Journée Régionale de l’APMEP 2021

Extraits de l’atelier B3

Histoires de mathématiques

De Divine Proportione   publié en 1509

A-t-on le temps d’intégrer l’histoire des maths dans notre enseignement ?

Pourquoi faire ?

Christelle Kunc et Fathi Drissi

« Certain pere prochain à sa mort, celuy semble,
L'esprit luy defaillant, l'ouie & veue ensemble,
Feit appeller ses fils, lors estans 6 en nombre.
Je prie Dieu, dit il, de vous garder d'encombre
Et que vous le craignez les jours de vostre vie.
Si vous brebis serez doncq de sa bergerie,
Pensez y jour & nuict, sans vous fier au monde,
De toute iniquité puis que tout homme abonde.
Au surplus, mes enfans, pour vivre honnestement
Livres nonante & huict avecq neuf mille & cent
Je vous laisse à present, assez pour vostre estat,
Ains gardez vous bien fort d'en faire aulcun degast.
Or A 2 en aura tant de fois que B troix,
Et C 5 en prendra, B quatre quantesfois,
Aussi quand C prend 6, D prendra 7 sans cesse,
Et si D en prend 8, à 9 faut qu'E s'adresse.
Si E prend livres 10, F en aura doncq douze,
Tout par raison, affin que nulluy s'en courrouce.
Le bon pere mourut ayant fait telle presche.
Toy doncq dy, bon Lecteur, car nulluy te n'empesche,
Combien d'argent chascun d'eux en sa bourse pesche ? »[1]

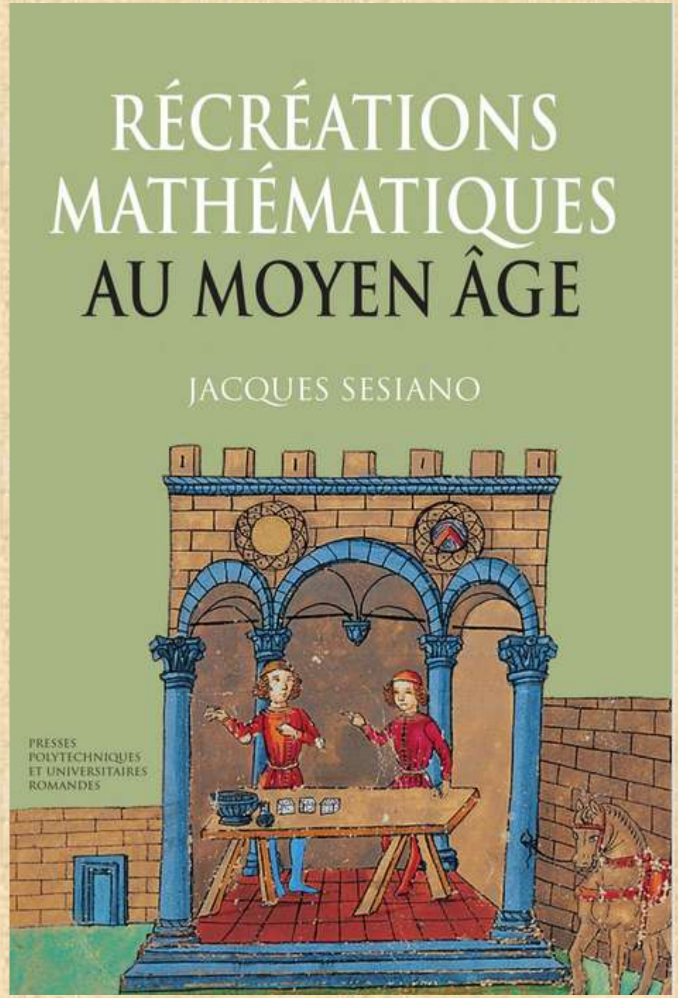
[1] Mellema, *Arithmetique*, II, p. 54 (*lors* = alors ; *abonder de* = avoir en quantité ; *ains* = mais ; *degast* = gaspillage ; *nulluy* = personne ; *puis que* = puisque ; *pescher* = retirer). Elcius Edouard Léon Mellema est né en 1544 en Flandres. Parfaitement bilingue, il est l'auteur d'un dictionnaire flamand-français dont le titre nous informe qu'il est *très ample et très copieux*. Mellema est aussi l'auteur de poèmes dans l'une et l'autre langue. Ce goût ne l'a donc pas quitté lors de la composition de son *Arithmetique*.

Christelle Kunc et Fathi Drissi

« De tout temps on a cherché à rendre l'étude des mathématiques agréable à ceux qui, de prime abord, en récusaient soit l'utilité soit l'intérêt. Les élèves étaient-ils portés plutôt sur la littérature et les belles-lettres qu'il fallait leur montrer que les mathématiques aussi savaient être accommodées à cette sauce.

Ainsi rencontrait-on parfois, au milieu de manuels d'enseignement traditionnels, des problèmes présentés sous forme versifiée, généralement en alexandrins puisque tel était l'usage commun. L'exemple suivant est extrait de l'ouvrage de Mellema. On remarquera qu'il commence comme une anecdote ; lorsque le lecteur s'est laissé gagner par son déroulement, le voilà qui est rattrapé par les données numériques. Veut-il connaître la fin de l'histoire, il lui faudra bien se saisir de sa plume et d'un morceau de papier. »

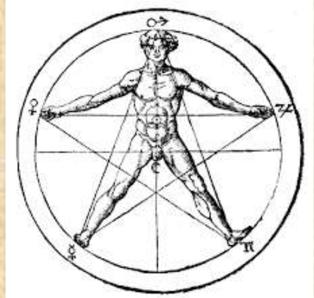
Jacques Sesiano

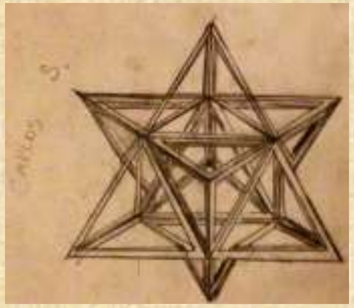


Partie 1.
Luca PACIOLI

Qui est Luca Pacioli?

- C'est un toscan, natif de Borgo Sansepolcro (Florence)
- Il apprend les mathématiques à Venise auprès d'un lecteur public de la République de Venise.
- Il finance ses études en étant précepteur des trois fils d'un riche marchand.
- Il prend l'habit franciscain, puis parcourt le reste de sa vie les principales villes et cours de l'Italie d'alors : d'abord Pérouse, Naples, Rome, Padoue, Assise, Urbino, comme enseignant public, puis Milan, Pavie, Pise, Bologne, Rome comme savant universitaire, et hôte prestigieux.
- A Milan, il rencontre Léonard De Vinci avec qui il se lie d'amitié et à qui il enseigne les mathématiques.





Christelle Kunc et Fathi Drissi

Ses principaux écrits :

- ***La Summa de arithmetica goemetria proportioni et proportionalita (1494) :*** 10 chapitres (7 d'arithmétique, le 8e d'algèbre, le 9e des questions commerciales, le 10e de Géométrie.)

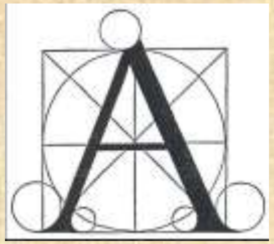
- ***De Viribus quantitatis (1496-1508) :*** recueil de problèmes mathématiques amusants, et même un tour de magie!

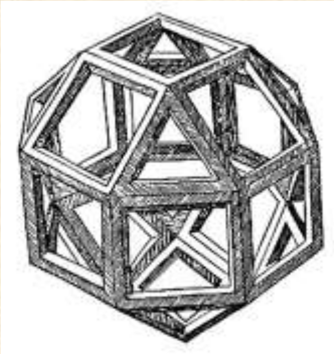
- ***De divina proportione*** (écrit à Milan entre 1496 et 148 et publié en 1509 à Venise) :
  le nombre d'or…, illustré par léonard de Vinci (polyèdres) , la perspective, les solides de Platon, …

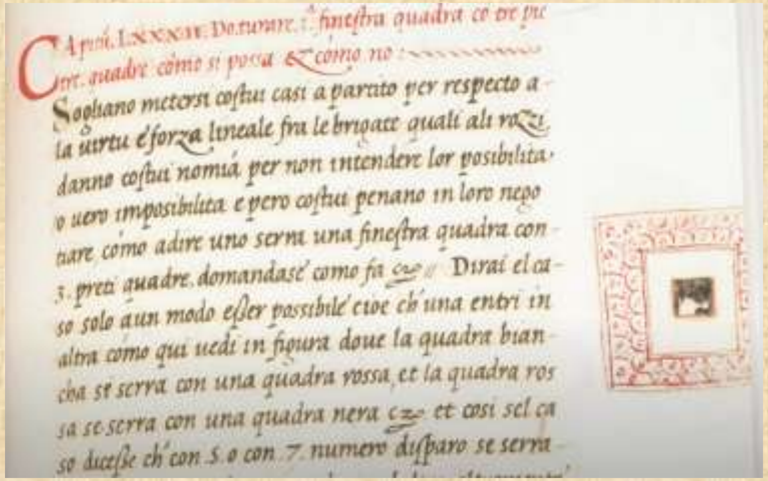
- Une édition en latin des éléments d'Euclide.

- Un traité d'abaque écrit pour ses élèves de Pérouse (conservé au Vatican).

- Un traité sur le jeu d'échecs ***De ludo scacchorum***






Capitolo LXXXIX. Do trovare finestra quadra co tre pie
tre quadre como si possa et como no
Sogliano meterrsi costui casi a partito per respecto a
la virtu e forza lineale fra le brigate quali ali rozzi
danno costui nomia per non intendere lor posibilita
o vero imposibilita e pero costui penano in loro nego
tiare como adire uno serra una finestra quadra con
3. preti quadre domandase como fa Dirai el ca
so solo a un modo esser possibile cioe ch una entri in
altra como qui vedi in figura doue la quadra bian
cha se serra con una quadra rossa et la quadra ros
sa se serra con una quadra nera et cosi sel ca
so dicesse ch con 5. o con 7. numero disparo se serra

« Ben me pare, per amore de molti idioti, dover ponere fra queste cose speculative qualche piacevilezza, acio anche loro s'abino a recordare de l'ordiantore, e anche gli altri dotti ale volte arà refrigerio asai… » ***Luca Paciolo***

« Pour l'amour des mules , je crois devoir ajouter aux concepts quelques divertissements qui puissent aussi servir à mémoriser le procédé de calcul… »

Problème1 : un jeu de devinette

Quelqu'un a pensé à un nombre inférieur à 104 et dit: « sais-tu le trouver avec une règle qui soit valide pour tous les nombres de 1 à 104? » Fais ainsi :

Dis-lui de diviser le nombre par 3, et de te dire le reste de la division. Ce reste tu le gardes en mémoire multiplié par 70.

Puis fais-lui diviser le nombre par 5, demande le reste et garde en mémoire le reste multiplié par 21. Puis fais-lui diviser le nombre par7 et garde en mémoire le reste multiplié par 15. Additionne les trois nombres gardés en mémoire, divise le résultat par 105 et le reste que tu obtiendras sera le nombre pensé, car, comme je disais, il est inférieur à 105. Au-delà, la règle ne vaut plus.

Christelle Kunc et Fathi Drissi

Problème 2:

Prends des cailloux en nombre égal dans chaque main, déplace-en un certain nombre de la main droite vers la main gauche, pose les cailloux restant dans la main droite, et pose-en autant venant de la main gauche. Saches qu’il te restera en main le double du nombre de cailloux que tu as déplacé. Puis, pour qu’il ne découvre pas le truc, donne lui en encore quelques uns, puis tu lui diras combien il en a en tout et il ne saura pas comment tu as fait.

<u>Problème 3 </u>: *Jeu sur la numération de position*

Une personne a lancé deux dés, on veut savoir quels nombres sont tombés.

Fais ainsi : dis-lui de doubler le plus petit nombre, puis d'ajouter 5 puis de multiplier le résultat par 5, puis fais-lui ajouter le nombre de l'autre dé et demande le résultat : soustrais mentalement 25 à cette somme, le nombre des dizaines du nombre obtenu est la plus petite valeur des dés, le nombre des unités est la plus grande valeur des dés.

On retrouve ce problème dans la B.D. "Mille et une nuits scientifique" de Jean-Pierre Petit

Problème 4: Une personne a pensé à un nombre, l'a multiplié par 10, lui a ajouté 7, a doublé la somme, divisé le produit par 5 et multiplié le reste de la division par lui-même obtenant 16. Quel nombre a-t-il pensé ?

Dans ce cas fais ainsi : prends ton nombre préféré et ça ira bien.

Et ainsi, si tu veux rendre le jeu plus beau, gardes bien présent le nombre que tu fais ajouter, et le reste qu'il te donne, tu pourras choisir le nombre que tu veux autant de fois que tu veux et tu sauras toujours le résultat. Sur ce sujet je n'en dis pas plus, fais seul.

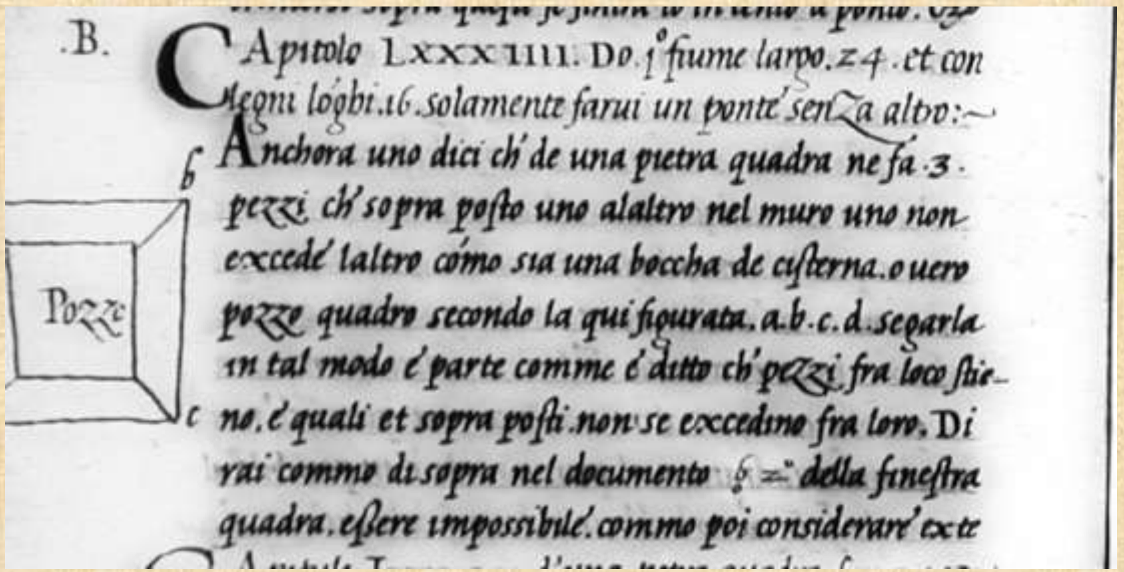
<u>Problème 5</u> : Traversée d'un fossé

Tu te trouves sur une île carrée entourée d'une rivière large de 24 m.

Tu disposes seulement de deux planches longues de 16 m.

Comment ferais-tu pour passer de l'autre côté?

The Epoch Times



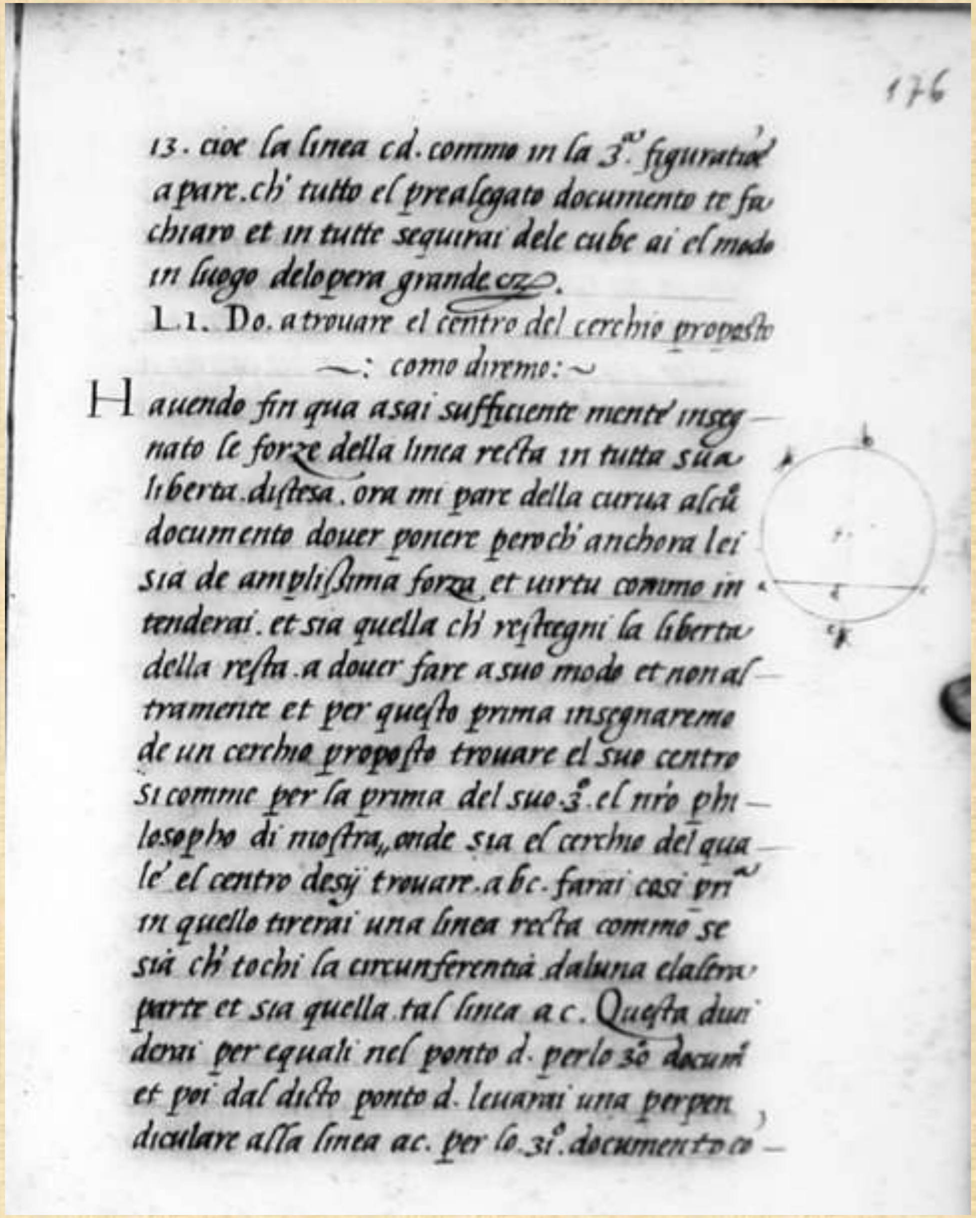
.B. CApitolo LXXXIIII. Do .1° fiume largo .24. et con legni lòghi .16. solamente farui un ponte senza altro:~

b Anchora uno dici ch' de una pietra quadra ne fa .3. pezzi ch' sopra posto uno alaltro nel muro uno non excede laltro còmo sia una boccha de cisterna. o uero pozze quadro secondo la qui figurata. a.b.c.d. segarla in tal modo e parte comme e ditto ch' pezzi fra loco stie- c no. e quali et sopra posti non se excedino fra loro. Dirai commo di sopra nel documento della finestra quadra. essere impossibile. commo poi considerare exte

Christelle Kunc et Fathi Drissi

Problème 6 :

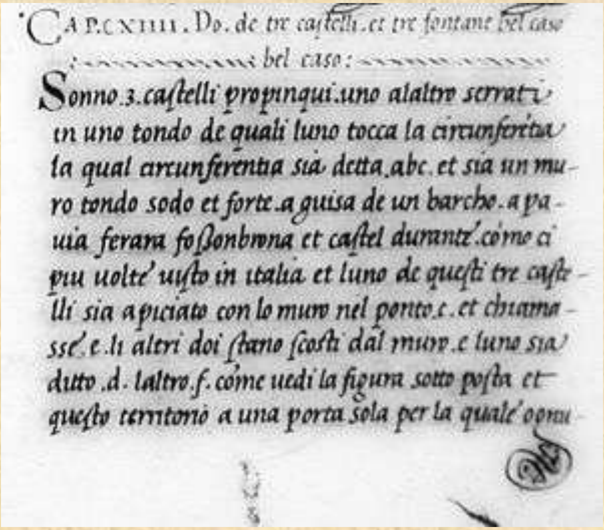
Trouver le centre d’un cercle donné

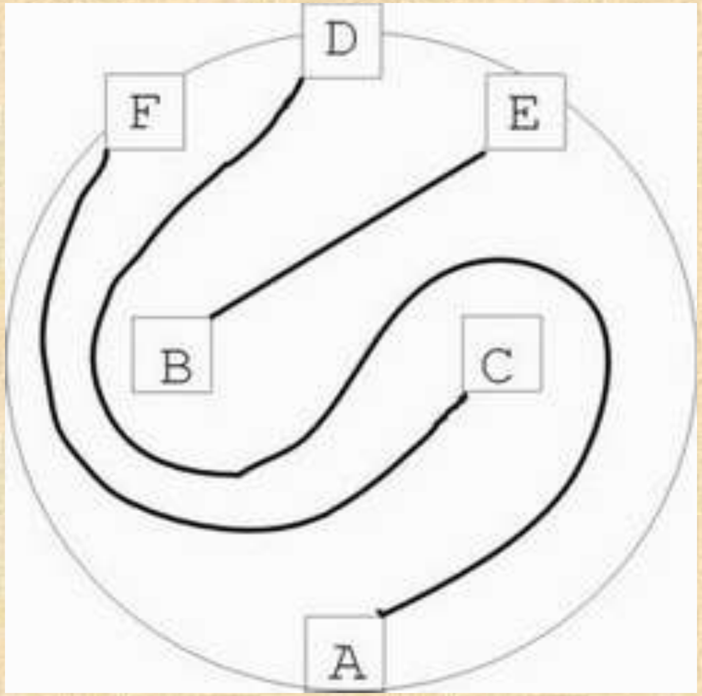

176

13. cioe la linea cd. commo in la 3.ª figuratione
a pare. ch' tutto el prealegato documento te fu
chiaro et in tutte sequirai dele cube ai el modo
in luogo delopera grande czo.
L1. Do. a trouare el centro del cerchio proposto
~: como diremo: ~
Hauendo fin qua asai sufficiente mente' insegnato le forze della linea recta in tutta sua
liberta distesa. ora mi pare della curua alcũ
documento douer ponere perch' anchora lei
sia de amplissima forza et uirtu commo in
tenderai. et sia quella ch' restregni la liberta
della recta a douer fare a suo modo et non altramente et per questo prima insegnaremo
de un cerchio proposto trouare el suo centro
si comme per la prima del suo 3.º el nro phi
losopho di mostra,, onde sia el cerchio del qua
le' el centro desij trouare. a b c. farai cosi pri
in quello tirerai una linea recta commo se
sia ch' tochi la circunferentia daluna elaltra
parte et sia quella tal linea a c. Questa diuiderai per equali nel ponto d. per lo 3.º docum
et poi dal dicto ponto d. leuarai una perpen
diculare alla linea ac. per lo 31.º documento co

Problème 7 :

Relier les 3 châteaux A, B, C avec leurs fontaines respectives D, E, F en traçant 3 routes sans intersections.


CAP. CXIIII. Do. de tre castelli. et tre fontane bel caso
bel caso:
Sonno 3. castelli propinqui. uno alaltro serrati
in uno tondo de quali luno tocca la circunferentia
la qual circunferentia sia detta abc. et sia un muro tondo sodo et forte. a guisa de un barcho. a pauia ferara fossonbrona et castel durante. como ci
piu uolte' uisto in italia et luno de questi tre castelli sia apiciato con lo muro nel ponto c. et chiamasse' e. li altri doi stano scosti dal muro. e luno sia
ditto. d. laltro. f. come uedi la figura sotto posta et
questo territorio a una porta sola per la quale' ogni



Christelle Kunc et Fathi Drissi

<u>Problème 8</u>: Transvasements

Il s'agit de répartir le contenu d'un conteneur plein entre plusieurs personnes (généralement 2) à l'aide de deux conteneurs vides ou non. La notation (8, 5, 3 : 4, 4) indique les données du premier problème, avec un conteneur plein de 8 litres, obtenir 4 et 4 en utilisant 2 conteneurs vides de 5 et 3 litres.

Dans son *<u>De Viribus Quantitatis</u>*, Luca Pacioli présente quatre exemples de ce problème : Partager un tonneau de vin entre deux ou trois personnes.

Le premier reprend le problème que nous connaissons,

Le second choisit les valeurs 12, 7 et 5 ; ce second exemple est, de l'avis de Pacioli, notablement plus beau que le précédent avec un plus grand nombre de pas (*et sia facta più bella asai che la precedente et con più mutationi*).

Etape	12	7	5
N°1	12	0	0
N°2	7	0	5
N°3	7	5	0
N°4	2	5	5
N°5	2	7	3
N°6	9	0	3
N°7	9	3	0
N°8	4	3	5
N°9	4	7	1
N°10	11	0	1
N°11	11	1	0
N°12	6	1	5
N°13	6	6	0

Dans son troisième exemple, Pacioli considère quatre récipients de contenus 18, 5, 6 et 7, le liquide dans premier étant à partager à parts égales entre trois personnes.

Cette généralisation est fictive puisque le troisième récipient, dont le contenu est précisément la part de chaque personne, est rempli dès l'abord et ne joue plus de rôle, en sorte que le problème se ramène exactement au précédent. Ce ne doit être que la longueur de son énoncé et le nombre d'étapes de sa résolution qui rend ce problème plus élégant aux yeux de Pacioli (*et sia più bella proposta*).

Quant au quatrième exemple, Pacioli demande de partager 10 à l'aide de deux récipients de contenus 6 et 4, ou bien 12 avec deux récipients de 8 et de 4.

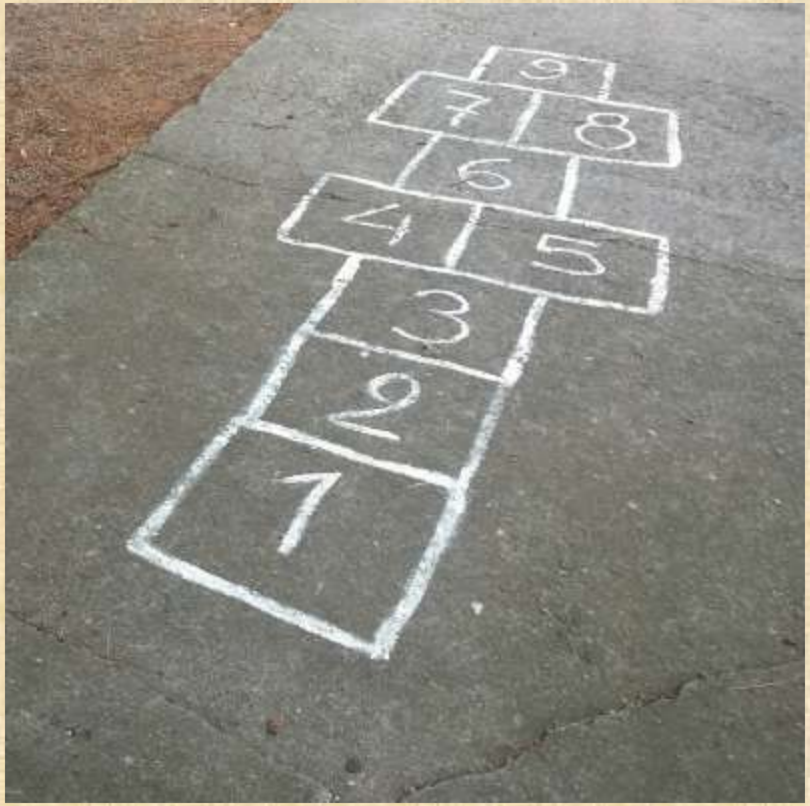
Pacioli laisse la résolution de cet exemple au lecteur tout en l'avertissant de l'impossibilité du problème.

Avec Pacioli, nous rencontrons deux nouveaux aspects de la question des transvasements : son extension à quatre récipients et un cas d’impossibilité.

Le problème des transvasements est aussi repris par Cardan et Tartaglia.

Problème proposé par Tartaglia : partager 24 à l’aide de trois récipients de contenus 13, 11 et 5.

Fin de la récréation …



Christelle Kunc et Fathi Drissi

Pierre Fermat (1601-1665)

Partie 2.
Le problème des partis

Christelle Kunc et Fathi Drissi

Luca Pacioli

Nous sommes en 1494.

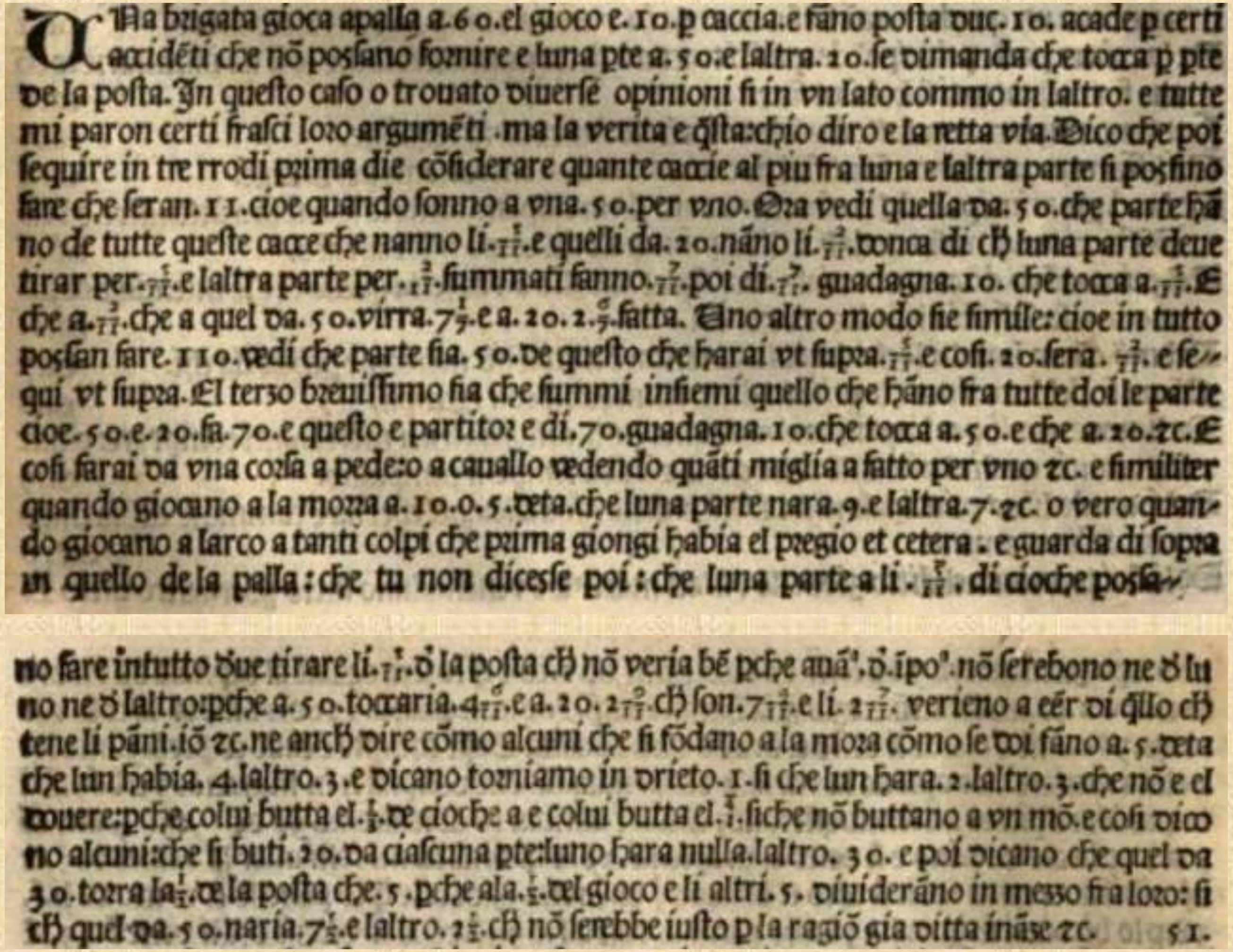
Luca Pacioli publie à Venise le premier manuel de comptabilité et popularise les méthodes mises en pratique de longue date par les marchands vénitiens.

Par Anonymous. — La storia del Bucintoro: Bucintoro del 1526 [The History of the Bucentaur: The Bucentaur of 1526]. Fondazione Bucintoro. Retrieved on 10 July 2016., Domaine public, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=3636949

Parmi les problèmes proposés, nous rencontrons celui-ci :

Deux camps jouent à la balle ; chaque manche est de 10 points et il faut 60 points pour gagner le jeu ; la mise totale est de 10 ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse pas s’achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l’un a 50 points et l’autre a 20 points.

Christelle Kunc et Fathi Drissi



Una brigata gioca apalla a.60.el gioco e.10.p caccia.e fano posta duc.10. acade p certi
accidẽti che nõ possano fornire e luna pte a.50.e laltra.20.se dimanda che tocca p pte
de la posta. In questo caso o trouato diuerse opinioni si in vn lato commo in laltro. e tutte
mi paron certi frasci loro argumẽti .ma la verita e q̃sta:chio diro e la retta via. Dico che poi
sequire in tre modi prima die cõsiderare quante caccie al piu fra luna e laltra parte si possino
fare che seran.11.cioe quando sonno a vna.50.per vno. Ora vedi quella da.50.che parte hã
no de tutte queste cacce che nanno li.$\frac{5}{11}$.e quelli da.20.nãno li.$\frac{2}{11}$.donca di ch luna parte deue
tirar per.$\frac{5}{11}$.e laltra parte per.$\frac{2}{11}$.summati fanno.$\frac{7}{11}$.poi di.$\frac{7}{11}$. guadagna.10. che tocca a.$\frac{5}{11}$. E
che a.$\frac{2}{11}$.che a quel da.50.virra.$7\frac{1}{7}$.e a.20.$2\frac{6}{7}$.fatta. Uno altro modo fie simile: cioe in tutto
possan fare.110.vedi che parte sia.50.de questo che harai vt supra.$\frac{5}{11}$.e cosi.20.sera.$\frac{2}{11}$.e se-
qui vt supra. El terzo breuissimo sia che summi insiemi quello che hãno fra tutte doi le parte
cioe.50.e.20.fa.70.e questo e partitor e di.70.guadagna.10.che tocca a.50.e che a.20.&c. E
cosi farai da vna corsa a pedezo a cauallo vedendo quãti miglia a fatto per vno &c. e similiter
quando giocano a la mozza a.10.0.5.deta.che luna parte nara.9.e laltra.7.&c. o vero quan-
do giocano a larco a tanti colpi che prima giongi habia el pregio et cetera. e guarda di sopra
in quello de la palla: che tu non dicesse poi: che luna parte a li.$\frac{5}{11}$. di cioche possa-

no fare intutto due tirare li.$\frac{5}{11}$.d la posta ch nõ veria bẽ pche anã°.d.ipo°.nõ serebono ne d lu
no ne d laltro:pche a.50.toccaria.$4\frac{6}{11}$.e a.20.$2\frac{9}{11}$.ch son.$7\frac{3}{11}$.e li.$2\frac{7}{11}$. verieno a eẽr di q̃llo ch
tene li pãni.iõ &c.ne anch dire cõmo alcuni che si fõdano a la mozza cõmo se doi fãno a.5.deta
che lun habia.4.laltro.3.e dicano torniamo in drieto.1.si che lun hara.2.laltro.3.che nõ e el
douere:pche colui butta el.$\frac{1}{3}$.de cioche a e colui butta el.$\frac{1}{4}$.siche nõ buttano a vn mõ.e cosi dico
no alcuni:che si buti.20.da ciascuna pte:luno hara nulla.laltro.30.e poi dicano che quel da
30.torra la$\frac{1}{2}$.de la posta che.5.pche ala.$\frac{1}{2}$.del gioco e li altri.5.diuiderãno in mezo fra loro: si
ch quel da.50.naria.$7\frac{1}{2}$.e laltro.$2\frac{1}{2}$.ch nõ serebbe iusto p la ragiõ gia ditta inãse &c. 51.

folio 197 de la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*
(Distinctio nona, Tractatus X, De straordinariis, [sect.] De militaribus)

Christelle Kunc et Fathi Drissi

3 Méthodes de Pacioli :

<u>Méthode 1</u>: il y a 11 manches au plus. Les gains sont proportionnels aux parts déjà gagnées 5/11 et 2/11
Ainsi 7/11 gagnent 10 ducas. Donc
5/11 gagne 5/7 de 10 ducas, soit 7 ducas et 1/7
2/11 gagne 2/7 de 10 ducas, soit 2 ducas et 6/7

<u>Méthode 2</u>: les deux camps peuvent faire 110 pts en tout. Quelle partie de 110 font 50? 5/11.
De même pour 2/11. Et on reprend le raisonnement précédent.

<u>Méthode 3</u> : Les deux camps ont obtenus à eux deux 70 pts, qui correspondent à 10 ducats.
En considérant qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité, combien touche celui qui en gagne 50? 20?

Nombre de Points	70	50	20
Nombre de Ducats	10		

<u>Remarques</u> :
- C'est un pb de ratio les gains G1 et G2 sont en 5:2 .
- Il s'agit de la « règle de compagnie ».
- Pas besoin du 11 dans la méthode 3. Les points acquis sont un bien.
  On néglige la suite possible , régie par le hasard. (contexte religieux...)

Tartaglia : (1499 – 1557)

« La risolutione di una tal questione è più presto giudiciale, che per ragione, tal che in qual si voglia modo la sarà risolta visi trovare da litigare […] ».

« La résolution d’une telle question est davantage d’ordre judiciaire que rationnel, et de quelque manière qu’on veuille la résoudre, on y trouvera sujet à litiges. »

« Sa règle ne me paraît ni bonne, ni belle, parce que s’il arrive qu’un parti ait 10 [points], et l’autre rien, et qu’on procédât selon sa règle, le premier devrait tirer le tout [toute la mise] et le second rien ; ce serait tout à fait déraisonnable que, pour 10 [points], il doive tirer le tout. »

La proposition de Tartaglia :

« Il faut voir en premier lieu quelle partie a chacun de tout le jeu ; s'il arrive que l'un ait 10, et l'autre 0, celui qui a 10 aura donc le sixième de tout le jeu ; et je dis par conséquent que dans ce cas, il devra avoir la sixième partie du nombre de ducats misé par chacun ; ainsi, s'ils mettent chacun 22 ducats, il devra avoir la sixième partie des dits ducats, ce qui fera 3 ducats 2/3 qui joints à ses propres 22 ducats feront 25 ducats 2/3, et l'autre camp devra tirer le reste, qui sera de 18 ducats 1/3. »

« Et si un camp avait 50 et l'autre 30, en retranchant 30 de 50, il restera 20, lesquels 20 se trouvent être le tiers de tout le jeu ; dont il [le premier camp] devra tirer (outre les siens) la tierce partie des ducats de l'autre camp, laquelle tierce partie s'élèvera à 7 ducats 1/3 qui joints aux siens feront 29 ducats 1/3 ; et l'autre camp devra tirer le reste qui sera égal à 14 ducats 2/3, et ce procédé ne conduira pas à un résultat inacceptable comme cela a lieu dans la manière de faire du frère Luca. »

Lorenzo Forestani (1585 – 1660)

Nous sommes en 1622, dans son traité *pratica d'arithmetica e geometria*

Forestani se plaît à enjoliver de détails pittoresques ses historiettes et qu'il mêle avec prolixité exposés et critiques. Il empruntera lui aussi l'exemple du jeu de balle à Pacioli, mais donnera plus de piquant en mettant en scène un gentilhomme âgé qui, retrouvant sa maison de campagne, et affectionnant beaucoup ce jeu, demande à deux jeunes paysans d'y jouer devant lui à cette condition que celui des deux qui aura gagné le premier huit jeux aura 4 ducats. Et voilà qu'ils perdent la balle alors que l'un a 5 jeux et l'autre 3. Plus loin, ce seront trois soldats, dont le jeu est interrompu, parce qu'il leur faut prendre la garde ; comment doivent-ils partager l'écu qu'ils avaient trouvé par hasard et qu'ils avaient convenu de donner à celui qui aurait gagné le premier 14 jeux ? (Notons que dans ces deux exemples, l'enjeu est un bien sur lequel les joueurs n'avaient, avant de jouer, aucun titre de possession.)

Il pense que : « *Diverses sont les opinions à ce sujet, que ce ne sont que des opinions, mais qu'en tout cas on ne peut accepter celle de Frère Luca*. »

Sa méthode : On calcule le nombre maximum de parties. On considère que celles qui sont gagnées sont des acquis, et on partage le reste des gains possibles en deux par égale pour la suite. Il y a une prise en compte du hasard, mais de manière équiprobable quels que soient les écarts entre les joueurs et le nombre de parties nécessaires pour chacun pour atteindre la fin du jeu.

Cardan : (1501– 1576)

Nous sommes à Milan au 16e siècle. Jérome Cardan, qui possède alors une chaire de mathématique réfute la méthode de Pacioli. Il parle d'«absurdités » dans l'ouvrage *Practica arithmetice* , écrit en 1539 paragraphe 5 du chapitre 68, dernier chapitre de l'ouvrage, intitulé peu charitablement

« De Erroribus Fratis Lucæ»

Il choisit des cas limites pour montrer que la méthode de Pacioli ne convient pas :

<u>Situation 1 :</u> Si chaque joueur mise 12 pièces, que le jeu est en 19 coups gagnants et que l'on est à 18 pts contre 9pts . Le premier peut gagner en 1 coup, et l'autre a besoin de 10 coups gagnant de suite pour y arriver.

Selon Pacioli, les gains sont de 18/27 de 24 et 9/27 de 24 , soit 16 pièces pour le premier et 8 pièces pour le second.

Il ne gagne que 4 pièces sur son adversaire. Le partage est *absurdissimum* !!!

<u>Situation2 :</u> Si chaque joueur mise 12 pièces, que le jeu est en 19 coups gagnants et que l'on est à 2 pts contre 0 pt.

Pour Pacioli, le 2e n'a rien, alors que le jeu vient à peine de commencer.

Cardan pense qu'il faut répartir les enjeux en fonction du nombre de parties qui restent à gagner par chaque joueur.
Il parle de « progressio» (ce qui reste à gagner avant le gain pour un joueur) , d'équité « aeque ratione.

La méthode de Cardan apporte des éléments de la théorie des jeux. Il perçoit que ce n'est pas le nombre parties initial qui est important, mais le nombre de parties qui restent à jouer.

Christelle Kunc et Fathi Drissi

Correspondances entre Pascal et Fermat

Nous sommes désormais en 1654. Pascal a été soumis à ce problème par l'intermédiaire du chevalier de Méré. Nous pouvons suivre à travers les échanges épistolaires des deux mathématiciens. D'autres illustres penseurs, tel Roberval ici sont également cités.

Lettre de Pascal à Fermat du 29 Juillet 1654 . Extrait1

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse: j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval: mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eusse connu cette proportion.

Ce problème sera désormais « le problème des partis » et il doit son nom à Pascal

Extrait2
Voici à peu près comment je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu [la mise totale est donc 64 pistoles] :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, les 32 qui me sont sûres ». Il aura donc 48 pistoles et l'autres 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une. Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi. » Ainsi, il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles. Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que,...

Pascal adopte ici une démarche récursive.
Supposons que le 1er joueur a gagné a points et le 2e a gagné b points lorsque la partie s'arrête, avec $a \geq b$
Désignons par $p(a; b)$ la probabilité que le premier joueur gagne la partie à ce stade.

Supposons que la partie se gagne dès qu'un joueur a 3 points : $p(3,0) = p(3,1) = p(3,2) = 1$ et $p(2,2) = \frac{1}{2}$

$p(2; 1) = \frac{1}{2}\mathrm{p}(3; 1) + \frac{1}{2}\mathrm{p}(2; 2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ Le premier joueur gagne alors $\frac{3}{4}$ de la mise totale.

$p(2; 0) = \frac{1}{2}\mathrm{p}(3; 0) + \frac{1}{2}\mathrm{p}(2; 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8}$ Le premier joueur gagne alors $\frac{7}{8}$ de la mise totale.

On peut généraliser la méthode en n coups gagnants par l'algorithme suivant :

a et b entiers inférieurs à n.
si $a = 5$, alors $p(a; b) = 1$ et si $b = 5$ alors $p(a; b) = 0$

$$\boldsymbol{p(a; b) = \frac{1}{2}\mathrm{p}(\mathrm{a} + 1; b) + \frac{1}{2}\mathrm{p}(\mathrm{a}; \mathrm{b} + 1)}$$

Il s'arrête quand toutes les issues ont été prises en compte.

Christelle Kunc et Fathi Drissi

Exemple : si la partie se joue en 5 points

$$p(3;2)=\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(4;2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(3;3)=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(5;2)+\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(4;3)\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(4;3)+\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(3;4)\right)$$

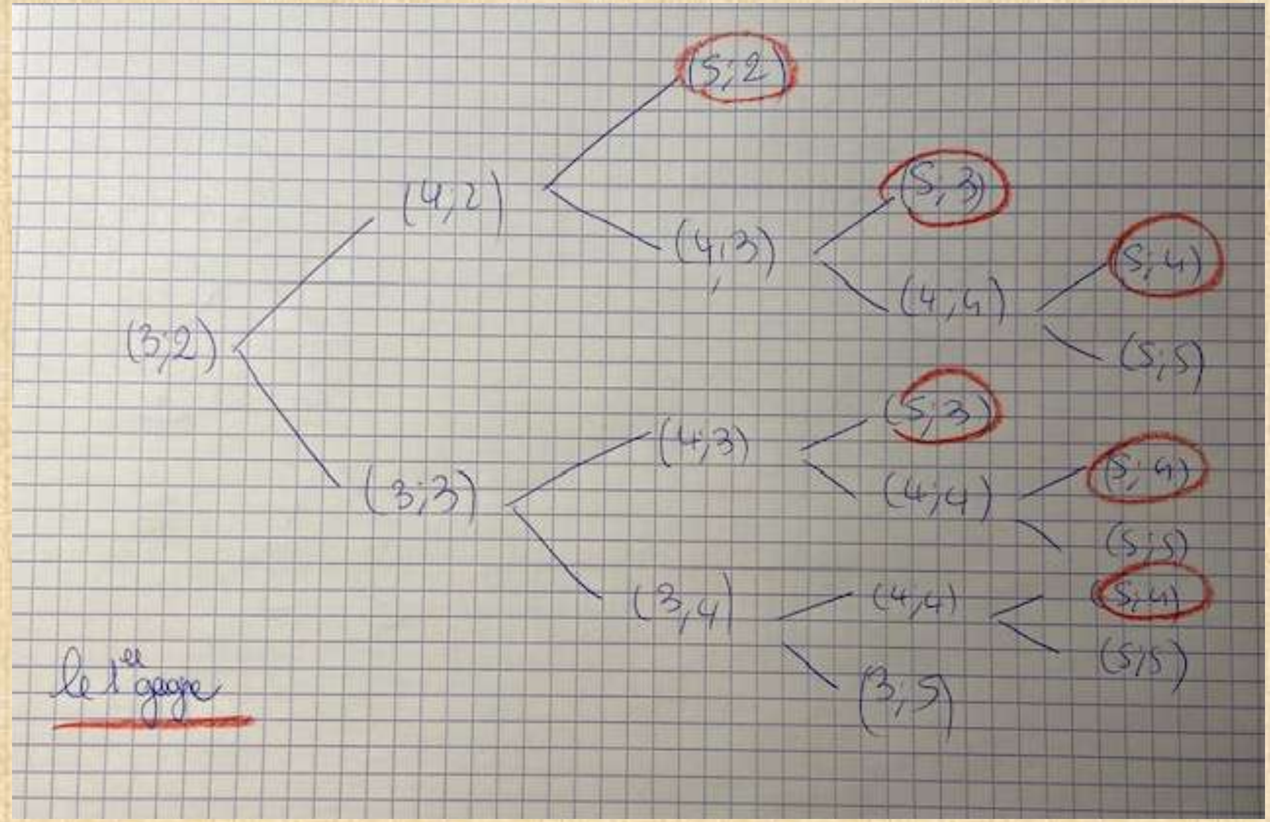
$$=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(5;3)+\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(4;4)\right)\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(5;3)+\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(4;4)\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(4;4)+\tfrac{1}{2}\mathrm{p}(3;5)\right)\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\right)\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\right)\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{3}{4}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}\times\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{4}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{8}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{8}+\tfrac{1}{8}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\times\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}=\tfrac{11}{16}$$



Lettre de Pascal à Fermat du 24 Août 1654

Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs: Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument. Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer: ils en peuvent avoir seize…

Avec Fermat, c'est le début du dénombrement.
Ici , il s'agit de déterminer toutes les chemins possibles de longueur 4

a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b
a	a	a	a	b	b	b	b	a	a	a	a	b	b	b	b
a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b	a	a	b	b
a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b	a	b
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

Christelle Kunc et Fathi Drissi

[...]

Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection : Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou à la vérité peut-être quatre; Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme. … Je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte: N'est-il pas vrai que si deux joueurs se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes …, le parti doit être, tel que nous avons dit …? Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainsi: N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition ? Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ? Car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque. Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières: donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré: donc il est juste aussi en l'autre cas. Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

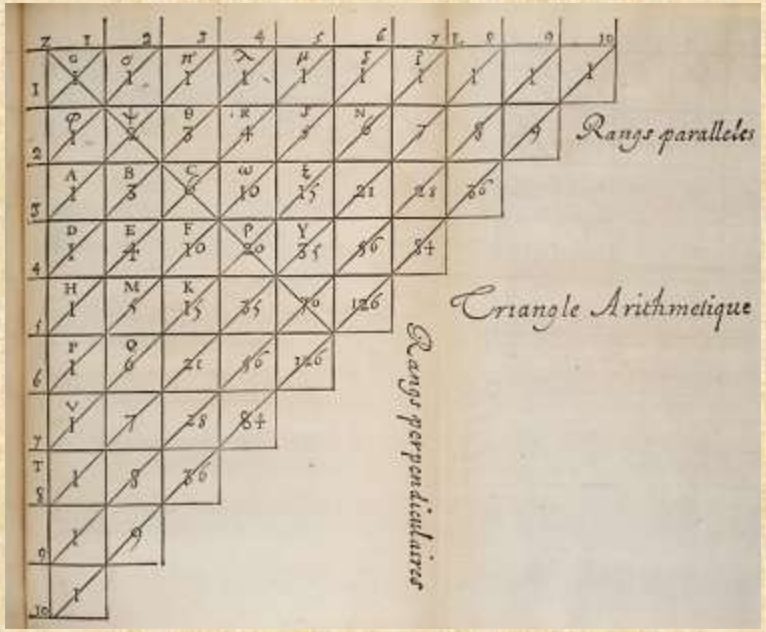
Christelle Kunc et Fathi Drissi

Roberval conteste le choix de l’espace probabilisé : comment compter des issues qui n’existeront peut-être pas!!

On retrouve dans ces échanges les obstacles épistémologiques de nos élèves sur la notion de hasard et le choix des lois de probabilité.

La résolution de ce problème est donc une construction humaine et progressive.

Pascal a traité ce problème dans le *Traité du triangle arithmétique* : "Usage du Triangle Arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux joueurs qui jouent en plusieurs parties" .
(le mot « parti » signifie ici « partage des enjeux », et « partie » pourrait être traduit par « manche »).



Huygens

Nous sommes en 1657. (**<u>Le terme de probabilité va être inventé par Huygens</u>**

Il écrit le premier traité sur le calcul des probabilités en 1657 De ratiociniis in ludo aleae (du calcul dans les jeux de hasard), il est édité en latin mais est rapidement traduit. Il restera l'ouvrage de référence jusqu'à celui de Jacob Bernoulli l'« Ars Conjectandi » (l'art de conjecturer).

C'est dans une lettre adressée à Frans Van Shooten, qui a traduit son traité en latin dans *Mathematische Oeffeningen*, qu'il attribue la paternité de la théorie des probabilités à Pascal et Fermat:

« Il faut savoir d'ailleurs qu'il y a un certain temps que quelques-uns des plus Célèbres Mathématiciens de toute la France se sont occupés de ce genre de calcul, afin que personne ne m'attribue l'honneur de la première Invention qui ne m'appartient pas. »

A la fin de son traité, il laisse cinq exercices à chercher … les différentes approches pour résoudre et prolonger ces problèmes par les mathématiciens de l'époque vont faire avancer le concept de probabilité en mathématiques.

Il est traduit en anglais en 1692.

PREMIER PROBLÈME.

A et B jouent l'un contre l'autre avec 2 dés à la condition suivante: A aura gagné s'il jette 6 points, B s'il en jette 7. A fera le premier un seul coup; ensuite B 2 coups l'un après l'autre; puis de nouveau A 2 coups, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'un ou l'autre ait gagné. On demande le rapport de la chance de A à celle de B. Réponse: comme 10355 est à 12276.

Église San Marco, Milan, Paolo Lomazzo (1571).

Christelle Kunc et Fathi Drissi

Merci de votre attention et à bientôt lors les prochains rendez vous de l’APMEP