2800.
Or la première assertion revient à A+B=C+D+525, soit 2800=2250+725=2775.
Il y a contradiction, donc incompatibilité entre les 5 affirmations.

- En « éliminant » la première affirmation, on trouve A=1300, B=1500, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la deuxième affirmation, on trouve A=1300, B=1475, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la troisième affirmation, on trouve A=1275, B=1500, C=1000 et D=1250.
- En « éliminant » la quatrième affirmation, cela ne « tombe pas juste » ; il y a une solution « arrondie » au centime : A≈1240.91, B≈1431.82, C≈954.55 et D≈1193.18.
- En « éliminant » la cinquième affirmation, on trouve A=975, B=1800, C=750 et D=1500.

* * * * *

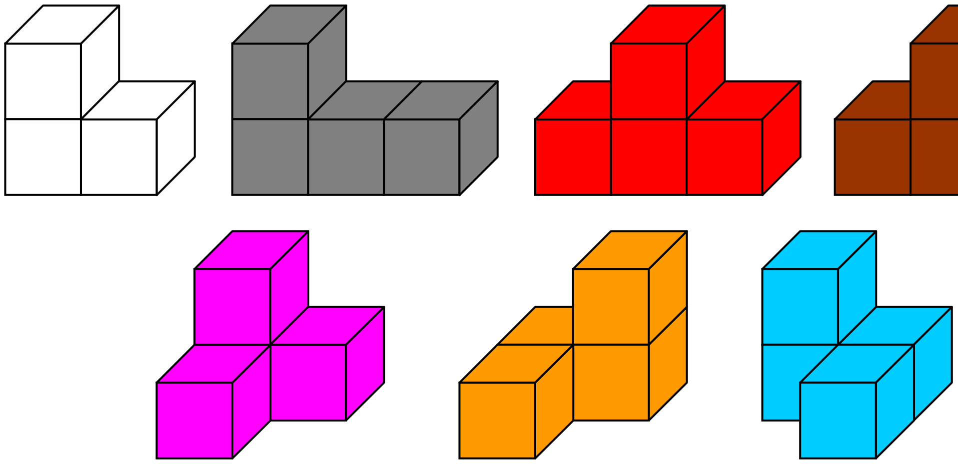
DÉFI 124-b

Des prismes avec les sept pièces du cube Soma

Selon Martin Gardner, pendant un cours de mécanique quantique, le danois Piet Hein aurait inventé ce casse tête en 1936 pendant un cours de mécanique quantique, ne gardant parmi les assemblages de trois ou quatre cubes identiques que ceux qui ne sont pas des pavés droits.

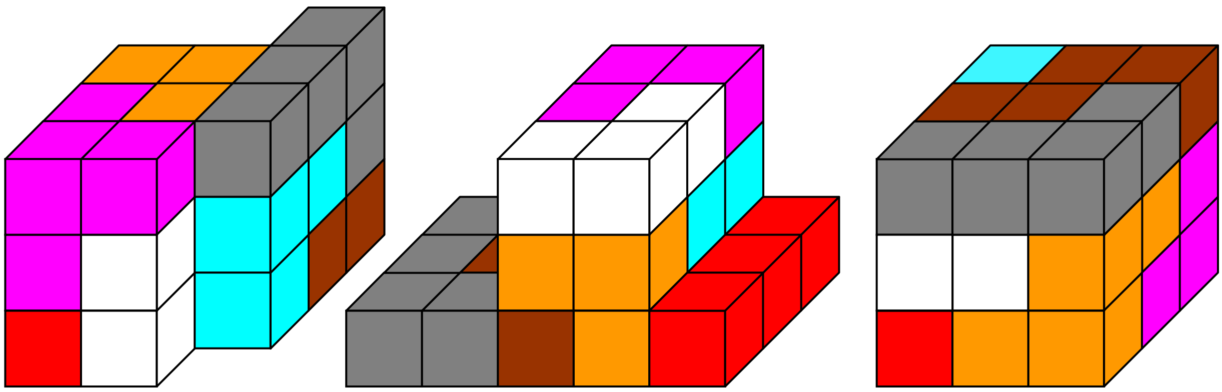
Il semblerait que Piet Hein ait déjà déposé un brevet en 1933 : la « légende » racontée par Gardner reste sympathique, le cube Soma a donc au moins 80 ans.

Voici des dessins des sept pièces trouvées.



Piet Hein ayant remarqué qu'elles formaient un assemblage de 27 cubes a réfléchi à la formation d'un cube 3×3×3.

On peut réaliser des prismes en utilisant toutes les pièces, en voici trois exemples.



Le défi : Parmi les prismes droits réalisables avec les sept pièces, comment caractériser ceux dont la longueur totale des arêtes est maximale ?

Comment caractériser ceux dont l'aire totale des faces est maximale ?

Aide éventuelle : Par exemple, dans le prisme de droite ci-dessus (qui est un cube), la longueur totale des arêtes est de 36 unités (12 arêtes de 3 unités), et l'aire totale est de 54 unités (6 faces de 9 unités).

ÉLÉMENTS POUR LA SOLUTION

Des éléments de solution, des compléments et de nouvelles idées de recherche, proposés par François Drouin, figurent dans les pages suivantes.

Des prismes avec les sept pièces du cube Soma

Dans ce qui suit, l'unité de volume sera le volume d'un cube unitaire, l'unité d'aire sera l'aire d'une face d'un cube unitaire, l'unité de longueur sera la longueur d'une arête d'un cube unitaire.

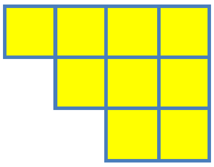
L'utilisation des sept pièces amène à la réalisation de solides de volume 27. Il est facile de se persuader que seuls ces deux cas sont possibles.

Aire de la base	9	3
Hauteur	3	9

Si p est le périmètre d'une face, B l'aire d'une face et h la hauteur, l'aire totale des faces d'un prisme est égale à $2B + p \times h$.

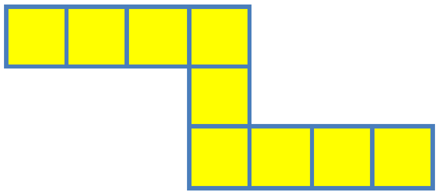
Des prismes d'aire de base égale à 9 et de hauteur égale à 3

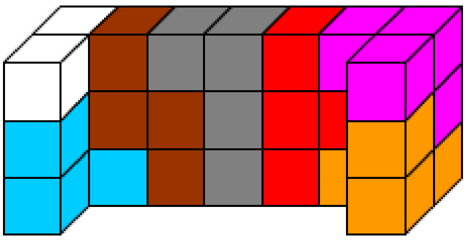
La hauteur étant égale à 3, une base est formée de 9 carrés unitaires accolés. Il s'agit donc de caractériser les assemblages de 9 carrés ayant un périmètre maximal.

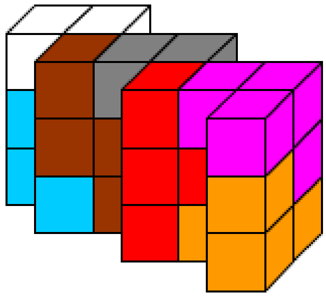


Le périmètre d'un tel assemblage est égal à la somme des périmètres des 9 carrés moins la longueur totale des côté ayant servi aux jonctions.
Pour cet exemple, $p = 9\times4 - 2\times11 = 14$ (11 est le nombre de jonctions entre les carrés). Pour que p soit maximal, il faut donc que le nombre de jonction soit minimal, c'est à dire 8.

Voici un assemblage de 9 carrés comportant 8 jonctions entre les carrés. $P = 9\times4 - 2\times8 = 20$; 20 est donc la valeur maximale de p.

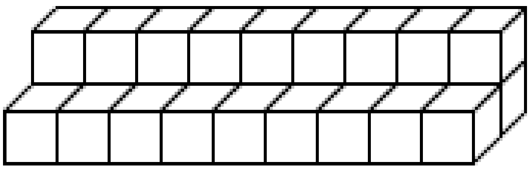




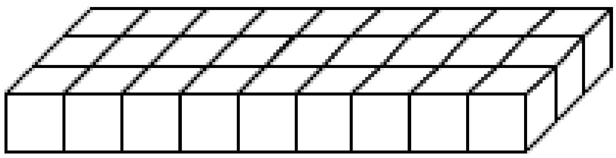


Les sept pièces du cube Soma permettent la réalisation de prismes dont la base correspond au critère évoqué précédemment.
Pour les prismes de hauteur 3, le maximum pour l'aire totale des faces est donc 78.

Des prismes d'aire de base égale à 3 et de hauteur égale à 9



prisme 1



prisme 2

Ces deux prismes sont les seuls pouvant être construits avec les 27 cubes assemblés. L'aire totale de leurs faces est égale à 78. Ils répondent à la variante du défi.
Les utilisateurs des pièces du cube Soma se persuaderont facilement que le prisme 2 n'est pas constructible avec les sept pièces.

Concernant le prisme 1, voici sous forme d'un tableau une preuve de sa non-constructibilité rédigée suite à des échanges avec deux lecteurs du Petit Vert.

Il y a 9 tranches verticales de 3 cubes dans le prisme.
La pièce rose remplit une tranche entière.
Plaçons le 4ème cube rose à gauche de la tranche entière.
Sur ce 4ème cube quelle pièce peut-on placer ?

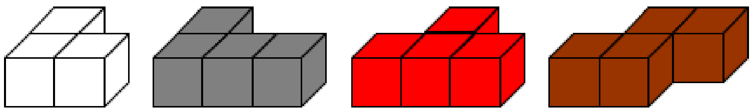
Au dessus du cube rose	**Couleur du cube devant le rose (donc pièce)**	**Suite du raisonnement**		**Conclusion**
« Bleu »				Impossible car emplacement vide d'un seul cube devant.
« orange »				Impossible car emplacement vide d'un seul cube devant.
« marron »	Impossible car une ligne de 3 cubes devant			
« rouge »	« gris » obligé	Scindage en 2 prismes	Impossible avec « orange « bleu » « marron » « blanc »	Si « orange » n'est pas une base de ce prisme, ce prisme est scindable en deux prismes plus petits…Impossible. « orange » ne peut donc qu'être une base.
« gris	« rouge »	Scindage en 2 prismes	Impossible avec « orange » « bleu » « marron » « blanc »	Si orange n'est pas une base de ce prisme, ce prisme est scindable en deux prismes plus petits…impossible. « orange » ne peut donc qu'être une base.
	Blanc*	Devant « gris », « marron »	On ne peut combler les 2 cubes au-dessus de « marron »	
		Devant « gris » « orange »	Impose prisme avec « orange » « rouge » « marron »	Impossible.
		Devant « gris » « rouge »	Impose « marron » devant « rouge »	« bleu » et « orange » devant le cube « marron » crée un cube vide au-dessus
« blanc »	« Noir » devant	Au dessus de « gris », « marron »	On ne peut combler les 2 cubes devant « marron »	
		Au dessus de « gris » « bleu »	Impose un prisme avec « orange » « rouge » « marron »	Impossible
		Au dessus de « noir » « rouge »	Impose « marron » devant « rouge »	« bleu » et « orange » sur le cube « marron » crée un cube vide devant comme première ligne

Pour des prismes de longueur totale des arêtes maximale

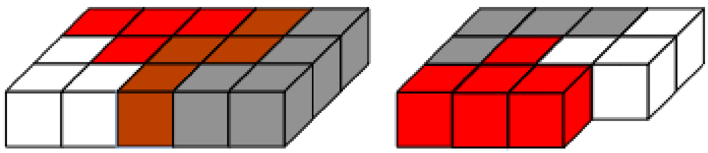
Cette recherche aurait pu également faire l'objet d'un défi proposé aux lecteurs utilisateurs des sept pièces du cube Soma ou des 27 cubes.
Une première difficulté est apparue pour les prismes de hauteur égale à 3 et donc de base formée de 9 carrés accolés. Sachant qu'un polygone a autant de sommets que de côtés, si n est le nombre de côtés de la base, si p est le périmètre d'une base, la longueur des arêtes du prisme est égale à $3n + 2p$. La recherche de l'aire maximale des faces nous a montré que 20 est la valeur maximale de p.
Le nombre n de sommets est à optimiser dans la formule $3n + 2p$ et nous amène à la question « Quel est le nombre maximum de sommets d'un polymino formé de 9 carrés accolés par des côtés entiers ? ». Il existe 1285 « ennéaminos ». Faute d'avoir dénombré les sommets de chacun, ce problème reste ouvert.

Des prismes en n'utilisant que certaines pièces formant le cube Soma

Des prismes de hauteur égale à 1

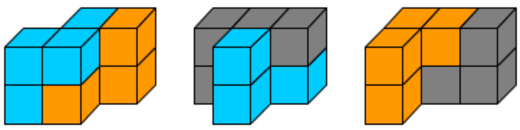


Seules ces quatre pièces sont des prismes droits. Leur hauteur est égale à 1.



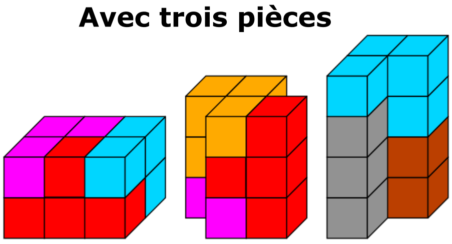
Des assemblages « plats » de certaines de ces quatre pièces forment des prismes de hauteur 1 tels que ceux dessinés ci-contre. Il y en a d'autres, bien sûr.
Le premier dessiné est celui qui utilise les quatre pièces proposées et est le seul parallélépipède réalisable. Par la suite, nous ne nous intéresserons qu'aux prismes de hauteur au moins égale à 2.

Avec deux pièces



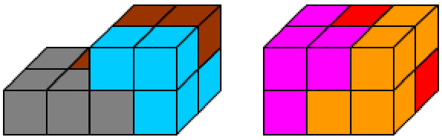
Réussirez-vous à prouver qu'il n'existe pas d'autres prismes droits de hauteur égale à 2 et formés de deux pièces du cube Soma ?

Avec trois pièces

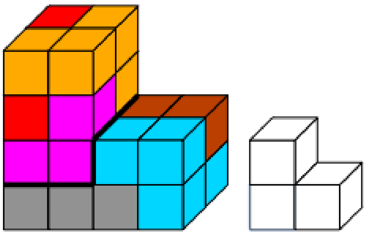


Il existe d'autres prismes droits formés de trois pièces du cube Soma.
Les deux premiers prismes peuvent être construits en remplaçant la pièce orange par la pièce bleue. Chaque fois qu'on a une solution utilisant la pièce bleue ou la pièce orange, on a aussi la construction symétrique en échangeant ces deux couleurs.
Trouverez-vous d'autres prismes droits formés de trois pièces du cube Soma ?

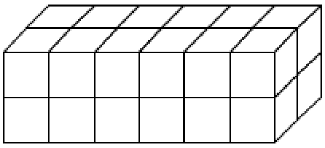
Avec six pièces



L’assemblage de ces deux prismes construits chacun avec 3 pièces permet la réalisation de nombreux prismes construits avec les six pièces.



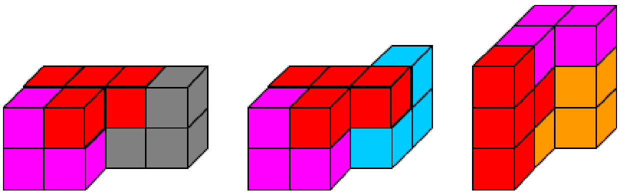
Remarque: Cet exemple est la construction « échelle 2 » de la pièce non utilisée.



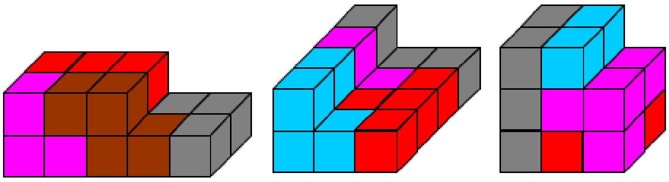
Ce prisme formé de 24 cubes est-il réalisable avec 6 des pièces du cube Soma ?

Quelques prismes supplémentaires

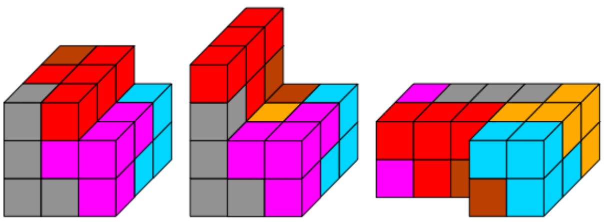
Avec trois pièces



Avec 4 pièces

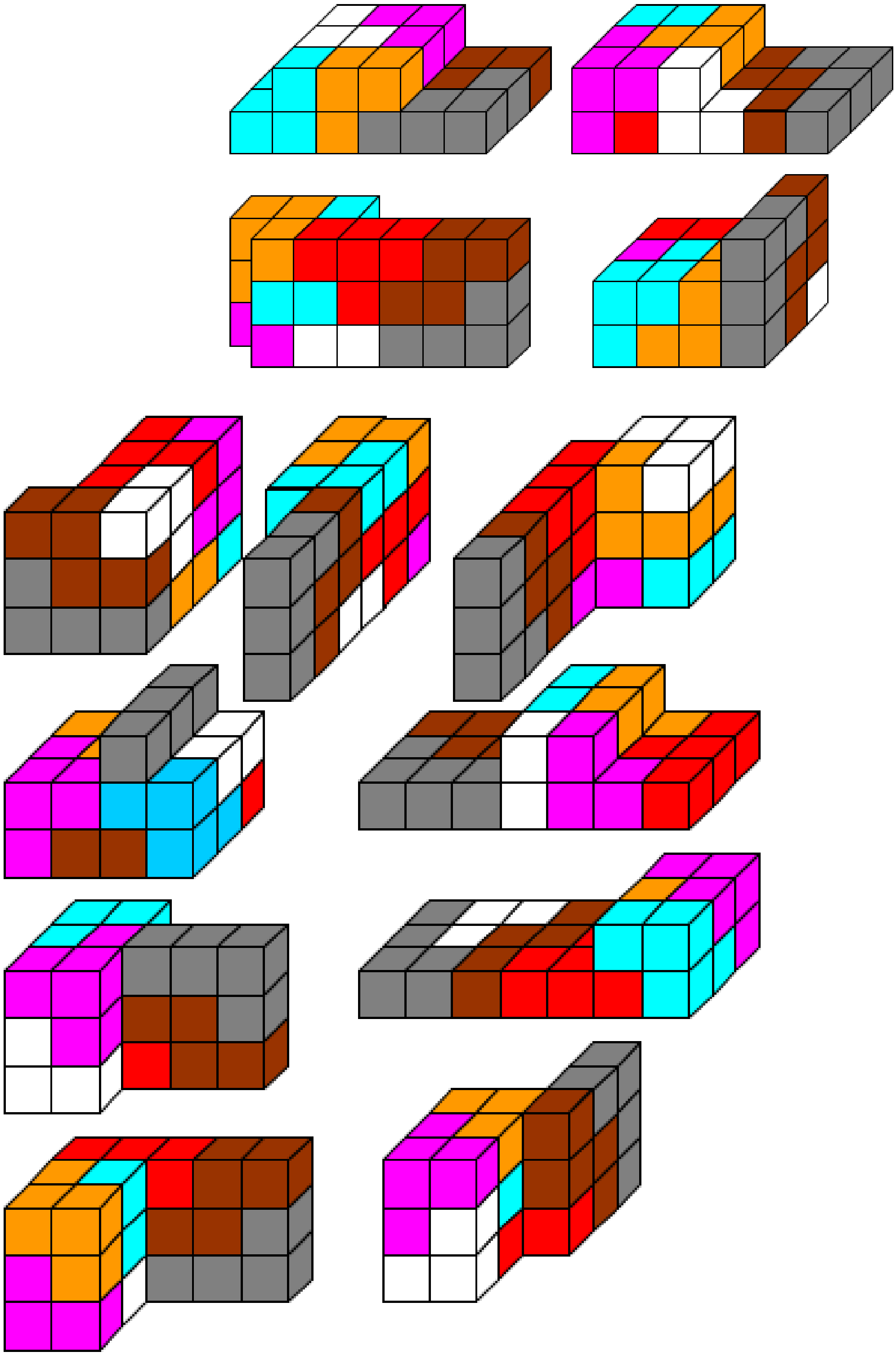


Avec 6 pièces

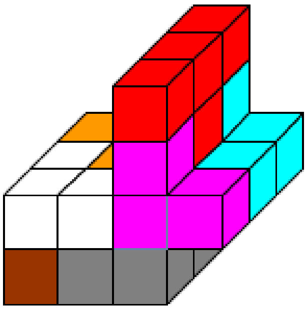


Avec 7 pièces

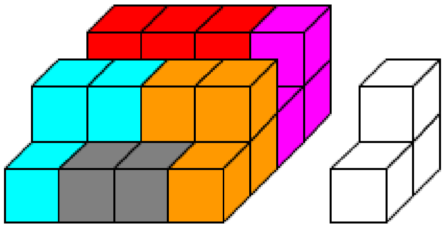
Voici d’autres exemples extraits d’une des brochures d’accompagnement de l’exposition « Objets mathématiques » réalisée par la régionale A.P.M.E.P. Lorraine. Ils font partie d’une recherche à propos de parallélépipèdes accolés réalisés avec les sept pièces formant le cube Soma.



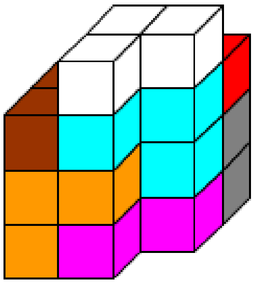
Trois réalisations d’élèves du collège de Saint-Mihiel complètent les propositions précédentes.



Le bidule de Karim



Neuf petits sièges



Une colonne

Le « bidule de Karim » est un prisme. Les « neuf petits sièges » sont formés de deux prismes. La « colonne » peut donner envie de lancer une recherche à propos de solides formés de deux prismes accolés.

D'autres propositions

Sauriez-vous reconstruire ces prismes en utilisant les indications fournies par un lecteur du Petit Vert ?

Avec trois pièces

Un pavé est construit. D'autres prismes sont obtenus en faisant pivoter la pièce grise.

Une face du pavé

La hauteur du prisme est 4.

Une des faces du prisme

Avec quatre pièces

Un premier prisme est obtenu en accolant la pièce blanche au prisme de hauteur 4 construit avec les trois pièces.

Un pavé est construit.
Une face du pavé

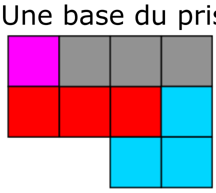
La hauteur du prisme est 5.
Une des faces du prisme

Remarque : le pavé peut être aussi construit en remplaçant la pièce bleue par la pièce orange.

Avec cinq pièces

Les pièces rose, grise, rouge, marron et bleue sont utilisées.

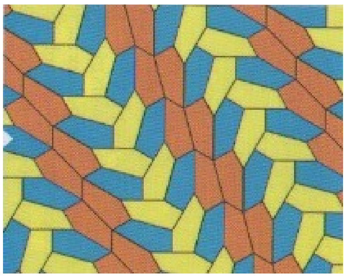
Une base du prisme



Remarque : un prisme peut être aussi construit en remplaçant la pièce bleue par la pièce orange.

Le comité de rédaction du Petit Vert est preneur de réponses (complètes ou incomplètes) aux nouvelles idées de recherche évoquées dans cet article ainsi de dessins ou de photos d'autres prismes obtenus.

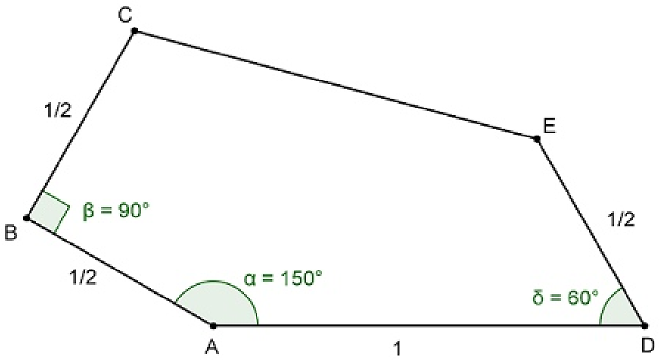
DÉFI 125-A



La quinzième « tuile » des pavages pentagonaux

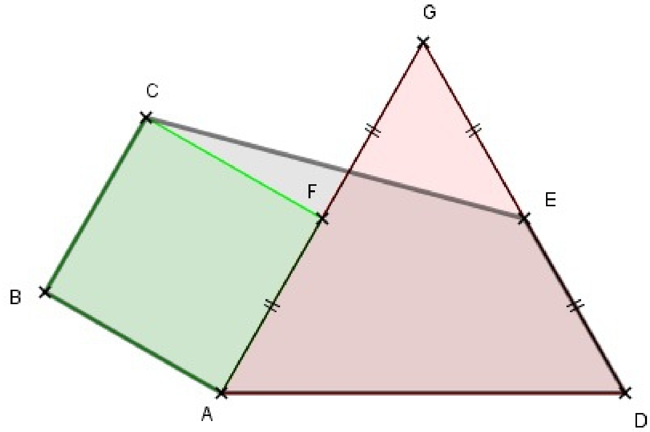
Un pentagone (découvert très récemment, en 2015), permet de « paver le plan » à l'infini (voir image de gauche).

Voici comment le construire.



Première construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit successivement l'angle DAB de 150° ; le côté AB de longueur ½ ;
l'angle ABC droit ; le côté BC de longueur ½ ;
l'angle ADE de 60° ; le côté DE de longueur ½ ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.

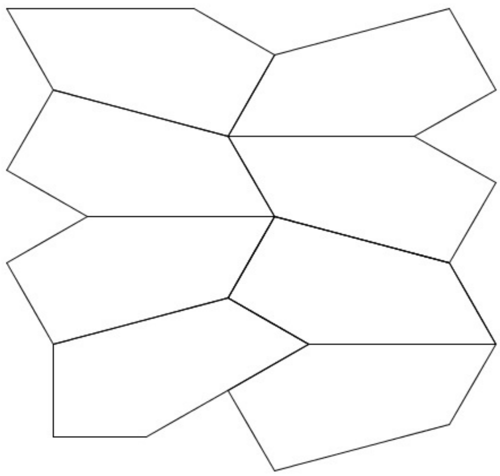


Seconde construction (voir dessin) :

Un segment AD est pris comme unité.
On construit le triangle équilatéral ADG ;
on construit les points F et E milieux de [AG] et [DG] ;
on construit le carré ABCF ;
on joint C et E.
On obtient un pentagone ABCED.

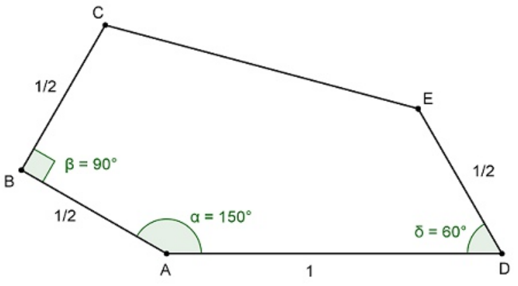
Le défi :

- Pouvez-vous démontrer que ces deux constructions conduisent bien au même polygone ?
- Pouvez-vous calculer la longueur <u>exacte</u> du cinquième côté (CE) ?



ÉLÉMENTS DE SOLUTION

● Pouvez-vous démontrer que ces deux constructions conduisent bien au même polygone ?



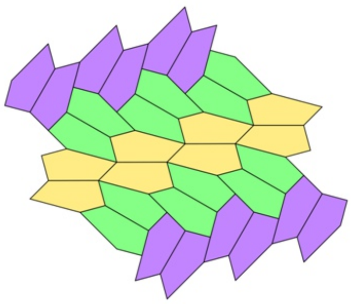
La réponse était OUI, et c'est assez facile de le prouver : d'après les énoncés des constructions, il est facile de montrer que les segments [AB], [BC], [AD] et [DE] seront superposables.

● Pouvez-vous calculer la longueur exacte du cinquième côté (CE) ?
La question était plus difficile, et vous trouverez ci-après quelques informations permettant d'obtenir la réponse : $EF=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$.

Le pentagone de Bothell

Cette 15ème « tuile » pentagonale, qui permet de paver le plan à l'infini, a été découverte en aout 2015 par une équipe de l'université de Washington-Bothell grâce à un programme informatique conçu pour l'occasion.

« *Nous avons découvert la tuile en faisant une recherche exhaustive sur un ordinateur grâce à un ensemble de possibilités très large mais fini* », a expliqué Casey Mann, membre de cette équipe, au journal Le Guardian, en ajoutant que l'équipe avait été « *un peu surprise* » de découvrir ce nouveau type de pentagone.



Voici quelques pistes qui permettent de construire ce pentagone et de déterminer facilement ses mesures.

- **Mesure des angles BEF et GFE**

Les triangles *AFC* et *AEC* étant rectangles respectivement en *F* et en *E*, ils sont inscrits dans le cercle de diamètre [*AC*]. Les angles $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ACF}$ sont inscrits dans le même cercle et interceptent tous les deux l'arc *AF*, ils ont la même mesure. Les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ACE}$ sont aussi inscrits dans le même cercle et interceptent tous les deux l'arc *AE*, ils ont donc la même mesure. $\widehat{AEF}=45°$ et $\widehat{AEB}=90°$ 90° On déduit de ce qui précède la mesure des angles $\widehat{GFE}$ et $\widehat{BEF}$.	

- **Longueur EF**

Le triangle *EFH* étant inscrit dans le cercle de diamètre [*FH*], il est rectangle en *E*.

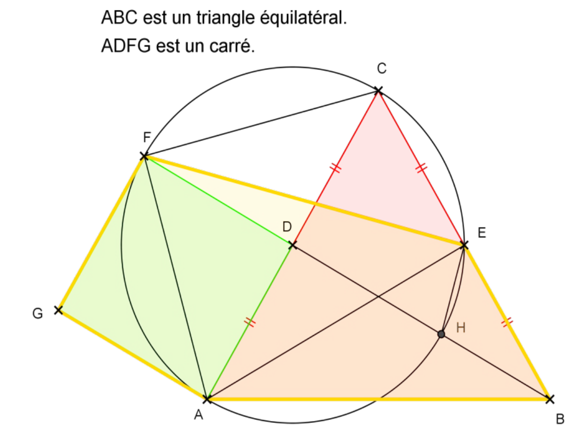
Ainsi,

$$EF = FH \times cos(\widehat{EFH}) = 1 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$$

On peut aussi utiliser la formule :

$$\frac{sin(\widehat{EAF})}{EF} = \frac{sin(\widehat{AF})}{AF} = \frac{sin(\widehat{AFE})}{AE}$$

Les longueurs *AF* et *AE* se calculent à l'aide du théorème de Pythagore.



La longueur exacte du segment [EF], qui était demandée dans ce défi, vaut donc

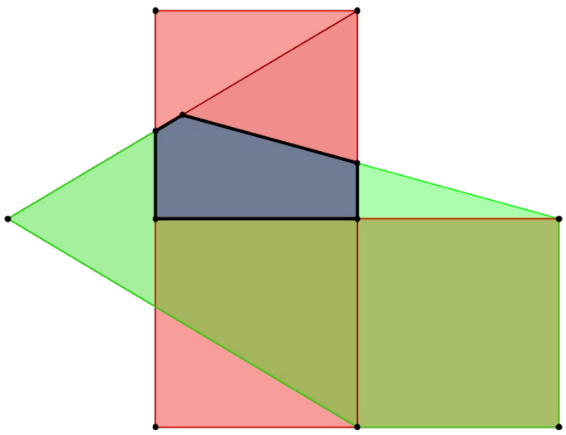
$$EF = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \quad \text{C.Q.F.D}$$

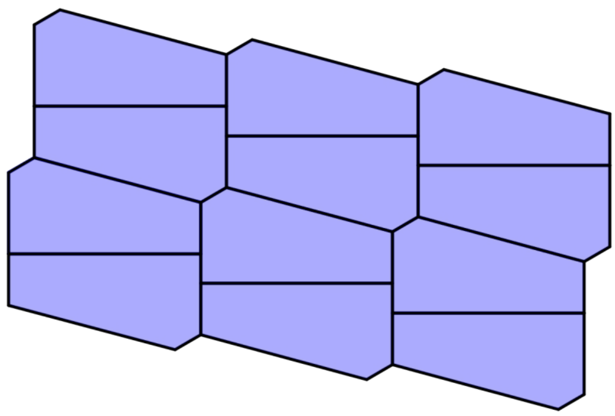
Un complément surprenant…

Bothell et Petit L

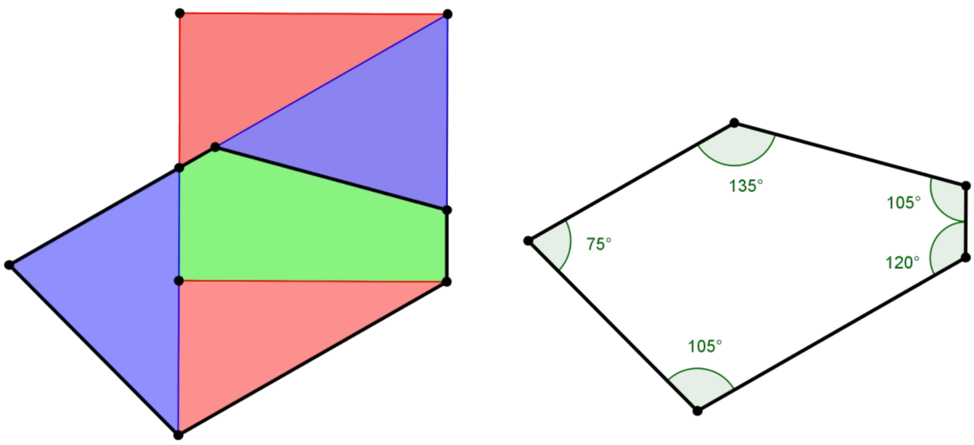
Par Fathi DRISSI

Surprise ! Lorsqu'un pentagone de Bothell (le pentagone vert) et un petit L (que vous avez déjà côtoyé dans notre numéro 123) se rencontrent, ils donnent naissance à un pentagone bleu qui pave le plan : c'est la moitié d'un hexagone dont les côtés opposés sont parallèles.





Et ce n'est pas fini ! Le carré supérieur du petit L est constitué de trois pièces qui forment à leur tour deux pentagones pavant le plan.



Nous laissons au lecteur le plaisir de trouver l'autre assemblage permettant d'obtenir le deuxième pentagone !

* * * * *

DÉFI 125-b

Dans le tableau « Hardy's Taxi » d'Eugen Jost on trouve ces deux nombres : **1031223314** et **10213223**.

Ces deux nombres ont la particularité suivante : Dans le premier il y a : un 'zéro', trois 'un', deux '2', trois 'trois', un 'quatre', ce que l'on peut énoncer « 1 0, 3 1, 2 2, 3 3, 1 4 ». Le décompte des chiffres doit se faire dans l'ordre : d'abord les '0', puis les '1', les '2' etc. On retrouve bien le nombre 1031223314.

Il en est de même pour le second nombre, 10213223.

Par exemple, si l'on prend comme nombre initial 1, on obtient successivement : 11, 21, 1112, 3112, 211213, 312213, 212223, 114213, 31121314, 41122314, 31221324, 21322314, 21322314, 21322314... On constate que la suite « stagne » à partir d'un certain moment. Les deux nombres évoqués ci-dessus « stagnent » également.

Le défi

• Tous les nombres initiaux donnent-ils une suite qui finit par « stagner » ?

• Trouver le nombre initial qui permettait d'obtenir 1031223314 et 1031223314.

• Si vous êtes en lycée : écrire un algorithme qui permette, à partir d'un nombre n quelconque, d'écrire la liste des nombres obtenus.

ÉLÉMENTS DE SOLUTION

Avec **30** au départ, on obtient 1031223314 : en effet, la suite « 30 » donne successivement 1013 ; 102113 ; 10311213 ; 10411213 ; 1031221314 ; **1031223314**... Quant à **10213223**, ce serait (d'après une source internet[2]) le seul nombre (mis à part 22) qui ne serait obtenu qu'à partir de lui-même ; mais nous n'en n'avons trouvé aucune démonstration.

Il est évident qu'on ne peut pas partir en « marche arrière » pour trouver le nombre initial, puisque des nombres différents au départ : par exemple 123 et 312 (c'est évident car ils ont les mêmes chiffres), mais aussi 1 et 23) peuvent aboutir au même nombre final. On rencontre également des « paquets » : 11, 12, 13 et 14 donnent tous les quatre 21322314 et 31, 32, 33 et 34 donnent aussi tous les quatre 21322314.

2 http://www.bookcrossing.com/forum/5/436539

On pourrait croire que, quel que soit le nombre de départ, la suite devient constante à partir d'un certain rang. Mais ce n'est pas toujours le cas (ça l'était cependant pour les deux exemples de l'énoncé). Si, par exemple, on part de n = 40, on obtient successivement : 1014, 102114, 10311214, 1041121314, 1051121324, 104122131415, 105122132415, 104132131425, 104122232415, 103142132415, **104122232415, 103142132415**... ; on constate que, à partir d'un certain rang, la suite « oscille » alternativement entre ces deux dernières valeurs. Si on part de n = 50, la suite « boucle » sur trois valeurs : **10414213142516, 10512213341516, 10512223142516**...

Il a cependant été **démontré** (voir sitographie ci-dessous) que seuls trois cas peuvent se produire : soit la suite stagne à partir d'un certain rang, soit elle oscille entre deux valeurs, soit elle oscille entre trois valeurs. A la page suivante, un algorithme permettant de calculer la suite de tous les nombre obtenus à partir d'un nombre *n* quelconque donné.

Exemple d'algorithme (auteur : Gilles Waehren)

Entrée : n : entier *(le nombre de départ)*
Sortie : p : chaine *(la chaine fabriquée)*
Déclarations : tabRésultat : tableau de chaînes *(tableau qui contient les résultats successifs)*
Début
  Saisir n
  p ← conversionChaine(n)
  tabRésultat ← [] *(tableau vide)*
  Tant que p n'est pas dans tabResultat **faire :**
    p ← Hardy(p)
    ajouter p à tabRésultat
    Afficher p
  finTantque
Fin

Fonction Hardy(n:chaine)
  Déclaration : tab: tableau de caractères
  Sortie : résultat : chaine *(retour de la fonction Hardy)*
  Début
    tab ← conversionTableau(n)
    resultat ← ""
    Pour i **allant de** 0 **à** 9 **faire :**
      nb ← compte(i,tab) *(nombre d'apparitions du chiffre i dans tab)*
      si nb ≠ 0 **alors :**
        resultat ← resultat+conversionChaine(nb)+conversionChaine(i)
        (construction de la nouvelle chaine)
      finSi
    finPour
    retourner resultat
  Fin

Fonction conversionTableau(n:chaine)
Sortie : tab : tableau de caractères *(tableau des chiffres de la chaine n)*
  Début
    tab ← [] *(tableau vide)*
    Pour i **allant de** 1 **à** taille(tab) **faire** :
      ajouter n[i] à tab
    finPour
    retourner tab
  Fin

Remarques

Une première version de l'algorithme a été produite. Mais, dans le cas d'une « boucle » (comme avec n = 40 ou n = 50 par exemple), le programme ne s'arrêtait pas et ne fournissait aucun résultat.

Pour pallier cet inconvénient, dans une seconde version, le nombre d'itérations autorisées a été limité (par exemple à 1000). Le programme s'arrêtait quand ce nombre d'itérations était atteint (annonçant une « boucle suspectée ») et donnait un résultat ; dans ce cas, il fallait poursuivre « à la main » à partir du résultat affiché par le programme.

Un troisième solution (celle qui figure ci-dessus) a été écrite pour pallier cet inconvénient : garder en mémoire (dans un tableau) tous les résultats intermédiaires calculés et arrêter le programme dès que le dernier résultat calculé figure déjà dans ce tableau. Il suffit alors de regarder les trois derniers nombres de cette liste pour savoir si la suite stagne, si elle boucle sur deux éléments ou si elle boucle sur trois éléments.

Sitographie

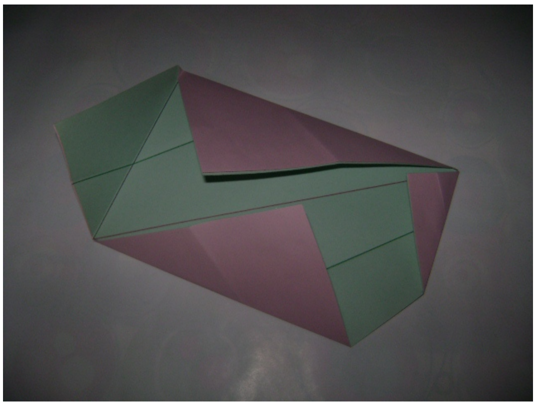
Suite A036058 : https://oeis.org/A036058 et https://oeis.org/A036058/b036058.txt

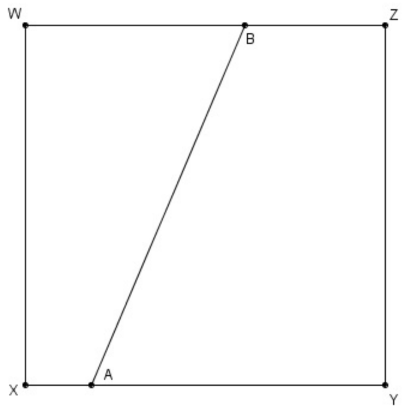
Suite de Robinson : https://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_de_Robinson ([3])

* * * * *

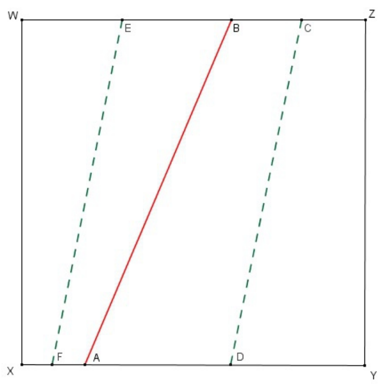
DÉFI 126-a

Pliage





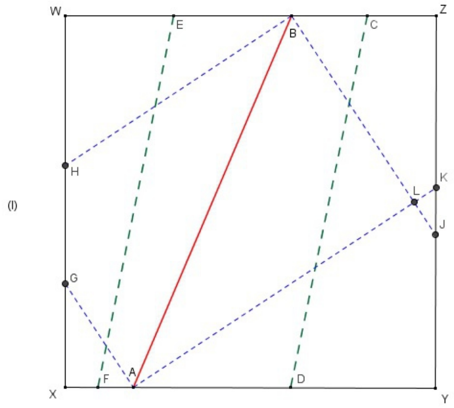
On dispose d'un carré de papier. Sur deux des côtés de ce carré WXYZ, on place deux points quelconques A et B que l'on joint. On plie le côté [YZ] de façon qu'il vienne coïncider avec la droite (AB), et le côté [WX] de façon qu'il vienne coïncider avec la droite (AB). On marque ces plis, nommés (CD)et (EF) - en pointillés verts sur le dessin ci-dessous à gauche -, puis on remet la feuille à plat.



On plie ensuite les quatre coins de façon qu'ils viennent coïncider avec la droite (AB). Sur l'exemple ci-dessous à droite, (BW) se rabattant sur (AB) donnera une droite (BH) ; de même (AX) donnera (AG), (BZ) donnera (BL) et (AY) donnera (AL). On

3 Attention, la suite proposée ici n'est pas la même que celle du défi : nous avons choisi, dans le défi, de compter les chiffres dans l'ordre 1, 2, … 9, alors que Robinson les compte dans l'ordre de leur apparition dans le nombre. Par exemple 1323 donne pour ce défi 11 12 23 alors que pour Robinson c'est 11 13 12 13.

obtient ainsi quatre nouvelles droites - en pointillés bleus sur la figure.
Il se peut que ces droites se coupent en dehors de la feuille carrée initiale : sur notre exemple, c'est le cas de (BH) et (AG) qui se coupent en un point I situé en dehors du carré.



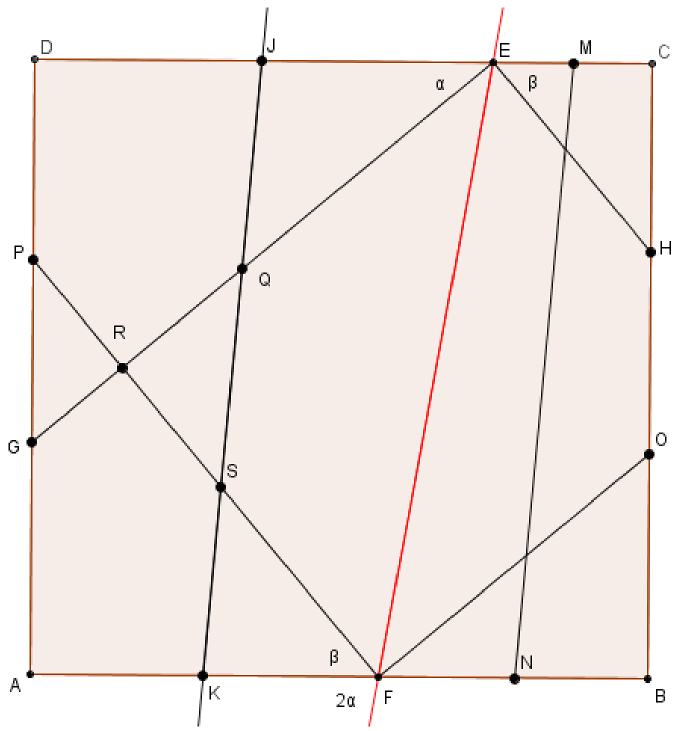
Le défi

- Les droites (CD) et (EF) sont-elles toujours parallèles ?
- Les quatre plis en pointillés bleus forment-ils toujours un rectangle (ou une ébauche de rectangle) ?

Question subsidiaire : si on part d'une feuille rectangulaire, les propriétés évoquées ci-dessus sont-elles encore vraies ?

SOLUTION

La réponse était **OUI**. En voici la preuve.



Remarque préliminaire : le pli obtenu en superposant les deux côtés d'un angle donne la bissectrice de cet angle. Cette propriété est à la base de la démonstration qui suit.

Les points E et F sont quelconques, respectivement sur [CD] et [AB].
La superposition par pliage de (CB) sur (EF) donne la bissectrice (MN) de l'angle formé par ces deux droites. Il en est de même pour le pliage de (AD) sur (EF) qui donne (KJ).

(DC) étant parallèle à (AB), les angles DEF et EFB sont égaux : il en est de même pour leurs moitiés. Cela implique que (JK) et (MN) sont parallèles.

Le pliage de (EF) sur (EC) donne la droite (EH), celui de (EF) sur (ED) donne la droite (FG), celui de (FE) sur (FB) donne la droite (FO) et celui de (FE) sur (FA) donne la droite (FP).

Au point E, les angles DEG et GEF sont donc égaux (soit α leur valeur), de même les angles

FEH et HEC sont égaux (soit β leur valeur).
L'angle E est plat, et vaut $\alpha+\alpha+\beta+\beta = 2(\alpha+\beta)$. Par conséquent, l'angle GEH, qui vaut $\alpha+\beta$, vaut la moitié d'un angle plat : c'est un angle droit. Cela prouve que (EG) et (EH) sont perpendiculaires.
Même raisonnement pour les angles en F.

En conséquence, les droites (EG), (EH), (FP) et (FO) forment bien un rectangle. Ce qu'il fallait démonter.

N.B. Suivant la position de E et F au départ, certains points peuvent « sortir du carré ». C'est le cas sur la figure ci-dessus pour l'intersection de (FO) et (EH).

* * * * *

DÉFI 126-b

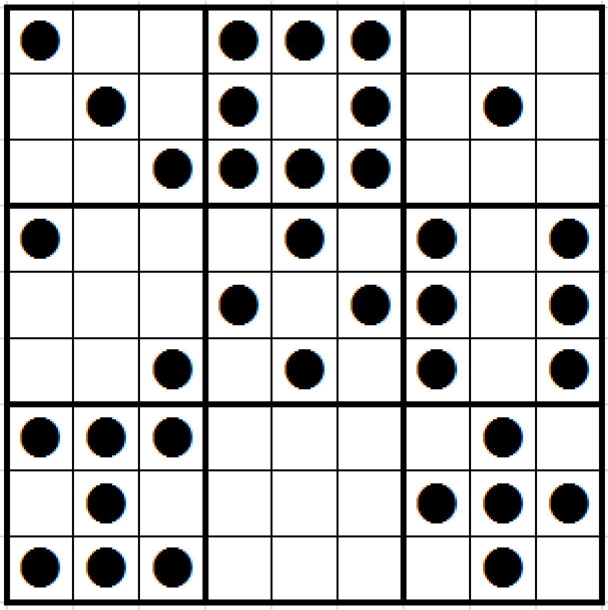
On dispose d'une grille « genre sudoku » et de 36 jetons.

O		O						
		O						

Il s'agit de placer les 36 jetons dans cette grille en respectant les contraintes suivantes :

- chacune des 9 lignes horizontales, chacune des 9 lignes verticales et chacune des deux diagonales doit contenir exactement 4 jetons ;
- les « grosses cases » (formées de 9 petites cases) doivent contenir respectivement 0, 1, 2 ... 8 jetons ;
- dans chaque « grosse case », la disposition des jetons doit avoir au moins un axe ou un centre de symétrie (c'est la cas dans l'exemple ci-dessus, où la première case contient 3 jetons avec un axe de symétrie qui est une des diagonale). Et si vous arrivez à obtenir au moins un axe **et** un centre de symétrie dans chaque case, c'est encore mieux !

SOLUTION



La solution représentée ici respecte ces contraintes, et est telle que chacune des neuf cases possède deux axes et un centre de symétrie.

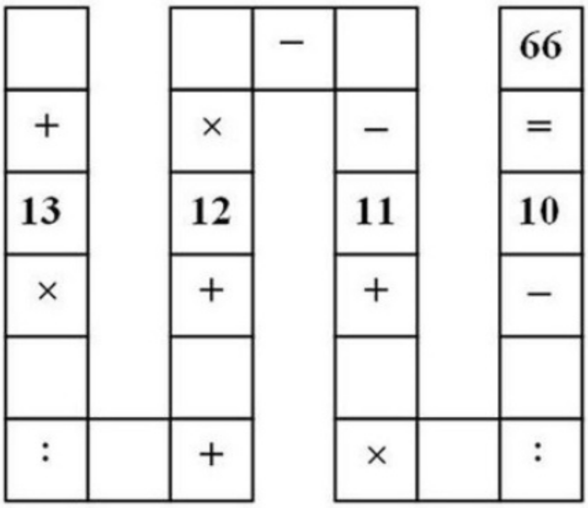
Et chacune des 9 lignes, des 9 colonnes et des deux diagonales contient bien 4 jetons.

Cette solution n'est pas unique.

* * * * *

DÉFI 127-a

Le serpent vietnamien



Pierre-Alain a trouvé (dans Ouest-France et d'autres journaux) un problème de mathématiques qui donne des sueurs froides aux plus érudits. À l'origine, cet exercice a été donné par un professeur dans une école primaire de Bao Loc, au Vietnam, à ses élèves de CE2.

Le but est de remplir les cases vides de la grille avec les entiers de 1 à 9 (à n'utiliser qu'une fois chacun), de façon à obtenir le résultat final 66 en suivant l'ordre des opérations sur le serpent.

Si on vous dit qu'il y a 362 880 dispositions possibles, cela ne doit pas vous décourager !

SOLUTION

Parmi les 362 880 dispositions possibles des neuf premiers entiers dans les cases vides, il y en avait quelques unes qui respectaient les priorités des opérations. Par exemple :

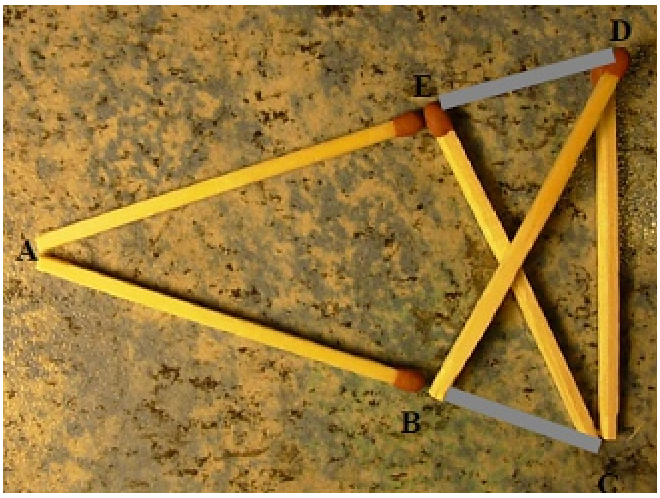
6 + (**13**x9/3) + 5 + **12**x2 -1 -**11** + (7x8/4) – **10** = 66
ou 5 + (**13**x9/3) + 6 + **12**x2 -1 -**11** + (7x8/4) – **10** = 66
ou 5 + (**13**x9/3) + 6 + **12**x2 -1 -**11** + (8x7/4) – **10** = 66,

etc. : on peut échanger le 5 et le 6, ainsi que le 7 et le 8.

* * * * *

DÉFI 127-b

Des mathématiques qui vont mettre le feu !



Les cinq allumettes ont la même longueur. Leurs points de contact sont nommés A, B, C, D et E (voir photo). A, B et C sont alignés, il en est de même pour A, E et D.

Déterminer l'angle $\widehat{BAE}$.

SOLUTION

L'auteur de la réponse ci-dessous, plutôt que rédiger la solution, a préféré écrire le cheminement de sa pensée.

Les mesures des angles sont exprimées en degrés.

Soit x la mesure de l'angle CAD. Le triangle ABD est isocèle, j'en déduis que l'angle ABD est égal à $180 - 2x$.

Si je prouve que BC = ED ou AC = AD, je prouverai que le triangle ACD est isocèle. Je pourrai en déduire que l'angle ACD est égal à $90 - x/2$. Le triangle BCD sera isocèle en D, je pourrai alors écrire que les angles BCD et CBD sont égaux à $90 - x/2$.

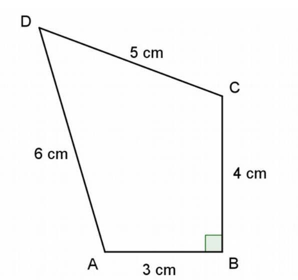
Les angles CBD et DBA seront supplémentaires donc $(180 - 2x) + (90 - x/2) = 180$. La résolution de cette équation m'amènera à $x = 36$.

Il me reste donc à prouver que le triangle ACD est isocèle.

Les triangles ABD et AEC sont isocèles et ont tous deux un angle de base égal à x. Ces triangles ont donc des angles égaux 2 à 2, ils sont donc semblables (ou de même forme, comme il est dit quelquefois). De plus, leurs « côtés égaux » sont égaux, j'en déduis que ces deux triangles sont égaux et donc AC = AD. L'étude de ce sous-problème valide la partie algébrique précédente : **l'angle BAE mesure 36°**.

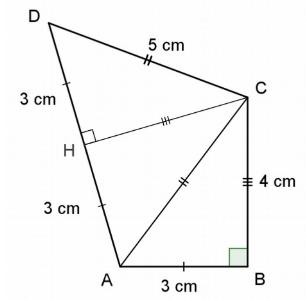
* * * * *

DÉFI 128-a



Quelle est l'aire de ce quadrilatère ?

SOLUTION



La mesure de l'hypoténuse [AC] du triangle rectangle ABC est 5 cm (théorème de Pythagore). Le triangle ACD est don isocèle en C.

Soit (CH) est la médiatrice de [AD].

Les triangles ABC, AHC et DHC sont superposables et ont la même aire donc l'aire du quadrilatère ABCD est 3 x 6 cm² = 18 cm²

* * * * *

DÉFI 128-b

Avec les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, chacun n'étant utilisé qu'une seule fois, on forme des nombres de un, deux ou trois chiffres. Par exemple : 136, 40, 8, 95, 27.
On calcule la somme de ces nombres ; avec l'exemple précédent, on obtient ce total : 136+40+8+95+27=306.
N.B. : deux combinaisons comme 136+40+8+95+27 et 27+8+136+95+40+95, qui ne diffèrent que dans l'ordre des opérations, seront considérées comme une seule et même combinaison.

Le défi est le suivant : obtenir, si c'est possible, **un total égal à 2017**, ou s'en approcher le plus possible.

SOLUTION

Il semble que ce soit impossible d'obtenir 2017 ; nous allons d'ailleurs le démontrer ci-dessous. Par contre, on peut obtenir 2016, et de beaucoup de façons : par exemple 485+621+903+7 ou 673+852+490+1.... (voir en fin de cet article).

♦ Première remarque préliminaire : le plus petit nombre que l'on puisse obtenir est 0+1+2+...+9 = 45. Le plus grand est 963+852+741+0 = 2556 (ou son "jumeau" 963+852+740+1), que l'on obtient en prenant tout d'abord les plus grandes centaines (9, 8 et 7), ensuite les plus grandes dizaines (6, 5 et 4) et enfin le reste.

♦ Seconde remarque : plus il y a de « morceaux » pour décomposer le nombre, moins ce nombre sera élevé. Or on veut obtenir (ou approcher) 2017. Avec une décomposition en quatre « morceaux » (du type XXX+XXX+XX+XX), on ne peut pas dépasser 1926 (973+862+51+40 ou 973+862+50+41). Pour obtenir 2017, les seules combinaisons possibles seront donc de la forme XXX+XXX+XXX+X.

♦ Troisième remarque : si une somme est du type XXX+XXX+XX<u>0</u>+<u>1</u>, on ne la modifie pas en la remplaçant par XXX+XXX+XX<u>1</u>+<u>0</u>.

♦ Quatrième remarque : quand on a trouvé une solution, on constate que c'est toujours un multiple de 9.

Nous allons démontrer les deux propriétés suivantes :
- si le nombre qu'on veut obtenir n'est pas multiple de 9, c'est impossible (propriété 1) ;
- on peut atteindre tous les multiples de 9, de 45 à 2556 inclus (propriété 2).

Propriété

Montrons que pour toute écriture utilisant une seule fois chacun des chiffres de 0 à 9, l'addition de nombres à un chiffre ou deux chiffres ou trois chiffres donne nécessairement un multiple de

9.
Pour envisager toutes les écritures on va convenir que tout nombre de trois chiffres va s'écrire *CDU* quitte à ajouter à l'écriture d'un nombre à deux chiffres un zéro à gauche des dizaines, voire même deux zéros pour un nombre à un chiffre.

Donc avec la convention précédente toute somme peut s'écrire : $\sum_{i=1}^{i=10} CiDiUi$

(Rappel : avec les zéros qui n'ajoutent rien il faut se souvenir que 0+1+2+3...+9=45)

$\sum_{i=1}^{i=10} CiDiUi = \sum_{i=1}^{i=10} 100\,Ci + 10\,Di + Ui = \sum_{i=1}^{i=10} 99\,Ci + Ci + 9\,Di + Di + Ui = 9\sum_{i=1}^{i=10} 11\,Ci + Di + 45$,

puisque la somme des chiffres des centaines des dizaines et des unités fait 45.

Ainsi toute somme peut s'écrire :$9\{(\sum_{i=1}^{i=10} 11\,Ci + Di)+5\}$. Le résultat est bien un multiple de 9.

Propriété

Peut-on obtenir <u>tous</u> les multiples de neuf à partir de 45 jusqu'à 2556 ?
Lorsqu'on échange une centaine avec une dizaine on obtient une différence de *CDU-DCU* = 90*(C-D)* ; pour un échange d'une centaine avec une unité, *CDU-UDC* =99 (*C-U*) ; pour un échange d'une dizaine avec une unité, *CDU-CUD* = 9(*D-U*). Cela est valable que ce soit pour des nombres à deux ou à trois chiffres.
En partant de 2556 (la plus grande valeur possible), avec les échanges évoqués ci-dessus, on peut soustraire à un nombre donné 9, 18,...81 avec 9(*D-U*), soustraire 90 avec 90(*C-D*) ou soustraire 99 avec 99(*C-U*).
On peut donc ainsi obtenir tous les multiples de 9 de 2556 à 45. La seconde propriété est démontrée.

Finalement, on a démontré qu'on ne pouvait pas atteindre 2017, et on subodore qu'il y a beaucoup de façons d'obtenir le nombre le plus proche qui est 2016.

* * * * * * * * * *

On aimerait obtenir toutes les combinaisons qui permettent d'atteindre 2016. Nous en avons déjà cité deux tout au début de cet article. L'informatique va nous y aider...

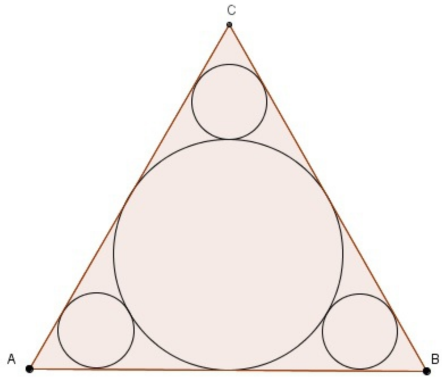
Alain Humbert, professeur de mathématiques et d'ISN au lycée Poncelet de Saint-Avold, a conçu un petit programme qui lui a permis d'obtenir **2880 combinaisons différentes pour 2016**. Il a d'abord remarqué, comme nous l'avons montré ci-dessus (remarque 2) que seules les combinaisons de type XXX+XXX+XXX+X pouvaient convenir.
En prenant les blocs de type ABC+DEF+GHI+J, il constate que l'on peut permuter les chiffres des unités (soit 4! possibilités), les chiffres des dizaines (3! possibilités) ou encore les chiffres des centaines (3! possibilités). Mais on aura alors compté les permutations de ABC DEF GHI entre eux trois : 3! possibilités, qui ne sont pas de nouvelles solutions. Finalement, la réponse en donne 4!x3!x3!/3! C'est-à-dire 144 possibilités. Au final, il n'y a vraiment que 20 possibilités multipliées par les 144 permutations donc 2880 solutions.
Il a écrit le code sous Python : il trouve en 1 minute 15 sur son vieux PC de 2008.
La liste des possibilités tient sur **46 pages A4** (à raison d'une ligne par solution, en Times new roman 10) !
Nous le remercions pour son travail.

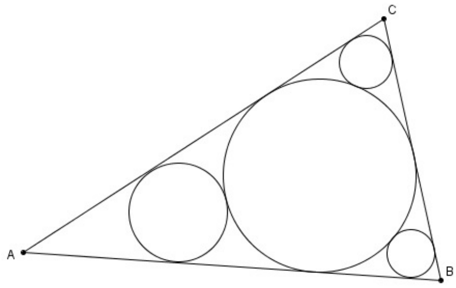
Nous remercions également Serge Ermisse, qui a utilisé un programme sous Python. Au bout de 20 minutes, après 10 millions de tirages, le programme lui a fourni les 2880 solutions pour 2016. Quant à obtenir 2017, ne voyant rien venir après un certain temps, il a abandonné...

*** * * * ***

DÉFI 129-a

Un triangle équilatéral étant donné, construire cette figure : un cercle tangent aux trois côtés, et trois cercles « dans les coins », tangents au premier cercle et à deux des côtés.
Il faudra donner un programme de construction.

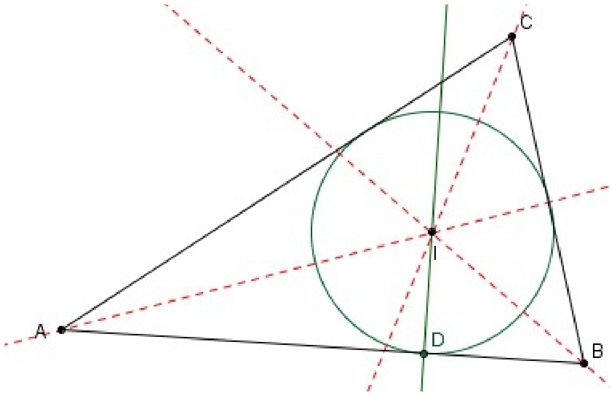


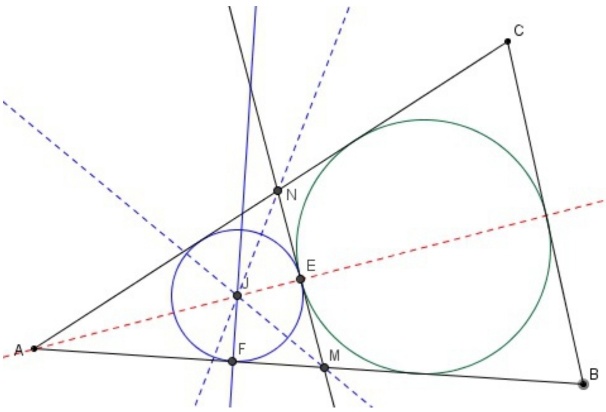


Prolongement : tracer quatre cercles tangents dans un triangle quelconque, dans une disposition analogue à la figure ci-contre. Donner également un programme de construction.
Un triangle équilatéral étant donné, construire cette figure : un cercle tangent aux trois côtés, et trois cercles « dans les coins », tangents au premier cercle et à deux des côtés.
Il faudra donner un programme de construction.

SOLUTION

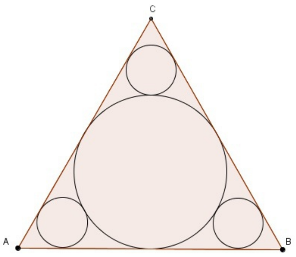
Nous proposons ici la solution correspondant à un triangle ABC quelconque : elle serait bien sûr valable pour un triangle équilatéral.
Le cercle inscrit dans le triangle (tangent aux trois côtés) a pour centre le point d'intersection I des bissectrices des trois angles du triangle.
Pour construire ce cercle, on mène depuis I la perpendiculaire à un des côtés du triangle (D sur cette notre figure) ; ce cercle a pour rayon ID.



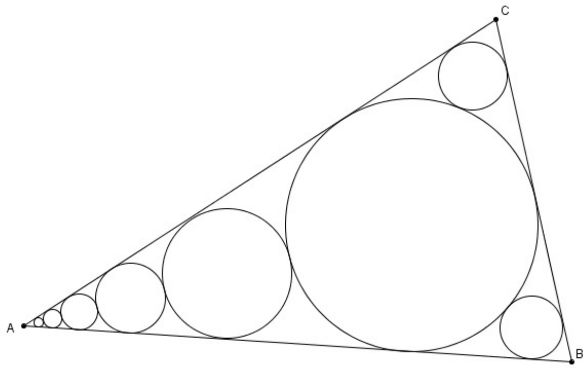


Le second cercle (du côté du sommet A), doit être tangent au cercle que l'on vient de construire : il est tangent en E, point d'intersection de ce cercle et de la bissectrice de l'angle A.
Traçons cette tangente NM (perpendiculaire à AE). Il ne nous reste plus qu'à utiliser la méthode précédente pour obtenir le cercle inscrit dans le triangle AMN.
Puis à répéter la construction pour les deux autres cercles cherchés.

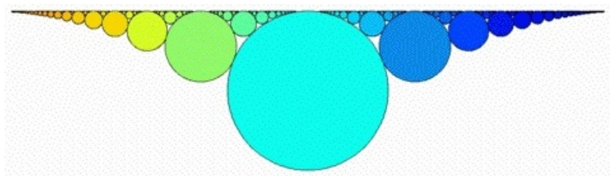
Première remarque. On peut continuer à « empiler » des cercles dans les trois « coins » du triangle (ici, nous n'en n'avons placé que dans l'angle A) ; on obtient ainsi une jolie figure.



Seconde remarque.
Dans le cas du triangle équilatéral de centre O, une fois que l'on a obtenu l'un des petits cercles, il est inutile de répéter la construction avec les tangentes : deux rotations de centre O et de 120° (l'une dans le sens horaire, l'autre dans le sens antihoraire) transformeront ce premier cercle en les deux autres cercles cherchés.



Pour le professeur, s'il veut aller plus loin :
http://mathafou.free.fr/pbg/sol134c.html
http://www.mathcurve.com/fractals/baderne/baderne.shtml
https://fr.wikipedia.org/wiki/Cha%C3%AEne_de_Steiner
http://eljjdx.canalblog.com/archives/2007/08/11/5866007.html (dont est extrait l'image ci-dessous)



* * * * *

DÉFI 129-b

Girard, Stevin, Cédric et Pol

Le commissaire Girard, qui est maintenant à la retraite (il a été remplacé par le commissaire Stevin) discute mathématiques avec son petit-fils Pol.

« Je vais te montrer quelque chose d'intéressant : tu prends un nombre entier. S'il est pair, tu le divises par 2 ; s'il est impair, tu le multiplies par 3 et tu ajoutes 1. Et tu continues ainsi avec le résultat jusqu'à obtenir 1. Par exemple, si je pars de 3, j'obtiens successivement 10, 5, 16, 4, 2, 1 en 7 coups.
- Mais si je n'obtiens pas de 1, ça ne s'arrêtera jamais ?
- On n'a jamais trouvé d'exemple où ça ne s'arrête pas.
- Alors c'est démontré ?
- Non ! Ce n'est pas parce qu'on n'a jamais trouvé un tel exemple que c'est démontré. Mais si tu arrives un jour à le démontrer, tu auras peut-être la médaille Fields comme ton oncle Cédric ».

Ils essayent ensemble encore quelques exemples :
En partant de 2 : 2 → 1. C'est fini en un coup !
En partant de 5 : 5 → 16 → 8 → 4 → 3 → 2 → 1. Il a fallu 5 coups.
En partant de 19 :
19 → 58 → 29 → 88 → 44 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 10 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1.
« Oh ! Il a fallu 21 coups ! Et on est « monté jusqu'à 88, c'est énorme ! ».

Papy Girard dit à son petit fils : « J'ai même écrit un algorithme pour faire des essais, et je l'ai ensuite programmé sur mon ordinateur. Le voici ».

```
Variable n (entier non nul) : c'est le nombre de départ.
Début de l'algorithme
        Lire n
        Tant que n≠1 faire ceci :
                si n est pair alors remplacer n par n/2 sinon le remplacer par 3n+1
        (fin de l'instruction "faire")
        Afficher n
Fin de l'algorithme
```

Après quelques essais, Pol réplique : « Il fonctionne bien, ton programme, mais il use beaucoup de papier ; il affiche tous les nombres trouvés, mais pas le nombre de coups ni la valeur maximale rencontrée en cours de route. Moi je voudrais quelque chose qui n'affiche pas la liste des nombres, mais simplement le nombre de coups et la valeur maximale. Par exemple, en partant de 19, ça m'afficherait : 21 coups, maximum 88 ».
Papy lui répond : « Tu es assez grand, tu as dû apprendre à écrire un algorithme. Alors tu peux le faire toi-même ! ».

Et vous, sauriez-vous comment modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche ce que désire Pol ?

SOLUTION

Voici une solution de ce défi, proposée par Gilles :

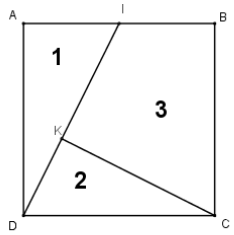
```
Variables :
n (entier non nul) : c'est le nombre de départ.
max : le plus grand nombre trouvé
coups : le nombre de coups
Début de l'algorithme
        Lire n
        coups prend la valeur 0
        max prend la valeur de n
        Tant que n≠1 faire ceci :
                si n est pair alors remplacer n par n/2 sinon le remplacer par 3n+1
                si n > max alors remplacer max par n
                coups prend la valeur coups+1
        (fin de l'instruction "Tant que")
        Afficher coups,« coups »
        Afficher « Maximum : »,max
Fin de l'algorithme
```

Pour le professeur : ce problème est connu sous le nom de « conjecture de Syracuse ».
On suppose que, quel que soit l'entier de départ, la suite finira toujours par se terminer par le nombre 1.

* * * * *

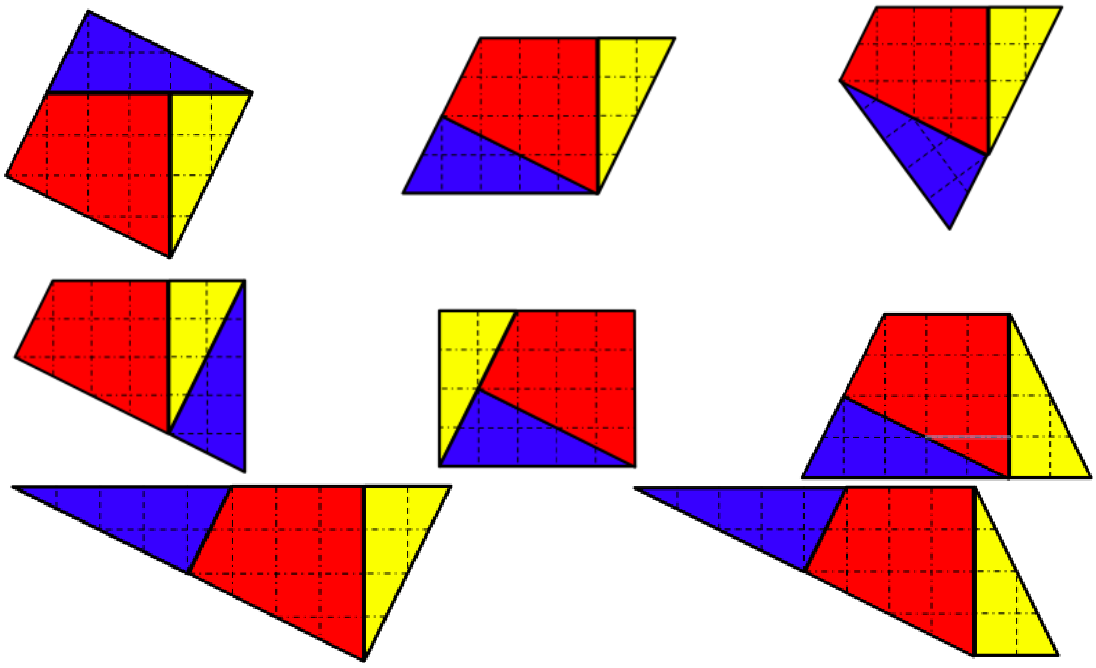
DÉFI 130-a

(pour les plus jeunes)



ABCD est un carré. I est le milieu du côté [AB]. La droite perpendiculaire à la droite (ID) passant par le point C coupe la droite (DI) en K. Le puzzle est constitué des trois pièces « 1 », « 2 » et « 3 ». En utilisant ces trois pièces, combien de quadrilatères différents peut-on obtenir ?

SOLUTION



Considérer qu'un triangle est un quadrilatère dont un côté a une longueur nulle est sans doute contestable. Cependant, cette configuration nous a permis de découvrir un troisième trapèze !

D'autres quadrilatères peuvent-ils être obtenus ? Une manipulation exhaustive des pièces nous fait penser que la collection est maintenant complète. Les lecteurs du Petit Vert peuvent nous contredire !

* * * * *

DÉFI 130-b

Combien y a-t-il de zéros dans la liste de tous les nombres entiers depuis 1 jusqu'à 2017 (inclus) ?

SOLUTION

Première proposition, d'André Stef. Il y a 177 personnes : 177 = 11x15 + 12, donc 11 recrutés avant de commencer un second tour (et 12 sujets n'ont pas encore été pris en compte dans la comptine : les « sujets » de 166 à 177). Après le 11ème barré, il « reste » à compter 6x15 = 90 sujets non barrés, soit 90-12 = 78 dans le second tour. Comme sont déjà barrés : 15, 30, 45, 60, 75, le 78ème est donc le sujet 83.

Le 17ème sujet recruté est donc le sujet 83.

De manière plus générale : dans la liste de *n* sujets, on peut, en barrant de *p* en *p*, chercher le *k*-ème sujet barré.

Voici un algorithme pour résoudre ce défi, ainsi que le programme Python correspondant

Variables :
n, entier (nombre de sujets)
k, entier (nombre de membres)
p, entier (nombre de syllabes)

Déclarations :
c: tableau d'entiers [de 1 à n]
i: entier ; compte : entier.

Saisir n, k et p.
Pour i allant de 1 à n+1 mettre i dans le tableau c
(fin de la boucle pour)
Pour i allant de 1 à k+1, mettre compte à 0
  Tant que compte ≠ p faire :
    Si n ≥n remplacer x par x-n
    Si c[x]=0 remplacer par x+1
    Ajouter 1 à compte
    Ajouter 1 à x
    (fin de la boucle "tant que")
  Remplacer c[x-1] par 0
(fin de la boucle pour)

Fin de l'algorithme

Le programme en Python :

```
defsortiech(npk) : #longueur n, modulo p,
element k barres
c=[]
for i in range(1,n+1):
  c.append(i)
x=0
for i in range(1,k+1):
  compte=0
  while compte<p:
    print("compte",compte)
    print("x",x)
    if x>=n :
      x=x-n
    if c[x]==0 :
      x=x+1
    compte=compte+1
    x=x+1
  c[x-1]=0
  print(c)
return x
n=int(input("Nombre de sujets :"))
p=int(input("Nombre de syllabes :"))
k= int(input("Nombre de membres :"))
print("Le numéro du ",k,"-ième membre est ",
                              sortiech(n,p,k))
```

Et un programme en Algobox :

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  p EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE LISTE
  i EST_DU_TYPE NOMBRE
  compte EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  LIRE p
  LIRE k
  POUR i ALLANT_DE 1 A n
    DEBUT_POUR
    c[i] PREND_LA_VALEUR i
    FIN_POUR
  x PREND_LA_VALEUR 0
  POUR i ALLANT_DE 1 A k
    DEBUT_POUR
    compte PREND_LA_VALEUR 0
    TANT_QUE (compte!=p) FAIRE
      DEBUT_TANT_QUE
      x PREND_LA_VALEUR x+1
      SI (x>n) ALORS
        DEBUT_SI
        x PREND_LA_VALEUR x-n
        FIN_SI
      SI (c[x]==x) ALORS
        DEBUT_SI
        compte PREND_LA_VALEUR compte+1
        FIN_SI
      FIN_TANT_QUE
    c[x] PREND_LA_VALEUR 0
    FIN_POUR
  AFFICHER x
FIN_ALGORITHME
```

* * * * *

DÉFI 131-a

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18	19	20	21	22	23	24	25

Voici une pyramide de nombres. Quels seront les nombres dans les cases oranges de la dixième ligne ? De la 2017$^{\text{ième}}$ ligne ? De la $n^{\text{ième}}$ ligne ?

ÉLÉMENTS POUR LA SOLUTION

17	**10**	**5**	**2**	**1**
18	*11*	*6*	**3**	**4**
19	*12*	**7**	*8*	**9**
20	**13**	*14*	*15*	**16**
21	*22*	*23*	*24*	**25**

Les nombres correspondant aux cases oranges de l'énoncé sont en gras sur le damier ci-contre à gauche ; ceux qui correspondent aux cases blanches de l'énoncé sont en italique.

En observant les nombres que l'on obtient à droite, on s'aperçoit que ce sont les carrés du numéro de l'étage : pour le second étage c'est 4, … pour le cinquième étage c'est 25.
Pour la dixième étage ce sera 100, et pour le 2017$^{\text{ème}}$ étage, ce sera 4 068 289.

Les nombres que l'on obtient à gauche sont les successeurs du nombre de droite de la ligne qui est immédiatement au dessus. Par exemple, la quatrième ligne se termine par 16, donc la cinquième ligne débute par 17.
Le premier nombre de la 10$^{\text{ème}}$ ligne sera donc 9^2+1 = 82.
Et le premier nombre de la 2017$^{\text{ème}}$ ligne sera 2016^2+1 = 4 064 257.
Quant au nombre au centre de la ligne, c'est la demi-somme des deux extrémités de cette ligne. Par exemple, pour la cinquième ligne, c'est (17+25)/2 = 21.
Pour la 10$^{\text{ème}}$ ligne, ce sera donc (82+100)/2 = 91
Et pour la 2017$^{\text{ème}}$ ligne, ce sera (4 064 257 +4 068 289)/2 = 4 662 273.
Par construction, et comme l'illustre le carré ci-dessus, à l'étage n la pyramide possède n^2 cases. La dernière case à droite vaut donc $\boldsymbol{n^2}$.
Le contenu de la dernière case de gauche est égal à celui de la dernière case de droite de la ligne n-1 auquel on ajoute 1, soit $\boldsymbol{(n-1)^2 + 1}$.
Le nombre central est la demi-somme des nombres des extrémités soit $n^2 - n + 1$.

* * * * *

DÉFI 131-b

Le concierge de l'immeuble où habite Cédric Villani a trois filles. Il s'adresse à Cédric en lui précisant que le produit de leurs âges est égal à 36 et que la somme de leurs âges est égale au numéro de l'immeuble qu'ils habitent. Cédric doit deviner leurs âges.

Après quelques instants de réflexion, Cédric se déclare incapable de deviner ces trois âges. Le concierge, tout heureux de le mettre en défaut, lui annonce qu'il va en parler à son ainée. À ces mots, Cédric Villani lui donne aussitôt l'âge des trois filles.

Et vous, avez-vous trouvé leurs âges ?

SOLUTION

Les trois filles ont respectivement 2 ans, 2 ans et 9 ans.
En effet, si le produit des trois âges est égal à 26, les seules possibilités sont les suivantes : 1x1x36 dont la somme est 38, 1x2x18 dont la somme est 21, 1x3x12 dont la somme est 16, 1x4x9 dont la somme est 14, 1x6x6 dont la somme est 13, 2x2x9 dont la somme est 13, 2x3x6 dont la somme est 11 et 3x3x4 dont la somme est 10.
Si Cédric ne peut pas répondre c'est que le numéro de l'immeuble où lui_même et le concierge habitent est le 13, car il y a deux triplets qui aboutissent à la même somme : ce sont les triplets (1,6,6) et (2,2,9). Pour tous les autres triplets, les trois âges sont déterminés, et Cédric aurait pu répondre.
Quand le concierge lui dit qu'il va en parler à son ainée, cela élimine les jumelles (6;6) : sinon, il n'aurait pas dit « mon ainée ». Les trois âges sont donc : 2 ans, 2 ans et 9 ans.

* * * * *

DÉFI 131-c

Dans la commune de Ville-la-Petite, il n'y a que 14 inscrits sur les listes électorales. Au lendemain du référendum, qui posait la question « Souhaitez-vous trouver un défi mathématique dans le bulletin municipal mensuel ? », le journal local annonçait qu'il y avait eu 83,33 % de OUI.
Peux-tu dire combien de personnes ont voté OUI ?

LA SOLUTION

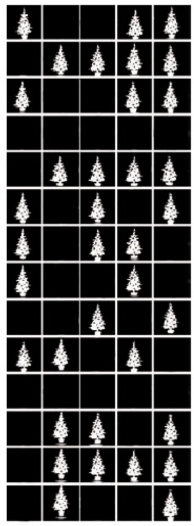
Deux réponses sont possibles : soit il y a eu **12** votants, soit il y en a eu seulement **6**. Ce sont les seules possibilités qui permettent d'obtenir un score de 83,33 %.
La réponse peut être facilement obtenue en utilisant un tableur : dans la colonne de gauche on inscrit le nombre de votants ; dans les autres colonnes on calcule le taux de « OUI » en fonction du nombre de votants.

NB. Votants	Nombre et pourcentage de Oui (par rapport au nombre de votants)													
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
	100,00%	92,86%	85,71%	78,57%	71,43%	64,29%	57,14%	50,00%	42,86%	35,71%	28,57%	21,43%	14,29%	7,14%
13		13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
		100,00%	92,31%	84,62%	76,92%	69,23%	61,54%	53,85%	46,15%	38,46%	30,77%	23,08%	15,38%	7,69%
12			12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
			100,00%	91,67%	83,33%	75,00%	66,67%	58,33%	50,00%	41,67%	33,33%	25,00%	16,67%	8,33%
11				11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
				100,00%	90,91%	81,82%	72,73%	63,64%	54,55%	45,45%	36,36%	27,27%	18,18%	9,09%
10					10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
					100,00%	90,00%	80,00%	70,00%	60,00%	50,00%	40,00%	30,00%	20,00%	10,00%
9						9	8	7	6	5	4	3	2	1
						100,00%	88,89%	77,78%	66,67%	55,56%	44,44%	33,33%	22,22%	11,11%
8							8	7	6	5	4	3	2	1
							100,00%	87,50%	75,00%	62,50%	50,00%	37,50%	25,00%	12,50%
7								7	6	5	4	3	2	1
								100,00%	85,71%	71,43%	57,14%	42,86%	28,57%	14,29%
6									6	5	4	3	2	1
									100,00%	83,33%	66,67%	50,00%	33,33%	16,67%
5										5	4	3	2	1
										100,00%	80,00%	60,00%	40,00%	20,00%
4											4	3	2	1
											100,00%	75,00%	50,00%	25,00%
3												3	2	1
												100,00%	66,67%	33,33%
2													2	1
													100,00%	50,00%
1														1
														100,00%

* * * * *

DÉFI 132-a

Le message de Noël



Notre ami est enfermé un soir de Noël dans un immeuble. Il n'a aucun moyen de communication. Il remarque dans l'immeuble d'en face qu'une personne est encore sur son ordinateur. Il sait que des ingénieurs en informatique travaillent dans cet immeuble. Il lui vient alors une idée. Il va envoyer un message en allumant le sapin et l'éteignant en suivant un code simple qu'un ingénieur en informatique pourra facilement transcrire.
Pouvez-vous retrouver le message de 14 lettres que notre ami tente de transmettre ?

SOLUTION

On est en binaire. On attribue à la lettre A le nombre 1, à la lettre B le nombre 2 et ainsi de suite. La première lettre est celle qui dans l'alphabet est à la $\overline{10011}^{\text{ème}}$ place. C'est à dire 16+2+1=19$^{\text{ème}}$ place. C'est un « S ». Au final le message est « SOS OUVREZ MOI »

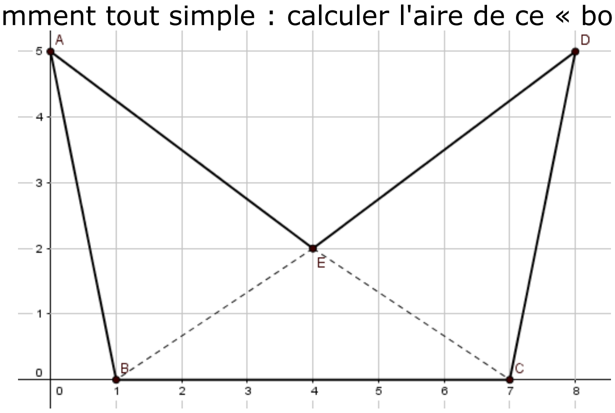
Problème tiré et légèrement adapté de « *Computer science, unplugged, l'informatique sans ordinateur* ».

* * * * *

DÉFI 132-b

Le bonnet d'âne

Voici un défi apparemment tout simple : calculer l'aire de ce « bonnet d'âne » ABCDE.



Les coordonnées des points sont A(0;5), B(1;0), C(7;0), D(8;5) et E(4;2).

Les élèves de deux groupes ont calculé cette aire de deux façons différentes.

Premier groupe : les élèves ont calculé la différence des aires du trapèze (ABCD) et du triangle (AED).

Elle vaut : $\frac{1}{2}(6+8)\times 5-\frac{1}{2}\times 8\times 3=35-12=\mathbf{23}$

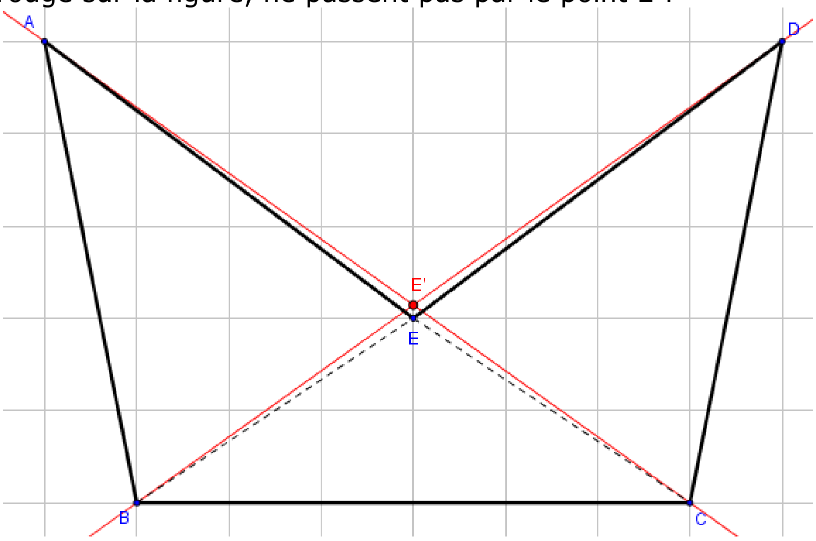
Second groupe : les élèves ont calculé la somme des aires de (ABC) et de (BDC), et en ont retranché celle de (BEC) qui a été comptée deux fois.

On trouve : $\frac{1}{2}(6\times5)+\frac{1}{2}(6\times5)-\frac{1}{2}\times6\times2=\mathbf{24}$

Chacune de ces méthodes semble exacte, et pourtant les résultats dont différents. Il y a donc un « hic ». Une des deux méthode est-elle fausse (ou les deux) ? Sauriez-vous expliquer ce qui s'est passé ?

SOLUTION

C'était à peine visible sur la figure, mais les points A, E et C ne sont pas alignés. Les droites (AC) et (BD), en rouge sur la figure, ne passent pas par le point E !



On peut d'ailleurs calculer les coordonnées du point d'intersection E' de ces droites : son ordonnée est de 15/7, et non pas 2.
L'écart de 1 cm² entre les réponses des deux groupes correspond à la somme des aires des petits triangles allongés AEE' et DEE'.
La bonne réponse était donc 23 ! Ce défi a été trouvé dans la rubrique paradoxes du site de Thérèse Eveilleau

* * * * *

Défi 133 - 1

Pour les plus jeunes : défi 133-1, « Les trois ours »

C'est l'histoire des trois ours qui prennent leur petit déjeuner (alors que Boucle d'or n'est pas encore arrivée).
Papa ours prend la moitié des pots de miel qui sont sur la table, plus un pot (car c'est lui le grand ours).
Maman ours prend la moitié de ce qui reste, plus un pot de miel … elle surveille sa ligne !
Petit ours, voulant imiter ses parents, prend lui aussi la moitié de ce qui reste plus un pot, et constate qu'il ne reste plus de pot sur la table...
Combien y avait-il de pots de miel sur cette table avant leur petit déjeuner ?

SOLUTION

Solution. Soit n le nombre de pots au début.
Le père prend $\frac{n}{2}+1$ pots, il en reste donc $\frac{n-2}{2}$.

La mère prend $\frac{n-2}{4}+1$ pots, il en restera donc $\frac{n-6}{4}$.

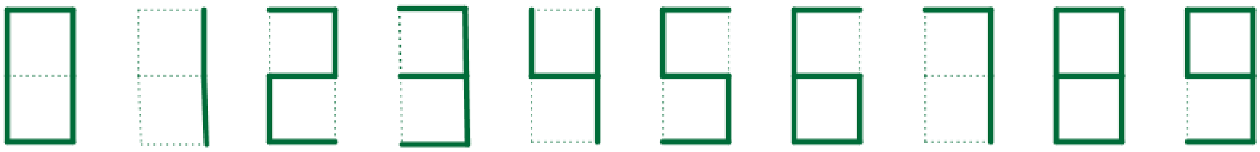
Le petit ours prend alors $\frac{n-6}{8}+1=\frac{n+2}{8}$ pots, et il reste $\frac{n-6}{4}-\frac{n+2}{8}=\frac{n-14}{8}$ pots, qui doit être égal à 0. Le nombre initial de pots était donc **n = 14**.

Remarque. Ce défi est à mettre en parallèle avec le défi du Petit Vert n°128, « Le diable et le fainéant ». Outre la solution algébrique, il était fourni une solution numérique et une feuille de calculs. Elles pourront être source d'inspiration pour écrire une solution autre que celle présentée ci-dessus.

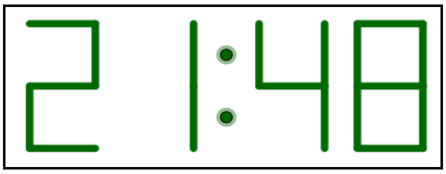
* * * * *

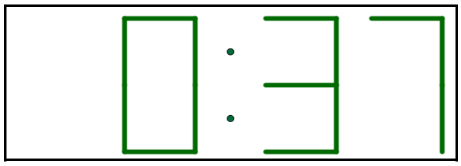
DÉFI 133-2 : LE RÉVEILLE-MATIN

Un réveille-matin affiche les chiffres grâce à des diodes luminescentes. Pour chaque chiffre, de deux à sept diodes sont utilisées : par exemple, le chiffre "1" utilise deux diodes, le chiffre "8" en utilise sept (voir image ci-dessous).



L'affichage du réveil comporte d'une part les heures, d'autre part les minutes, ces deux nombres étant séparés par un double point, comme le montrent les deux exemples ci-dessous, le premier correspondant à 21 h 48 et le second à 0 h 37.





On remarquera que, tant qu'on n'arrive pas à la dixième heure, le réveil n'affiche pas le chiffre des dizaines d'heure (on lit 0 h 37 et non pas 00 h 37).

Le défi est le suivant :

❶ Dans un cycle de 24 heures (de 0 h 00 à 23 h 59), combien de fois l'affichage présentera-t-il un centre de symétrie ? À quels moments cela aura-t-il lieu ?

❷ Combien de fois l'affichage présentera-t-il un axe de symétrie vertical ? À quels moments cela aura-t-il lieu ?

❸ Combien de fois l'affichage présentera-t-il un axe de symétrie horizontal ? À quels moments cela aura-t-il lieu ?

SOLUTION

❶ Les seuls chiffres qui peuvent être utilisés ici sont 0, 2, 5, 8 (qui sont « autosymétiques), ainsi que 6 et 9 (chacun étant symétrique de l'autre). Attention : le 1 ne peut pas être utilisé, car il est « décalé » vers la droite.
Par ailleurs, pour les heures avant 10 heures, il n'y a qu'un seul chiffre affiché à gauche, ce qui ne permet pas un affichage symétrique.

Les seules possibilités sont donc, pour les heures, 20 et 22.

Il n'y a ainsi que deux réponses valides pour cette question ❶ : **20h02** et **22h22**.

❷ Pour cette seconde question, les seuls chiffres utilisables sont 0, 2 et 8.

Comme pour la question précédente, aucune heure avant 22 heures ne peut être utilisée.

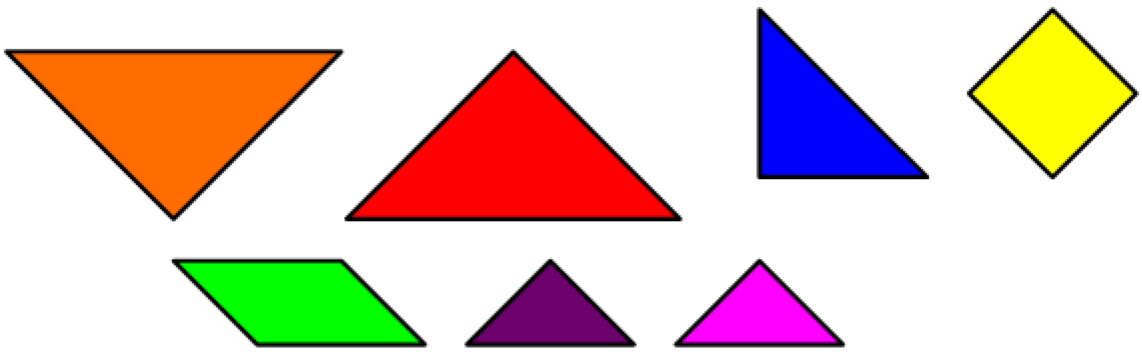
Là encore, il n'y a que deux possibilités pour la question ❷ : **20h05** et **22h55**.

❸ Pour cette dernière question, les seuls chiffres utilisables sont 0, 1, 3 et 8.
Par contre, il est maintenant possible d'utiliser les heures depuis 0 heure.
La partie gauche de l'affichage (les heures) peut donc être 0, 1, 3, 8, 10, 11, 13, 18.
La partie droite (les minutes) peut être 00, 01, 03, 08, 10, 11, 13, 18, 30, 31, 33 ou 38.
Cela fait **96 possibilités**. Voir le tableau ci-après.

\min	0	1	3	8	10	11	13	18	30	31	33	38
0	0h00	0h01	0h03	0h08	0h10	0h11	0h13	0h18	0h30	0h31	0h33	0h38
1	1h00	1h01	1h03	1h08	1h10	1h11	1h13	1h18	1h30	1h31	1h33	1h38
3	3h00	3h01	3h03	3h08	3h10	3h11	3h13	3h18	3h30	3h31	3h33	3h38
8	8h00	8h01	8h03	8h08	8h10	8h11	8h13	8h18	8h30	8h31	8h33	8h38
10	10h00	10h01	10h03	10h08	10h10	10h11	10h13	18h18	10h30	10h31	10h33	10h38
11	11h00	11h01	11h03	11h08	11h10	11h11	11h13	11h18	11h30	11h31	11h33	11h38
13	13h00	13h01	13h03	13h08	13h10	13h11	13h13	13h18	13h30	13h31	13h33	13h38
18	18h00	18h01	18h03	18h08	18h10	18h11	18h13	18h18	18h30	18h31	18h33	18h38

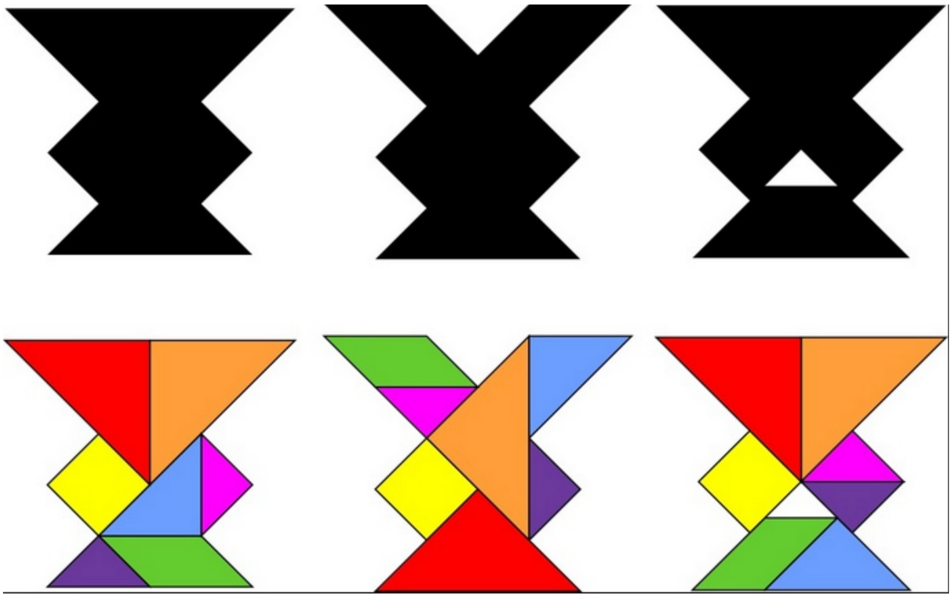
* * * * *

DÉFI 133-3 : LES TROIS VASES



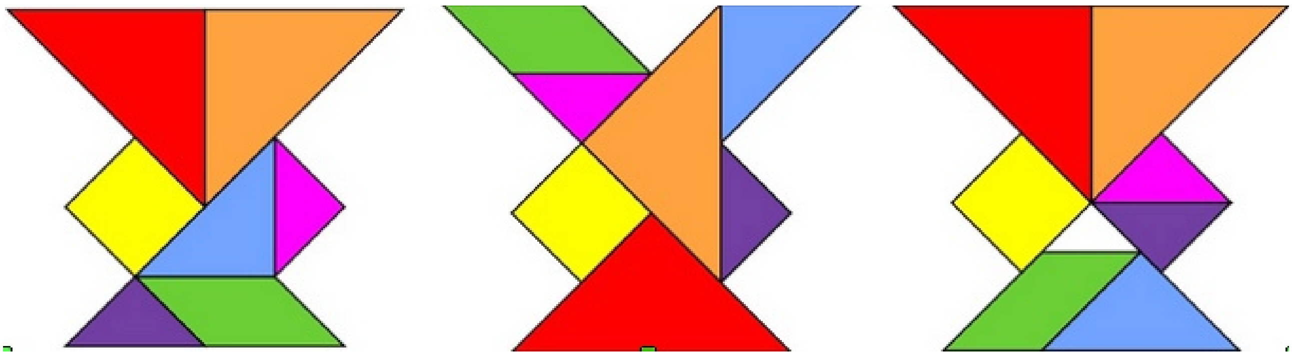
Avec les sept pièces ci-dessus, on peut réaliser ce carré … et des tas d'autres figures.

Par exemple ces trois vases noirs :



Construits avec les mêmes pièces, ces trois vases se ressemblent, mais des espaces vides apparaissent dans les deux vases de droite. Comment pouvez-vous expliquer cela ?

SOLUTION



En prenant comme hypothèse que le carré initial avec lequel on a construit les puzzles des trois vases est de 4 unités, on peut calculer, par exemple, la hauteur des trois vases.
Le premier vase a une hauteur de $2+\sqrt{2}+2$ unités, le second vase une hauteur de 5 unités, et le troisième (celui avec un trou) une hauteur de $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ unités.

La différence de hauteur de ces trois vases est quasi imperceptible, seul le calcul exact des hauteurs permet de démasquer la « supercherie ».

* * * * *

DÉFI 134 - A

Trouver deux nombres entiers a et b tels que (1/a)+(1/b)=1/2018. Si possible, donner toutes les solutions.

PROPOSITIONS POUR LA SOLUTION

Propositions pour la solution

*** Une première piste :**

2018 est un entier pair : 2018 =2x1009 (et 1009 est un nombre premier).

En utilisant l'égalité $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, on en déduit que $\frac{1}{2\times1009}=\frac{1}{3\times1009}+\frac{1}{6\times1009}$.

D'où la solution $\frac{1}{6054}+\frac{1}{3027}=\frac{1}{2018}$

*** Une autre piste :**

Là encore, en constatant que 2018 = 2x1009 (nombre premier), on peut écrire :

$\frac{1}{2}+\frac{1}{1009}=\frac{1011}{2018}$ d'où $\frac{\frac{1}{2}}{1011}+\frac{\frac{1}{1009}}{1011}=\frac{1}{2018}$, soit $\frac{1}{2022}+\frac{1}{1009\times1011}=\frac{1}{2018}$

Ce qui donne la solution a = 2022 et b = 1008x1011 = 1020099.
Mais rien ne prouve qu'il n'y ait pas d'autres solutions...

*** L'informatique va venir à la rescousse.**

Voici un algorithme qui nous permettra de répondre à la question.

```
Pour b allant de 2019 à 4036 faire :
si 2018*b est divisible par b-2018 alors :
    afficher (2018*b)/(b-2018)
    afficher b
finSi
finPour
```

Cet algorithme nous permet de trouver, outre les deux précédentes, deux nouvelles solutions :

$\frac{1}{2019}+\frac{1}{4074342}=\frac{1}{2018}$ et $\frac{1}{2020}+\frac{1}{2038180}=\frac{1}{2018}$

Ce problème n'a donc que quatre solutions.

DÉFI 134 - B

La pyramide ci-dessous est une version simplifiée d'une pyramide Maya, dite également « pyramide à degrés » (les degrés sont des marches d'escalier). Elle est formée de blocs cubiques ayant tous la même dimension.

Combien a-t-on utilisé de cubes pour construire cette pyramide de 5 étages ? Combien en faudrait-il pour construire une pyramide de 10 étages ? De 20 étages ? De *n* étages ?
On dispose d'une boite de 1000 cubes. Combien d'étages (complets) pourra-t-on construire ?

Tous les cubes de cette pyramide visibles de l'extérieur sont gris, mais tous ceux qui sont à l'intérieur sont blancs.
Combien de cubes blancs et combien de cube gris faut-il pour construire une pyramide de 10 étages ? De *n* étages ?

SOLUTION

Cette fois, le défi était trop facile (c'était l'été !)
En ce qui concerne la seconde partie du défi, il suffisait de remarquer que la pyramide blanche (cachée) avait deux étages de moins que la pyramide grise.

* * * * *

DÉFI 135 - A

Diviser pour mieux régner

Certaines énigmes du rallye mathématique de Lorraine auraient certainement été plus simples à résoudre à l'aide d'un petit programme informatique. Nous vous proposons ici, comme défi, de résoudre l'exercice ci-dessous.

2010 était une année à plus de 3 diviseurs : 1, 2, 5, 10...
Nous sommes actuellement en 2018. Quelle sera la prochaine année à **exactement** trois diviseurs ? Quel algorithme proposez-vous ?

SOLUTION

Le défi algorithmique du PV 135 demandait de trouver l'année suivant 2010 qui comporte trois diviseurs. La fonction troisDiviseurs renvoie l'année suivant une année donnée et qui comporte trois diviseurs. Elle utilise la fonction nombreDiviseurs qui renvoie le nombre de diviseurs d'un entier. Effectuer troisDiviseurs(2010) permet d'obtenir la réponse cherchée

Pseudo-code :

```
Fonction nombreDiviseurs(n : entier ; nb : entier)
        nb ← 0 ;
        pour i allant de 1 à n, faire :
                si reste(n,i)=0 alors :
                        nb ← nb +1 ;
                finSi ;
        finPour ;
        renvoyer nb.
```

NB : reste(a,b) renvoie le reste de la division euclidienne de a par b

```
Fonction troisDiviseurs(annee1 : entier ; annee2 : entier)
        annee2 ← annee1 ;
        d ← nombreDiviseurs(annee2) ;
        tant que d ≠ 3, faire :
                annee2 ← annee2 + 1 ;
                d ← nombreDiviseurs(annee2) ;
        finTantque ;
        renvoyer annee2
```

Code Python :

```
""" Fonction nombreDiviseurs(n : entier; nb : entier)
n : entier dont on veut connaître le nombre de diviseurs
renvoie nb, le nombre de diviseurs de n """


def nombreDiviseurs(n):
   nb=0
   for i in range(1,n+1):
      if n%i==0:
         nb=nb+1
   return nb


""" Fonction troisDiviseurs(annee1 : entier; annee2 : entier)
annee1 : l'année de départ de la recherche
d : entier, le nombre de diviseur de annee
```

renvoie annee2, l'année suivant celle de départ qui comporte trois diviseurs """

```
def troisDiviseurs(annee1):
    annee2=annee1
    d=nombreDiviseurs(annee2)
    while d!=3:
        annee2=annee2+1
        d=nombreDiviseurs(annee2)
    return annee2Diviser pour mieux régner
```

* * * * *

DÉFI 135 - B

Le maillot de Mbapé

Tiré et très légèrement modifié du « Calendrier mathématique 2017 » du CNRS, Université de Strasbourg, Institut de recherche mathématique avancée.

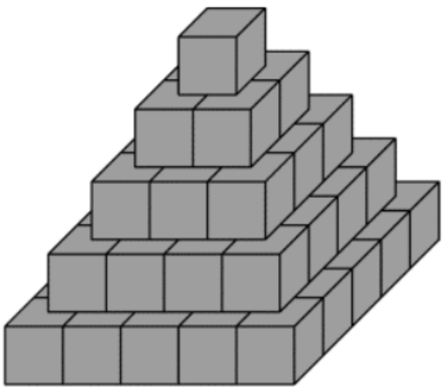
Supposons qu'une équipe de foot n'ait que 11 joueurs et donc 11 maillots, numérotés de 1 à 11. Les joueurs entrent au vestiaire un par un, en ordre aléatoire, et cuisissent un maillot.
Kélio rêve d'avoir le numéro 10 de son idole Kylian Mbappé, et donc le choisira s'il en a la possibilité.

Quelle est la probabilité que Kélio puisse obtenir le maillot de son joueur préféré ?

SOLUTION

Une équipe a 11 joueurs et 11 maillots numérotés de 1 à 11.
Les joueurs entrent au vestiaire un par un, en ordre aléatoire et choisissent un maillot, sauf Kélio, qui veut avoir le numéro 10 de Kylian Mbappé et qui donc le choisit s'il en a la possibilité.
Quelle est la probabilité que Kélio obtienne le maillot de son joueur préféré ?

On définit les événements suivants :
K: « Kélio obtient le numéro 10 de Mbappé » ;



I_1: « Kélio entre en i ème position au vestiaire ».

Le numéro 10 de Mbappé peut être obtenu par Kélio en entrant en première position ou en seconde, en troisième … jusqu'à rentrer au vestiaire en 11 ème position.
Donc :

$$P(K)=P(K\cap I_1)+P(K\cap I_2)+\ldots+P(K\cap I_{11})$$
$$P(K)=P_{I_1}(K)\times P(I_1)+P_{I_2}(K)\times P(I_2)+\ldots+P_{I_{11}}(K)\times P(I_{11})$$

$$P(K)=P_{I_1}(K)\times\frac{1}{11}+P_{I_2}(K)\times\frac{1}{11}+\ldots+P_{I_{11}}(K)\times\frac{1}{11}$$

La probabilité que Kélio entre en i ème position est toujours de $\frac{1}{11}$.

La probabilité que Kélio obtienne le maillot lorsqu'il entre en premier est bien évidemment égale à 1.

La probabilité que Kélio obtienne le maillot lorsqu'il entre en deuxième position est de : $\frac{10}{11}$

La probabilité que Kélio obtienne le maillot lorsqu'il entre en troisième position est de :

$$\frac{10}{11}\times\frac{9}{10}=\frac{9}{11}$$

La probabilité que Kélio obtienne le maillot lorsqu'il entre en quatrième position est de :

$$\frac{10}{11}\times\frac{9}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{11}$$

En itérant la procédure on obtient.

$$P(K)=\frac{1}{11}+\frac{10}{11^2}+\frac{9}{11^2}+\ldots+\frac{1}{11^2}$$

$$P(K)=\frac{1}{11}+\frac{55}{11^2}$$

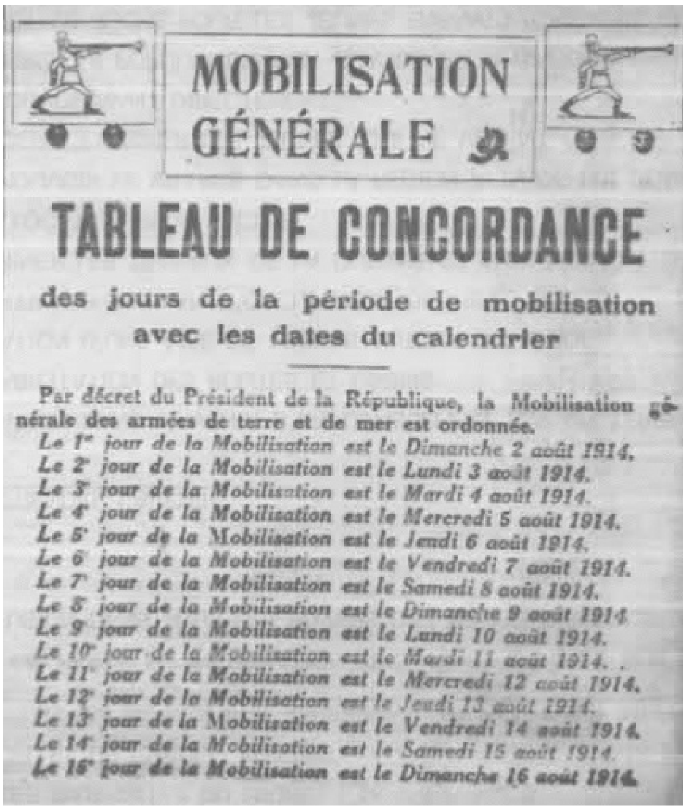
$$P(K)=\frac{6}{11}$$

* * * * *

DÉFI 135 - C

Mobilisation générale

Le tableau ci-dessous figurait dans la rubrique « Il y a 100 ans dans l'Est » daté du 8 aout 2014. Ce tableau, tronqué, ne mentionne que les 15 premières dates de la mobilisation.
Que faudra-t-il écrire pour le 15 novembre 1918 (jour de l'armistice, c'est à dire l'arrêt des combats ?



MOBILISATION GÉNÉRALE

TABLEAU DE CONCORDANCE

des jours de la période de mobilisation avec les dates du calendrier

Par décret du Président de la République, la Mobilisation générale des armées de terre et de mer est ordonnée.

Le 1er jour de la Mobilisation est le Dimanche 2 août 1914.
Le 2e jour de la Mobilisation est le Lundi 3 août 1914.
Le 3e jour de la Mobilisation est le Mardi 4 août 1914.
Le 4e jour de la Mobilisation est le Mercredi 5 août 1914.
Le 5e jour de la Mobilisation est le Jeudi 6 août 1914.
Le 6e jour de la Mobilisation est le Vendredi 7 août 1914.
Le 7e jour de la Mobilisation est le Samedi 8 août 1914.
Le 8e jour de la Mobilisation est le Dimanche 9 août 1914.
Le 9e jour de la Mobilisation est le Lundi 10 août 1914.
Le 10e jour de la Mobilisation est le Mardi 11 août 1914.
Le 11e jour de la Mobilisation est le Mercredi 12 août 1914.
Le 12e jour de la Mobilisation est le Jeudi 13 août 1914.
Le 13e jour de la Mobilisation est le Vendredi 14 août 1914.
Le 14e jour de la Mobilisation est le Samedi 15 août 1914.
Le 15e jour de la Mobilisation est le Dimanche 16 août 1914.

Nous n'avons affiché ici que les dates des 18 premiers jours de la mobilisation générale.

Que faudrait-il écrire sur la ligne correspondant au 11 novembre 1918, jour de la signature de l'armistice, c'est à dire le jour de l'arrêt des combats ?

N.B. Il ne faut pas confondre l'armistice (11 novembre 1918), avec la démobilisation : celle-ci a commencé seulement après la

signature du traité de Versailles (28 juin 1919). Les derniers soldats (les plus jeunes) n'ont été démobilisés qu'en octobre 1919, soit plus de dix mois après la fin des combats et plus de cinq ans après le début du conflit. Voir par exemple :
http://www.amisduvaldethones.fr/les-soldats-ne-sont-pas-rentres-chez-eux-en-novembre-1918/
ou http://combattant.14-18.pagesperso-orange.fr/Pasapas/E302LoisSynthese.html

SOLUTION

Le 31 août est le 30$^{\text{ème}}$ jour de la mobilisation.
J'ajoute les 30 jours de septembre, les 31 jours d'octobre, les 30 jours de novembre et les 31 jours de décembre. Le 31 décembre 1914 est donc le 152$^{\text{ème}}$ jour de la mobilisation.
Après des 365 jours de 1915, les 366 jours de 1916 et les 365 jours de 1917, le 31 décembre 1917 est le 1248$^{\text{ème}}$ jour de la mobilisation.
Pour 1918, j'ajoute (31+28+31+30+31+30+31+31+30+31) jours soit 304 jours. Le 31 octobre est donc le 1552$^{\text{ème}}$ jour de la mobilisation.
Le 11 novembre 1918 est donc le 1563$^{\text{ème}}$ jour de la mobilisation.

* * * * *

Sudokus mathématiciens

Ces sudokus un peu spéciaux cachent le nom d'un mathématicien

C'est bien évidemment un nom de 9 lettres distinctes. Comme dans tout sudoku, chaque lettre doit apparaitre une fois et une seule dans chaque ligne, dans chaque colonne, et dans chaque carré de 3x3. Une des 9 lettres n'apparait pas dans la grille ... c'est pour que ce ne soit pas trop facile !
Quand vous aurez terminé, le nom de ce mathématicien apparaitra (dans l'ordre) dans une des lignes ou une des colonnes. Nous ne vous donnerons pas les solutions, ce serait trop facile...

PV 86

			O	E		U	I	
					S		N	
	N		U			B		O
		N			E			
	U		N		B		O	
			I			S		
N		S			U		B	
	B		S					
	O	E		I	R			

PV 87

		M	S				U	
			L		O			
	L				I		S	
		U		A			O	M
	A	R				L	I	
S	O			L		U		
	I		O				M	
			R		L			
	U				M	I		

PV 88

		A					T	
V		T	A					N
	N			E	T	A		
	P	N			A		V	
				R				
	E		P			N	A	
		V	O	A			E	
P					N	O		A
	A					R		

PV 89

	D			S			L	
	R							A
				P	L	D		
		D	P				U	
L		O				A		E
	E				O	P		
		S	U	L				
E							A	
	U			O			R	

PV 90

N				X		O		H
E								N
M	H			N		E	X	
T			O		X			
			E		T			
			N		H			X
	T	N		E			H	O
X								M
H		E		T				A

PV 93

A			P				I	
E	O					N		
C			A			E		R
	N			I	O	R	E	A
	E	C	N				O	I
O								C
		A	E		P		C	
N			O	R				