Calendrier de l'avent 2019
Correction jour 12

La somme de deux entiers consécutifs peut s'écrire : n+(n+1)=2n+1. C'est un nombre impair.
Réciproquement tout nombre impair peut s'écrire comme somme de deux nombres consécutifs.
Par exemple :
1+0=1
2019= 1009+1010
2017=1008+1009.
Cherchons, comme le demande le texte, pour les nombres inférieurs ou égaux à 20, à les écrire comme somme d'au moins deux entiers consécutifs.
Pour les nombres impairs on sait le faire.
Voyons les nombres pairs : On ne peut pas pour 0, 2, 4, 6=1+2+3, 8 on ne peut pas, 10=1+2+3+4, 12=3+4+5, 14=2+3+4+5, 16 on ne peut pas, 18= 3+4+5+6, 20=2+3+4+5+6.
Il semble que les cas impossibles sont les nombres qui peuvent s'écrire 2^k avec k entier non nul.
Je pose S=x+(x+1)+(x+2)+...+(x+(n-1)) la somme de n nombres consécutifs, x entier.

$$S=nx+n\frac{(n-1)}{2.}$$

1 cas : n=2p où p est un entier supérieur ou égal à 1. S=2px+2p(2p-1)/2=2px+p(2p-1)=p(2x+2p-1).
2x+2p-1 est un nombre impair. Donc les nombres de la forme 2^k (k non nul), nombre pair, ne peuvent pas s'écrire comme la somme de n nombres consécutifs (n ≥2) lorsque n=2p.
Il reste à envisager les nombres qui peuvent $s'écrire\, 2^k$ multiplié par un nombre qui n'est pas qu'une puissance de 2 ou les nombres produit de nombre(s) impair(s). En rassemblant les cas et les puissances de 2 on peut écrire ces nombres : $(2m+1)2^{k.}$ k pouvant être nul.
On peut chercher une solution qui convient.
Si jamais une solution existe on doit avoir : (2m+1) $2^k = nx+n\frac{(n-1)}{2} = n\left(x+\frac{(n-1)}{2}\right).$
Donc : $(2m+1)2^{(k+1)}$ =n(2x+n-1).
Il semble « naturel » de prendre : n= $2^{(k+1)}$ et donc : 2x+n-1=2m+1 ainsi : x=m+1-n/2= $m+1-2^k$.
Mais pour cela il faut que : m≥ 2^k .
Vérification :
$2^{(k+1)}$ (m+1- 2^k)+ $2^{(k+1)}$ ($2^{(k+1)}$ -1)/2= (2m+1) 2^k . Résultat attendu.
Mais si : m≤ 2^k -1 il faut trouver les valeurs de x et de n.
Tentons : x= 2^k -m (expression désormais positive d'après l'hypothèse) et n=2m+1.
Vérification :
(2m+1)(2^k -m)+(2m+1) $\frac{(2m+1-1)}{2}$ =(2m+1)2^k. Résultat attendu.
Voyons pour 18 et 20 si on retrouve bien les résultats trouvés dans la première partie.
18=2x(2x4+1). Puisque 4>2 on a : n=4 et x=4+1-2=3. 3+4+5+6=18 est le résultat retrouvé par cette méthode.
20=2^2x(2x2+1). Puisque 2<4 on a : n=2x2+1=5 et x=4-2=2. 2+3+4+5+6 =20 est le résultat identique à celui trouvé dans la première partie.
Ainsi tous les nombres qui ne s'écrivent pas 2^k peuvent s'écrire comme somme d'au moins deux nombres consécutifs.